

На правах рукописи

Афанасьев Владислав Сергеевич

**ПОВЫШЕНИЕ СТАБИЛЬНОСТИ ПРОДОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ
УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ**

01.02.04 Механика деформируемого твердого тела

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН).

Научный руководитель: **Баничук Николай Владимирович**
д.ф.-м.н., профессор,
главный научный сотрудник, заведующий
лабораторией механики и оптимизации
конструкций ИПМех РАН

Официальные
оппоненты: **Михайлов Игорь Ефимович**
д.ф.-м.н., профессор,
ведущий научный сотрудник, ФГУ
"Федеральный исследовательский центр
"Информатика и управление" Российской
академии наук" (ФИЦ ИУ РАН)

Братусь Александр Сергеевич
д.ф.-м.н., профессор,
профессор кафедры «Цифровые технологии
управления транспортными процессами»,
ЦТУТП,
ФГАОУ ВО «Российский университет
транспорта»

Ведущая организация: ФГБУН Институт проблем машиноведения
Российской академии наук

Защита состоится 29 сентября 2022 г. в 14 часов на заседании
диссертационного совета Д 002.240.01 на базе ИПМех РАН по адресу:
просп. Вернадского 101, корп. 1, Москва.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИПМех РАН
<http://www.ipmnet.ru/diss/diss/>

Автореферат разослан « ____ » _____ 2022 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 002.240.01
к.ф.-м.н.

Е.Я. Сысоева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Изучение нестационарных поперечных колебаний и устойчивости однородных термоупругих, ортотропных или слоистых продольно движущихся материалов является одним из приоритетных направлений в области механики движущихся деформируемых твердых тел. Примеры движущихся материалов можно видеть во многих технологических процессах. Это струны, ленты, ремни, мембраны, полотна и пластинчатые системы, которые широко используются в производстве или являются продукцией этого производства, например, при производстве бумаги. Важной частью изучения движения материалов является поиск критических скоростей и условий потери устойчивости, при которых движущиеся материалы теряют стабильность. Зачастую это приводит к порче продукции, поломкам оборудования, чрезмерным тратам материалов и крупным финансовым потерям.

При исследовании устойчивости и поиске критических значений удобно создавать математическую модель, которая значительно упрощает задачи, связанные с движением материала, при этом обеспечивая понимание исследуемых явлений, качественно и количественно. Движущиеся материалы, как правило, моделируются одномерными или двумерными элементами (струны, мембраны, балки, пластины), совершающими продольное движение и поперечные колебания. При этом движущиеся с высокой скоростью материалы представляется удобным рассматривать в Эйлеровой (стационарной) системе координат, когда материал движется, а граничные условия принимаются стационарными. Ключевым фактором при рассмотрении движения в Эйлеровой постановке является инерция движущегося материала, что приводит к необходимости учета инерционных воздействий, включая Кориолисовы силы.

Проблема изучения колебаний и устойчивости движущихся материалов с целью повышения стабильности движения является актуальной как в теоретическом плане, так и в прикладных аспектах, и соответствует проводимым в настоящее время фундаментальным и прикладным научным исследованиям в США, Канаде, Германии, Японии, Финляндии, Швеции и других странах. Динамические исследования проводились для движущихся полотен (материалов) в рамках одномерных (см., например, [1] Sack R.A. (1954), [2] Archibald F.R. and Emslie A.G. (1958), [3] Mote C.D. (1968), [4] Simpson A. (1973)) и двумерных ([5] Lin C.C. and Mote C.D. (1995), [6] Lin C.C. (1997), [7,8] Banichuk N., Jeronen J., Neittaanmäki P., Tuovinen T. (2010a,b)) моделей. Результаты, обобщающие многолетние исследования авторов в области механики движущихся материалов отражены в ряде монографий ([9] Marynowski K. (2008), [10] Banichuk N., Jeronen J., Neittaanmäki P., Saksa T., Tuovinen T. (2014), [11] Banichuk N., Barsuk A., Jeronen J., Tuovinen T., Neittaanmäki P. (2020)). Изучение потери устойчивости движущихся материалов сводилось ранее к рассмотрению идеализированных систем и не включало многие существенные факторы, такие как влияние структурной неоднородности материала, температурных факторов, а также неопределенностей, вызванных несовершенствами технологии (например, непостоянной скоростью) или начальными дефектами структуры.

Вопросы подавления возникающих колебаний движущихся материалов остаются пока недостаточно изученными, особенно это касается активного подавления колебаний и оптимизации управления процессом подавления колебаний. В данной связи можно отметить, например, работы по оптимальному проектированию упругих конструкций, оснащенных актюаторами ([12] Баничук Н.В., Братусь А.С. (1993)), исследования некоторых

вопросов гашения поперечных колебаний продольно движущихся панелей при нестационарных нагрузках ([13] Banichuk N.V., Ivanova S.Y. (2018)) и численное исследование подавления колебаний при движении струны и упругого полотна ([14,15] Mikhailov I.E., Suvorov I.A. (2019, 2021)).

Актуальность темы заключается в необходимости разработки и применения новых математических моделей, описывающих динамику поведения движущихся материалов и включающих в рассмотрение термомеханические нагрузки, анизотропию, структурную неоднородность, непостоянство транспортной скорости и активную систему подавления колебаний.

Целью работы является разработка методов повышения стабильности продольного движения материалов на основе определения безопасных диапазонов изменения параметров, влияющих на динамический процесс, определения оптимальной структуры материала, а также оптимальной программы приложения к системе управляющих воздействий, гасящих возникающие колебания.

При проведении исследований были поставлены и решены следующие **задачи**:

1. Моделирование механического поведения продольно движущегося материала при постоянной и непостоянной транспортной скорости с учетом термомеханических воздействий, ортотропных свойств материала, структурной неоднородности (слоистые материалы) и возможности приложения активного воздействия для подавления колебаний.
2. Задачи об устойчивости в стационарной постановке (рассматривается явление дивергенции) продольного движения с постоянной скоростью упругих материалов при термомеханических воздействиях:

- об устойчивости движущейся продольно термоупругой неразрезной панели;
 - об устойчивости продольно движущегося ортотропного термоупругого полотна;
 - об устойчивости нагретого полотна при движении по цилиндрической поверхности;
 - об устойчивости продольного движения вязкого материала
3. Задачи повышения стабильности продольного движения материалов с применением оптимизационных методов, основанных на активных и пассивных подходах:
- оптимальное подавление поперечных колебаний вращающихся упругих стержней;
 - о гашении колебаний быстро вращающихся дисков;
 - оптимизация структуры продольно движущегося слоистого полотна с целью повышения критической скорости потери устойчивости.

Научная новизна работы заключается

- в построении и развитии новых моделей для описания динамики и устойчивого поведения движущегося материала с учетом взаимодействия с тепловыми полями, учетом структурной неоднородности, ортотропных материалов, особенностей технологического процесса, а также в применении этих моделей для решения ряда конкретных задач;
- в определении на основе выведенных соотношений критических величин для скорости и температуры, приводящих к потере устойчивости движения (дивергенции) и анализе зависимости этих величин от определяющих параметров задачи;
- в применении методов оптимизации, разработанных для систем с распределенными параметрами и основанных на проведении анализа чувстви-

тельности основных характеристик подавления колебаний (целевых функционалов) к вариациям управляющих воздействий и выводе необходимых условий оптимальности;

- в разработке и применении алгоритма последовательной оптимизации для построения оптимальных программ управляющих воздействий, подавляющих поперечные колебания материала и стабилизирующих его движение;

- в разработке и применении на основе полученных эффективных характеристик для слоистого материала оптимизационного метода поиска нелокального экстремума для определения наилучшего распределения слоев, максимизирующего критическую скорость продольного движения и повышающего, тем самым, стабильность процесса;

- в создании и применении вычислительной программы на основе эволюционных методов оптимизации (генетического алгоритма).

Теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическая значимость работы заключается в междисциплинарном подходе к рассматриваемой проблеме, разработке и применении новых математических моделей, описывающих динамику взаимодействия движущихся материалов с учетом взаимодействия с тепловыми полями, учетом структурной неоднородности, ортотропных свойств, особенностей технологического процесса и включающих в рассмотрение активную систему подавления колебаний. Отметим также разработку и применение для решения поставленных задач эффективных оптимизационных методов, включающих эволюционные и генетические алгоритмы, как для последовательной оптимизации программы подавляющих воздействий, так и для поиска оптимальных внутренних структур, обеспечивающих стабильность движения.

Практическая значимость работы заключается в возможности получения качественных и количественных оценок для основных параметров, характеризующих движение материалов в реальных технологических процессах, и применения этих оценок для расширения диапазона стабильного функционирования и роста экономической эффективности производства.

Методы исследования:

- полуаналитический метод решения начально-краевых задач с частными производными с помощью представлений решений в рядах (метод Галёркина);
- метод малого параметра;
- методы оптимизации для систем с распределенными параметрами, основанные на анализе чувствительности целевых функционалов задачи к вариациям основных параметров системы (переменных проектирования, управляющих функций) и выводе необходимых условий экстремума;
- эволюционные оптимизационные методы поиска нелокального экстремума на основе генетического алгоритма.

Положения, выносимые на защиту:

- методы решения задач повышения стабильности продольного движения материалов с учетом взаимодействия с тепловыми полями, наличием структурной неоднородности, ортотропных свойств, особенностей технологического процесса, а также системы активного подавления колебаний;
- методика определения оптимальных подавляющих воздействий для гашения колебаний движущегося материала на заданном отрезке времени с помощью выполнения итерационного алгоритма;
- методика определения оптимальной слоистой структуры движущегося материала с помощью численного метода на основе генетического алгоритма.

Достоверность результатов исследования обеспечена:

- сравнением полученных с использованием развитых моделей результатов, учитывающих дополнительные факторы, с ранее полученными решениями на основе более простых, идеализированных моделей;
- применением многократно апробированных методов, таких как метод Галёркина, метод малого параметра, методы оптимизации для систем с распределенными параметрами, анализ чувствительности, эволюционные оптимизационные методы поиска нелокального экстремума на основе генетического алгоритма.

Апробация работы

Основные результаты работы были представлены на всероссийской и трех международных конференциях:

- 1) 6th International Conference on Engineering Optimization. EngOpt 2018, Лиссабон, Португалия, 17 сентября - 19 ноября 2018;
- 2) Всероссийская конференция молодых учёных-механиков, YSM-2020, г. Сочи, 3-13 сентября 2020;
- 3) XLVIII International Summer School-Conference “Advanced Problems in Mechanics” November 09-13, 2020, St. Petersburg, Russia, Санкт – Петербург, 9-13 ноября 2020;
- 4) Международный Научный Симпозиум по проблемам механики деформируемых тел, посвящённый 110-летию со дня рождения А.А.Ильюшина, Москва, 20-21 января 2021.

Научные исследования, отраженные в диссертационной работе, осуществлялись в рамках выполнения тематики Госзадания ИПМех РАН (номер госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) «Фундаментальные вопросы механики и оптимизации процессов деформирования, разрушения, износа и аддитивного роста элементов конструкций, работающих в нормальных и

экстремальных условиях», гранта РФФИ 17-19-01247 и грантов РФФИ: 17-08-00775, 20-08-00082а.

Публикации автора по теме диссертации

Основные результаты диссертации изложены в работах [1-10], изданных в периодических научных изданиях и сборниках материалов международных и всероссийских конференций. Все статьи из списка публикаций напечатаны в журналах, входящих в перечень ВАК РФ и/или индексируемых в Web of Science, Scopus.

Личный вклад автора

В работах [А1–А4, А6, А7] математические постановки задач были предложены научным руководителем Н.В. Баничуком, автор участвовал в выполнении необходимых математических выкладок, в том числе для примеров применения полуаналитического метода Галёркина, им проведены самостоятельно соответствующие расчеты и построены графики, результаты обсуждались совместно с соавторами статей. В работе [А5] постановка задачи и анализ результатов были проведены совместно с соавторами, автором самостоятельно написана вычислительная программа и проведены расчёты. В работах [А8–А10] автор принимал участие в обсуждении постановок и методах решения задач, расчеты для конкретных примеров были проведены им самостоятельно, анализ результатов проведен вместе с научным руководителем Н.В. Баничуком.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Полный объём работы составляет 142 страницы, включая 37 рисунков и одну таблицу. Список литературы содержит 120 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** представлен обзор современного состояния исследований в области механики движущихся материалов, сформулированы основные цели и задачи диссертационной работы, обоснованы актуальность, научная новизна, теоретическая и практическая значимость исследования. Также перечислены основные публикации по теме диссертации.

В **Главе 1** разработаны механические модели и выведены основные соотношения для исследования динамики движущихся материалов, которые учитывают взаимодействия с тепловыми полями, наличие ортотропных свойств материала, а также некоторые особенности технологических процессов. Приведены примеры применения этих моделей для расчета неустановившихся поперечных колебаний.

В разделе 1.1 представлены в безразмерной форме основные соотношения для продольно движущегося и совершающего поперечные колебания упругого полотна, подверженного термомеханическим нагрузкам, и предложен метод расчета неустановившихся термоупругих колебаний. Полотно моделируется упругой неразрезной панелью, движущейся с постоянной транспортной скоростью через систему роликовых опор (шарнирное опирание). Рассмотрение проводится в Эйлеровой системе координат и ограничивается одним пролетом. Уравнение поперечных колебаний движущегося с постоянной скоростью V_0 вдоль оси Ox и опертого в точках $x = -l$, $x = l$ (рис. 1) термоупругого неразрезного полотна (неразрезной панели) толщины h ($h \ll l$) записывается в виде

$$m \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + V_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \left(T_0 - \frac{Eh}{1-\nu} \varepsilon_0 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (1+\nu) \frac{\partial^2 \kappa_\theta}{\partial x^2} \right] + g(x, t), \quad (1)$$

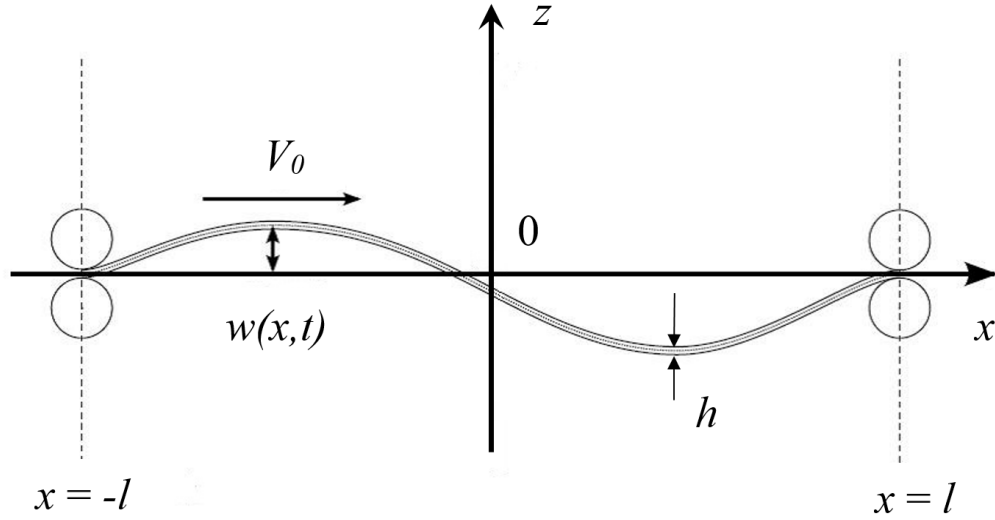


Рис. 1. Движущаяся неразрезная панель

где $(x, t) \in [-l \leq x \leq l] \times [0 \leq t < \infty)$, x и t – пространственная и временная переменные, m – масса, приходящаяся на единицу длины панели, $w = w(x, t)$ – поперечное перемещение, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ – изгибная жесткость, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, l – половина пролета панели. Выражение, записанное в левой части уравнения (1) в круглых скобках, представляет собой вторую материальную производную (полное ускорение), включая, соответственно, локальное, Кориолисово и центробежное ускорения. Выражение, записанное в правой части уравнения (1), включает восстанавливающую силу заданного натяжения T_0 , упругое сопротивление изгибу, температурные воздействия а также прикладываемое внешнее силовое воздействие $g(x, t)$. Обобщенные тепловые деформации задаются формулами

$$\varepsilon_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_0 \theta dz, \quad \kappa_0 = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_0 z \theta dz.$$

Здесь α_0 – коэффициент линейного теплового расширения, $\theta = \theta_a - \theta_0$ – температурное отклонение, где θ_0 – температура, при которой отсутствуют тепловые деформации, а θ_a – действительная температура материала панели (θ , θ_a , θ_0 измеряются в градусах Кельвина). В дальнейшем предполагается, что структура панели и распределение температур однородны по толщине панели, то есть $\alpha_0(z) = \text{const}$, $\theta(z) = \text{const}$, и, следовательно, $\varepsilon_0 = \alpha_0\theta$, $\kappa_0 = 0$. Вводя безразмерные переменные и обозначения

$$\tilde{x} = \frac{x}{l}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{w}{h}(l\tilde{x}, \tau\tilde{t}), \quad \tilde{g}(\tilde{x}, \tilde{t}) \equiv \frac{l}{T_0}g(l\tilde{x}, \tau\tilde{t}),$$

$$\alpha = \frac{l}{\tau} \left(\frac{m}{T_0} \right)^{1/2}, \quad \beta = \frac{D}{l^2 T_0}, \quad \nu_0 = V_0 \left(\frac{m}{T_0} \right)^{1/2}, \quad e = \frac{Eh\alpha_0\theta}{(1-\nu)T_0},$$

где l , h , τ – характерные параметры модели, и опуская в дальнейшем знак «тильда» у безразмерных величин, запишем уравнение колебаний движущегося материала (1) в безразмерной форме:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\alpha\nu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (\nu_0^2 + e - 1) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = g(x, t), \quad (2)$$

$$(x, t) \in \Omega \quad (-1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t < \infty).$$

при граничных условиях шарнирного опирания

$$w(-1, t) = 0, \quad w(1, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(-1, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(1, t) = 0 \quad (3)$$

и начальных условиях

$$w(x, 0) = g_1(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = g_2(x). \quad (4)$$

Здесь $g_1(x)$ и $g_2(x)$ – заданные при $-1 \leq x \leq 1$ начальное распределение поперечных перемещений и начальное распределение поперечных скоростей, соответственно.

Для решения начально-краевой задачи (2) – (4), описывающей неустановившиеся колебания в области Ω , применим метод Галёркина и представим искомое решение в виде ряда

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \Psi_n(x), \quad (5)$$

в котором функции формы $\Psi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}(x+1)\right)$, $x \in [-1, 1]$ удовлетворяют граничным условиям (3), а неизвестные функции времени $f_n(t)$ подлежат определению из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \alpha^2 A_{jn} \frac{d^2 f_n}{dt^2} + 2\alpha v_0 B_{jn} \frac{df_n}{dt} + [(v_0^2 + e - 1)C_{jn} + \beta D_{jn}] f_n \right\} - G_j(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (6)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} f_j(0) &= \frac{1}{l} \int_{-1}^1 \Psi_j(x) g_1(x) dx, \\ \frac{df_j}{dt}(0) &= \frac{1}{l} \int_{-1}^1 \Psi_j(x) g_2(x) dx, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

В качестве примеров рассмотрены случаи применения метода Галёркина с одной и с двумя функциями формы и получены аналитические выражения для описания нестационарных поперечных колебаний панели.

В разделе 1.2 рассматривается продольное движение с постоянной скоростью ортотропного материала, поддерживаемого системой роликовых опор, который моделируется тонкой неразрезной пластинкой из ортотропного термоупругого материала (рассматривается один пролет) в области $\Omega = \{-1 \leq x \leq 1, -b \leq y \leq b, -h/2 \leq z \leq h/2\}$, где длина пластины (пролета) $2l$, ширина $2b$ и толщина h – заданные параметры (рис. 2).

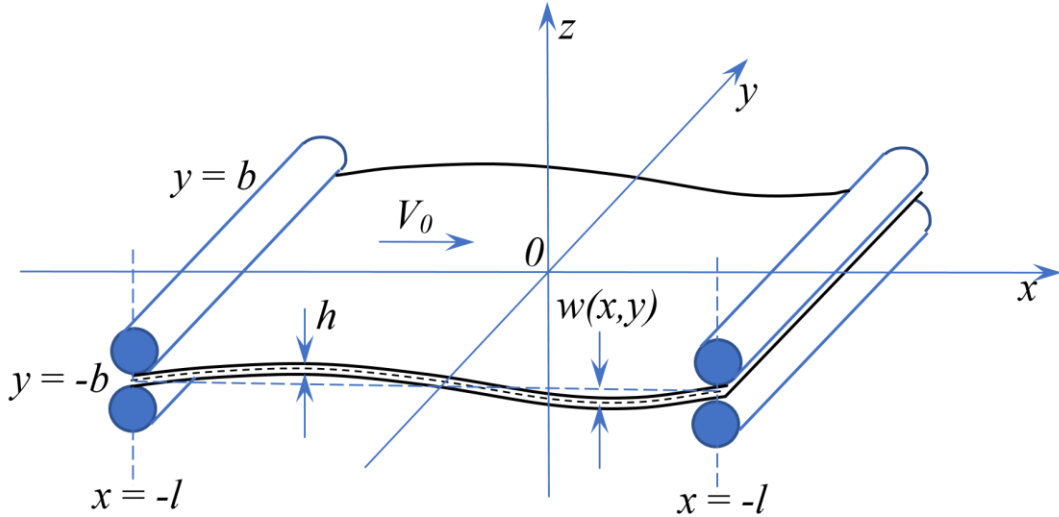


Рис. 2. Движущаяся неразрезная пластина

Учитывались тепловые деформации натяжения (ε_{10} , ε_{20}) и изгиба (κ_{10} , κ_{20}) движущейся пластины. Основное внимание уделено уравнению продольного движения и поперечным деформациям ортотропного термоупругого материала, которое записывается в виде

$$\begin{aligned}
 m \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + V_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) &= K_1 (\varepsilon_x^0 + \nu_2 \varepsilon_y^0 - \varepsilon_{10}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\
 + K_2 (\varepsilon_y^0 + \nu_1 \varepsilon_x^0 - \varepsilon_{20}) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2Gh \gamma_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \\
 - D_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \kappa_{10} \right) - D_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \kappa_{20} \right) - \\
 - 4D_k \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

где ε_x^0 , ε_y^0 , γ_{xy}^0 – начальные деформации в срединной (нейтральной) плоскости пластинки, и учитываются соотношения

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad K_2 = \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2}, \\
 \varepsilon_{10} &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} (\alpha_{10} + \nu_2 \alpha_{20}) \theta dz, \quad \varepsilon_{20} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} (\alpha_{20} + \nu_1 \alpha_{10}) \theta dz.
 \end{aligned}$$

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}, \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}, \quad D_k = \frac{Gh^3}{12},$$

$$\kappa_{10} = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} (\alpha_{10} + \nu_2 \alpha_{20}) \theta z dz, \quad \kappa_{20} = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} (\alpha_{20} + \nu_1 \alpha_{10}) \theta z dz.$$

Граничные условия для уравнения (8) в случае шарнирного опирания краев пластины при $x = \pm l$ ($-b \leq y \leq b$) и условия незакрепленных (свободных) краев при $y = \pm b$ ($-l \leq x \leq l$) при постоянном распределении температуры имеют вид

$$(w)_{x=\pm l} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=\pm l} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=\pm b} = 0, \quad \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \mu_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)_{y=\pm b} = 0,$$

$$\mu_1 = \nu_1, \quad \mu_2 = \nu_1 + \frac{4G}{E_2} (1 - \nu_1 \nu_2).$$

Раздел 1.3 посвящен изучению движения материала с непостоянной скоростью с учетом вклада составляющей гравитационного воздействия в продольное натяжение движущегося полотна (рис. 3).

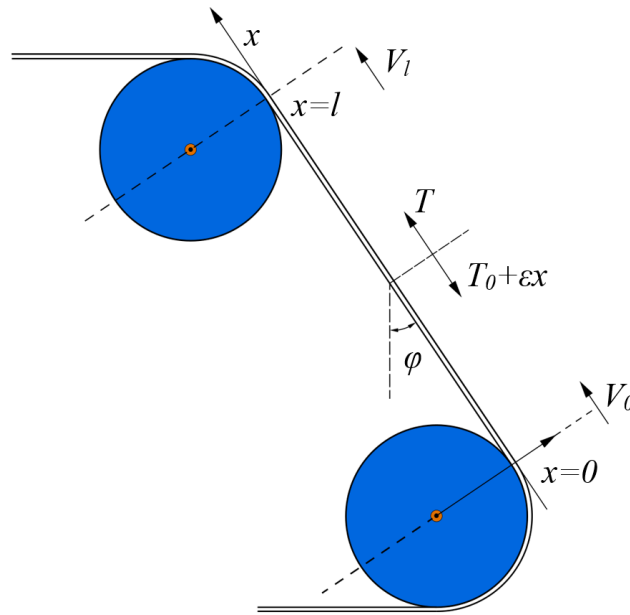


Рис. 3. Движение полотна под углом φ к вертикали

Материал моделируется неразрезной мембранной панелью. Предполагается, что соседние опоры расположены на разных уровнях по высоте относительно друг друга, что реализуется, например, в сушильной части бумагоделательной машины в соответствии с технологическими условиями производства. Осевое движение мембранной панели является ускоренным и происходит под действием заданного продольного натяжения и аксиальной составляющей гравитационного воздействия. С введением обозначений $V_0 + ax$, $V = V_0 = V(0)$, $V_l = V(l)$, $a = (V_l - V_0)/l$, $T = T_0 + \varepsilon x$, $T_0 = T(0)$, $C_0^2 = T_0/m$, $\varepsilon = mg \cos \varphi$, $T/m = C_0^2 + \varepsilon_0 x$, где g – ускорение свободного падения, m – погонная масса, а $V_0, V_l, a, T_0, \varepsilon, \varepsilon_0, C_0, l$ – заданные параметры, уравнение, описывающее движение панели, записывается в виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2(V_0 + ax) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + [(V_0 + ax)^2 - C_0^2 - \varepsilon_0 x] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (9)$$

с краевыми условиями $(w)_{x=0} = 0$, $(w)_{x=l} = 0$. Решения уравнения (9) разыскиваются в виде временных гармоник $w = w(x, t) = u(x) e^{st}$, где s – комплексная собственная частота, а $u(x)$ – амплитудная функция, определяемая из уравнения

$$s^2 u + 2(V_0 + ax) s \frac{du}{dx} + [(V_0 + ax)^2 - C_0^2 - \varepsilon_0 x] \frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \quad (10)$$

с краевыми условиями $u(0) = 0$, $u(l) = 0$. Показывается, что с помощью ряда преобразований уравнение (10) может быть сведено к гипергеометрическому уравнению Гаусса, решение которого можно представить в виде гипергеометрического ряда.

В **Главе 2** на основе применения моделей, предложенных в **Главе 1**,

решены некоторые задачи об устойчивости продольного движения материалов в стационарной постановке (задачи о дивергенции), определены факторы, влияющие на критические параметры устойчивости движения материала, и даны рекомендации по повышению стабильности.

В разделе 2.1 исследуется устойчивость движущейся продольно термоупругой неразрезной панели, испытывающей температурное воздействие, и определяется критическая температура, при которой реализуется статическая форма потери устойчивости (дивергенция) панели при заданных значениях осевого натяжения и транспортной скорости. В стационарном случае в уравнении (2) исключается временная зависимость, что приводит к решению задачи на собственные значения. Роль собственного значения при этом играет параметр $\lambda = (v_0^2 + e - 1)/\beta$. Это позволяет определить наименьшее значение критической температуры, вызывающей явление дивергенции

$$\theta^{div} = \frac{1 - \nu}{Eh\alpha_0} \left(T_0 + \frac{\pi^2 D}{4l^2} - mV_0^2 \right). \quad (11)$$

Также определяется и выражение для величины критической скорости движения панели в зависимости от температуры и других параметров задачи

$$V_0^{div} = \left[\frac{1}{m} \left(T_0 + \frac{\pi^2 D}{4l^2} - \frac{Eh\alpha_0\theta}{1 - \nu} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

Графики на рис. 4 иллюстрируют изменение критических величин скорости и температуры и показывают, что с увеличением параметра α_0 критические значения скорости и температуры, при которых возникает неустойчивость (дивергенция), снижаются.

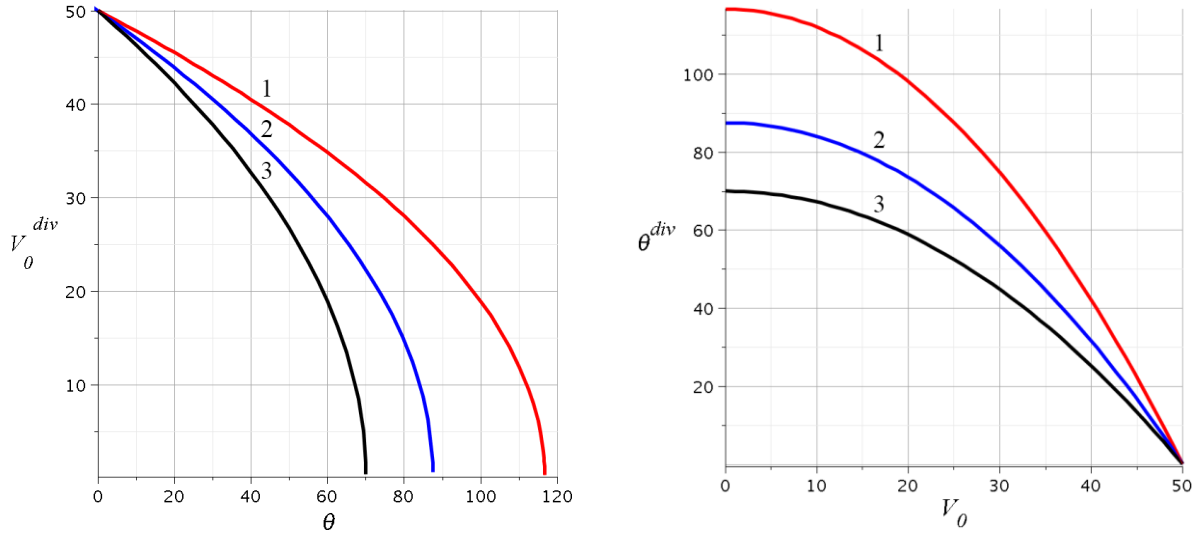


Рис. 4. Зависимость критической скорости V_0^{div} от температуры θ (слева) и зависимость критической температуры θ^{div} от скорости V_0 (справа) для значений параметра $\alpha_0 = 3 \cdot 10^{-6}$; $4 \cdot 10^{-6}$; $5 \cdot 10^{-6}$ (K^{-1}) (кривые 1, 2, 3).

Раздел 2.2 посвящен исследованию устойчивости термоупругой ортотропной панели (одномерной пластины) в форме стационарной дивергенции, когда все производные по времени в уравнении (8) обращаются в ноль. Считается, что $\theta \equiv \text{const}$, следовательно, $\varepsilon_{10} = (\alpha_{10} + \nu_2 \alpha_{20})\theta$, $\kappa_{10} = 0$, и из уравнения (8) следует краевая задача

$$\begin{aligned} \left[mV_0^2 - K_1(\varepsilon_x^0 - \varepsilon_{10}) \right] \frac{d^2 w}{dx^2} + D_1 \frac{d^4 w}{dx^4} = 0, \\ (w)_{x=\pm l} = 0, \quad \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=\pm l} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

которая сводится к задаче на собственные значения. Роль собственного значения играет параметр

$$\lambda = \left[mV_0^2 - K_1(\varepsilon_x^0 - \varepsilon_{10}) \right] / D_1.$$

Получены следующие выражения для критической скорости дивергенции с учетом нагрева и свойств ортотропного материала, а также для критической температуры:

$$\left(V_0^{div}\right)^2 = \frac{1}{m} \left[\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 D_1 + K_1 \left(\varepsilon_x^0 - (\alpha_{1\theta} + \nu_2 \alpha_{2\theta}) \theta\right) \right],$$

$$\theta^{div} = \frac{1}{(\alpha_{1\theta} + \nu_2 \alpha_{2\theta}) K_1} \left[\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 D_1 + K_1 \varepsilon_x^0 - m V_0^2 \right].$$

На рис. 5 приведены графики изменения критических величин скорости и температуры. Значения критической температуры и критической скорости дивергенции уменьшаются с увеличением значений параметра $\alpha_{2\theta}$, что ведет к снижению стабильности движения. Полагалось $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.2$, $\alpha_{1\theta} = 3 \cdot 10^{-6}$ (K^{-1}). Кривые с номером 1 построены для изотропного материала при $\nu_1 = \nu_2 = \nu = 0.3$, $\alpha_{1\theta} = \alpha_{2\theta} = \alpha_0 = 3 \cdot 10^{-6}$ (K^{-1}).

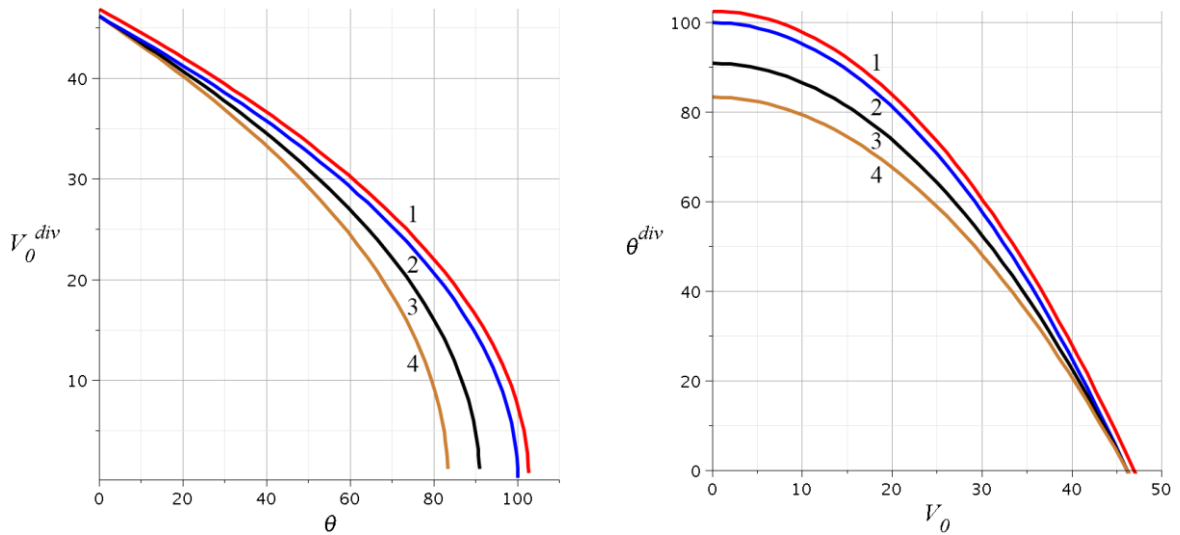


Рис. 5. Зависимость критической скорости дивергенции V_0^{div} от температуры θ (слева) и критической температуры дивергенции θ^{div} от скорости V_0 (справа) для значений параметра $\alpha_{2\theta} = 3 \cdot 10^{-5}$; $5 \cdot 10^{-6}$; $7 \cdot 10^{-6}$; $9 \cdot 10^{-6}$ (K^{-1}) (кривые 1, 2, 3, 4)

В разделе 2.3 рассматривается движение нагретого полотна вдоль гладкой цилиндрической поверхности (рис. 6).

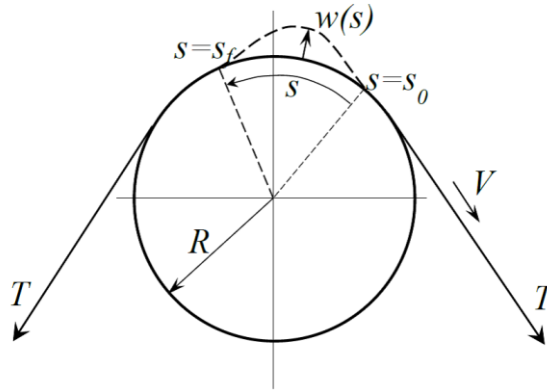


Рис. 6. Движение полотна по цилиндрической поверхности

Материал моделируется растягиваемой нагретой струной (одномерной мембраной). При действии центробежных сил и нагреве происходит «отлипание» материала и выпучивание в направлении, перпендикулярном цилиндрической поверхности (статическая форма потери устойчивости). Определена критическая скорость потери устойчивости для случая движения вокруг кругового цилиндра

$$(V_{cr})^2 = \frac{T}{m}(1 - k^2) - \frac{Eh\alpha_0\theta}{m}, \quad k = \frac{s_f}{\pi R},$$

а также критическая температура

$$\theta_{cr} = \frac{T(1 - k^2) - mV^2}{Eh\alpha_0}.$$

В разделе 2.4 рассматривается одномерное движение растягиваемой струи (волокна) из вязкого материала. С применением законов сохранения массы и количества движения показано, что стационарное течение характеризуется экспоненциальным уменьшением толщины струи и согласованным экспоненциальным возрастанием ее скорости. Выводятся уравнения для возмущений переменных состояния, зависящие от определяющего параметра (обратного числу Рейнольдса), характеризующего комбинированное влияние вязкости, плотности, начальной скорости и длины рассматри-

ваемого интервала. Для малых значений параметра первоначальные оценки позволяют предположить динамическую устойчивость одноосного движения материала.

Глава 3 посвящена применению оптимизационных подходов к вопросам повышения стабильности движения материалов. В ней также используются разработанные модели и учитывается наличие систем активного подавляющего воздействия на возникшие колебания. Построены оптимальные алгоритмы подавления колебаний для быстро вращающихся стержней и дисков. С помощью применения эволюционного численного метода поиска нелокального экстремума (генетический алгоритм) решена задача повышения стабильности движения слоистого полотна и найдено оптимальное распределение слоев.

В разделе 3.1 изучается процесс гашения поперечных колебаний вращающегося в горизонтальной плоскости упругого стержня, закрепленного на одном из его концов. Предполагается, что стержень вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью и совершает поперечные колебания в вертикальной плоскости (рис. 7), колебания предполагаются малыми по амплитуде.

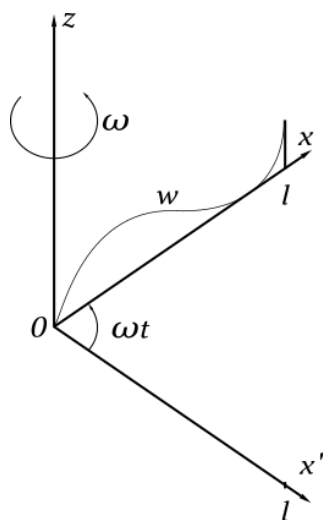


Рис. 7. Вращающийся упругий стержень

В Эйлеровой системе координат уравнение малых поперечных колебаний вращающегося упругого стержня имеет вид ($g(x, t)$ – внешнее механическое воздействие)

$$L(w) = w_{tt} - \alpha \left[(l^2 - x^2) w_x \right]_x + \beta w_{xxxx} = g(x, t) \quad (14)$$

при краевых и начальных условиях

$$(w)_{x=0} = (w_x)_{x=0} = 0, (w_{xx})_{x=l} = (w_{xxx})_{x=l} = 0, t \in [0, t_f], \quad (15)$$

$$(w)_{t=0} = g_1(x), (w_t)_{t=0} = g_2(x), x \in [0, l]. \quad (16)$$

Здесь α, β, l – заданные положительные постоянные, $g_1(x), g_2(x)$ – заданные функции, а t_f – время окончания рассматриваемого ниже процесса гашения колебаний. На функции g_1, g_2, g наложены ограничения $g_1 \in H^1(0, l), g, g_2 \in L^2(0, l)$. Функция $g(x, t)$ рассматривается в качестве управляющего воздействия, подавляющего колебания стержня. Качество процесса подавления колебаний оценивается значением функционала

$$J_g = \int_0^l \left(\alpha_1 w^2 + \alpha_2 w_t^2 \right)_{t=t_f} dx, \quad (17)$$

зависящего от перемещений $w(x, t_f)$ и скоростей $w_t(x, t_f)$ в конечный момент времени $t = t_f$. Параметры $\alpha_1 \geq 0$ и $\alpha_2 \geq 0$ считаются заданными, на подавляющее воздействие $g(x, t)$ налагается энергетическое ограничение в виде неравенства

$$J_\mu = \int_0^{t_f} \int_0^l g^2(x, t) dx dt \leq M_0, \quad (18)$$

где $M_0 > 0$ – заданная постоянная ограничения энергии. Подавление колебаний в оптимизационной постановке заключается в отыскании управля-

ющего воздействия $g(x, t)$, минимизирующего функционал качества (17) и удовлетворяющего энергетическому неравенству (18).

Предложен итерационный алгоритм оптимального подавления возникающих поперечных колебаний на конечном интервале времени, основанный на применении метода Галёркина и выводе необходимых условий оптимальности. На первом шаге алгоритма для некоторого заданного неоптимального управляющего воздействия $g(x, t)$ с применением метода Галёркина решаются начально-краевая задача (14) – (16) для функции $w(x, t)$ и краевая задача для введенной сопряженной переменной $v(x, t)$

$$L(v) \equiv v_{tt} - \alpha \left[(l^2 - x^2) v_x \right]_x + \beta v_{xxxx} = 0 \quad (19)$$

с краевыми условиями для $v(x, t)$, аналогичными (15), и условиями в конечный момент времени $t = t_f$

$$(v)_{t=t_f} = -2\alpha_2 (w_t)_{t=t_f}, \quad (v_t)_{t=t_f} = 2\alpha_1 (w)_{t=t_f}, \quad x \in [0, l]. \quad (20)$$

При этом с применением условий экстремума находится оптимальное демпфирующее воздействие $g(x, t)$

$$g(x, t) = \frac{1}{2\mu} v(x, t), \quad x \in [0, l], \quad t \in [0, t_f], \quad (21)$$

где величина μ определяется из условия

$$\mu^2 = \frac{1}{4M_0} \int_0^{t_f} \int_0^l v^2(x, t) dx dt. \quad (22)$$

Найденное на первом шаге алгоритма оптимальное подавляющее воздействие (21) учитывается на следующей итерации в правой части уравнения (14). На каждом шаге вычисляется значение квадратичного функционала (17), итерации повторяются до достижения желаемой точности.

Приведен пример, иллюстрирующий реализацию предложенного алгоритма и показывающий эффективность указанного метода подавления

колебаний. Полагалось $\alpha_2 = 0$, $w(x, t) = q_1(t)\Psi_1(x)$, $v(x, t) = s_1(t)\Psi_1(x)$,

$$\Psi_1(x) = 1 - \frac{4(l-x)}{3l} + \frac{(l-x)^4}{3l^4}, \quad l=1, \gamma_1=1, \alpha_1=1, \quad M_0=2, \quad g_1(x) = \Psi_1(x),$$

$g_2(x) = 0$, и что на первой итерации $g^{(1)} = 1$.

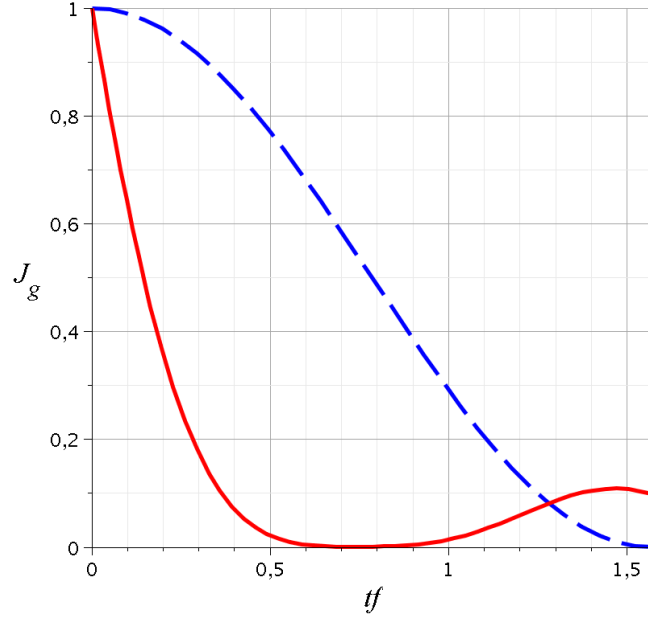


Рис. 8. Зависимость функционала J_g от параметра t_f

На рис. 8 представлена зависимость функционала J_g от параметра задачи t_f . При этом было выполнено только две итерации алгоритма и в разложении по Галеркину учитывался один член ряда, что позволило получить оптимальное воздействие $g^{(2)}$ и решение $q_1^{(2)}(t)$ аналитически (χ_1, χ_2, Q_1, Q_2 - постоянные, определяемые из условий в моменты времени $t = 0$ и $t = t_f$)

$$s_1^{(1)}(t) = Q_1 \sin(\sqrt{\gamma_1}t) + Q_2 \cos(\sqrt{\gamma_1}t), \quad t \in [0, t_f],$$

$$g^{(2)} = \frac{1}{2\mu} s_1^{(1)}(t) \Psi_1(x), \quad \mu^2 = \frac{1}{4M_0} \int_0^{t_f} (s_1^{(1)}(t))^2 dt,$$

$$q_1^{(2)}(t) = \chi_1 \sin(\sqrt{\gamma_1}t) + \chi_2 \cos(\sqrt{\gamma_1}t) - \frac{1}{4\mu\gamma_1} \left[(Q_1\sqrt{\gamma_1}t - Q_2) \cos(\sqrt{\gamma_1}t) - Q_2\sqrt{\gamma_1}t \sin(\sqrt{\gamma_1}t) \right].$$

Сплошная кривая соответствует оптимальному воздействию на стержень ($J_g^* = (J_g)_{g=g^*} = \alpha_1 (q_1^{(2)})_{t=t_f}^2$), а штриховая – случаю, когда подавляющего воздействия нет ($(J_g)_{g=0} = \alpha_1 \lambda_1^2 \cos^2(\sqrt{\gamma_1} t_f)$, ($\lambda_1 \approx l$)).

В разделе 3.2 рассматривается вращение тонкого упругого диска вокруг его оси. Предполагается, что диск жестко закреплен в центре и совершает малые поперечные колебания, описываемые в рамках мембранной модели (рис. 9).

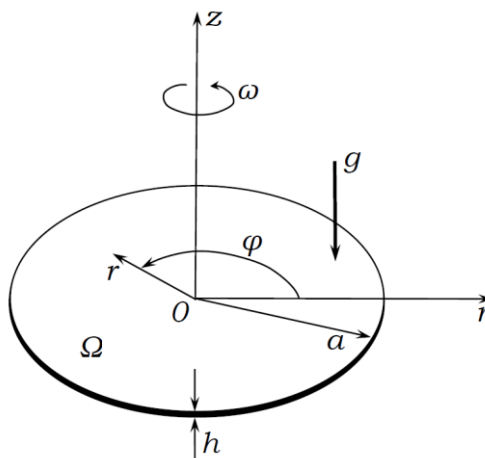


Рис. 9. Вращающийся диск

Для подавления колебаний гибкий диск подвергается внешним механическим воздействиям. Процесс демпфирования колебаний оценивается квадратичным энергетическим критерием и оптимизируется с применением современной теории оптимального управления. Выведены условия оптимальности, применяемые для подавления упругих колебаний на конечном интервале времени, и приведен разработанный итерационный алгоритм демпфирования колебаний, проиллюстрированный на примере аналитического определения стабилизирующего воздействия.

Раздел 3.3 посвящен оптимизации структуры продольно движущегося упругого слоистого полотна с целью максимизации критической скорости потери устойчивости. Предполагается, что полотно симметрично со-

ставлено по отношению к срединной плоскости из упругих слоев, характеризующихся некоторыми основными параметрами: массой на единицу площади, модулем Юнга, коэффициентом Пуассона и расстоянием от срединной плоскости, а суммарная толщина всех слоев H много меньше длины пролета l (рис. 10).

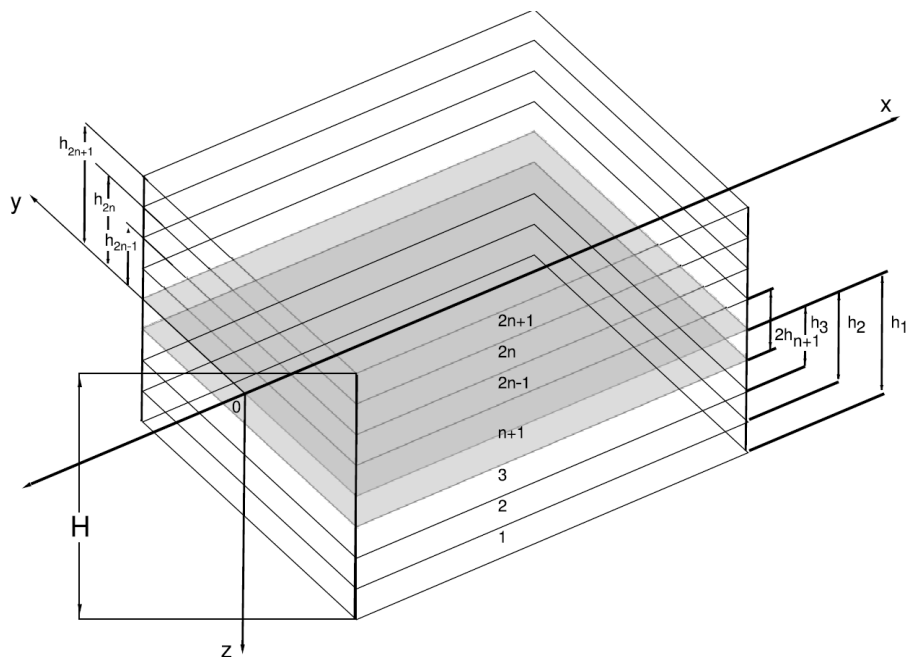


Рис. 10. Слоистое полотно

Выводятся аналитические выражения для эффективных характеристик полотна. В результате композитная структура может рассматриваться как эффективно изотропная и однородная пластина, для которой можно применять известные формулы, определяющие критическую скорость потери устойчивости. Критическая скорость дивергенции принимается в качестве оптимизируемого критерия качества. Формулируется изопериметрическая задача оптимизации, в которой роль изопериметрического условия играет полная масса пластины. Для численного решения сформулированной оптимизационной задачи максимизации критической скорости дивергенции за счет выбора наилучшего распределения слоев применяется эволюционный метод нелокальной оптимизации (генетический алгоритм). При этом

из фиксированного числа произвольно заданных распределений слоев, образующих множество допустимых решений (популяцию) на основе эволюционных механизмов (отбор, скрещивание, мутация, наследование, элитизм) итерационно (от поколения к поколению в популяции) определялось оптимальное решение задачи. В результате для заданного набора из трех материалов (см. таблицу), были определены оптимальные распределения этих материалов по толщине полотна для различных значений погонной массы (рис. 11 а-в).

Таблица. Характеристики материалов

Материал	E , (кГ/см ²)	ν	m , (г/м ²)
1	$14.0 \cdot 10^6$	0.460	450
2	$1.7 \cdot 10^6$	0.038	400
3	$9.36 \cdot 10^6$	0.017	410

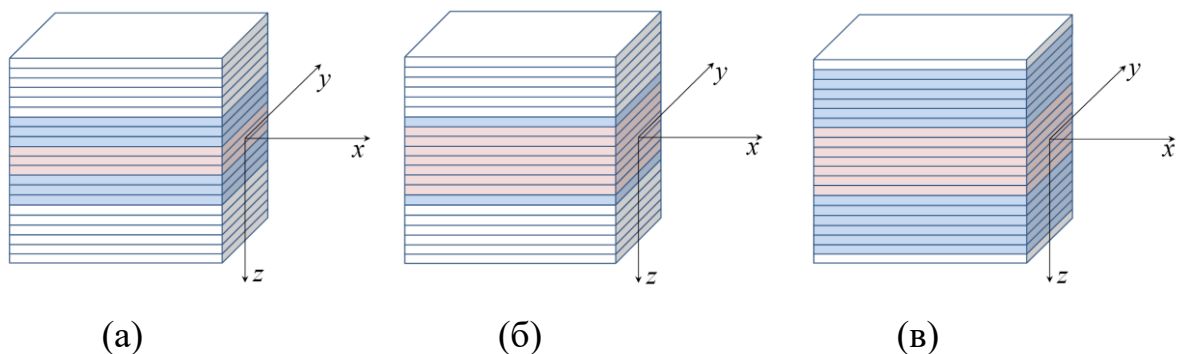


Рис. 11. Распределение материалов: (а) – без ограничения на массу;

(б) – при $M_0 = 430$ г/м²; (в) – при $M_0 = 410$ г/м²

На основе полученных оптимальных решений (рис. 11 а-в) можно сделать вывод, что для повышения устойчивости эффективно размещать более жесткий материал на верхнем и нижнем слоях полотна, а мягкие материалы – ближе к срединной поверхности.

Блок-схема генетического алгоритма представлена на рис. 12.



Рис. 12. Блок-схема генетического алгоритма

В **Заключении** сформулированы **основные результаты** диссертационной работы. Цель проведенного исследования заключалась в разработке методов повышения стабильности продольного движения материалов на основе определения безопасных диапазонов изменения параметров,

влияющих на динамический процесс, определения оптимальной структуры материала, а также оптимальной программы приложения к системе управляющих воздействий, гасящих возникающие колебания. В работе были получены следующие **основные результаты**:

1. На основе применения развитых механических моделей, решены задачи об устойчивости продольного движения материалов в стационарной постановке (задачи о дивергенции) при термомеханических воздействиях:
 - об устойчивости движущейся продольно термоупругой неразрезной панели;
 - об устойчивости продольно движущегося ортотропного термоупругого полотна;
 - об устойчивости нагретого полотна при движении по цилиндрической поверхности;
 - об устойчивости продольного движения вязкого материала.
2. Определены факторы, влияющие на критические параметры устойчивости движения материала (величину критической скорости и критической температуры), и даны рекомендации по повышению стабильности. Исследовано влияние свойств ортотропии и вязкости материала на стабильность движения.
3. В случае движения упругого полотна (неразрезной панели) с непостоянной транспортной скоростью исходное динамическое уравнение, описывающее движение панели, с помощью последовательных преобразований было сведено к гипергеометрическому уравнению Гаусса, решение которого представлено в виде гипергеометрического ряда.
4. Для гашения возникающих нестационарных колебаний движущихся упругих материалов предложен эффективный итерационный алгоритм построения оптимальной программы приложения подавляющих воздей-

ствий, основанный на методах оптимального управления системами с распределенными параметрами.

5. Представленный итерационный алгоритм применен для решения задач оптимального подавления поперечных колебаний быстро вращающихся упругих стержней и гибких дисков, для которых с помощью метода разложения в ряды по методу Галёркина было получено приближенное аналитическое решение.
6. С применением эволюционного оптимизационного метода поиска нелокального экстремума на основе разработанной вычислительной программы (генетический алгоритм) численно решена задача определения оптимальной слоистой структуры продольно движущегося полотна с целью повышения критической скорости потери устойчивости.

Публикации автора по теме диссертации:

- A1. Баничук Н. В., Иванова С. Ю., Афанасьев В. С. Нестационарные поперечные колебания движущегося с постоянной скоростью термоупругого полотна // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2017. — № 11. — С. 78–83. = Banichuk N. V., Ivanova S. Y., Afanas'ev V. S. Nonstationary transversal vibrations of thermoelastic web with a constant velocity motion // Russian Mathematics. — 2017. — Vol. 61, no. 11. — P. 69–73.
- A2. Баничук Н. В., Иванова С. Ю., Афанасьев В. С. Механика продольно движущегося и колеблющегося в поперечном направлении ортотропного термоупругого полотна // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2018. — № 7. — С.67–72. = Banichuk N. V., Ivanova S. Y., Afanas'ev V. S. Mechanics of axially moving and vibrating in transverse direction orthotropic thermoelastic web // Russian Mathematics. — 2018. — Vol. 62, no. 7. — P. 58–62.

- A3. Баничук Н. В., Афанасьев В. С., Шевченко А. В. О неустойчивости продольного движения вдоль цилиндрической поверхности термоупругого полотна, моделируемого растягиваемой нагретой струной // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2018. — № 2. — С.44–47. = Banichuk N. V., Afanas'ev V. S., Shevchenko A. V. Instability of a longitudinal movement along the cylindrical surface for a thermoelastic web simulated by stretched and heated string // Mechanics of Solids. — 2018. — Vol. 53, no. 2. — P. 156–158.
- A4. Banichuk N. V., Ivanova S. Y., Afanas'ev V. S. On axial constant acceleration movement and small transverse vibrations of membrane panel // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2019. — Vol. 40, no. 3. — P. 274–277.
- A5. Optimization of axially moving layered web / N. Banichuk, S. Ivanova, A. Sinitsin, V. Afanas'ev // EngOpt 2018 Proceedings of the 6th International Conference on Engineering Optimization. — Springer International Publishing, 2019. — P. 657–665.
- A6. Баничук Н. В., Афанасьев В. С., Иванова С. Ю. О статической бифуркации движущейся нагретой панели, обтекаемой идеальной жидкостью // Прикладная математика и механика. — 2020. — Т. 84, № 2. — С. 234–241. = Banichuk N. V., Afanas'ev V. S., Ivanova S. Y. On the static bifurcation of a moving heated panel streamlined by an ideal fluid // Mechanics of Solids. — 2020. — Vol. 55, no. 7. — P. 1071–1076.
- A7. Баничук Н. В., Иванова С. Ю., Афанасьев В. С. О поперечных колебаниях продольно движущихся панелей, описываемых гипергеометрическим уравнением // Проблемы прочности и пластичности. — 2020. — Т. 82, № 1. — С. 16–23.

- A8. Баничук Н. В., Иванова С. Ю., Афанасьев В. С. Об устойчивости одномерного движения вязкого материала // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2020. — № 10. — С. 86–90. = Banichuk N. V., Ivanova S. Y., Afanas'ev V. S. On stability of one-dimensional movement of viscous material // Russian Mathematics. — 2020. — Vol. 64, no. 10. — P. 79–82.
- A9. Афанасьев В. С., Баничук Н. В. Оптимальное подавление поперечных колебаний вращающихся упругих стержней // Проблемы прочности и пластичности. — 2021. — Т. 83, № 1. — С. 49–60.
- A10. Баничук Н. В., Иванова С. Ю., Афанасьев В. С. Гашение поперечных колебаний быстро вращающегося диска // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2022. — № 1. — С. 68–76. = Banichuk N. V., Ivanova S. Y., Afanas'ev V. S. Damping the transverse vibrations of a rapidly rotating disc // Mechanics of Solids. — 2022. — Vol. 57, no. 1. — P. 57–64.

Список литературы.

1. Sack R.A. Transverse oscillations in traveling strings // British J. Appl. Physics. 1954. V. 5, no. 6. P. 224-226. DOI:10.1088/0508-3443/5/6/307
2. Archibald F.R., Emslie A.G. The vibration of a string having a uniform motion along its length // ASME J. Appl. Mech. 1958. V. 25, no. 3. P. 347-348. DOI:10.1115/1.4011824
3. Mote C.D. Dynamic stability of an axially moving band // J. Franklin Institute. 1968. V. 285, no. 5. P. 329-346. DOI:10.1016/0016-0032(68)90482-1
4. Simpson A. Transverse modes and frequencies of beams translating between fixed end supports // J. Mechanical Engineering Science. 1973. V. 15, no. 3. P. 159-164. DOI:10.1243/JMES_JOUR_1973_015_031_02

5. Lin C.C., Mote C.D. Equilibrium displacement and stress distribution in a two-dimensional, axially moving web under transverse loading // ASME J. Appl. Mech. 1995. V. 62, no. 3. P. 772-779. DOI:10.1115/1.2897013
6. Lin C.C. Stability and vibration characteristics of axially moving plates // International Journal of Solids and Structures. 1997. V. 34, no. 24. P. 3179-3190. DOI:10.1016/S0020-7683(96)00181-3
7. Banichuk N., Jeronen J., Neittaanmäki P., Tuovinen T. Static instability analysis for travelling membranes and plates interacting with axially moving ideal fluid // J. Fluid Struc. 2010a. V. 26, no. 2. P. 274-291. DOI:10.1016/j.jfluidstructs.2009.09.006
8. Banichuk N, Jeronen J, Neittaanmäki P, Tuovinen T. On the instability of an axially moving elastic plate // International Journal of Solids and Structures. 2010b. V. 47, no. 1. P. 91-99. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2009.09.020
9. Marynowski K. Dynamics of the Axially Moving Orthotropic Web. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics V. 38, Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. KG. 2008. 154 p. ISBN:978-3-540-78988-8
10. Banichuk N., Jeronen J., Neittaanmäki P., Saksa T., Tuovinen T. Mechanics of Moving Materials. Cham: Springer, 2014. 253 p. DOI:10.1007/978-3-319-01745-7 ISBN:978-3-319-01744-0
11. Banichuk N., Barsuk A., Jeronen J., Tuovinen T., Neittaanmäki P. Stability of axially moving materials. Cham, Switzerland: Springer, 2020. 642 p. DOI:10.1007/978-3-030-23803-2 ISBN:978-3-030-23802-5
12. Баничук Н.В., Братусь А.С. Об оптимальном проектировании конструкций, оснащенных актюаторами. // Техническая кибернетика. 1993. № 1. С. 24-31.

13. Banichuk N. V., Ivanova S. Y. Optimal damping of perturbations of moving thermoelastic panel // *Doklady Physics*. 2018. V. 63. P. 13-17. DOI:10.1134/S1028335818010019
14. Mikhailov I.E., Suvorov I.A. Numerical damping of oscillations of a moving string // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. V. 1158, no. 3. 032031 7 p. DOI:1088/1742-6596/1158/3/032031
15. Михайлов И.Е., Суворов И.А. Численное решение задачи о гашении колебаний движущегося полотна // *Журнал вычислительной математики и математической физики* 2021. Т. 61. № 1. С. 150-161. DOI:10.31857/S004446692012011X

Афанасьев Владислав Сергеевич

Повышение стабильности продольного движения упругих материалов

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Подписано к печати .2022. Заказ № – 2022. Тираж 100 экз.

Отпечатано на ризографе Института проблем механики
им. А.Ю. Ишлинского РАН
119526, Москва, проспект Вернадского, д. 101, корп. 1