

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ ИМ. А.Ю. ИШЛИНСКОГО
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Бухалов Владислав Игоревич

**РАЗРАБОТКА МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСТАТОЧНЫХ
НАПРЯЖЕНИЙ ПО СПЕКЛ-ИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКИМ
ИЗМЕРЕНИЯМ В ОКРЕСТНОСТИ ЗОНДИРУЮЩЕГО ОТВЕРСТИЯ
С УЧЁТОМ ЭФФЕКТА ПЛАСТИЧНОСТИ**

01.02.04 Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических
наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор Попов А.Л.

Москва 2022

Оглавление

Введение.....	4
Глава 1. Метод зондирующего отверстия для трехмерной задачи Кирша в упругопластической постановке.....	21
§ 1.1. Аналитическое решение упругой двумерной задачи Кирша	21
§ 1.2. Численная модель решения двумерной задачи Кирша в упругой постановке.....	28
§ 1.3. Упругая задача Кирша в трехмерной постановке	35
§ 1.4. Численное решение трехмерной задачи Кирша	38
§ 1.5. Использование решения задачи Кирша при реализации метода отверстия.....	46
§ 1.6. Численная модель решения двумерной задачи Кирша в упругопластической постановке	48
Глава 2. Исследование остаточных напряжений с применением метода несквозного отверстия	52
§ 2.1. Постановка задачи для численного моделирования	52
§ 2.2. Результаты расчетов для упругой модели.....	53
§ 2.3. Результаты расчетов для упругопластической модели.....	55
§ 2.4. Экспресс-оценка напряжений по числу полос на интерферограмме с учетом эффекта пластичности	66
Глава 3. Теоретическое моделирование осесимметричных остаточных напряжений с учетом эффекта пластичности	70
§ 3.1. Упругопластическая задача Ламе. Определение упругопластической границы для цилиндра, нагруженного равномерным внешним давлением	70
§ 3.2. Задача Гадолина в упругой постановке.....	73
§ 3.3. Задача Гадолина в упругопластической постановке.....	76

§ 3.4. Определение деформаций и нормальных перемещений в упругопластической задаче Гадолина	79
Глава 4. Итерационная процедура решения упругопластических задач	83
§ 4.1. Аналитическое итерационное решение упругопластической задачи Ламе	83
§ 4.2. Численно-аналитическое итерационное решение упругопластической задачи Ламе.....	86
§ 4.3. К вопросу о сходимости итерационной процедуры решения на примере упругопластической задачи Ламе	90
§ 4.4. Аналитическое итерационное решение упругопластической задачи Галина.....	93
§ 4.5. Итерационное решение упругопластической задачи Галина полуаналитическим методом.....	95
§ 4.6. Реализация численного и полуаналитического решений упругопластической задачи Галина	97
§ 4.7. Применение комплексных потенциалов при итерационном решении задачи с учетом неравномерного распределения нагрузки по контуру отверстия.....	102
§ 4.8. Итерационное решение упругопластической задачи Кирша полуаналитическим методом.....	107
Глава 5. Экспериментальная диагностика напряжений с учетом эффекта пластичности в окрестности зондирующего отверстия.....	113
§ 5.1. Подготовка образцов	113
§ 5.2. Проявление осесимметричных и неосесимметричных напряжений с помощью метода отверстия	118
§ 5.3. Залечивание внутренних дефектов в поле сжимающих напряжений с использованием пластических свойств материалов.....	126

Заключение	135
Литература	137

Введение

Остаточными напряжениями называют напряжения, существующие в телах или конструкциях при отсутствии силовых, тепловых или других внешних воздействий [1]. Интерес к остаточным напряжениям связан с многочисленными примерами разрушений, причиной которых являются остаточные технологические напряжения. Как следствие, возникла и область науки - «остаточные технологические напряжения и способы их регулирования».

Данная область механики деформируемого твердого тела активно развивается и в настоящее время. Её основной задачей является разработка методов измерения остаточных напряжений с оценкой на основе этих измерений остаточного ресурса изделий и конструкций. Над созданием таких методов активно работают отечественные и зарубежные ученые [2-6].

Технологические напряжения возникают в процессе изготовления деталей и могут оставаться в них после изготовления. Такие напряжения принято подразделять на временные и остаточные. Временные напряжения появляются в деталях на стадии формования в результате действия внешних сил, тепло-, массо- и ионного обмена с окружающей средой и протекающих в материале физико-химических процессов (кристаллизация, отверждение), сопровождающихся изменением объема. Они исчезают после завершения указанных выше процессов, либо преобразуются в остаточные напряжения. Остаточные напряжения сохраняются в деталях после прекращения воздействия внешних факторов, зачастую, в течение всего срока эксплуатации деталей, улучшая или ухудшая их прочностные характеристики.

Одним из наиболее распространённых методов исследования остаточных напряжённо-деформированных состояний упругих тел является метод создания зондирующего отверстия. История этого метода берет начало с работы Матара 1932 года [7]. Для измерения перемещений вокруг отверстия, высверленного в напряженной пластине, им применялся механический экстензометр. В 1950 году с помощью тензометрических датчиков Соете и Ванкромбруг [8] смогли

улучшить точность таких измерений. В 1951 году Милбрадт [9] впервые использовал метод кольцевой проточки, что позволило уменьшить концентрацию напряжений в сравнении с методом высверливания отверстия. В 1956 году Келси [10] при использовании глухих (несквозных) отверстий вместо сквозных, продемонстрировал результаты изменения остаточных напряжений с учетом глубины отверстия.

Исследования по проблематике остаточных напряжений в этот период активно велись и в нашей стране такими учеными, как И.А. Биргер [1], А.Ю. Ишлинский [11], В.А. Винокуров [12], Н.О. Окерблом [13]. Современное представление метода отверстия для определения остаточных напряжений отражено в работах А.А. Поздеева [14], Г.Н. Чернышева [4], Л.М. Лобанова [15], А.А. Антонова [16], Р.В. Гольдштейна и А.Л. Попова [16, 17], И.А. Разумовского [18, 19], А.А. Апалькова [19], С.И. Елеонского, Нельсона [20], Кобаяши [21], Рендлера и Вигнесса [22], и др. Более подробно история развития метода отверстия изложена в работах А.Л. Попова и др. [23] и Г.С. Шаера [24].

К настоящему времени разработано несколько методик измерения микроперемещений и деформаций, возникающих при высверливании зондирующего отверстия в теле с остаточными напряжениями [1, 4, 5]. Одним из широко употребительных является – тензометрический метод [21, 25, 26]. В этом методе тензодатчиками измеряют в некоторых точках около отверстия деформации и по этим измерениям устанавливают остаточные напряжения, которые были в данной точке до создания отверстия [8]. К недостаткам тензометрического метода можно отнести дорогостоящую и трудоёмкую процедуру подготовки измерений, потребность в обновлении расходных материалов (тензорозеток) для каждого зондирующего отверстия, ненаглядность результатов измерений.

Не меньшую распространённость имеют бесконтактные измерения параметров возмущенного отверстием напряженно-деформированного состояния с помощью голографической и спекл-интерферометрии [4]. Основным преимуществом этих оптических методов является возможность регистрации всего поля микроперемещений в окрестности зондирующего отверстия с определением

главных направлений тензора деформаций и напряжений непосредственно по интерферограмме, отображающей расположение линий уровня тангенциальных, либо нормальных перемещений в окрестности отверстия. Именно поэтому на сегодняшний день метод электронной спекл-интерферометрии занимает лидирующее положение. С его помощью можно быстро и с высокой точностью проводить измерения перемещений возмущенного деформированного состояния в окрестности отверстия. В то же время, для определения напряжений, которые существовали в теле и породили деформации вблизи отверстия, необходимо знание связей этих напряжений с измеряемыми перемещениями. Поэтому, для создания методики измерения остаточных напряжений, которые встречаются на практике, потребовалось решение целого спектра задач двумерной и трехмерной теории упругости [4], на основе которых выпущены стандарты [27, 28].

С использованием электронной спекл-интерферометрии сотрудниками ИПМех РАН была создана портативная переносная система для измерения напряжений в упругих телах и конструкциях — ЛИМОН-ТВ [4], в которой объединены идеи и методы голографической интерферометрии, разработанные ранее для анализа остаточных напряжений, с преимуществами современной компьютерной техники. Для обработки записанных изображений с целью получения первичной разностной интерферограммы и улучшения ее контрастности специально была разработана программа LIMON-EXPRESS, которая также применяется для расчета остаточных напряжений.

Несмотря на большой объем исследований по установлению связей между регистрируемыми деформациями и перемещениями, разработанные методики не покрывали весь спектр возможных остаточных напряжений ввиду того, что само отверстие создаёт концентрацию напряжений, коэффициент которой по отношению к измеряемым напряжениям может достигать трёх единиц [29]. Это означает, что в важном для практики диапазоне остаточных напряжений, превышающих одну треть предела текучести, при сверлении отверстия могут создаваться напряжения возмущённого состояния, достигающие в некоторых

областях около отверстия этого предела, и где, следовательно, могут возникнуть пластические деформации. Перемещения поверхности тела, вызванные пластическими деформациями, при их регистрации и трактовке как упругие перемещения с последующим переводом в напряжения создают погрешности в измеряемых напряжениях, растущие с увеличением остаточных напряжений.

Поскольку пластичность делает материал более податливым, то при измерении высвобожденных деформаций с помощью обычных процедур, основанных на предположении, что материал является линейно-упругим, полученное остаточное напряжение будет завышенным. В таком случае, предположения о линейно-упругом поведении материала может привести к существенным ошибкам в результате.

Ошибка пластичности - известная проблема при измерении остаточных напряжений в сварных соединениях с применением техники сверления отверстий (E. Procter и E.M. Beaney [30], Nickola [31], M. Beghini [32], Y.C. Lin and C.P. Chou [33], J. Gibmeier и др. [34]). Данную проблему пытаются решить, варьируя глубиной и радиусом отверстия. Однако этим добиваются лишь некоторого увеличения диапазона корректного определения остаточных напряжений в рамках соотношений теории упругости. Вследствие этого, в [18] прямо вставлено ограничение по измеряемым уровням остаточных напряжений: они не должны превышать 0,4 от предела текучести материала исследуемого образца.

Распространение метода отверстия на высокие остаточные напряжения, превышающие обычный диапазон применимости упругой модели, применительно к методу диагностики с помощью тензорозеток, изучалось численно в работах M. Beghini, L. Bertini и C. Santus [35], D. Vangi и S Tellini [36], а в экспериментах с растягиваемыми образцами и на сварном соединении - у R. Moharami и I. Sattari-Far [37].

Оценки погрешностей измерений тензометрическим методом, возникающих вследствие неучета пластического эффекта при создании зондирующего отверстия, варьируются в районе 13÷18% [35, 37-39] при уровне исходного напряженного состояния до 0,9 от предела текучести материала образца. Встре-

чаются и меньшие значения погрешностей [40, 41], – в районе 3%, что объясняется незначительным превышением рассмотренного в этих работах расчётного значения исходного напряжения над половиной предела текучести материала образцов. В ряде работ отмечены существенно большие погрешности, достигающие до 32÷50% [36, 42-44] и даже до 60% [45]. Наибольшая погрешность вследствие неучёта эффекта пластичности отмечается для идеального упругопластического тела [37, 42]. Практически каждая из перечисленных работ содержит предложения по уточнению методики пересчета деформаций, измеренных тензометрическим методом, в значения исходных остаточных напряжений.

В теории идеальной пластичности решение упругопластических задач является основой как для фундаментальных исследований в механике деформируемого твердого тела, так и для прикладного применения в различных отраслях, где важна оценка и изучение напряженно-деформированного состояния (НДС) различных материалов, конструкций и сооружений.

На сегодняшний день, решения плоских упругопластических задач получены в ограниченном числе постановок. В частности, имеется аналитическое решение задачи Ламе [46-51] при различных постановках и представлении для решений в пластической зоне. Л.А. Галиным [52, 53] и В.В. Соколовским [54-57] построены решения для двумерных задач в упругопластической постановке идеально пластических тел с заранее неизвестными границами между упругой и пластической областями.

Сложность решения упругопластических задач теории идеальной пластичности связана с необходимостью совместного решения уравнений разного типа: эллиптического - в упругой зоне, гиперболического - в пластической и их сопряжения на заранее неизвестной, определяемой в процессе решения, границе раздела упругого и пластического состояний материала.

Впервые аналитическое решение характерной задачи такого типа - о распределении напряжений в окрестности кругового отверстия в пластине, находящейся в условиях плоского деформированного состояния при двухосном растяжении на бесконечности и условии пластичности Треска - Сен-Венана, было

получено Л.А. Галиным [58, 59]. Соответствующая математическая задача для упругой области с неизвестной границей была сведена к краевой задаче для бигармонического уравнения, которая при конформном отображении области с неизвестной границей на внешность круга преобразовывалась к аналитически решаемой задаче теории функций комплексного переменного. Аналогичный подход был применён Г.П. Черепановым для пластины с отверстием, находящейся в условиях плоского напряженного состояния [60, 61]. Выражения для деформаций в задаче Галина были получены в работе I.S. Tuba [62], а выражения для перемещений - в работе Н.И. Остросаблина [63]. Решение этой задачи при другом - экспоненциальном условии пластичности - построено Б.Д. Анниным [64]. Необходимо отметить, что аналитические решения, построенные в [58-65], справедливы, когда пластическая зона полностью охватывает отверстие. Результаты Л.А. Галина были расширены в работах О.С. Парасюка и Г.Н. Савина [66-68] при условии приложения к контуру кругового отверстия нормальных и касательных усилий, А.И. Кузнецовым [69] - в случае учета неоднородности материала. Задача о двухосном растяжении пластины с отверстием также рассмотрена Г.И. Быковцевым и Ю.Д. Цветковым [70]. А.В. Ковалев и А.Н. Спорыхин [71] рассмотрели случай для упруговязкопластического тела, М.А. Артемов [72] - пластину из упрочняющегося материала. Развитие решений подобных задач продолжается по сей день ([48, 73, 74] и во многих других работах), хотя их ареал по сочетанию нагрузок, обеспечивающих полный охват отверстия пластической зоной, довольно узок [48].

Случаи неполного охвата отверстия пластической зоной встречаются в несравненно большем числе вариантов двухосного нагружения пластины и при одноосевом нагружении, превышающем треть предела текучести её материала. В упругой постановке задача об одноосевом растяжении пластины с круговым отверстием была решена Г. Киршем [75] ещё в конце XIX века. Развитием её является решение трехмерной задачи Кирша, полученное Г.З. Шарафутдиновым [76]. Однако точное решение этой задачи в упругопластической постановке до сих пор не найдено. Качественный анализ данной задачи и результаты

экспериментального моделирования приведены в монографии А. Надаи [77]. Эффективный численный метод решения с нахождением границы между упругой и пластической областями описан в работе I.S. Tuba [78]. Приближенные подходы предложены в работах И.И. Фаерберга [79], П.И. Перлина [80, 81], М. Лейтмана и П. Вилладжио [82]. В первой из них предложена процедура приближенного решения, основанная на модели упруго-пластического изгиба кривого бруса, во второй и третьей задаётся ожидаемая форма упругопластической границы: в [80] - в форме участка эллипса, соосного отверстию, пересекающего его в точках выхода границы пластической зоны, в [79] - в форме участков окружностей с центрами внутри отверстия на оси с максимальной концентрацией напряжений, также пересекающих отверстие в точках выхода границы пластической зоны. Оба последних варианта дают приближённое описание реальной конфигурации границы между упругой и пластической областями лишь в начальной стадии развития пластической зоны.

Аналогично методу П.И. Перлина, В.С. Сажиним [83, 84] рассмотрена упругопластическая задача для отверстия, близкого к квадрату, когда на бесконечности задано условие всестороннего сжатия. Решение ряда задач при условии нескольких отверстий и особенностей их конфигураций в пластине были получены в работах Н.Н. Остросаблина [85], Б.Д. Аннина [48] и Л.М. Куршина [86].

Распространённым приближённым методом решения упругопластических задач для малых упругопластических деформаций является метод упругих решений А.А. Ильюшина [87, 88], который в дальнейшем был развит И.А. Биргером [89-91]. Суть метода заключается в последовательности линейных задач теории упругости, решения которых с увеличением порядкового номера сходятся к решению исходной задачи теории пластичности. Различаются модификации метода: в форме дополнительных нагрузок и в форме переменных параметров упругости. В первом случае появление пластических деформаций учитывается введением некоторых фиктивных дополнительных нагрузок, во втором, - изменением модуля упругости и коэффициента Пуассона, которые явля-

ются в каждом приближении функциями пространственных координат. Изменение положения границы пластической зоны в обоих модификациях метода упругих решений не отслеживается. В случае идеального упругопластического тела метод неприменим, так как количество итераций неограниченно возрастает.

Наиболее близким к предлагаемому в диссертации методу корректируемого положения упругопластической границы является метод возмущений (малого параметра), впервые использованный для решения упругопластических задач в работе А.П. Соколова [92], где было получено двухосное напряженное состояние для тонкой пластины с центральным круговым вырезом. Развитие этого метода представлено в монографии Д.Д. Ивлева и Л.В. Ершова [65], применённого для ряда задач упругопластического деформирования тел. С его помощью рассмотрены задачи о двухосном растяжении тонкой и толстой пластин с круговым и эллиптическим отверстиями, пространства со сферической выточкой и эллипсоидальной полостью, цилиндрической трубы с эксцентрично расположенным отверстием и конической трубы при постоянном внутреннем давлении.

Применительно к задаче о двухосном растяжении плоскости с отверстием Д.Д. Ивлевым и Л.В. Ершовым [93, 94] получены решения для плоского напряженного и плоского деформированного состояний, а тестирование метода проводилось в соответствии с точными решениями задач Л.А. Галина [59] и Г.П. Черепанова [61]. При определении границ пластической зоны получено, что для задачи Л.А. Галина удовлетворительная картина сходимости к точному решению наблюдается уже на первых двух, а для задачи Г. П. Черепанова - на первых четырех приближениях. Здесь же следует отметить работы В.В. Кузнецова [94, 96] в которых исследовалась граница зоны пластичности для случая равномерного растяжения плоскости с эллиптическим вырезом, находящегося под действием внутреннего давления. Однако, основным ограничением метода возмущения в описанном круге задач является требование малого отличия изучаемого напряженного состояния от осесимметричного.

К этим работам примыкает исследования В.А. Пальмова [97], где по контуру выреза приложено равномерное давление, а на бесконечности напряжения стремятся к нулю. Случай отверстия, подкрепленного упругим кольцом, рассмотрен в исследованиях В.И. Шейнина и Н.Н. Фотиева [98] и отдельно В.И. Шейнина [99] для контура отверстия, имеющего некоторые отклонения от окружности. У А.А. Каминского [100] решена задача о всестороннем растяжении упругой пластины с криволинейным отверстием, где рассмотрены случаи свободного и жестко закрепленного края отверстия, а З.Г. Тунгусковым [101] рассмотрена зависимость концентрации напряжений на контуре криволинейного отверстия (в виде гипертрохоиды).

Вводимый метод малого параметра, характеризующий геометрию тел, был применен Л.М. Качановым [102, 103] для исследования задач о кручение круглых стержней переменного диаметра и овальных труб. Метод линеаризации по параметру, был также распространен на исследования наличия шейки в образцах в работах А. А. Ильюшина [104], А.Ю. Ишлинского [105], А.М. Жукова [106] и J. R. Rice [107].

Метод малого параметра, характеризующий свойства пластического материала, рассмотрен в работах Л.А. Толоконникова [108, 109], Б.А. Друянова [110, 111] и Г. Каудерера [112].

В известной задаче Кирша [75] при заданном уровне внешнего напряжения, превышающем треть предела текучести, возникают пластические зоны, не охватывающие полностью контур отверстия. Это значительно осложняет ее решение по сравнению с ситуацией двухосевого напряженного состояния, при котором зона пластичности полностью охватывает отверстие (напомним, что для последнего случая был разработан аналитический подход, предложенный Л.А. Галиным в [59]). Однако решение Л.А. Галина неприменимо для задачи Кирша в упругопластической постановке. В настоящее время, решение данной задачи ограничивается приближенными подходами [78-80].

Из представленного выше обзора работ вытекает **актуальность** темы диссертации, состоящей в разработке методики определения высоких остаточных

напряжений по спекл-интерферометрическим измерениям в окрестности зондирующего отверстия с учётом эффекта пластичности. Основой этой методики, как и в диапазоне упругих напряжений, является решение задачи Кирша, но уже - в упругопластической постановке.

Целями диссертационной работы являются:

1. Расширение области применимости метода зондирующего отверстия для диагностики остаточных напряжений на диапазон высоких остаточных напряжений с учетом эффекта пластичности, возникающего как при создании зондирующего отверстия, так и в исходном напряженно-деформированном состоянии материала, содержащим зону пластичности.

2. Разработка итерационного метода решения упругопластических задач с уточняемым положением упругопластической границы.

Для достижения поставленных целей были сформулированы и решены следующие **задачи**:

1. Выполнена отработка численной процедуры решения трехмерной задачи о сквозном и несквозном отверстиях в упругой пластине с напряжениями на модельных задачах Кирша в двумерной и трехмерной постановках применительно к спекл-интерферометрическим измерениям;
2. Численное моделирование прямой и обратной задач определения остаточных напряжений с применением метода несквозного отверстия в упругой и упругопластических постановках;
3. Теоретическое моделирование осесимметричных остаточных напряжений с учетом эффекта пластичности на модельных задачах Ламе и Гадолина;
4. Построена итерационная процедура решения плоских упругопластических задач с уточняемым положением упругопластической границы. Выполнена отработка итерационной процедуры на решениях задач Ламе, Галина и Кирша;
5. Экспериментальная реализация диагностики напряжений с учетом эффекта пластичности в окрестности зондирующего отверстия;

6. Численное моделирование залечивания внутренних дефектов в поле сжимающих напряжений с использованием пластических свойств материалов.

Научная новизна работы состоит в следующем:

- Разработана методика диагностики остаточных напряжений с применением метода несквозного отверстия, учитывающая пластическое состояние материала, вызванное концентрацией напряжений в его окрестности и другими факторами и тем самым, снимающая ограничения на применение метода отверстия, обусловленные общепринятым гостированным учетом только упругих связей между напряжениями и регистрируемыми перемещениями и деформациями на поверхности исследуемого тела. В результате метод диагностики остаточных напряжений с помощью зондирующего отверстия обобщен на диапазон остаточных напряжений вплоть до уровней, приближающихся к пределу текучести материала исследуемого тела;
- Разработана итерационная процедура решения упругопластических задач с уточняемым положением упругопластической границы. Преимуществом данного метода является отсутствие ограничений для соотношения внешних нагрузок и его применимость к модели идеального упругопластического тела;
- Проведены численные эксперименты, показывающие возможность залечивания внутренних дефектов в поле сжимающих напряжений с использованием пластических свойств материалов.

Достоверность результатов исследования обеспечена сравнением разработанных численных подходов и полученных с их помощью результатов с известными аналитическими решениями упругопластических задач и результатами экспериментальных исследований.

Практическая значимость работы заключается в том, что ее результаты направлены на совершенствование широко используемого в технической диагностики метода зондирующего отверстия. Полученные решения упругопла-

стических задач позволяют оценить и устранить погрешности метода отверстия, обусловленные применением существующей упругой модели в актуальном для практики диапазоне высоких остаточных напряжений в теле вплоть до предела текучести его материала и, тем самым, произвести корректное распространение метода отверстия на диагностику остаточных напряжений в этом диапазоне. Определенное практическое значение имеют также результаты по возможности залечивания внутренних дефектов в поле сжимающих напряжений с использованием пластических свойств материалов.

Положения, выносимые на защиту:

1. Моделирование остаточных напряжений с учетом эффекта пластичности, вызванного концентрацией напряжений при создании зондирующего несквозного и сквозного отверстий, применительно к спекл-интерферометрическим измерениям нормальных перемещений поверхности образца;
2. Разработка методики измерения остаточных напряжений с помощью зондирующего отверстия при попадании отверстия в область с пластическим состоянием материала образца;
3. Построение итерационной процедуры решения упругопластических задач с уточняемым положением упругопластической границы и её обработка на модельных задачах Ламе и Галина и на задаче Кирша в упругопластических постановках;
4. Моделирование решений задач о залечивании внутренних дефектов в поле сжимающих напряжений с использованием пластических свойств материалов.

Апробация работы: Основные результаты работы были представлены на 5 международных и 2 всероссийских конференциях:

- 1) XLIII международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения», Москва, Россия, 18-20 апреля 2017;
- 2) XLIV международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения», Москва, Россия, 17-20 апреля 2018;

- 3) XII всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, Россия, 19-24 августа 2019;
- 4) Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», Воронеж, Москва 11-13 ноября 2019;
- 5) XLVI международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения», Москва, Россия, 15-17 апреля 2020;
- 6) 5-я международная научно-техническая конференция в дистанционном формате «Живучесть и конструкционное материаловедение (Жив КоМ)», Москва, Россия, 27-29 октября, 2020;
- 7) XIV всероссийская конференция по испытаниям и исследованиям свойств материалов «ТестМат», 25 марта, 2022.

Публикации автора по теме диссертации: Основные результаты диссертации изложены в работах [51, 113-124], изданных в периодических научных изданиях, сборниках материалов и тезисах докладов международных и всероссийских конференций. Четыре статьи [115, 120, 122, 123] из списка публикаций напечатаны в журналах, входящих в перечень ВАК РФ и/или индексируемых в Web of Science, Scopus.

Основные публикации:

1. Bukhalov V.I., Popov A.L., Chelyubeev D.A., Gdolin's Theory in Elastoplastic Formulation. *Mechanics of Solids*. - 2019. - v. 54, № 2. - pp. 356-363.
2. Bukhalov V.I., Popov A.L., Verification of the iterative procedure for solving the elastoplastic Kirsch problem on the Lamé problem. *Journal of Physics: Conference Series* (1614). - 2020. - pp. 1-6.
3. Бухалов В.И., Перельмутер М.Н., Попов А.Л., Залечивание внутренних дефектов в поле сжимающих напряжений с использованием пластических свойств материалов // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. - 2021. - № 2. - 36-43.

4. Bukhalov V.I., Verifying the Movable Elastoplastic Boundary Method by Using Galin's Problem. Journal of Physics: Conference Series (2095) 1. - 2021. - 012087. - pp. 1-9.

Личный вклад автора: В работах [115, 120, 122, 123] автору принадлежит построение численных и аналитических решений упругопластических задач, реализация итерационной процедуры решения плоских упругопластических задач с уточняемым положением упругопластической границы, исследовании её сходимости, верификация процедуры на модельных задачах, численное моделирование решений задач о залечивании внутренних дефектов в поле сжимающих напряжений с использованием пластических свойств материалов. Все необходимые расчёты были проведены автором самостоятельно. Постановка задач и анализ полученных результатов проводились совместно с научным руководителем - А.Л. Поповым.

Структура и объем работы: Диссертационная работа состоит из Введения, пяти глав, Заключения и списка литературы. Полный объём работы составляет 149 страниц, включая 47 рисунков. Список литературы содержит 143 наименования.

Во введении представлен обзор литературы, посвященной исследованиям, тематика которых относится к данной диссертации. Представлены существующие методы исследования остаточных напряжений методом отверстия, приведены оценки погрешностей, возникающие при высоких уровнях остаточных напряжений, ограничения и методы решения упругопластических задач, а также сформулированы основные цели и задачи диссертационной работы, обоснованы актуальность и научная новизна исследования.

В первой главе даётся общее представление о методе зондирующего отверстия, которое используется при исследовании остаточных напряжений. Первоначально это представление основывалось на решении задачи Кирша. Рассмотрено аналитическое решение задачи Кирша в двумерной и трехмерной постановках. Полученные результаты аналитического решения представлены в сравнении с численным моделированием, которое использовалось далее для

диагностики остаточных напряжений с помощью несквозного зондирующего отверстия. За основу методики определения остаточных напряжений принята зависимость нормальных перемещений поверхности тела в области зондирующего отверстия от величины остаточных напряжений, которая используется при экспериментальном бесконтактном методе регистрации этих перемещений с помощью спекл-интерферометрии.

Во второй главе рассмотрено численное моделирование проявления остаточных напряжений при несквозном отверстии. Проведено сравнение результатов решения соответствующих трехмерных задач теории упругости и упругой пластичности для нормальных перемещений поверхности при характерных значениях действующего напряжения и глубины зондирующего отверстия. Сделаны выводы о связях нормального перемещения с напряжениями при учете эффекта пластичности.

В третьей главе рассмотрено аналитическое исследование осесимметричных напряженно-деформированных состояний в образцах цилиндрической формы, подверженных заданным напряжениям в своей плоскости, либо полученных посадкой с натягом упругого кольца на диск. При определенных параметрах нагружения в таких образцах возникают кольцевые пластические области. На модельных задачах Ламе и Гадолина в упругопластической постановке рассмотрено образование таких областей и их влияние на параметры внутреннего напряженного состояния. На основе решения этих задач были спроектированы образцы с заданным уровнем напряжений для экспериментальных исследований.

В четвертой главе рассмотрена процедура решения упругопластических задач с помощью итерационной процедуры, которая состоит в явном аналитическом представлении для напряжений в пластической области и итерационной процедуры численного решения в упругой области при заранее неизвестной границе пластической зоны. Форма упругопластической границы определяется сшивкой решений в упругой и пластической областях по условиям непрерыв-

ности напряжений. На каждом шаге итерационной процедуры происходит уточнение положения границы между упругой и пластическими областями.

Данная процедура отрабатывается на решениях модельных задач. Первая из них рассмотрена упругопластическая задача Ламе для цилиндра, нагруженного равномерным внешним давлением, превышающем половину предела текучести материала цилиндра. Сходимость итерационного метода показана в сравнении с известным аналитическим решением данной задачи в упругопластической постановке. Здесь же приведен и численный расчет упругопластической задачи Ламе с использованием итерационного решения.

Второй тестовой задачей послужила задача Л.А. Галина о двухосном растяжении пластины с отверстием при условии полного охвата отверстия пластической зоной. Показана сходимость результатов итерационной полуаналитической процедуры по сближению границы упругопластической зоны к её точному положению из аналитического решения упругопластической задачи Галина. Рассмотрено также получение результатов по определению границы между упругой и пластической зонами с помощью приближенного метода возмущений.

При выполнении первого приближения итерационной процедуры граница пластической области часто оказывается нагруженной неравномерным давлением. Приведен один из таких вариантов распределения нагрузки по контуру отверстия, при котором нормальное давление меняется по тригонометрическому закону. Решение здесь получено с помощью методов комплексных потенциалов.

Приведена также численно-аналитическая процедура решения упругопластической задачи Кирша методом уточнения границы пластической зоны. На конкретном примере показана сходимость результатов итерационной полуаналитической процедуры к численному решению упругопластической задачи Кирша.

В пятой главе рассмотрена подготовка и проведение экспериментов по проверке и использованию упругопластической модели в методе отверстия. В

качестве экспериментальных образцов были сконструированы и изготовлены образцы с заданными уровнями и распределением остаточных напряжений, которые были получены с помощью температурной посадки стальных колец на диски.

Были созданы две группы таких образцов. В первой группе уровень контактного давления обеспечивал упругое состояние вкладыша на уровне 0,9 от предела текучести вкладыша. Во второй группе образцов создаваемое контактное давление достигало предела текучести вкладыша.

Изложены результаты экспериментальных исследований для образцов обеих типов. Проведено их сопоставление с результатами численного решения соответствующих упругопластических задач. Выполнена оценка погрешности упругой модели в таких задачах. Также рассмотрены примеры залечивания внутренних дефектов в упругопластическом поле сжимающих напряжений, возникающих в материале.

В заключении приведены основные результаты работы.

Формулы и рисунки нумеруются внутри каждого параграфа.

Глава 1. Метод зондирующего отверстия для трехмерной задачи Кирша в упругопластической постановке

В этой главе рассмотрена методическая сторона, лежащего в основе диагностики остаточных напряжений с помощью зондирующего отверстия, решения двумерной и трехмерной задач Кирша в упругой и упругопластической постановках.

§ 1.1. Аналитическое решение упругой двумерной задачи Кирша

1.1.1. Решение в напряжениях

Рассмотрим неограниченную пластину с небольшим круговым отверстием радиуса R , находящуюся под действием растягивающих сил P_1 и P_2 в направлении осей Ox и Oy соответственно, приложенных на больших расстояниях от отверстия (Рис. 1.1.1). Такая постановка обобщает задачу Кирша на два направления действия нагрузки.

Решение задачи по определению напряжений в такой пластине выпишем следуя [50]. Нагрузки считаются такими, что вся пластина находится в упругом состоянии. В дальнейшем эта постановка будет использована и для обобщения на случай образования упругопластической зоны.

Мысленно выделим из этой пластины кольцо достаточно большого внешнего радиуса b ($b \gg R$). Напряжения в области $r \geq b$ фактически будут такими же, как и в пластине без отверстия, т.е.:

$$\sigma_x = P_1, \sigma_y = P_2, \tau_{xy} = 0 \quad (1.1.1)$$

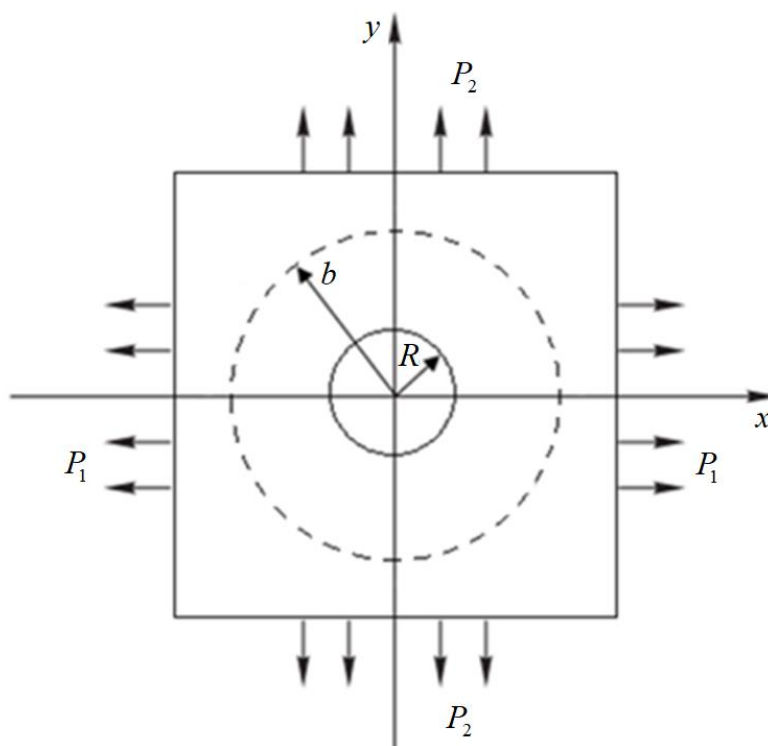


Рис. 1.1.1 – Обобщающий случай постановки задачи Кирша на два направления нагрузки, действующей на пластину с отверстием

Переходя к полярным координатам, получим:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= P_1 \cos^2 \theta + P_2 \sin^2 \theta = \frac{P_1 + P_2}{2} + \left(\frac{P_1 - P_2}{2} \right) \cos 2\theta \\
 \sigma_\theta &= P_2 \cos^2 \theta + P_1 \sin^2 \theta = \frac{P_1 + P_2}{2} + \left(\frac{P_2 - P_1}{2} \right) \cos 2\theta \\
 \tau_{r\theta} &= - \left(\frac{P_1 - P_2}{2} \right) \sin 2\theta
 \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Эти напряжения будем рассматривать как внешнюю нагрузку для кольца, состоящую из двух частей. Первая часть соответствует равномерно распределенной нагрузке P_1 в радиальном направлении. Напряжения в произвольной точке кольца от этой нагрузки находятся из решения задачи Ламе [50]:

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(1)} &= \frac{P_1 + P_2}{2} \frac{b^2}{b^2 - R^2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \\
\sigma_\theta^{(1)} &= \frac{P_1 + P_2}{2} \frac{b^2}{b^2 - R^2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \\
\tau_{r\theta}^{(1)} &= 0
\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Учитывая, что $b \gg R$, получим:

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(1)} &= \frac{P_1 + P_2}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \\
\sigma_\theta^{(1)} &= \frac{P_1 + P_2}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \\
\tau_{r\theta}^{(1)} &= 0
\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Вторая часть нагрузки:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \left(\frac{P_1 - P_2}{2} \right) \cos 2\theta \\
\sigma_\theta &= \left(\frac{P_2 - P_1}{2} \right) \cos 2\theta \\
\tau_{r\theta} &= - \left(\frac{P_1 - P_2}{2} \right) \sin 2\theta
\end{aligned} \tag{1.1.5}$$

Эта нагрузка меняется по окружности по тригонометрическому закону и создает напряжения, которые можно получить с помощью функции напряжений подобного вида:

$$\varphi = f(r) \cos 2\theta \tag{1.1.6}$$

Подставляя это выражение в бигармоническое уравнение относительно функции напряжений φ :

$$\Delta \Delta \varphi = 0 \tag{1.1.7}$$

приходим к дифференциальному уравнению типа Эйлера для определения $f(r)$:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{4}{r^2} f \right) = 0 \quad (1.1.8)$$

Решение последнего уравнения ищется в виде

$$f = r^\eta \quad (1.1.9)$$

Подстановка его в (1.1.8) приводит к характеристическому уравнению:

$$\eta(\eta^2 - 4)(\eta - 4) = 0, \quad (1.1.10)$$

корни которого соответственно равны:

$$\eta_1 = 0, \quad \eta_2 = 4, \quad \eta_3 = -2, \quad \eta_4 = 0 \quad (1.1.11)$$

Следовательно, общее решение уравнения (1.1.8) может быть записано в виде:

$$f = C_1 r^2 + \frac{C_2}{r^2} + C_3 r^4 + C_4 \quad (1.1.12)$$

Подставляя его в формулу для φ (1.1.6), получим:

$$\varphi = \left(C_1 r^2 + \frac{C_2}{r^2} + C_3 r^4 + C_4 \right) \cos 2\theta \quad (1.1.13)$$

Выражения для напряжений через функцию φ :

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

Откуда:

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(2)} &= -\left(2C_1 + \frac{6C_2}{r^4} + \frac{4C_4}{r^2}\right)\cos 2\theta \\
\sigma_\theta^{(2)} &= \left(2C_1 + 12C_3r^2 + \frac{6C_2}{r^4}\right)\cos 2\theta \\
\tau_{r\theta}^{(2)} &= \left(2C_1 + 6C_3r^2 - \frac{6C_2}{r^4} - \frac{2C_4}{r^2}\right)\sin 2\theta
\end{aligned} \tag{1.1.15}$$

Постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4 определяются из условий на наружном контуре кольца ($r = b$) (1.1.5) и из условия, что край отверстия ($r = R$) свободен от внешних нагрузок. Эти условия дают:

$$\begin{aligned}
2C_1 + \frac{6C_2}{b^4} + \frac{4C_4}{b^2} &= \frac{P_2 - P_1}{2} \\
2C_1 + 6C_3b^2 - \frac{6C_2}{b^4} - \frac{2C_4}{b^2} &= \frac{P_2 - P_1}{2} \\
2C_1 + \frac{6C_2}{R^4} + \frac{4C_4}{R^2} &= 0 \\
2C_1 + 6C_3R^2 - \frac{6C_2}{R^4} - \frac{2C_4}{R^2} &= 0
\end{aligned} \tag{1.1.16}$$

Принимая в них $b \rightarrow \infty$, получим:

$$C_1 = \frac{P_2 - P_1}{4}, C_2 = \frac{R^4}{4}(P_2 - P_1), C_3 = 0, C_4 = \frac{R^4}{2}(P_1 - P_2) \tag{1.1.17}$$

Окончательные выражения для напряжений в пластине с круговым отверстием:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \sigma_r^{(1)} + \sigma_r^{(2)} = \frac{P_1 + P_2}{2}\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{P_1 - P_2}{2}\left(1 + \frac{3R^4}{r^4} - \frac{4R^2}{r^2}\right)\cos 2\theta \\
\sigma_\theta &= \sigma_\theta^{(1)} + \sigma_\theta^{(2)} = \frac{P_1 + P_2}{2}\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{P_1 - P_2}{2}\left(1 + \frac{3R^4}{r^4}\right)\cos 2\theta \\
\tau_{r\theta} &= \tau_{r\theta}^{(1)} + \tau_{r\theta}^{(2)} = -\frac{P_1 - P_2}{2}\left(1 + \frac{2R^2}{r^2} - \frac{3R^4}{r^4}\right)\sin 2\theta
\end{aligned} \tag{1.1.18}$$

Напряженное состояние на контуре отверстия:

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_\theta = P_1 + P_2 - 2(P_1 - P_2)\cos 2\theta \quad (1.1.19)$$

Экстремальные значения окружного напряжения σ_θ достигаются в точках контура, соответствующих значениям полярного угла $\theta = 0$: $\sigma_\theta = 3P_2 - P_1$, и $\theta = \pm\pi/2$: $\sigma_\theta = 3P_1 - P_2$.

Рассмотрим частный случай, когда $P_2 = 0$. Выражения для напряжений принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{P_1}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} + \left(1 + \frac{3R^4}{r^4} - \frac{4R^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{P_1}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right) \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{P_1}{2} \left(1 + \frac{2R^2}{r^2} - \frac{3R^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

В такой записи выражения для напряжений совпадает с решением классической задачи Кирша [75] для случая растяжении пластины в одном направлении.

На краю отверстия при $r = R$:

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_\theta = P_1(1 - 2\cos 2\theta) \quad (1.1.21)$$

Экстремальные значения $\sigma_\theta = -P_1$ и $\sigma_\theta = 3P_1$ достигаются, соответственно, при $\theta = 0$ и $\theta = \pm\pi/2$. Это означает, что при $P_1 > \sigma_Y/3$ окружное напряжение в точках $\theta = \pm\pi/2$ будет достигать предела текучести σ_Y с образованием пластических зон вблизи этих точек.

Полученные выражения для напряжений (1.1.18), (1.1.20) не описывают решения в пластической зоне; они справедливы только при $P_1 < \sigma_Y/3$.

1.1.2. Связь напряжений с перемещениями поверхности пластины

Информационным параметром для диагностики напряжений в теле, как уже отмечалось, является нормальное перемещение его поверхности. Чтобы определить это перемещение через известные выражения (1.1.18) или (1.1.20) для напряжений, выпишем сначала выражения деформаций через напряжения в цилиндрических координатах, следующие из обобщенного закона Гука [125]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_z + \sigma_\theta)] \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \nu(\sigma_z + \sigma_r)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)]\end{aligned}\tag{1.1.22}$$

где E - модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона, z - координата, перпендикулярная лицевым плоскостям пластины, с началом в её средней плоскости.

По условию задачи Кирша принимается, что $\sigma_z = 0$ по всему объёму пластины. Тогда из (1.1.20) следует

$$\sigma_r + \sigma_\theta = P_1 \left(1 - 2 \frac{R^2}{r^2} \cos 2\theta \right),\tag{1.1.23}$$

откуда

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta) = -\nu \frac{P_1}{E} \left(1 - 2 \frac{R^2}{r^2} \cos 2\theta \right),\tag{1.1.24}$$

Как известно [125], деформация ε_z связана с нормальным перемещением w соотношением:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}\tag{1.1.25}$$

Откуда нормальное перемещение w на поверхности пластины при $z = H / 2$ (где H - толщина пластины), находится путем интегрирования вы-

ражения (1.1.23) по z с учетом, что $w = 0$ при $z = 0$. В результате, на поверхности пластины получим:

$$w = -\frac{\nu H P_1}{2 E} \left(1 - 2 \frac{R^2}{r^2} \cos 2\theta \right) \quad (1.1.26)$$

Этот результат совпадает с выражением для нормального перемещения поверхности пластины, полученным в [126] из решения задачи Кирша в трехмерной постановке. Следует отметить, что сумма напряжений (1.1.23) пропорциональна полученному значению для перемещения w . Соответственно, на контуре отверстия нормальное перемещение поверхности пропорционально окружному напряжению. Это указывает на возможность простого пересчета измеренных значений перемещений на контуре отверстия в значения окружного напряжения.

§ 1.2. Численная модель решения двумерной задачи Кирша в упругой постановке

Реализация численного решения выполнялась в ANSYS Workbench версии 2019 R3 с использованием расчетного модуля Static Structural.

На Рис. 1.2.1 показана схема двумерной расчетной модели для численной реализации задачи Кирша (в плоскости Oxy). В силу симметрии взята четверть пластины со сторонами $a = b$, отверстием радиуса R , граничные условия: при $y = 0$ левая сторона пластины закреплена относительно оси Ox , при $x = 0$ нижняя сторона пластины закреплена относительно оси Oy , растягивающее внешнее усилие P_1 приложено к правой стороне пластины по направлению оси Ox .

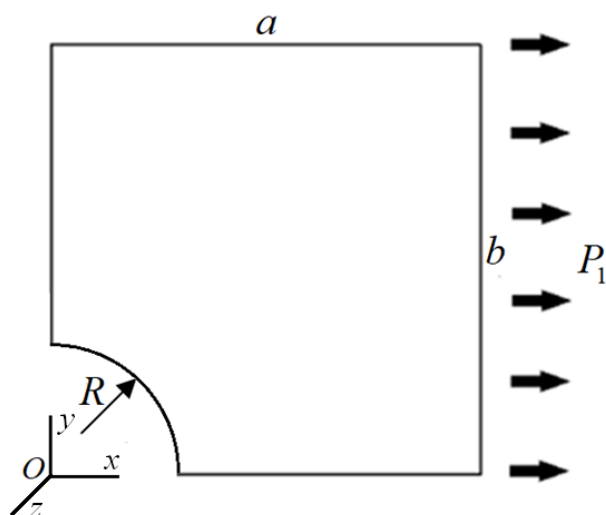


Рис. 1.2.1 – Расчетная схема для численной реализации двумерной задачи Кирша

Для параметров модели пластины зададим: $a = b = 50$ мм, $R = 1$ мм. При построении вычислительной сетки были выбраны четырехугольные квадратичные элементы со сгущением в окрестности отверстия. На Рис. 1.2.2 показан пример такой расчетной сетки с 249942 элементов.

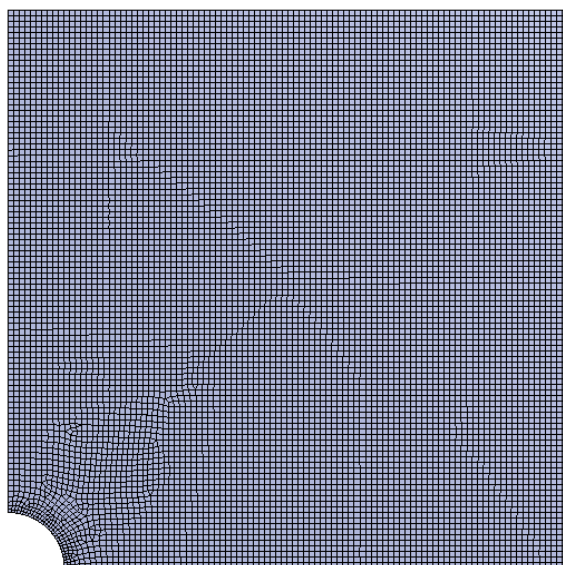
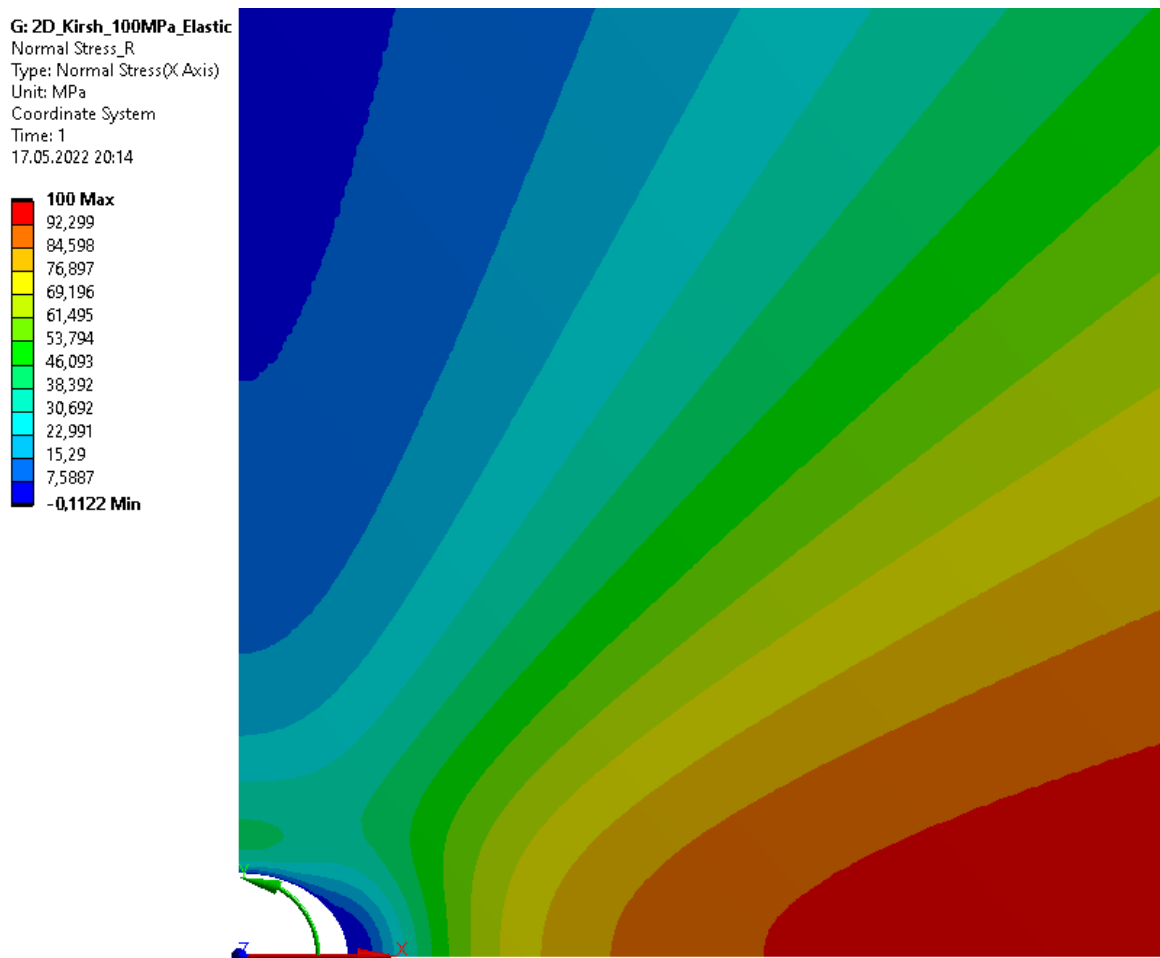


Рис. 1.2.2 – Расчетная сеточная модель для двумерной задачи Кирша

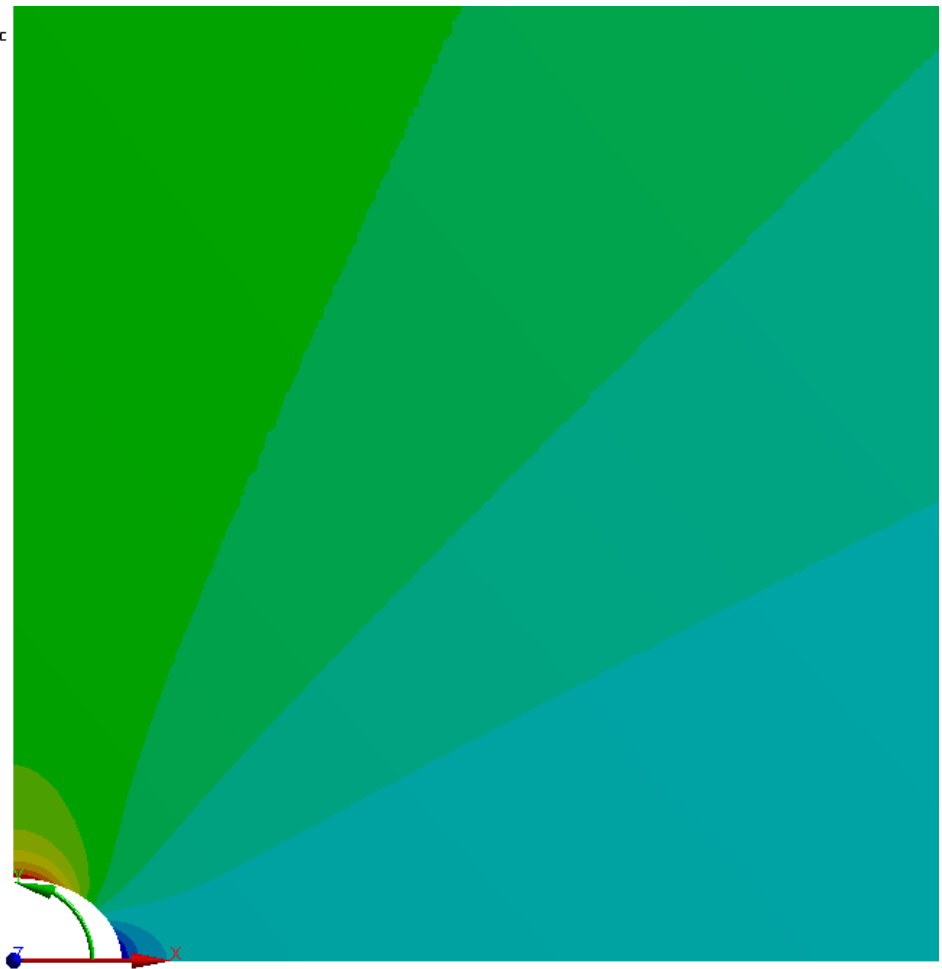
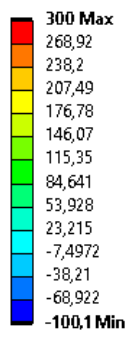
При использовании изотропного материала задаются следующие свойства: E - модуль Юнга и ν - коэффициент Пуассона. Переходя к численному примеру, зададим такой материал со следующими характеристиками: $E = 210$ ГПа, $\nu = 0,3$. Для внешней растягивающей нагрузки примем $P_1 = 100$ МПа.

На Рис. 1.2.3 (а, б, в) показаны результаты численного решения для области размером 10×10 мм от центра отверстия.

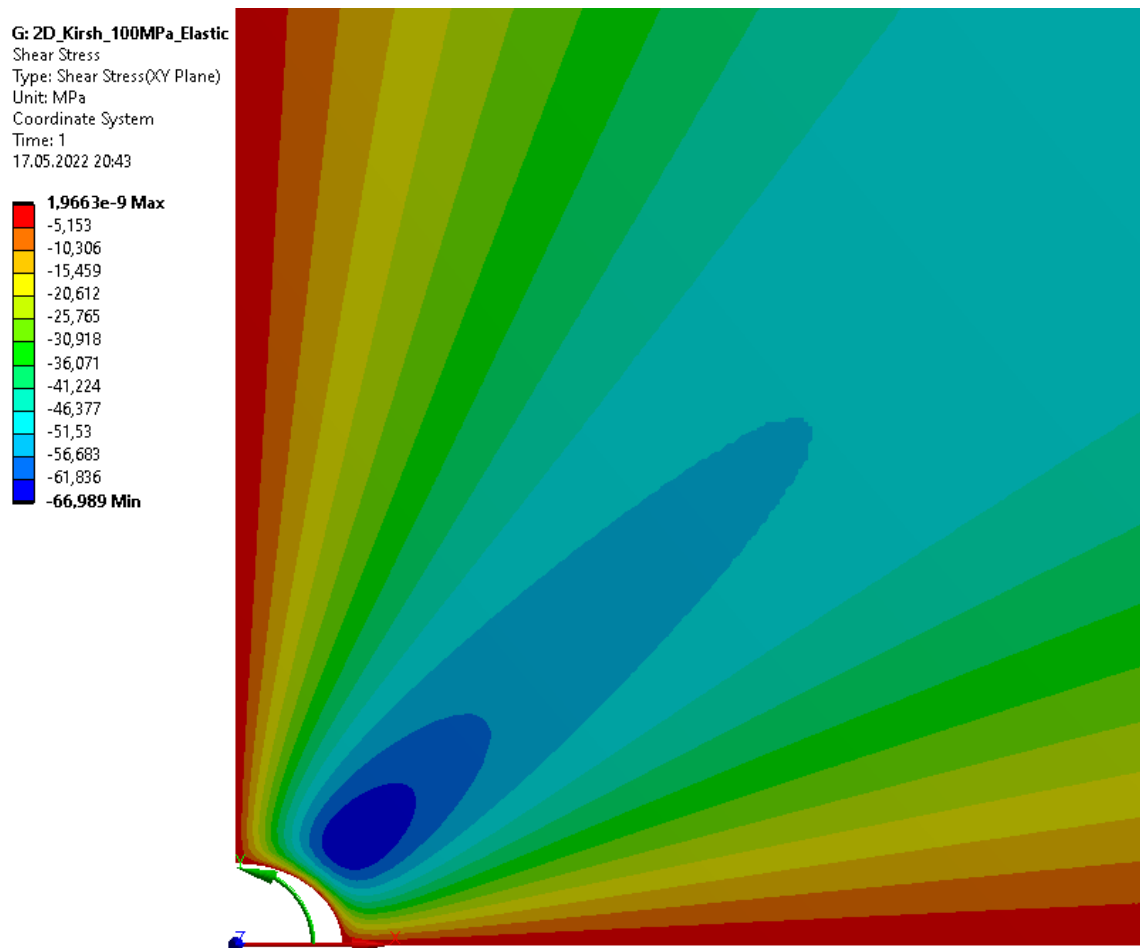


а) – Распределение радиального напряжения, σ_r

G: 2D_Kirsh_100MPa_Elastic
Normal Stress_Teta
Type: Normal Stress(Y Axis)
Unit: MPa
Coordinate System
Time: 1
17.05.2022 20:31



б) – Распределение окружного напряжения, σ_θ



в) – Распределение касательного напряжения, $\tau_{r\theta}$

Рис. 1.2.3 – Результаты численного решения задачи Кирша в упругой постановке

На Рис. 1.2.3 градации цвета, которые показывают линии уровня в интервалах, указанных слева каждого рисунка. Видно, что в окрестности отверстия напряжения имеют неоднородный характер, соответствующий теоретическим представлениям.

В Табл. 1.2.1-1.2.2, для некоторых характерных точек пластины, приведено сравнение результатов аналитического и численного решений.

Табл. 1.2.1

$\theta = 0$				
	Аналитическое решение		Численное решение	
r , мм	σ_r , МПа	σ_θ , МПа	σ_r , МПа	σ_θ , МПа
1	0	-100	0	-100
2,5	63,84	4,16	63,80	4,10
5	90,24	1,76	90,30	1,70
7,5	95,60	0,84	95,70	0,78
10	97,50	0,48	97,6	0,43

Табл. 1.2.2

$\theta = \pi / 2$				
	Аналитическое решение		Численное решение	
r , мм	σ_r , МПа	σ_θ , МПа	σ_r , МПа	σ_θ , МПа
1	0	300	0	300
2,5	20,16	111,84	20,16	111,93
5	5,76	102,24	5,71	102,33
7,5	2,61	100,10	2,56	101,03
10	1,48	100,50	1,43	100,60

Из Табл. 1.2.1-1.2.2 видно, что результаты численного решения с хорошей точностью удовлетворяют результатам аналитического решения. При этом, для касательных напряжений были получены нулевые значения.

Применительно к спекл-интерферометрическим измерениям, в окрестности отверстия изобразим линии уровня нормальных перемещений w в направлении, перпендикулярном плоскости исследуемой пластины. Для этого рассмотрим модель пластины при ее малой толщине $H = 0,1$ мм. Результаты в линиях уровня показаны на Рис. 1.2.4.

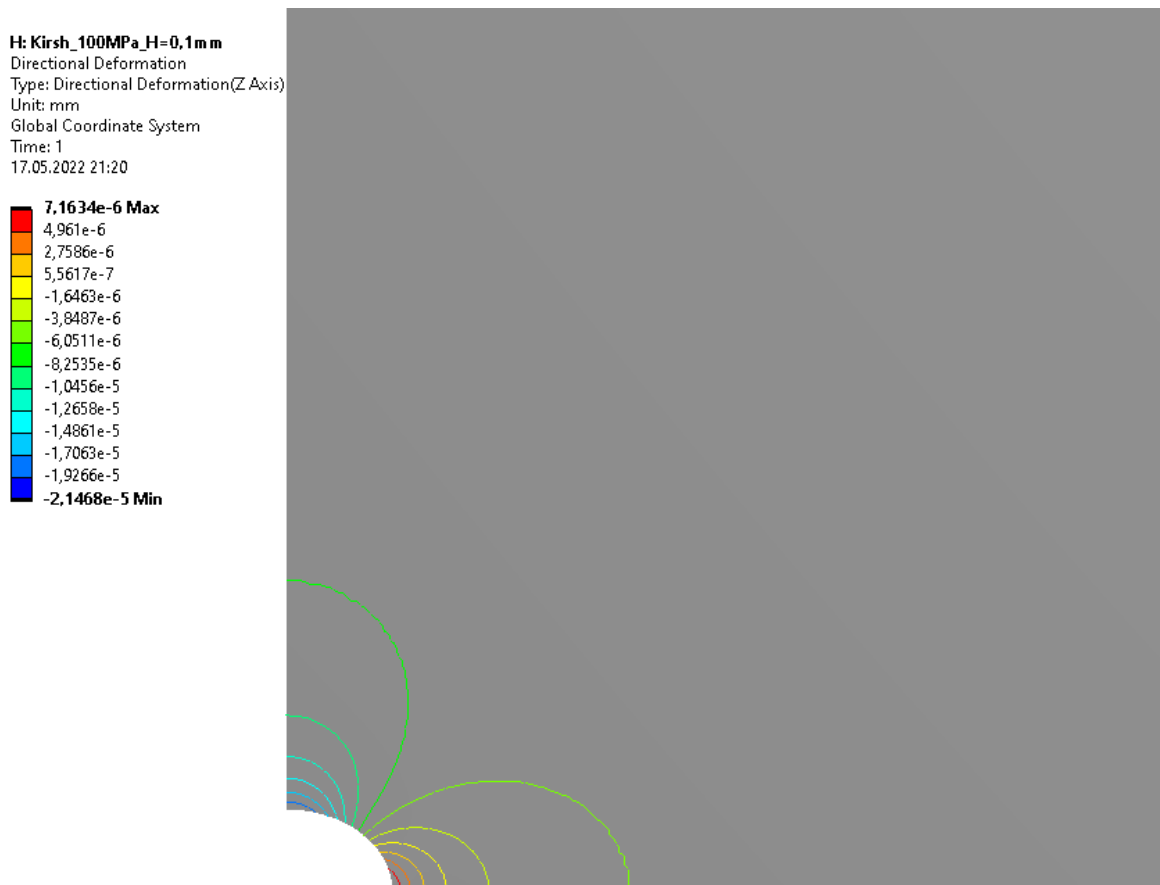


Рис. 1.2.4 – Линии уровня нормальных перемещений на поверхности образца в окрестности зондирующего отверстия

На Рис. 1.2.4 построение линий уровня выполнены при автоматическом распределении с помощью внутренних ресурсов ANSYS. Из рисунка видно, что оси симметрии линий уровня нормальных перемещений ориентированы на поверхности образца по направлениям главных напряжений.

Решение плоской задачи не позволяет получить линии уровня с шагом по высоте 0,266 мкм (соответствует половине длины волны применённого в измерительной системе лазера), что согласуется с выписанной ранее функцией нормального перемещения w , величина которой слишком мала для тонкой пластины.

§ 1.3. Упругая задача Кирша в трехмерной постановке

Следуя работе [76], рассмотрим задачу Кирша в трехмерной постановке. Введем систему координат $Oxyz$, так чтобы координатная плоскость Oxy совпадала со срединной плоскостью, а ось Oz была перпендикулярна ей.

Предположим, что вектор перемещения $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ находится через компоненты:

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), u_2 = u_2(x_1, x_2), u_3(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2)x_3 \quad (1.3.1)$$

Откуда компоненты тензора деформации будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \varepsilon_{33} = g(x_1, x_2), \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x_1} x_3, \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x_2} x_3 \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Для упругого материала также запишем компоненты тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda \Theta + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \sigma_{22} = \lambda \Theta + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \sigma_{33} = \lambda \Theta + 2\mu g(x_1, x_2), \\ \sigma_{12} &= \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \sigma_{13} = \mu \frac{\partial g}{\partial x_1} x_3, \sigma_{23} = \mu \frac{\partial g}{\partial x_2} x_3, \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

где λ, μ - константы Ламе, а $\Theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + g$.

Далее запишем уравнения равновесия $\sigma_{ij,j} = 0$ в развернутом виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{11} + \mu g) + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{22} + \mu g) &= 0, \\
\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y_2^2} &= 0
\end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Из (1.3.4) следует, что $g(x_1, x_2)$ и сумма напряжений $\sigma_{11} + \sigma_{22}$ - гармонические функции.

Введем функцию напряжений $\Phi(x_1, x_2)$ такую, что:

$$\sigma_{11} + \mu g = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} + \mu g = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{1.3.5}$$

Нетрудно показать, что эта функция удовлетворяет первым двум уравнениям равновесия (1.3.4) и является бигармонической. Следовательно, её можно представить при помощи формулы Гурса через две функции комплексных переменных $z = x_1 + ix_2$, $\bar{z} = x_1 - ix_2$ [127]:

$$2\Phi(z, \bar{z}) = \bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}), \tag{1.3.6}$$

откуда

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} + \sigma_{22} + 2\mu g &= 2[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})] \\
\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \\
g &= \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)}[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})] - \frac{1}{4\mu}[f'(z) + \bar{f}'(\bar{z})]
\end{aligned} \tag{1.3.7}$$

Записывая граничные условия в виде $\sigma_{ij}l_j = f_i$ на контуре тела, с учетом что контур отверстия свободен от внешних усилий, а $dz = iae^{i\theta}d\theta$, $d\bar{z} = -iae^{-i\theta}d\theta$, получим:

$$\frac{1}{4}[f'(z) + \bar{f}'(\bar{z})] - \frac{\mu}{\lambda + \mu}[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})] - [\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)]e^{2i\theta} = 0 \tag{1.3.8}$$

Также учтем, что на бесконечности $\sigma_{11}|_{\infty} = P_1$. Тогда для комплексных функций получим:

$$\begin{aligned}\varphi'(z) &= P_1 \frac{\lambda + \mu}{3\lambda + 2\mu} \left(\frac{1}{2} - \frac{R^2}{z^2} \right), \\ \psi'(z) &= -P_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{R^2}{2z^2} - \frac{7\lambda + 6\mu R^4}{3\lambda + 2\mu} \frac{1}{z^4} \right), \\ f'(z) &= P_1 \frac{3\lambda + 4\mu}{3\lambda + 2\mu} \left(1 - \frac{2R^2}{z^2} \right)\end{aligned}\tag{1.3.9}$$

Подставляя (1.3.9) в (1.3.8) с представлением констант λ , μ через физические постоянные, получим выражения для компонент напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{P_1}{2} \left[\left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \left(1 - 2 \frac{2+\nu}{1+\nu} \frac{R^2}{r^2} + \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right], \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{P_1}{2} \left[\left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \left(1 + 2 \frac{\nu}{1+\nu} \frac{R^2}{r^2} + \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right], \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{P_1}{2} \left(1 + \frac{2}{1+\nu} \frac{R^2}{r^2} - \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{R^4}{r^4} \right) \sin 2\theta, \\ \sigma_{r3} &= -2P_1 \frac{\nu}{1+\nu} \frac{R^2 x_3}{r^3} \cos 2\theta, \\ \sigma_{\theta 3} &= -2P_1 \frac{\nu}{1+\nu} \frac{R^2 x_3}{r^3} \sin 2\theta\end{aligned}\tag{1.3.10}$$

Поскольку касательные напряжения σ_{r3} и $\sigma_{\theta 3}$ линейно распределены вдоль третьей координаты, а их средние по толщине пластины значения равны нулю, то они не оказывают влияние на условия статического равновесия. Если положить в (1.3.10) $\nu = 0$, то получим классическое решение Кирша (1.1.20, § 1.1).

Полученный результат для нормального перемещения совпадает с формулой (1.1.26, § 1.1), выведенной при условии плоского напряженного состояния.

§ 1.4. Численное решение трехмерной задачи Кирша

Граничные условия при численной реализации трехмерной задачи Кирша, будут следующими: при $y = 0$ сторона пластины закреплена относительно оси Ox , при $x = 0$ сторона пластины закреплена относительно оси Oy , при $z = 0$ срединная плоскость пластины закреплена относительно оси Oz . Растягивающее внешнее усилие P_1 приложено к стороне пластины (перпендикулярной плоскости Oxy , при $x = b$) по направлению оси Ox . Боковая поверхность отверстия считается свободной от радиальной и тангенциальной компонент напряжений.

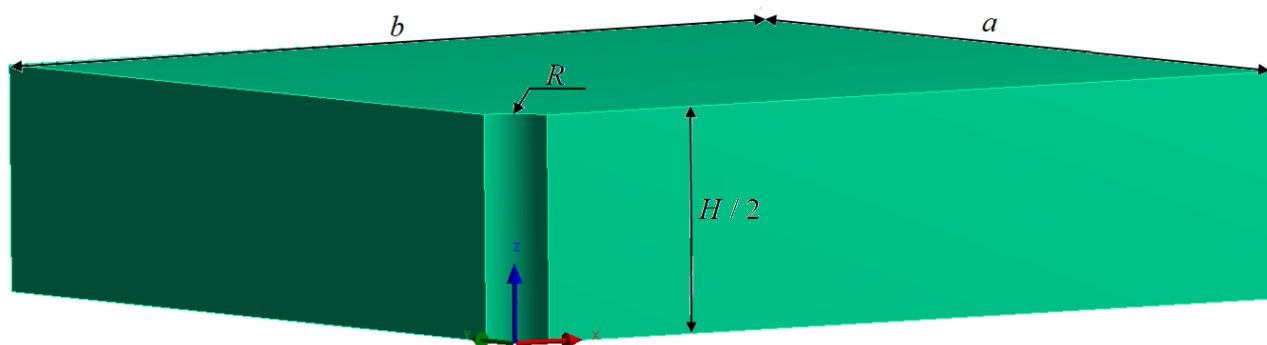


Рис. 1.4.1 – Расчетная модель пластины с отверстием

Для параметров модели пластины зададим: $a = b = 50$ мм, $H = 10$ мм, $R = 1$ мм.

При построении вычислительной сетки были выбраны тетраэдрические квадратичные элементы. Пример сеточной модели в окрестности отверстия модели показан на Рис. 1.4.2. Общее количество элементов для всей модели составило 3394437.

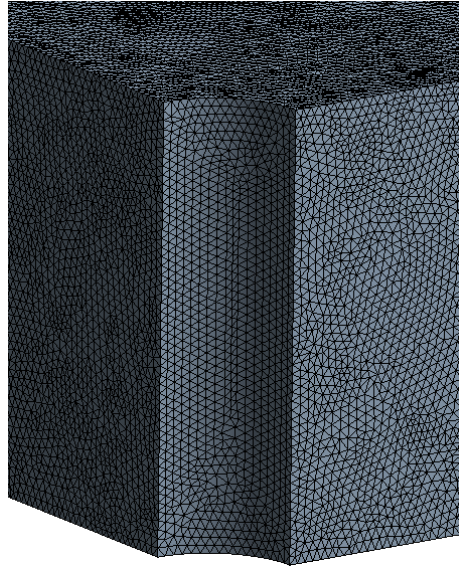
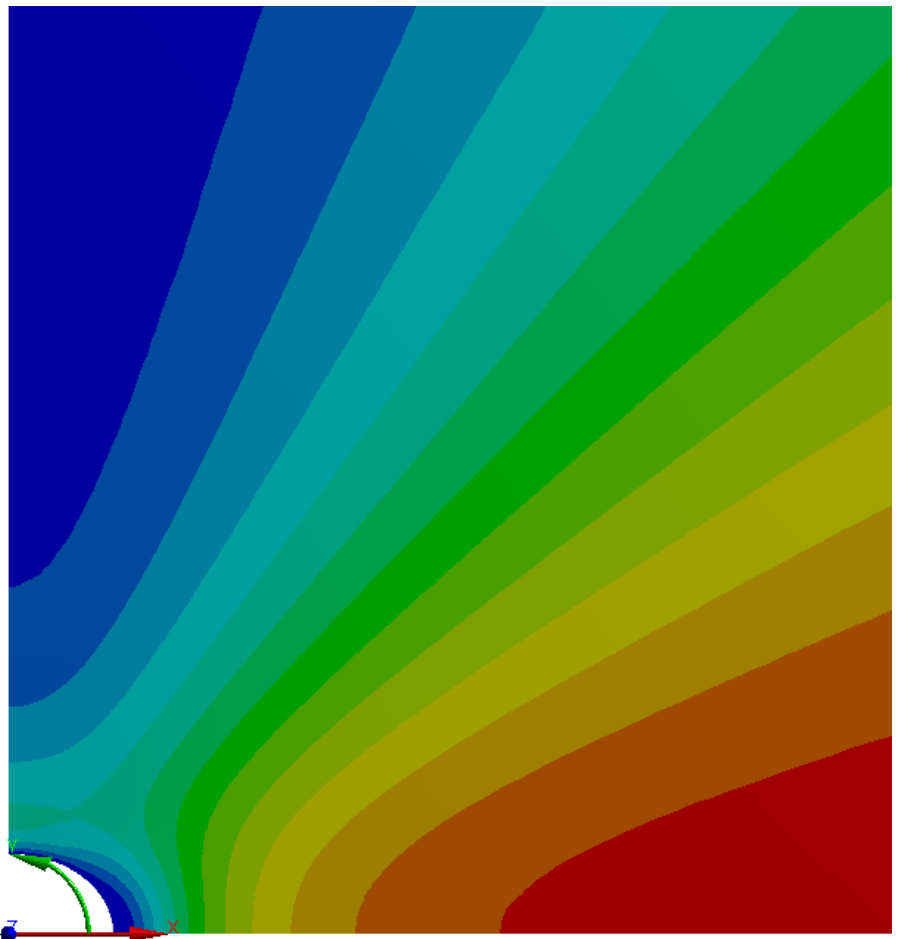
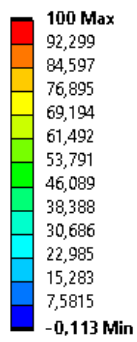


Рис. 1.4.2 – Расчетная сеточная модель в окрестности несквозного отверстия для трехмерной задачи Кирша

Для решения задачи в упругой постановке возьмем изотропный материал со следующими характеристиками: $E = 210$ ГПа, $\nu = 0,3$. Для внешней растягивающей нагрузки примем $P_1 = 100$ МПа.

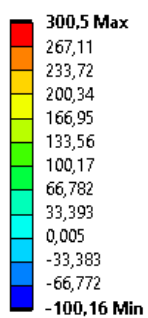
На Рис. 1.4.3 (а, б, в) показаны результаты численного решения для области размером 10×10 мм от центра отверстия на поверхности пластины при $z = H / 2 = 5$ мм.

I: 3D of Kirsh_100MPa_H=10mm
Normal Stress
Type: Normal Stress(X Axis)
Unit: MPa
Coordinate System
Time: 1
20.05.2022 18:30

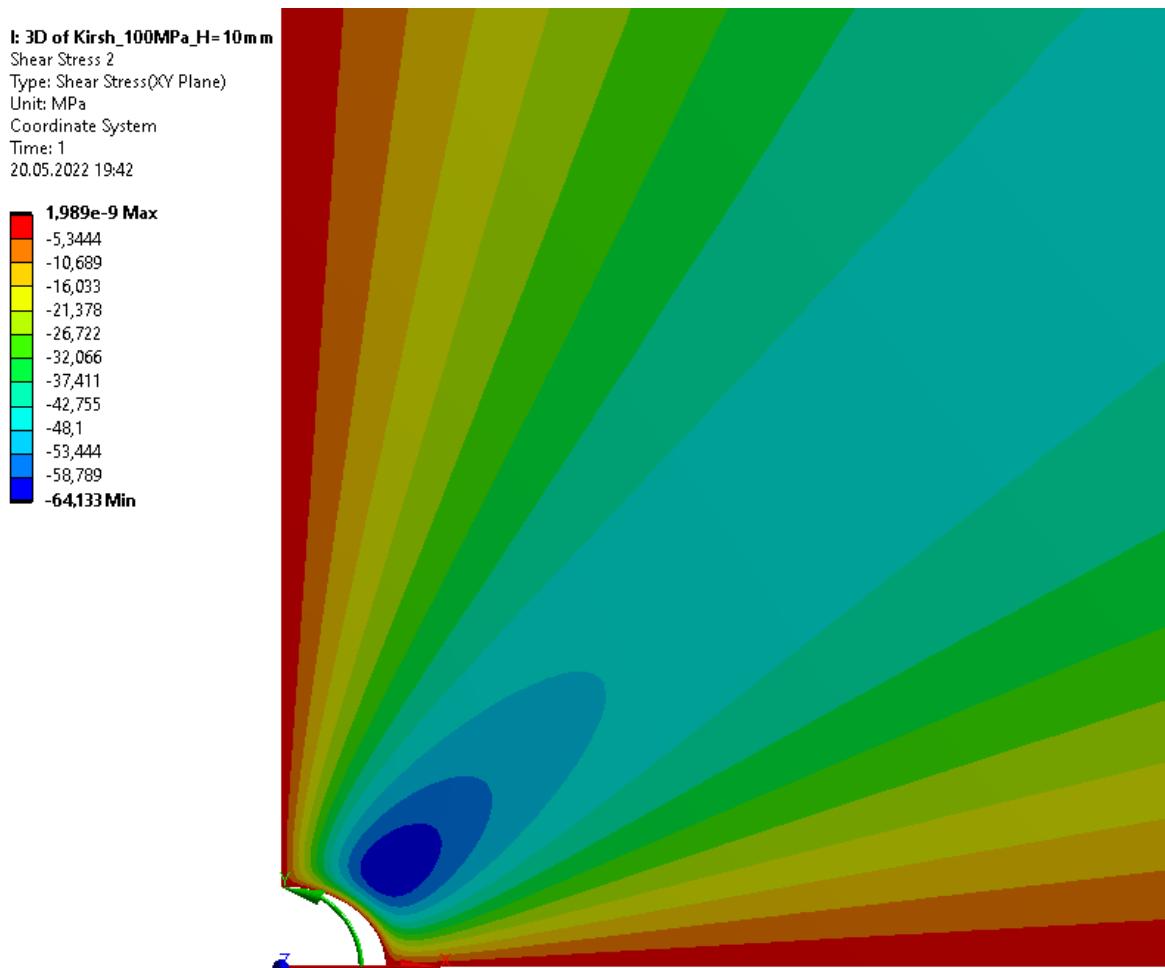


a) – Распределение радиального напряжения, σ_r

I: 3D of Kirsh_100MPa_H=10mm
Normal Stress
Type: Normal Stress(Y Axis)
Unit: MPa
Coordinate System
Time: 1
20.05.2022 18:58



б) – Распределение окружного напряжения, σ_{θ}



в) – Распределение касательного напряжения, $\tau_{r\theta}$

Рис. 1.4.3 – Результаты численного решения трехмерной задачи Кирша в упругой постановке

На Рис. 1.4.3 результаты по линиям уровня для напряжений имеют аналогичное распределение, что и в случае решения двумерной задачи Кирша (Рис. 1.2.3, § 1.2). Видно, что в окрестности отверстия напряжения имеют неоднородный характер, соответствующий теоретическим представлениям.

В Табл. 1.4.1-1.4.2, для некоторых характерных точек пластины, приведено сравнение результатов аналитического и численного решений.

Табл. 1.4.1

$\theta = 0, z = H / 2$				
	Аналитическое решение		Численное решение	
$r, \text{ мм}$	$\sigma_r, \text{ МПа}$	$\sigma_\theta, \text{ МПа}$	$\sigma_r, \text{ МПа}$	$\sigma_\theta, \text{ МПа}$
1	0	-100	0	-100
2,5	66,94	1,06	67,54	1,2
5	91,12	0,87	91,53	0,9
7,5	96	0,44	96,23	0,45
10	97,74	0,26	97,95	0,27

Табл. 1.4.2

$\theta = \pi / 2, z = H / 2$				
	Аналитическое решение		Численное решение	
$r, \text{ мм}$	$\sigma_r, \text{ МПа}$	$\sigma_\theta, \text{ МПа}$	$\sigma_r, \text{ МПа}$	$\sigma_\theta, \text{ МПа}$
1	0	300	0	300
2,5	17,05	114,94	16,8	115,01
5	4,87	103,13	4,62	103,33
7,5	2,22	101,34	2,14	101,37
10	1,26	100,74	1,21	100,8

Из Табл. 1.4.1-1.4.2 видно, что результаты численного решения с хорошей точностью удовлетворяют результатам аналитического решения.

Применительно к спекл-интерферометрическим измерениям, на поверхности пластины (при $z = H / 2 = 5$ мм) изобразим линии уровня нормальных перемещений w (Рис. 1.4.4).

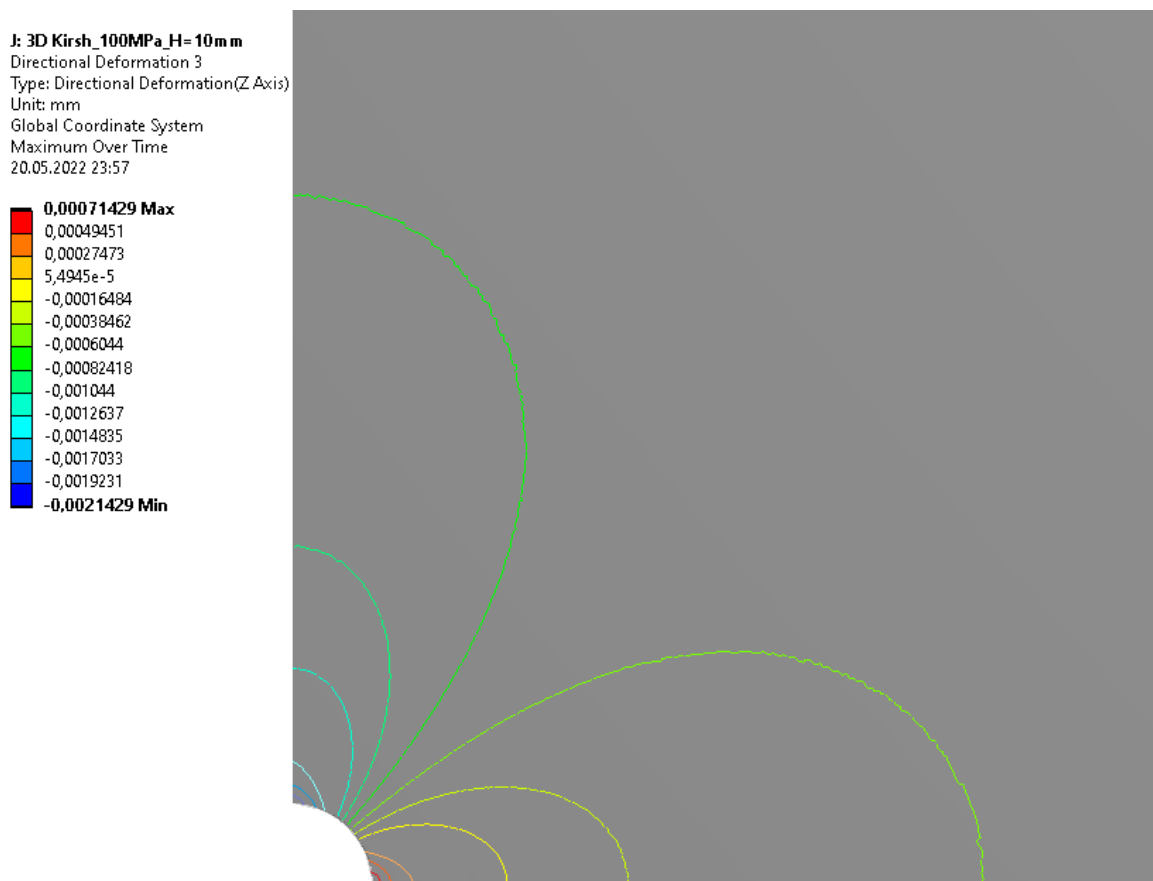


Рис. 1.4.4 – Линии уровня нормальных перемещений на поверхности образца в окрестности зондирующего отверстия из упругого решения

Построение линий уровня выполнены при автоматическом распределении с помощью внутренних ресурсов ANSYS. Они могут быть перестроены с шагом по высоте 0,266 мкм. Новый вид линий уровня нормальных перемещений w показан на Рис. 1.4.5.

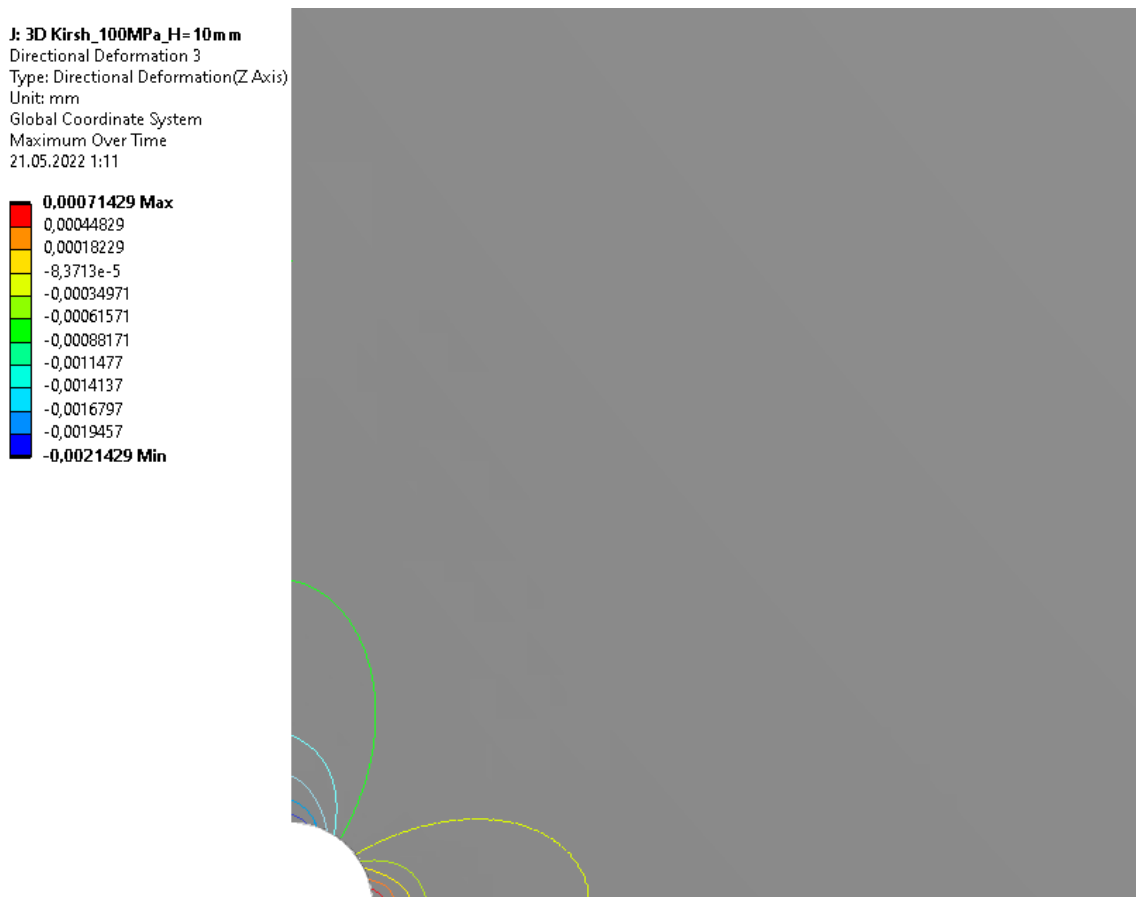


Рис. 1.4.5 – Линии уровня нормальных перемещений на поверхности образца в окрестности зондирующего отверстия с шагом по высоте 0,266 мкм

Из Рис. 1.4.5 видно, что в результате численного упругого решения трехмерной задачи Кирша наблюдаем десять линий уровня w в окрестности отверстия с шагом 0,266 мкм при $P_1 = 100$ МПа. Наличие этих линий позволяет диагностировать величину приложенной нагрузки. Однако, ANSYS не позволяет диагностировать направление приложенной нагрузки, поскольку распределяет одинаковое число линий уровня относительно осей Ox и Oy . Тем не менее таблица значений нормального перемещения (Табл. 1.4.3) показывает четкую ориентацию приложенных напряжений.

$$P_1 = 100 \text{ МПа}, z = H / 2 = 5 \text{ мм}$$

Координата точки r , мм	w , мкм	
	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$
1	0,7143	-2,1429
1,05	0,5815	-2,0100
1,1	0,4664	-1,8949
1,2	0,2778	-1,7063
1,25	0,2000	-1,62857
1,3	0,1310	-1,5596
1,4	0,0146	-1,4431
1,5	-0,0794	-1,3492
1,65	-0,1896	-1,2390
1,7	-0,2200	-1,2086
1,8	-0,2734	-1,1552
2	-0,3571	-1,0714
2,5	-0,4857	-0,9429
2,9	-0,5444	-0,8842
3,5	-0,5977	-0,8309
4	-0,6250	-0,8036
5	-0,6571	-0,7714

Таким образом, на точных решениях двумерной и трёхмерной задач Кирша отработана процедура численного решения, позволяющая проводить её в случае несквозного отверстия в отсутствие аналитических решений соответствующих задач.

§ 1.5. Использование решения задачи Кирша при реализации метода отверстия

Полученные результаты относятся к прямому решению задачи Кирша, когда по известному значению напряжения на бесконечности определяются значения напряжений и перемещений в окрестности отверстия. При диагностике напряжений с помощью зондирующего отверстия решается обратная задача: по полю нормальных перемещений поверхности пластины в окрестности отвер-

ствия требуется определить исходное напряженное состояние, вызвавшего такие перемещения.

Решение прямой задачи относительно прогиба поверхности пластины в окрестности отверстия дается формулой (1.1.26). Исходя из этой формулы можно выразить положения линий уровня с шагом по высоте 0,266 мкм для используемого в измерительной системе лазерного интерферометра:

$$-\frac{\nu H}{2} \frac{P_1}{E} \left(1 - 2 \frac{R^2}{r^2} \cos 2\theta \right) = 0,266N, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (1.5.1)$$

где N - число регистрируемых линий уровня.

Видно, что количество линий уровня в такой интерпретации будет неодинаково вдоль направления прикладываемой нагрузки и в перпендикулярном направлении, что позволяет выделить направление действия нагрузки и определить ее величину.

Направление нагрузки соответствует направлению по оси Ox с меньшим числом полос, что соответствует уровню концентрации напряжений на контуре отверстия.

На практике определение остаточных напряжений выполняется на деформированной поверхности, когда отверстие создается в теле с напряжениями. В этом случае нормальное перемещение поверхности находится только из возмущенного напряженного состояния в зоне отверстия (2 часть формулы 1.5.1). По нему можно определить только величину действующего напряжения, но не его ориентацию.

Полученные результаты используются для верификации численной модели при несквозном отверстии, где отсутствует точное аналитическое решение.

§ 1.6. Численная модель решения двумерной задачи Кирша в упругопластической постановке

При численной реализации решения задачи Кирша в упругопластической постановке, воспользуемся расчетной моделью, показанной на Рис. 1.2.1 (§ 1.2) с теми же параметрами: $a = b = 50$ мм, $R = 1$ мм.

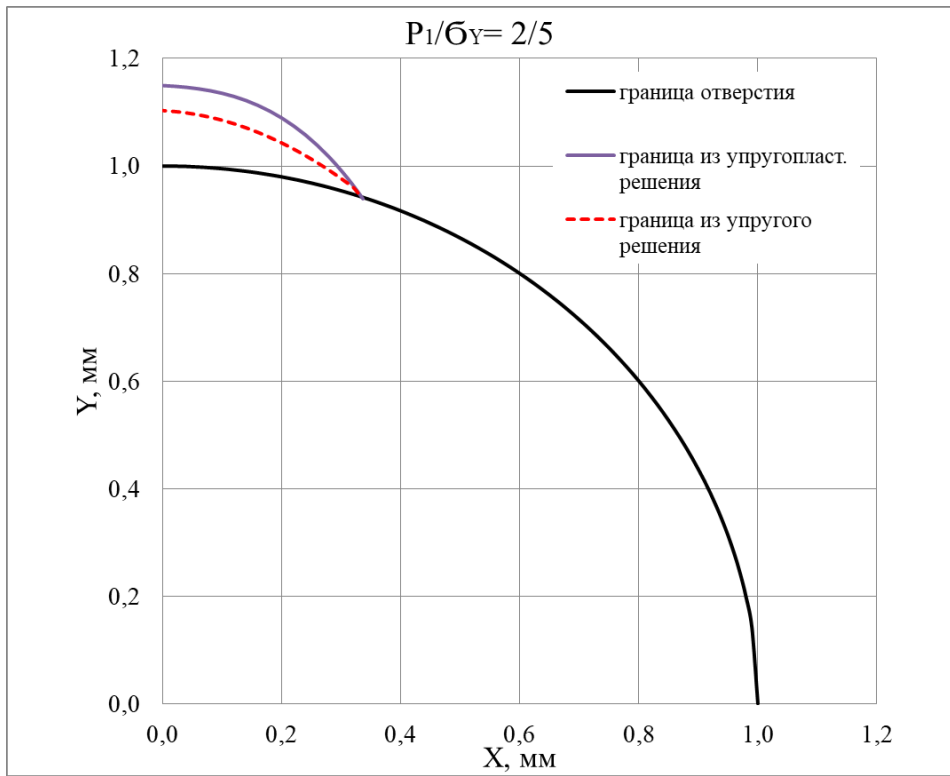
В качестве материала пластины выберем модель идеального упругопластического тела со следующими характеристиками: $E = 210$ ГПа, $\nu = 0,3$. $\sigma_Y = 250$ МПа, где σ_Y - предел текучести.

В результате численного решения построены графики для границ зон пластичности по критерию максимального касательного напряжения Треска [65]:

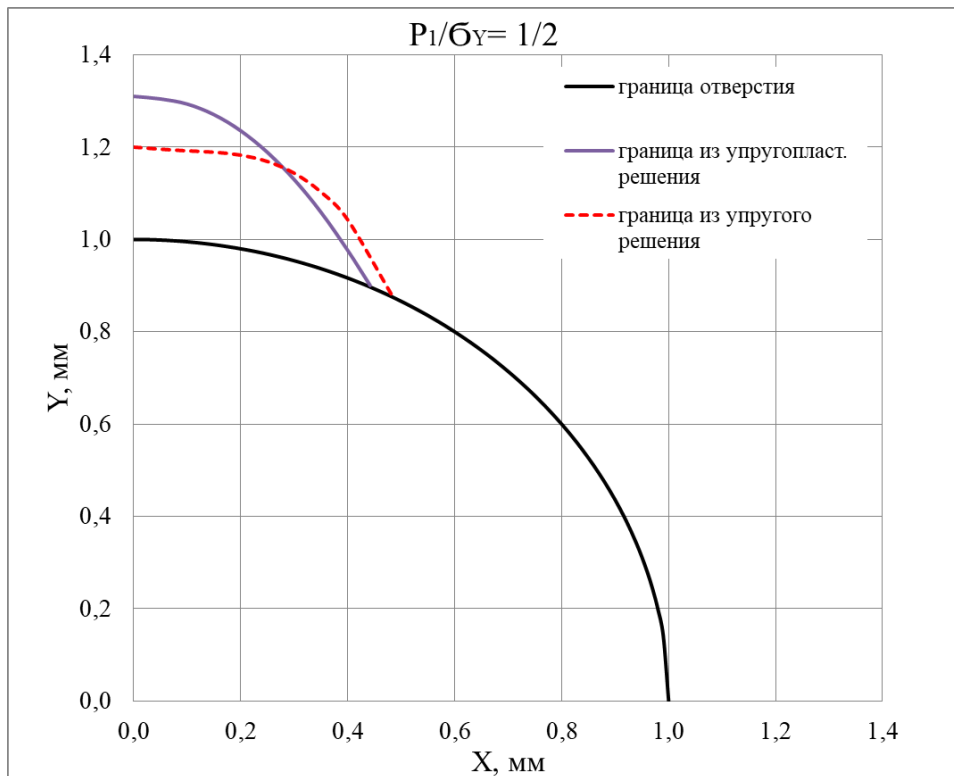
$$(\sigma_r - 2k)(\sigma_\theta - 2k) + \tau_{r\theta}^2 = 0 \quad (1.6.1)$$

где k - предел текучести при сдвиге, равный величине $\sigma_Y / 2$.

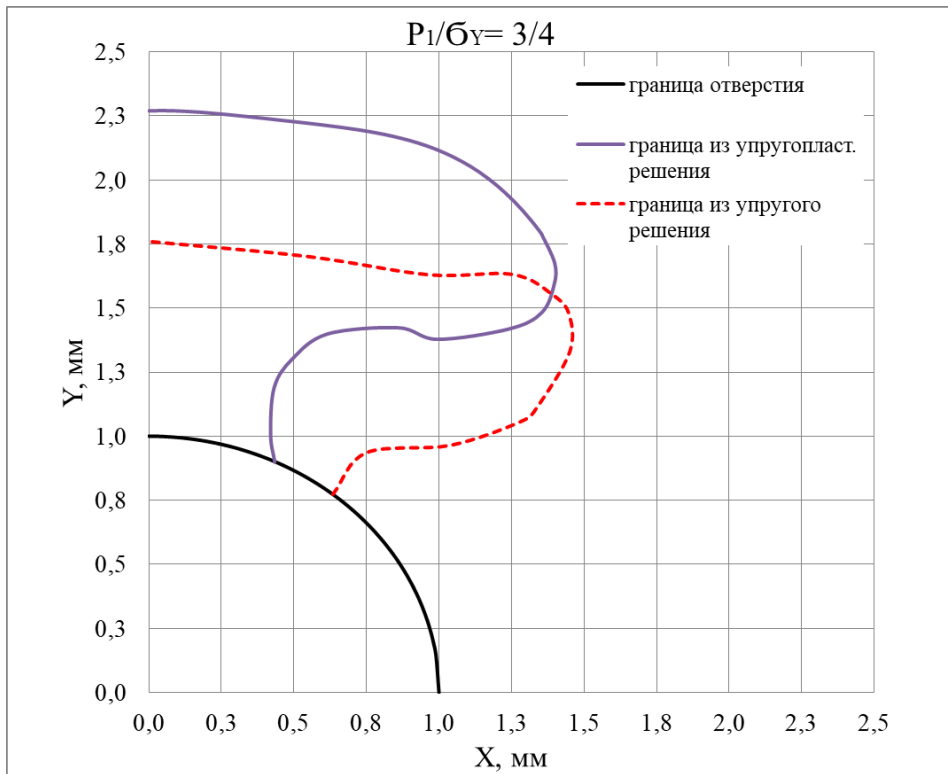
В соответствие с формулой (1.6.1) границы зоны пластичности определяются при достижении величины максимального касательного напряжения $\tau_{\max} = k$. На Рис. 1.6.1 (*a, б, в, г*) такие границы получены при нескольких уровнях внешней растягивающей нагрузки, превышающей треть предела текучести: $P_1 / \sigma_Y = 2/5, 1/2, 3/4, 9/10$ (показаны сплошными линиями). Там же, для сравнения, приведены границы зон пластичности, полученные из упругого решения (штриховые линии).



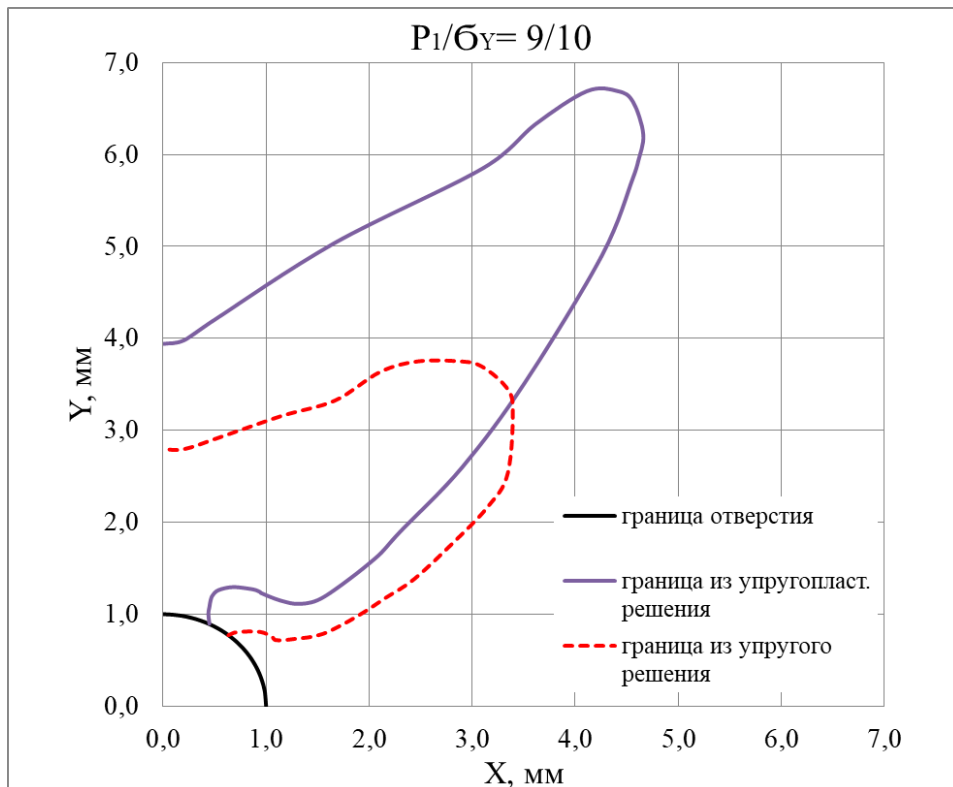
a)



b)



б)



в)

Рис. 1.6.1 – Граница зоны пластичности из упругого и упругопластического решений

По результатам Рис. 1.6.1 следует, что граница зоны пластичности из упругого решения близка по виду (повторяет контур) границы из упругопластического решения. При этом, если внешняя растягивающая нагрузка $P_1 < \sigma_Y / 2$, то упругопластическая граница из упругого решения находится целиком внутри границы, полученной из упругопластического решения. При $P_1 \geq \sigma_Y / 2$ упругопластическая граница, полученная из упругого решения, выходит за пределы границы из упругопластического решения на направлениях, близких к направлению действующей нагрузки, но находится глубоко внутри на направлениях, близких к перпендикуляру к линии действия нагрузки. При больших напряжениях точка пересечения границы пластической области с краем отверстия локализуется при угле, составляющем около 60° к направлению действия нагрузки.

Глава 2. Исследование остаточных напряжений с применением метода несквозного отверстия

§ 2.1. Постановка задачи для численного моделирования

Численное моделирование задачи определения остаточных напряжений с применением метода несквозного отверстия глубиной h , проводится с использованием трехмерной модели пластины, показанной на Рис. 2.1.1 (H – толщина пластины; x, y, z – декартовы координаты с началом координат на срединной плоскости пластины; ось Oz совпадает с осью симметрии отверстия).

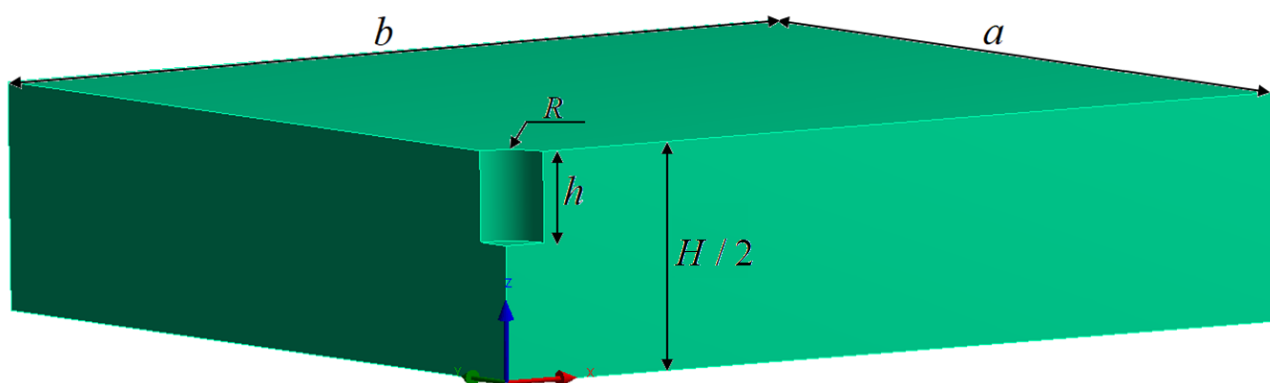


Рис. 2.1.1 – Расчетная модель пластины с несквозным отверстием

Граничные условия, как и при численной реализации трехмерной задачи Кирша, будут следующими: при $y = 0$ сторона пластины закреплена относительно оси Ox , при $x = 0$ сторона пластины закреплена относительно оси Oy , при $z = 0$ срединная плоскость пластины закреплена относительно оси Oz . Растягивающее внешнее усилие P_1 приложено к стороне пластины (перпендикулярной плоскости Oxy , при $x = b$) по направлению оси Ox . Боковая поверхность отверстия считается свободной от радиальной и тангенциальной компонент напряжений, дно отверстия считается свободной от нормальной и тангенциальной компонент напряжений.

Для параметров модели пластины зададим: $a = b = 50$ мм, $H = 10$ мм. Расчеты проводились для несквозных отверстий радиуса $R = 1$ мм и глубин $h = 0,8R; 1,2R, 1,6R, 2,0R$.

При построении расчетной сетки были выбраны тетраэдрические квадратичные элементы. Пример сеточной модели в окрестности несквозного отверстия показан на Рис. 2.1.2 при $h = 2,0R$. Общее количество элементов для всей модели составило 3323169.

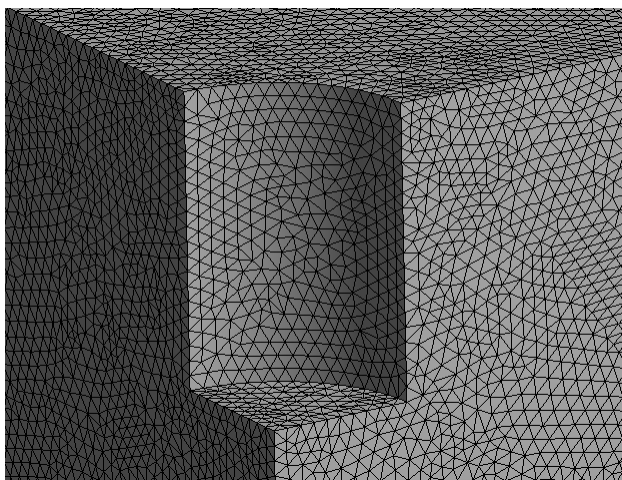


Рис. 2.1.2 – Расчетная сеточная модель в окрестности несквозного отверстия глубиной $h = 2,0R$

Ранее расчетная модель подобного типа для упругого полупространства рассматривалась в [4]. При этом считалось, что напряжения от исходной нагрузки и суммарные напряжения с учетом их концентрации в окрестности отверстия не выходят за пределы применимости упругой модели.

§ 2.2. Результаты расчетов для упругой модели

Для начала, метод несквозного отверстия рассматривался на материале с модулем $E_0 = 70$ ГПа, $\nu = 0,3$ в упругой постановке при $P_1 = 10$ МПа. Выбор такого тестового материала аналогичен использованному в [4].

Результаты расчетов для нормальных перемещений w^0 на поверхности пластины (при $z = H / 2 = 5$ мм) приведены для двух характерных случаев $h = 0,8R$ и $h = 2R$ в виде Табл. 2.2.1.

Табл. 2.2.1

$P_1 = 10$ МПа

Координата точки r , мм	w^0 , мкм			
	$h = 0,8R$		$h = 2R$	
	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$
1	0,0643	-0,0107	0,0785	-0,0376
1,05	0,0593	-0,0091	0,0750	-0,0352
1,1	0,0543	-0,0076	0,0717	-0,0330
1,2	0,0448	-0,0049	0,0653	-0,0289
1,25	0,0404	-0,0038	0,0623	-0,0271
1,3	0,0362	-0,0028	0,0593	-0,0253
1,4	0,0286	-0,0012	0,0537	-0,0222
1,5	0,0223	0,0	0,0485	-0,0194
1,65	0,0150	0,0008	0,0415	-0,0160
1,7	0,0130	0,0013	0,0394	-0,0150
1,8	0,0097	0,0017	0,0353	-0,0132
2	0,0049	0,0019	0,0282	-0,0104
2,5	-0,0005	0,0017	0,0154	-0,0061
2,9	-0,0019	0,0012	0,0090	-0,0044
3,5	-0,0025	0,0005	0,0034	-0,0031
4	-0,0024	0,0002	0,0011	-0,0027
5	-0,0018	0,0003	-0,0006	-0,0023

Из Табл. 2.2.1 следует, что полученные значения для перемещений w^0 , вызванных остаточными напряжениями, близки к результатам, полученные в [4]. Следует однако отметить, что величина растягивающей внешней нагрузки $P_1 = 10$ МПа не позволяет рассматривать линии уровня с шагом по высоте 0,266 мкм (соответствует половине длины волны применённого в измерительной системе лазера).

§ 2.3. Результаты расчетов для упругопластической модели

Решение задачи в упругопластической постановке рассмотрено при растягивающей внешней нагрузке $P_1 = 100$ и 225 МПа. Такое увеличение нагрузки вызвано тем, чтобы нормальные перемещения поверхности тела попали в диапазон применимости экспериментального метода измерения. В качестве материала пластины выберем модель идеального упругопластического тела со следующими характеристиками: $E = 210$ ГПа, $\nu = 0,3$, $\sigma_Y = 250$ МПа. При таких параметрах материала пластины нагрузка в 100 МПа соответствует $0,4$ от предела текучести, а нагрузка в 225 МПа – $0,9$ от предела текучести материала.

Для расчетов по упругой и упругопластической модели рассмотрены случаи глубины отверстия: $h = 0,8R$; $1,2R$, $1,6R$, $2,0R$.

В Табл. 2.3.1-2.3.4 представлены результаты для нагрузки $P_1 = 100$ МПа.

Табл. 2.3.1

$h = 0,8R$, $P_1 = 100$ МПа

Координата точки r , мм	w^0 , мкм			
	Численное упругое решение		Численное упругопластическое решение	
	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$
1	0,2143	-0,0359	0,2144	-0,0359
1,05	0,1977	-0,0306	0,1977	-0,0306
1,1	0,1811	-0,0255	0,1812	-0,0255
1,2	0,1494	-0,0166	0,1495	-0,0166
1,25	0,1345	-0,0128	0,1346	-0,0128
1,3	0,1205	-0,0095	0,1205	-0,0095
1,4	0,0955	-0,0041	0,0955	-0,0041
1,5	0,0745	-0,0001	0,0745	-0,0001
1,65	0,0500	0,0036	0,0500	0,0036
1,7	0,0434	0,0045	0,0435	0,0045
1,8	0,0324	0,0056	0,0324	0,0056

$h = 0,8R, P_1 = 100$ МПа

Координата точки $r, \text{ мм}$	$w^0, \text{ мкм}$			
	Численное упругое решение		Численное упруго- пластическое реше- ние	
	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$
2	0,0166	0,0066	0,0166	0,0066
2,5	-0,0066	0,0040	-0,0066	0,0040
2,9	-0,0085	0,0018	-0,0085	0,0018
3,5	-0,0082	0,0005	-0,0082	0,0005
4	-0,0063	-0,0010	-0,0063	-0,0010
5	-0,0066	-0,0021	-0,0066	-0,0359

Табл. 2.3.2

$h = 1,2R, P_1 = 100$ МПа

Координата точки $r, \text{ мм}$	$w^0, \text{ мкм}$			
	Численное упругое решение		Численное упруго- пластическое реше- ние	
	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$
1	0,2442	-0,0697	0,2443	-0,0697
1,05	0,2300	-0,0632	0,2301	-0,0632
1,1	0,2160	-0,0570	0,2161	-0,0570
1,2	0,1892	-0,0458	0,1892	-0,0458
1,25	0,1763	-0,0408	0,1764	-0,0408
1,3	0,1639	-0,0362	0,1639	-0,0362
1,4	0,1406	-0,0282	0,1407	-0,0282
1,5	0,1197	-0,0217	0,1197	-0,0217
1,65	0,0926	-0,0142	0,0927	-0,0142
1,7	0,0848	-0,0122	0,0848	-0,0122
1,8	0,0706	-0,0089	0,0706	-0,0089
2	0,0479	-0,0044	0,0479	-0,0044
2,5	0,0150	0,0000	0,0150	0,0000
2,9	0,0027	0,0004	0,0027	0,0004
3,5	-0,0051	-0,0004	-0,0051	-0,0004

$$h = 1,2R, P_1 = 100 \text{ МПа}$$

Координата точки r , мм	w^0 , мкм			
	Численное упругое решение		Численное упруго- пластическое реше- ние	
	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$
4	-0,0071	-0,0013	-0,0071	-0,0013
5	-0,0069	-0,0025	-0,0069	-0,0025

Табл. 2.3.3

$$h = 1,6R, P_1 = 100 \text{ МПа}$$

Координата точки r , мм	w^0 , мкм			
	Численное упругое решение		Численное упруго- пластическое реше- ние	
	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$
1	0,2572	-0,100	0,2572	-0,100
1,05	0,2445	-0,092	0,2445	-0,092
1,1	0,2322	-0,086	0,2322	-0,086
1,2	0,2086	-0,073	0,2086	-0,073
1,25	0,1973	-0,067	0,1973	-0,067
1,3	0,1864	-0,062	0,1864	-0,062
1,4	0,1659	-0,052	0,1659	-0,052
1,5	0,1498	-0,045	0,1498	-0,045
1,65	0,1267	-0,038	0,1267	-0,038
1,7	0,1183	-0,036	0,1183	-0,036
1,8	0,1094	-0,032	0,1094	-0,032
2	0,0891	-0,025	0,0891	-0,025
2,5	0,0547	-0,015	0,0547	-0,015
2,9	0,0342	-0,009	0,0342	-0,009
3,5	0,0161	-0,006	0,0161	-0,006
4	0,0023	-0,005	0,0023	-0,005
5	-0,003	-0,005	-0,003	-0,005

$h = 2,0R, P_1 = 100 \text{ МПа}$

Координата точки $r, \text{ мм}$	$w^0, \text{ мкм}$			
	Численное упругое решение		Численное упруго- пластическое реше- ние	
	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$
1	0,2619	-0,1255	0,2619	-0,1257
1,05	0,2503	-0,1175	0,2503	-0,1176
1,1	0,2390	-0,1101	0,2390	-0,1103
1,2	0,2177	-0,0965	0,2177	-0,0966
1,25	0,2075	-0,0904	0,2075	-0,0904
1,3	0,1977	-0,0845	0,1977	-0,0846
1,4	0,1791	-0,0740	0,1792	-0,0741
1,5	0,1619	-0,0649	0,1619	-0,0649
1,65	0,1385	-0,0534	0,1385	-0,0535
1,7	0,1313	-0,0501	0,1313	-0,0502
1,8	0,1178	-0,0442	0,1178	-0,0442
2	0,0941	-0,0348	0,0942	-0,0348
2,5	0,0514	-0,0205	0,0514	-0,0205
2,9	0,0300	-0,0147	0,0301	-0,0147
3,5	0,0116	-0,0106	0,0116	-0,0106
4	0,0037	-0,0091	0,0037	-0,0091
5	-0,0022	-0,0078	-0,0022	-0,0078

В Табл. 2.3.5-2.3.8 представлены результаты для нагрузки $P_1 = 225 \text{ МПа}$.

$h = 0,8R, P_1 = 225 \text{ МПа}$

Координата точки $r, \text{ мм}$	$w^0, \text{ мкм}$			
	Численное упругое решение		Численное упруго- пластическое реше- ние	
	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$
1	0,4822	-0,0807	0,5105	-0,4252
1,05	0,4447	-0,0689	0,4729	-0,3815
1,1	0,4075	-0,0574	0,4358	-0,3421
1,2	0,3361	-0,0373	0,3643	-0,2725
1,25	0,3027	-0,0289	0,3306	-0,2411
1,3	0,2710	-0,0214	0,2986	-0,2118
1,4	0,2147	-0,0092	0,2410	-0,1556
1,5	0,1675	-0,0004	0,1920	-0,1031
1,65	0,1124	0,0081	0,1335	-0,0502
1,7	0,0977	0,0100	0,1176	-0,0387
1,8	0,0728	0,0126	0,0903	-0,0219
2	0,0373	0,0148	0,0503	-0,0032
2,5	-0,0038	0,0125	0,0012	0,0082
2,9	-0,0148	0,0088	-0,0134	0,0071
3,5	-0,0191	0,0040	-0,0201	0,0033
4	-0,0184	0,0011	-0,0202	0,0004
5	-0,0142	-0,0023	-0,0160	-0,0031

Табл. 2.3.6

 $h = 1,2R, P_1 = 225 \text{ МПа}$

Координата точки $r, \text{ мм}$	$w^0, \text{ мкм}$			
	Численное упругое решение		Численное упруго- пластическое реше- ние	
	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$
1	0,5495	-0,1569	0,5901	-0,6718
1,05	0,5175	-0,1421	0,5576	-0,6101
1,1	0,4860	-0,1284	0,5256	-0,5568

$$h = 1,2R, P_1 = 225 \text{ МПа}$$

Координата точки r , мм	w^0 , мкм			
	Численное упругое решение		Численное упруго- пластическое реше- ние	
	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$
1,2	0,4256	-0,1031	0,4639	-0,4606
1,25	0,3967	-0,0919	0,4342	-0,4169
1,3	0,3686	-0,0816	0,4054	-0,3763
1,4	0,3164	-0,0635	0,3514	-0,3010
1,5	0,2692	-0,0488	0,3023	-0,2339
1,65	0,2084	-0,0320	0,2380	-0,1505
1,7	0,1906	-0,0276	0,2191	-0,1300
1,8	0,1587	-0,0201	0,1847	-0,0977
2	0,1077	-0,0099	0,1289	-0,0563
2,5	0,0336	0,0000	0,0445	-0,0157
2,9	0,0060	0,0009	0,0114	-0,0072
3,5	-0,0115	-0,0010	-0,0109	-0,0051
4	-0,0161	-0,0029	-0,0173	-0,0061
5	-0,0156	-0,0057	-0,0178	-0,0083

Табл. 2.3.7

$$h = 1,6R, P_1 = 225 \text{ МПа}$$

Координата точки r , мм	w^0 , мкм			
	Численное упругое решение		Численное упруго- пластическое реше- ние	
	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$
1	0,5786	-0,2243	0,6327	-0,8751
1,05	0,5500	-0,2080	0,6033	-0,8024
1,1	0,5224	-0,1925	0,5749	-0,7380
1,2	0,4693	-0,1640	0,5198	-0,6214
1,25	0,4438	-0,1511	0,4933	-0,5685
1,3	0,4193	-0,1390	0,4676	-0,5187
1,4	0,3729	-0,1176	0,4187	-0,4287

$$h = 1,6R, P_1 = 225 \text{ МПа}$$

Координата точки r , мм	w^0 , мкм			
	Численное упругое решение		Численное упруго- пластическое реше- ние	
	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$
1,5	0,3300	-0,0993	0,3732	-0,3490
1,65	0,2725	-0,0771	0,3114	-0,2485
1,7	0,2551	-0,0708	0,2925	-0,2219
1,8	0,2228	-0,0599	0,2574	-0,1783
2	0,1680	-0,0432	0,1969	-0,1189
2,5	0,0768	-0,0211	0,0936	-0,0514
2,9	0,0362	-0,0141	0,0459	-0,0312
3,5	0,0051	-0,0107	0,0082	-0,0201
4	-0,0063	-0,0103	-0,0062	-0,0173
5	-0,0123	-0,0108	-0,0143	-0,0160

Табл. 2.3.8

$$h = 2,0R, P_1 = 225 \text{ МПа}$$

Координата точки r , мм	w^0 , мкм			
	Численное упругое решение		Численное упруго- пластическое реше- ние	
	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$
1	0,5891	-0,2829	0,6531	-1,0429
1,05	0,5631	-0,2639	0,6251	-0,9609
1,1	0,5371	-0,2479	0,5991	-0,8889
1,2	0,4901	-0,2169	0,5501	-0,7579
1,25	0,4671	-0,2039	0,5261	-0,6979
1,3	0,4451	-0,1899	0,5021	-0,6419
1,4	0,4031	-0,1669	0,4591	-0,5409
1,5	0,3641	-0,1459	0,4171	-0,4509
1,65	0,3111	-0,1199	0,3591	-0,3379
1,7	0,2951	-0,1129	0,3421	-0,3069
1,8	0,2651	-0,0999	0,3081	-0,2549

$$h = 2,0R, P_1 = 225 \text{ МПа}$$

Координата точки r , мм	w^0 , мкм			
	Численное упругое решение		Численное упруго- пластическое реше- ние	
	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 2$
2	0,2121	-0,0779	0,2491	-0,1819
2,5	0,1151	-0,0459	0,1391	-0,0929
2,9	0,0671	-0,0329	0,0821	-0,0619
3,5	0,0261	-0,0239	0,0331	-0,0405
4	0,0081	-0,0209	0,0111	-0,0319
5	-0,0049	-0,0179	-0,0059	-0,0259

Из приведенных Табл. 2.3.1 - 2.3.8 видно, что из упругого решения при глубинах отверстий $0,8 \leq h/R \leq 2,0$ на контуре отверстия нормальные перемещения w_x^0 (при $\theta = 0$) возмущенного напряженного состояния по оси X, т.е. по линии действия напряжения P_1 , намного больше перемещений (по модулю) w_y^0 (при $\theta = \pi/2$) по оси Y.

По результатам упругопластического решения для случая $P_1 = 100$ МПа на контуре отверстия нормальные перемещения w_x^0 также больше перемещений (по модулю) w_y^0 , что соответствует упругой модели. Однако, при высоком значении $P_1 = 225$ МПа, на контуре отверстия, уровень нормальных перемещений (по модулю) w_y^0 существенно возрастает и при максимальной глубине отверстия приблизительно в 1,6 раз превосходит w_x^0 . Это объясняется возникновением значительной пластической деформации в направлении, перпендикулярном действию нагрузки при исходном уровне напряжения в 225 МПа, что соответствует 90% от предела текучести материала образца.

По данным Табл. 2.3.1 - 2.3.8 на Рис. 2.3.1 - 2.3.4 построены графики перемещений w^0 , которые для удобства рассмотрим по двум направлениям в зависимости от угла θ : w_x^0 (при $\theta = 0$) и w_y^0 (при $\theta = \pi / 2$).

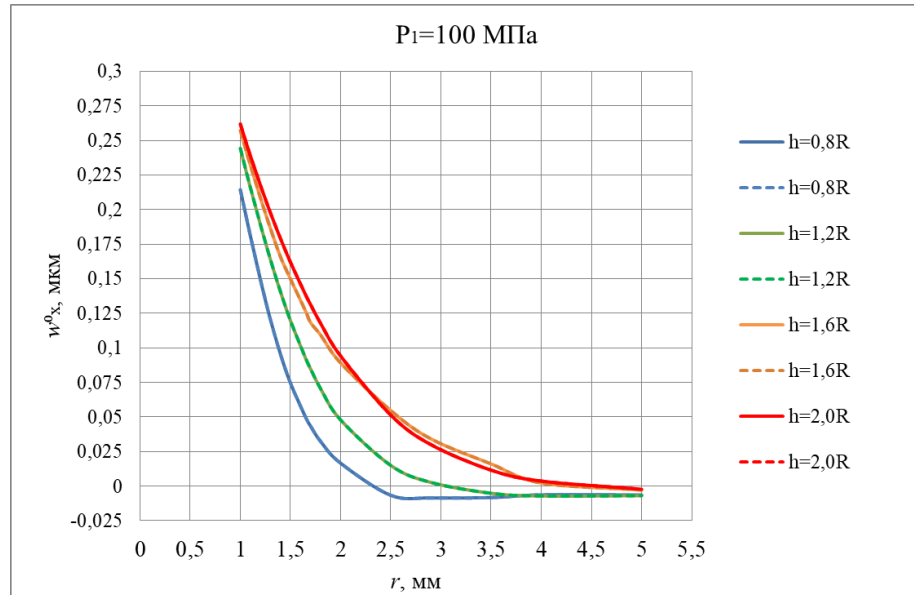


Рис. 2.3.1 – Зависимость перемещений w_x^0 (мкм) от расстояния r (мм) на поверхности пластины в окрестности несквозных отверстий при $P_1 = 100 \text{ МПа}$

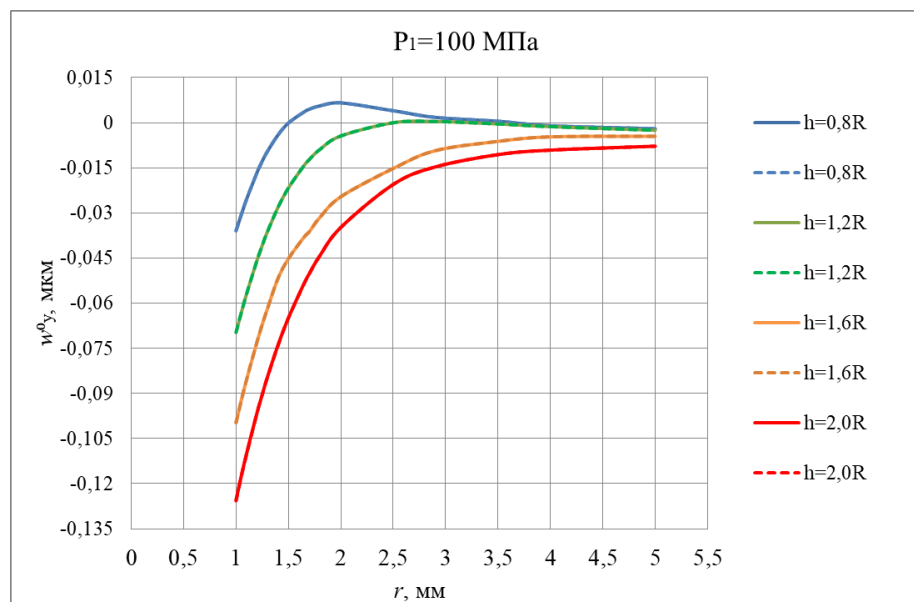


Рис. 2.3.2 – Зависимость перемещений w_y^0 (мкм) от расстояния r (мм) на поверхности пластины в окрестности несквозных отверстий при $P_1 = 100 \text{ МПа}$

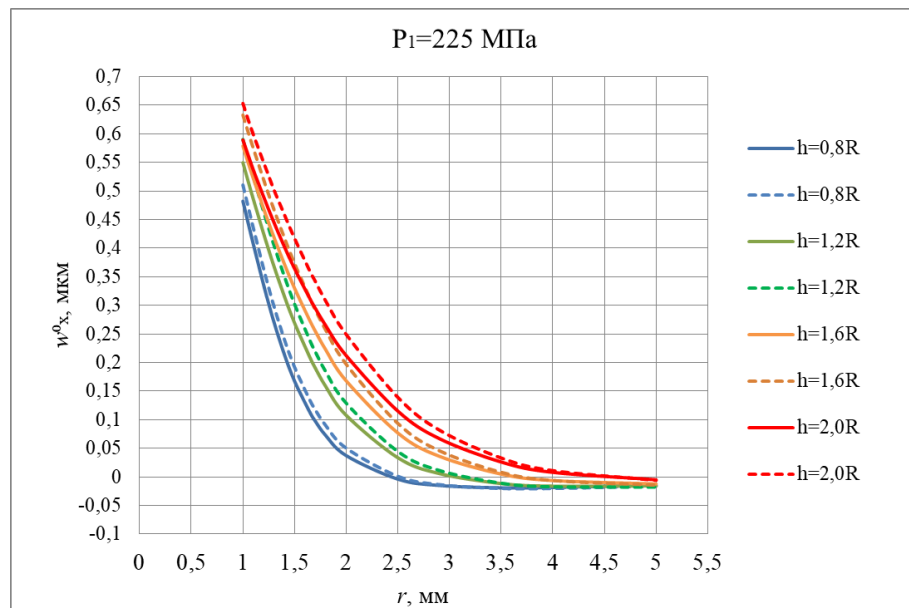


Рис. 2.3.3 – Зависимость перемещений w_x^0 (мкм) от расстояния r (мм) на поверхности пластины в окрестности несквозных отверстий при $P_1 = 225$ МПа

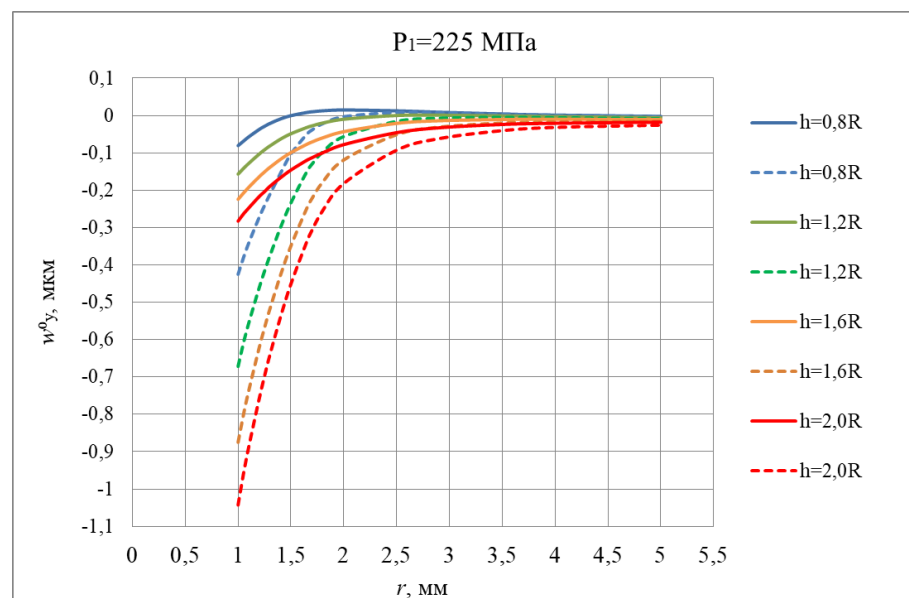


Рис. 2.3.4 – Зависимость перемещений w_y^0 (мкм) от расстояния r (мм) на поверхности пластины в окрестности несквозных отверстий при $P_1 = 225$ МПа

На Рис. 2.3.1 - 2.3.4 сплошными и пунктирными линиями показаны результаты из упругого и упругопластического решений соответственно. При внешней нагрузке $P_1 = 100$ МПа результаты для нормального перемещения w^0 из упругого решения практически совпадают с результатами из упругопластиче-

ского решения. Это представляется естественным, так как исходный уровень напряжения в 2,5 раза меньше чем предел текучести.

Иной результат получен при внешней нагрузке в 225 МПа, составляющей 90% от предела текучести. Здесь наблюдаются кардинальные отличия для перемещений из упругого и упругопластического решений.

На границе отверстия величина w_y^0 по упругой модели в среднем в 4,2 раза меньше, чем по упругопластической модели. При увеличении глубины отверстия в 2,5 раза w_y^0 на границе отверстия из упругого решения увеличивается в 3,3 раза, а из упругопластического – в 2,5 раза.

Сравнения результатов w_x^0 на границе отверстия по упругой модели в среднем дают величину примерно в 1,2 раза меньше, чем по упругопластической модели. При увеличении глубины отверстия в 2,5 раза w_x^0 на границе отверстия из упругого решения увеличивается в 1,25 раза, а из упругопластического – в 1,28 раза.

Величина напряжений по упругой модели определяется числом интерференционных полос, причем цена полосы в напряжениях зависит от упругих свойств материала, т.е. от модуля Юнга, и от диаметра и глубины лунки. Она определяется по графикам [4], рассчитанным на основании решения трехмерной задачи теории упругости. Формула для определения остаточного напряжения σ вдоль выбранного направления на интерференционной картине имеет вид [127]:

$$\sigma = \left(\frac{A}{h} + B \right) \frac{D_0}{D} \frac{E}{E_{Al}} N, \quad (2.3.1)$$

где E и $E_{Al} = 70$ ГПа - соответственно, модули упругости исследуемого материала и алюминия, h и D – глубина и диаметр лунки, $D_0 = 2$ мм – эталонный диаметр лунки, N - число полос на интерферограмме. Значения аппроксимирующих констант A и B равны: $A = 20$ (МПа•мм), $B = 25$ (МПа).

Расчет по упругой модели с использованием формулы (2.3.1) при глубине сверления $h = 2R$ дает значение 232 МПа, что близко к заданному уровню напряжения (225 МПа).

В то же время при учете пластического состояния материала в окрестности отверстия перемещения на его краю оказались выше, чем по упругой модели всего на 10% при угле $\theta = 0$ (Рис. 2.3.3), что соответствует направлению действия внешней нагрузки. Это означает, что в данном направлении практически не происходит выхода в пластическую область даже при исходном напряжении, близком к пределу текучести. При угле $\theta = \pi / 2$ (Рис. 2.3.4), соответствующему направлению перпендикулярному действию нагрузки, картина иная. Здесь перемещения, рассчитанные по упругопластической модели, в несколько раз превосходят перемещения, рассчитанные по упругой модели. Это объясняется тем, что в данном направлении имеет место наивысшая концентрация напряжений с появлением пластической зоны. Данный факт является признаком возникновения пластической области и достижения напряжения пределу текучести.

По соотношению между числом полос в этих двух главных направлениях можно определить направление действующего напряжения в случае возникновения пластической зоны – это направление, перпендикулярное направлению с наивысшим значением нормального перемещения (направление с минимальным количеством полос). Уровень перемещений на краю отверстия по этому направлению не слишком отличается от уровня упругих перемещений в этом направлении. Поэтому в первом приближении расчет действующих (остаточных) напряжений можно произвести по уровню перемещений в направлении с минимальным количеством полос. В частности, для случая, показанного на Рис. 2.3.3, это приводит к значению действующего напряжения 252 МПа, что на 12% выше истинного значения напряжения.

§ 2.4. Экспресс-оценка напряжений по числу полос на интерферограмме с учетом эффекта пластичности

При наблюдении полученной спекл-интерферограммы определяется число

интерференционных полос в каждом из четырех лепестков интерферограммы. Оси симметрии картины совпадают с главными осями остаточных напряжений, а число полос вдоль каждой из главных осей определяет перемещение w^0 , возмущенного отверстием напряженно-деформированного состояния вдоль этой оси. Для отверстий малой глубины практически только эти перемещения определяют, как показали теоретические и экспериментальные исследования, главные остаточные напряжения, существовавшие в данном месте до высверливания отверстия [4].

Для быстрой, хотя и более приближенной оценки напряжений можно воспользоваться простым счетом числа интерференционных полос вдоль осей главных напряжений и перемножением этого числа на коэффициент, определяющий цену полосы для данного материала и размеров отверстия. Действительно, число полос в окрестности отверстия $r < R_0$ (R_0 - радиус круга, вне которого перемещения возмущенного состояния практически равны нулю) определяет величину перемещения w_0 на кромке отверстия. Разделив эти перемещения на перемещение w_1 от единичного остаточного напряжения на кромке отверстия, получим искомое остаточное напряжение, если размеры отверстия удовлетворяют ограничению на глубину отверстия. Но можно делить не перемещения, а число полос, наблюдаемых на интерферограмме, на число полос, соответствующее единичному остаточному напряжению. Процедура еще более упростится, если определить цену интерференционной полосы для данного материала и затем перемножением цены полосы на число полос определить остаточное напряжение.

Цена полосы σ является величиной, показывающая соотношение между нормальным перемещением на краю отверстия и измеряемого напряжения при разных глубинах и диаметрах отверстия (см. формулу 2.3.1, § 2.3). В [4, 127] дано также графическое представление для цены полосы в случае тестового материала – алюминия и диаметре отверстия 2 мм.

Так как алюминий не обладает площадкой текучести, то в настоящей работе в качестве тестового материала применялась сталь. Соответственно был перестроен график для цены полосы в упругом решении для материала с модулем упругости $E = 210$ ГПа при диаметре отверстия $D = 2$ мм в зависимости от глубины отверстия h . Аналогичный график был построен для упругопластического решения задачи для направления, соответствующего направлению действия остаточного напряжения (Рис. 2.3.3, § 2.3). На Рис 2.4.1 приведены оба графика, где сплошной линией показан график из упругого решения, а пунктирной – из упругопластического решения.

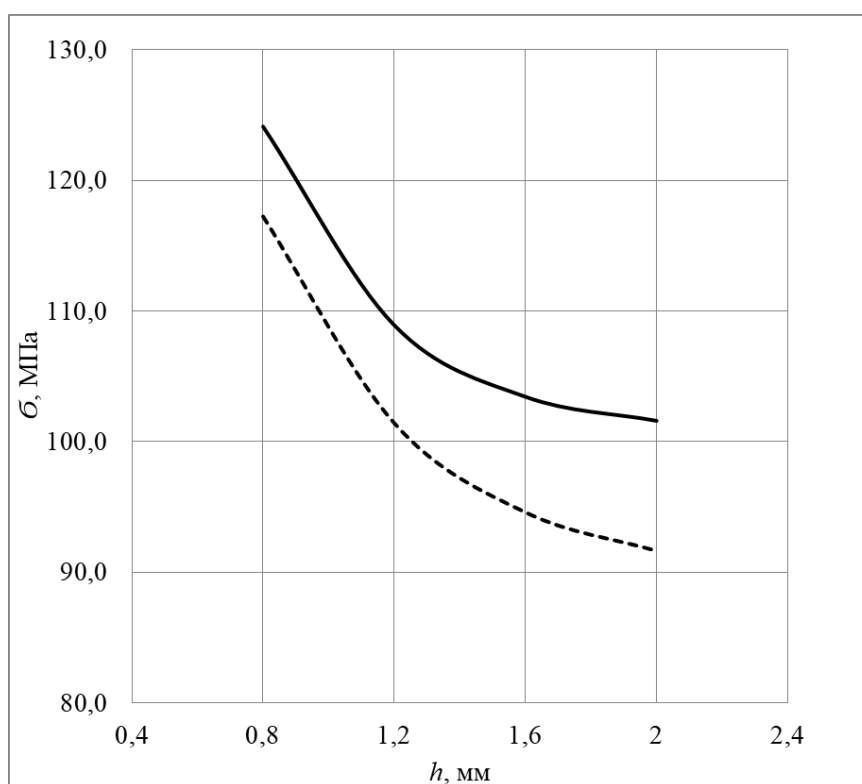


Рис. 2.4.1 – Зависимость цены полосы σ (МПа) от глубины отверстия h (мм) по результатам из упругого и упругопластического решений

Как видно из Рис. 2.4.1, полученные значения для остаточного напряжения σ из упругого решения в среднем в 1,08 раз превышают значения из упругопластического решения. Такое небольшое отличие связано с малым выходом в пластическую область в направлении, перпендикулярном в направлении действующей нагрузки при ее уровне в 225 МПа.

По результатам Рис. 2.4.1 можно внести поправку для аппроксимирующих констант, входящих в формулу (2.3.1, § 2.3), которые с учетом пластики будут иметь следующие значения: $A = 11,6$ (МПа•мм), $B = 24,5$ (МПа).

Практика измерений осуществляется при помощи измерительной системы ЛИМОН [4]. При диаметрах отверстия отличных от $D_0 = 2$ мм, в упругопластических расчетах также как и в упругих, для нахождения соответствующей цены полосы используется перемножение цены полосы, найденной для диаметра 2 мм на коэффициент (D_0 / D) , где D - диаметр примененного для измерения отверстия.

Отметим, что также как в [4], графики цены полосы получены для случая, когда направления освещения и наблюдения объекта перпендикулярны к поверхности. В случае, когда направление освещения составляет с нормалью угол $\tilde{\alpha}$, а направление наблюдения симметрично с ним относительно нормали к поверхности, цена полосы увеличивается и получается делением на $\cos \tilde{\alpha}$:

$$\sigma = \sigma_0 / \cos \tilde{\alpha} \quad (2.4.2)$$

Таким образом, полученные в [4] графики для цены полосы в зависимости от глубины отверстия обобщены на упругопластическую модель поведения материала при больших остаточных напряжениях.

Глава 3. Теоретическое моделирование осесимметричных остаточных напряжений с учетом эффекта пластичности

Конкретные экспериментальные исследования остаточных напряжений проводились на образцах цилиндрической формы с заданными уровнями остаточных напряжений, полученных посадкой цилиндра на диск. Ниже рассмотрено теоретическое моделирование осесимметричных остаточных напряжений в образцах такого типа.

§ 3.1. Уругопластическая задача Ламе. Определение уругопластической границы для цилиндра, нагруженного равномерным внешним давлением

Из общего решения для напряжений в пластине с круговым отверстием вида (1.1.18, § 1.1) рассмотрим случай, когда $P_1 = P_2 = q_0$. Откуда, получим решение для задачи типа задачи Ламе:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= q_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \\ \sigma_\theta &= q_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \\ \tau_{r\theta} &= 0\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

Из (3.1.1) видно, что выражения для напряжений не зависят от полярного угла θ . И соответственно из (1.1.20, § 1.1) напряженное состояние на контуре отверстия при $r = R$:

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_\theta = 2q_0\tag{3.1.2}$$

Откуда также можно сделать вывод, что при $q_0 = \sigma_Y / 2$ будет достигнут предел текучести с образованием пластической зоны и выражения (3.1.1) не

описывают решение в пластической зоне и справедливы только при $q_0 < \sigma_Y/2$.

Для решения упругопластической задачи Ламе рассмотрим цилиндр, который находится под действием внешнего давления q_0 , превышающего половину от предела текучести (Рис. 3.1.1).

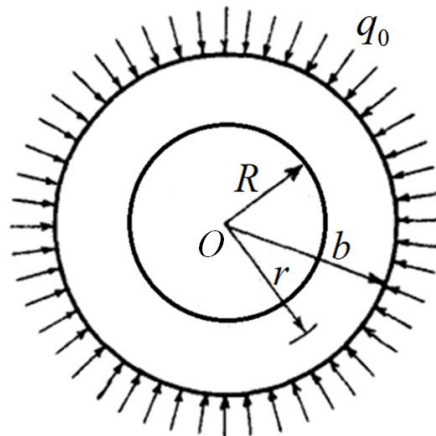


Рис. 3.1.1 – Постановка задачи Ламе для цилиндра, находящегося под действием внешнего давления q_0

На Рис. 3.1.1 R и b - внутренний и внешний радиусы цилиндра, r - произвольный радиус-вектор с началом в точке O .

Для решения задачи данной воспользуемся выкладками, представленными в [51], полученными для упругопластического цилиндра нагруженного внутренним давлением.

Значения для радиального и окружного напряжений в пластической зоне (обозначено индексом p) будем выражать через функцию $\omega = \omega(r)$ следующим образом:

$$\begin{cases} \sigma_r^p \\ \sigma_\theta^p \end{cases} = -2k \sin\left(\omega \mp \frac{\pi}{6}\right), \quad k = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (3.1.3)$$

Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение равновесия:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (3.1.4)$$

Получим дифференциальное уравнение для функции ω :

$$\frac{\cos \omega}{r} - \cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) \frac{d\omega}{dr} = 0 \quad (3.1.5)$$

Интегрируя это уравнение, имеем:

$$r^2 = \frac{C}{\cos \omega} \exp(\sqrt{3}\omega), \quad C = R^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \exp(\sqrt{3}\omega_1), \quad (3.1.6)$$

где C - постоянная интегрирования, которая определена путем использования $\omega = \omega_1$ при $r = R$. Из краевого условия равенства нулю радиальной компоненты напряжения на контуре отверстия находим, что $\omega_1 = \pi / 6$.

Следовательно, получим:

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cos \omega} \exp(\sqrt{3}(\omega - \omega_1)) \quad (3.1.7)$$

На упругопластической границе ($r = r_Y$) выражение (3.1.7) позволяет получить связь между радиусом r_Y и значением на ней функции $\omega = \gamma$:

$$\frac{r_Y^2}{R^2} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cos \gamma} \exp(\sqrt{3}(\gamma - \omega_1)) \quad (3.1.8)$$

Для напряжений в упругой зоне цилиндра выражения находим в виде [47]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r^e \\ \sigma_\theta^e \end{Bmatrix} = -q_0 + kC_1 \left(1 \mp \frac{b^2}{r^2} \right), \quad (3.1.9)$$

где C_1 - некоторая постоянная, индексами e обозначены напряжения в упругой области.

Приравнивая выражения (3.1.3) и (3.1.9) при $r = r_Y$ получаем два соотношения, исключая из которых постоянную

$$C_1 = -\frac{r_Y^2}{b^2} \cos \gamma \quad (3.1.10)$$

Получим следующее уравнение:

$$\sin \gamma - \frac{r_Y^2}{b^2 \sqrt{3}} \cos \gamma = \chi_0, \quad \chi_0 = \frac{q_0}{\sigma_Y} \quad (3.1.11)$$

Подставляя (3.1.7) в (3.1.11), получим уравнение относительно функции γ :

$$\sin \gamma - \frac{R^2}{2b^2} \exp\left[\sqrt{3}(\gamma - \omega_1)\right] = \chi_0 \quad (3.1.12)$$

Зная значение γ из уравнения (3.1.12) и подставив его в (3.1.8), определяется радиус пластической зоны r_Y .

Далее, рассмотрим численный пример, когда $q_0 = 0,9\sigma_Y$, $R = 1,5$ мм, $b = 10$ мм. Откуда, численное решение уравнения (3.1.12) дает $\gamma = 1,215$, а его подстановка в (3.1.8) – значение для радиуса пластической зоны $r_Y = 4,3$ мм.

Данный результат отличается от решения в упругой постановке [50], по которому радиус пластической зоны составляет $r_Y = 3,05$ мм.

§ 3.2. Задача Гадолина в упругой постановке

Задача Гадолина рассматривается в [128] для составного цилиндра с напряжением от сборки предварительным натягом.

Такую сборку можно осуществить с помощью предварительного нагрева. В этом случае один из цилиндров нагревают настолько, чтобы его можно было свободно надеть на другой. При остывании внешний цилиндр II сожмет внутренний I, а сам будет испытывать внутреннее давление. На Рис. 3.2.1 показаны эпюры радиального σ_r и окружного σ_θ напряжений данной конструкции.

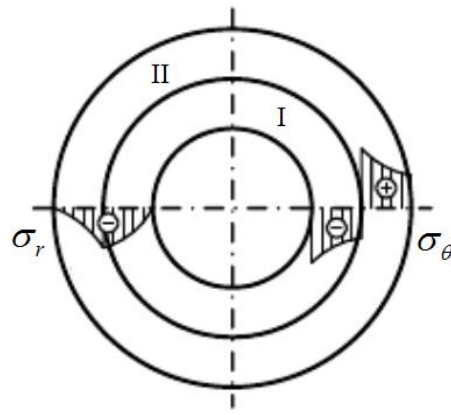


Рис. 3.2.1 – Эпюры радиального σ_r и окружного σ_θ напряжений для составного цилиндра

На сегодняшний день имеются методы определения остаточных напряжений, которые широко применяются для образцов, полученные посадкой с натягом цилиндра на диск [129-133].

В экспериментах по оценке влияния пластичности на спекл-интерферометрические измерения осесимметричных остаточных напряжений по нормальным перемещениям поверхности образцов использовались составные дисковые образцы, полученные методом посадки при глубоком охлаждении внутренней детали и нагреве наружного цилиндра, в которых создавались центральные зондирующие отверстия [134]. Для того чтобы использовать эти образцы и для проявления несимметричных напряжений, необходимо определить, какое же напряженное состояние устанавливается в них после высверливания зондирующего отверстия.

Далее предлагается рассмотреть частный случай задачи Гадолина, когда внутри имеется диск I без отверстия, на который также насаживается цилиндр II (Рис. 3.2.2).

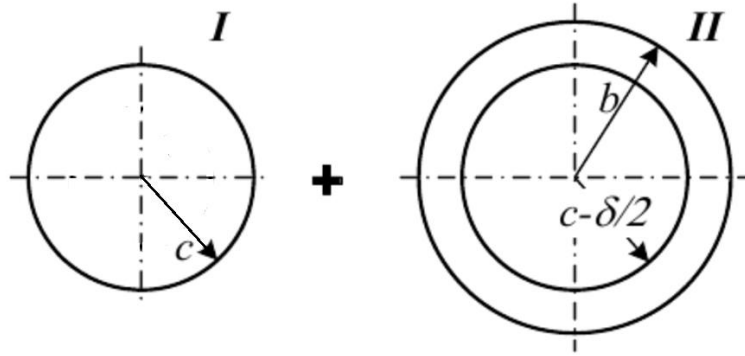


Рис. 3.2.2 – Схема посадки диска I в цилиндр II

На Рис. 3.2.2 c - радиус сплошного диска I, b - внешний радиус цилиндра II, δ - величина диаметрального натяга.

После сборки величина контактного давления q_0 при напряжённом состоянии в составном образце (диске) в пределах линейной упругости связана с габаритами образца формулой [51]:

$$q_0 = \frac{\delta E}{4c} \left(1 - \frac{c^2}{b^2} \right) \quad (3.2.1)$$

При этом, во внутреннем диске I будут создаваться напряжения

$$\sigma_{Ir} = \sigma_{I\theta} = -q_0, \quad (3.2.2)$$

а во внешнем кольце II (при $c \leq r \leq b$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{IIr}^e \\ \sigma_{II\theta}^e \end{array} \right\} = \frac{q_0 c^2}{b^2 - c^2} \left(1 \mp \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (3.2.3)$$

После создания в составном образце центрального отверстия радиуса R контактное давление q_0 будет снижено до величины q , определяемой в упругом случае следующей формулой [116]:

$$q = q_0 \left(1 - \frac{R^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{R^2}{b^2} \right)^{-1} \quad (3.2.4)$$

При обжатии упругим кольцом контактное давление в случае образования пластической зоны должно снизиться на большую величину, чем в чисто упругом случае. Соответственно, изменится и положение границы пластической зоны.

§ 3.3. Задача Гадолина в упругопластической постановке

При высверливании зондирующего отверстия в диске с фиксированным контактным давлением, большим половины предела текучести, в окрестности отверстия образуется кольцевая пластическая зона, радиус которой при сохранении обжатия определяется по методике, описанной в § 3.1. По этой же методике могут быть выписаны выражения для напряжений в пластической и упругой зонах образовавшегося внутреннего цилиндра. Однако в случае соединения двух цилиндров контактное давление будет неизвестной величиной. Для ее нахождения необходимо привлечь выражения для напряжений и перемещений в охватывающем упругом цилиндре (принимается, что предел текучести его материала намного выше, чем предел текучести σ_y материала внутреннего цилиндра), а также – условие обеспечения заданного натяга на стыке колец.

Ниже на Рис. 3.3.1 показана схема постановки задачи Гадолина в упругопластической постановке. Из рисунка видно, что наличие сквозного отверстия радиуса R создает во внутреннем цилиндре I некую область пластичности радиуса r_y .

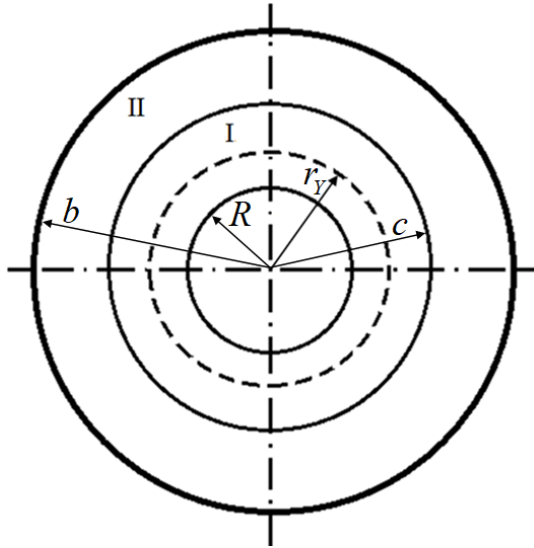


Рис. 3.3.1 – Схема постановки задачи Гадолина в упругопластической постановке

Напряжения во внешнем цилиндре II запишем в виде (3.2.3, § 3.2) с заменой q_0 на неизвестное давление q_1 . Радиальные перемещения в наружном кольце и в упругой части внутреннего кольца определим через окружную деформацию, которая при плоском напряженном состоянии имеет вид в соответствии с (3.4.1, § 3.4). Следовательно, выражение для перемещения в наружном цилиндре II будет иметь вид:

$$u_{II} = \frac{q_1 c^2 r}{(b^2 - c^2) E} \left(1 - \nu + (1 + \nu) \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (3.3.1)$$

Во внутреннем цилиндре I напряжения в упругой области будут определяться в соответствии с (3.1.9, 3.1.10, § 3.1):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{lr}^e \\ \sigma_{l\theta}^e \end{Bmatrix} = -q_1 - \frac{kr_Y^2}{c^2} \cos \gamma \left(1 \mp \frac{c^2}{r^2} \right) \quad (3.3.2)$$

Откуда радиальные перемещения в упругой зоне для цилиндра I:

$$u_I = -\frac{r}{E} \left[(1 - \nu) q_1 + \left(\frac{1 - \nu}{c^2} + \frac{1 + \nu}{r^2} \right) kr_Y^2 \cos \gamma \right] \quad (3.3.3)$$

Выполняя условие для натяга на контакте двух цилиндров по формулам (3.3.1) и (3.3.3), получим уравнение для определения давления q_1 [51]:

$$\chi_1 = \chi_0 - \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) \frac{r_Y^2 \cos \gamma}{c^2 \sqrt{3}}, \quad \chi_1 = \frac{q_1}{\sigma_Y} \quad (3.3.4)$$

Из уравнения (3.3.4) аналогично (3.1.12 § 3.1) получим уравнение относительно параметра γ :

$$\sin \gamma = \chi_0 + \frac{R^2}{2b^2} \exp\left[\sqrt{3}(\gamma - \omega_1)\right] \quad (3.3.5)$$

Зная значение γ из уравнения (3.3.5) и подставив его в (3.1.8, § 3.1), определяется радиус пластической зоны r_Y , а затем из уравнения (3.3.4) – контактное давление q_1 .

Рассмотрим численный пример по определению контактного давления q_1 . Для этого возьмем составное кольцо с параметрами: $R = 1,5$ мм, $c = 10$ мм, $b = 25$ мм, $E = 210$ ГПа, $\delta = 51$ мкм (величина натяга в составном диске без отверстия, вычисленное по формуле (3.2.1, § 3.2) при контактном давлении $q_0 = 0,9\sigma_Y$, где $\sigma_Y = 250$ МПа).

Откуда, численное решение уравнения (3.3.5) дает $\gamma = 1,132$, а его подстановка в (3.1.8, § 3.1) – значение для радиуса пластической зоны $r_Y = 3,8$ мм. Окончательно, по формуле (3.3.4) получаем $q_1 = 0,87\sigma_Y$.

Следовательно, при заданном натяге 51 мкм и вызванном им контактном давлении $q_0 = 0,9\sigma_Y$ во внутреннем диске без отверстия, создание центрального отверстия вызывает образование вокруг него пластической зоны с заметно меньшим радиусом, чем при расчете исходя из решения задачи Ламе с первоначальным контактном давлением: 3,8 мм против 4,3 мм. Само контактное давление из решения задачи Гадолина в упругопластической постановке оказывается ниже на 3,3% по сравнению с исходным давлением, создаваемым при заданном

натяге в диске без отверстия. Отметим, что расчет по решению задачи Гадолина в упругой постановке также дает снижение контактного давления в сравнении с расчетом для сплошного диска. Однако величина этого снижения в полтора раза меньше, чем при учете пластической зоны. Эта разница увеличивается с приближением контактной нагрузки к пределу текучести материала внутреннего кольца.

§ 3.4. Определение деформаций и нормальных перемещений в упругопластической задаче Гадолина

Для начала определим перемещения в упругой зоне. В упругой зоне выражения для деформаций определяются из закона Гука для плоского напряженного состояния [135]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{du}{dr} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_\theta + \sigma_r)\end{aligned}\tag{3.4.1}$$

Откуда, с учетом (3.1.3, § 3.1) деформации будут определяться по формулам:

$$\begin{aligned}\begin{cases} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{cases} &= -\frac{2k}{E} \left(\sin\left(\omega \mp \frac{\pi}{6}\right) - \nu \sin\left(\omega \pm \frac{\pi}{6}\right) \right) \\ \varepsilon_z &= \frac{2k\nu}{E} \sqrt{3} \sin \omega\end{aligned}\tag{3.4.2}$$

Из ассоциированного закона течения [46] имеем следующие уравнения:

$$\varepsilon_r^p = \varepsilon_\theta^p \frac{2\sigma_r - \sigma_\theta}{2\sigma_\theta - \sigma_r}, \quad \varepsilon_r^p + \varepsilon_\theta^p + \varepsilon_z^p = 0\tag{3.4.3}$$

Далее с учетом (3.1.3) получим соотношения между радиальной и окружной компонентами деформаций:

$$\varepsilon_r^p = \varepsilon_\theta^p f^-(\omega) / f^+(\omega), \quad f^\pm(\omega) = \sin \omega \pm \sqrt{3} \cos \omega \quad (3.4.4)$$

Полные деформации в пластической зоне определяются как сумма упругой и пластической составляющих (3.4.2) и (3.4.4) соответственно.

Запишем уравнение совместности для деформаций в виде [46]:

$$r \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} = \varepsilon_r - \varepsilon_\theta \quad (3.4.5)$$

С учетом (3.4.4) получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varepsilon_\theta^p}{d\omega} + \sqrt{3}\varepsilon_\theta^p = \frac{2\sigma_Y}{E} \cos \omega \quad (3.4.6)$$

Интеграл уравнения (3.4.6) при условии, что $\omega = \gamma$ дает:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\pm &= \frac{\sigma_Y}{2E} \left\{ f^\mp(\omega) - \exp\left[\sqrt{3}(\gamma - \omega)\right] f^+(\gamma) \right\}, \quad \varepsilon_+ = \varepsilon_r^p, \quad \varepsilon_- = \varepsilon_\theta^p \\ \varepsilon_z^p &= -\frac{\sigma_Y}{2E} \left\{ 1 - \exp\left[\sqrt{3}(\gamma - \omega)\right] \frac{f^+(\gamma)}{f^+(\omega)} \right\} \sin \omega \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Полные деформации в пластической зоне определяются из равенств (3.4.3), (3.4.7) и соотношений $\varepsilon_r = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^p$, $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p$, $\varepsilon_z = \varepsilon_z^e + \varepsilon_z^p$.

Далее рассмотрим пример определения нормальных перемещений w на поверхности цилиндра.

Из соотношений (3.4.1) следует, что перемещений w находятся в результате интегрирования деформаций ε_z по толщине цилиндра. Следовательно, полагая, что $w = 0$ при $z = 0$, и толщине цилиндра равной H получим:

$$w = H \varepsilon_z / 2 \quad (3.4.8)$$

На Рис. 3.4.1 представлено сравнение графиков нормальных перемещений для стального цилиндра ($E = 210$ ГПа, $\sigma_Y = 250$ МПа, $\nu = 0,3$) с радиусами $R = 1,5$ мм, $b = 10$ мм в упругопластических постановках: при $q_0 = 0,9\sigma_Y$ - задача Ламе и $q_0 = 0,87\sigma_Y$ - задача Гадолина.

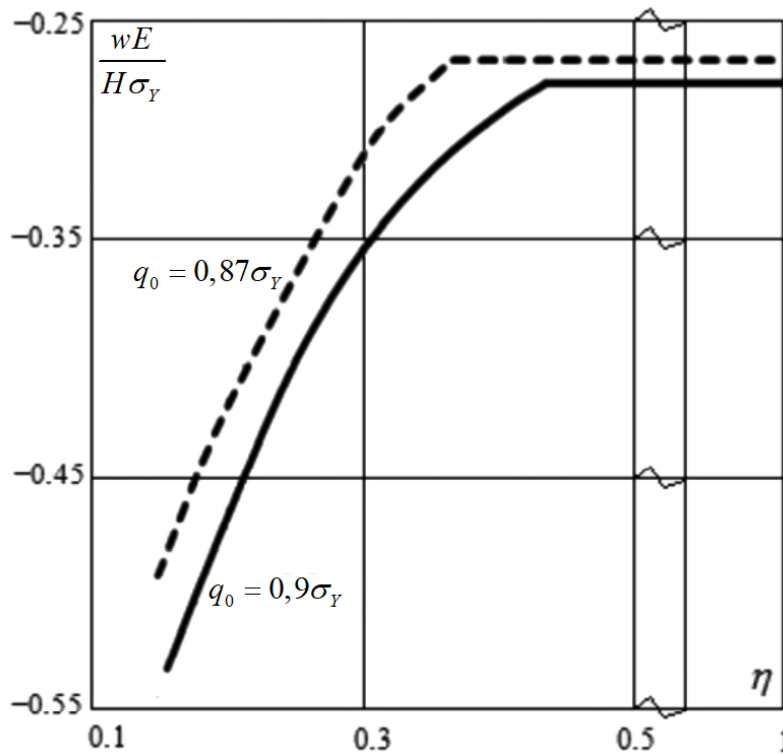


Рис. 3.4.1 – Графики нормальных перемещений на поверхности упругопластического цилиндра

Графики на Рис. 3.4.1 представлены в безразмерных величинах, где $\eta = r / b$. Из рисунка также видно, что перемещения в упругой области постоянны, затем на радиусе упругопластической зоны происходит перелом кривой, где с последующим приближением к внутреннему радиусу перемещения достигают наибольшее значение.

По полученным результатам можно сделать вывод, что при увеличении контактного давления радиус пластической зоны увеличивается, также увеличиваются нормальные перемещения, как в упругой, так и в пластической зонах.

Из приведенных графиков также видны достаточно существенные различия решений задачи Гадолина в упругой и упругопластической постановках.

Глава 4. Итерационная процедура решения упругопластических задач

В этой главе рассмотрен ряд решения упругопластических задач с помощью итерационной процедуры, которая состоит в явном аналитическом представлении для напряжений в пластической области и итерационной процедуры численного решения в упругой области при заранее неизвестной границе пластической зоны. Форма упругопластической границы определяется сшивкой решений в упругой и пластической областях по условиям непрерывности напряжений. На каждом шаге итерационной процедуры происходит уточнение положения границы между упругой и пластическими областями.

§ 4.1. Аналитическое итерационное решение упругопластической задачи Ламе

Итерационная процедура решения упругопластической задачи Ламе для радиальной (σ_r) и окружной (σ_θ) компонент напряжений плоского напряженного состояния в кольце с радиусами R , b ($b > R$), находящегося под действием равномерного внешнего давления $q_0 > \sigma_Y / 2$ строится на основе упругого решения этой задачи [50]:

$$\begin{cases} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{cases} = \pm \frac{A}{r^2} + B, \quad A = \frac{(q_0 - q_1)r_1^2 b^2}{b^2 - r_1^2}, \quad B = \frac{q_1 r_1^2 - q_0 b^2}{b^2 - r_1^2} \quad (4.1.1)$$

Здесь: r - радиальная координата с началом в центре кольца; в исходном приближении: $r_1 = R$, $q_1 = 0$.

Вычислив с помощью выражений (3.1.1) эквивалентное напряжение

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta}$$

и приравняв его пределу текучести σ_Y , получим приближённое выражение для радиуса (r_Y) пластической зоны:

$$r_Y^4 = 3A^2 / (r_Y^2 - B^2) \quad (4.1.2)$$

На Рис. 4.1.1 показаны этапы итерационной процедуры: *a* - исходная расчетная схема для кольца, нагруженного по внешнему контуру, *б* - промежуточная расчетная схема для упругой задачи, в которой $r_1 = r_Y$, $q_1 = \sigma_r^p$ полученные на предыдущем этапе решения (показано штриховой линией на Рис. 4.1.1, *a*).

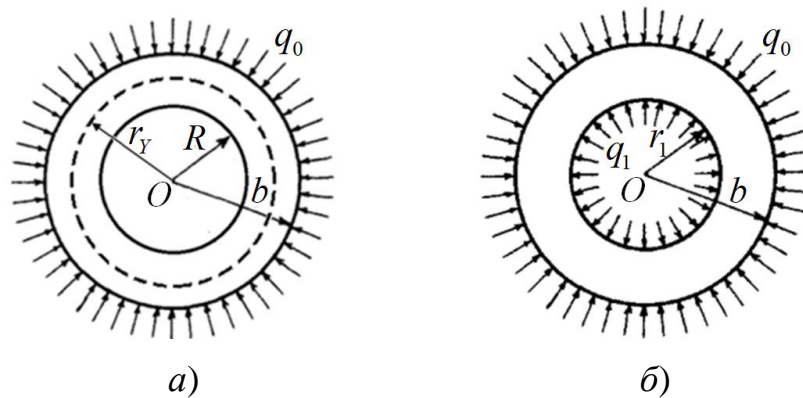


Рис. 4.1.1 – Расчетные схемы по этапам итерационной процедуры упруго-пластической задачи Ламе

Для второй итерации рассматривается упругое кольцо с внутренней границей, проходящей по окружности радиуса r_1 , вдоль которой задаётся давление q_1 , равное радиальной компоненте напряжений в пластической зоне σ_r^p . Выражения для окружной и радиальной компонент напряжений в пластической зоне могут быть выписаны, например, из [49]:

$$\begin{aligned}\sigma_r^p &= -\frac{2 \sin \psi}{\sqrt{3}} \sigma_Y \\ \sigma_\theta^p &= -\left(\frac{\sin \psi}{\sqrt{3}} + \cos \psi \right) \sigma_Y \\ r &= R \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} \frac{\exp(\psi \sqrt{3} / 2)}{\sqrt{\sin(\pi / 3 - \psi)}}\end{aligned}\tag{4.1.3}$$

Здесь $\psi = \psi(r)$ - функция радиальной координаты, зависящая от r неявным образом. Задав в ней $r = r_Y$, находим $\psi = \psi_Y$ и далее - значение давления q_1 .

По найденным значениям q_1 и $r_1 = r_Y$, используя формулу (4.1.2), определяем второе приближение для радиуса пластической зоны. Последующие приближения выполняются подобно описанному.

В качестве первого примера рассмотрим итерационную процедуру при внешней нагрузке $q_0 = 0,9\sigma_Y$ и радиусах кольца $R = 1,5$ мм, $b = 10$ мм. Результаты расчета для 6 итераций сведены в Табл. 4.1.1.

Табл. 4.1.1

Номер итерации	r_Y , мм	$\psi(r_Y)$	q_1 / σ_Y
1	3,03	0,509	0,563
2	4,067	0,665	0,712
3	4,295	0,69	0,735
4	4,307	0,692	0,736
5	4,296	0,69	0,735
6	4,309	0,691	0,736

Из Табл. 4.1.1 видно, что начиная с 4-й итерации, значения радиуса пластической зоны стабилизируются в окрестности $r_Y = 4,3$ мм. Это значение

совпадает со значением радиуса пластической зоны, найденным в § 3.1 из аналитического решения упругопластической задачи Ламе.

§ 4.2. Численно-аналитическое итерационное решение упругопластической задачи Ламе

Для отработки численного решения для упругой области эта же задача решалась с помощью метода конечных элементов.

Численно-аналитическое решение задачи Ламе проводилось с использованием программной среды ANSYS Workbench версии 2019 R3 с использованием расчетного модуля Static Structural. Для моделирования расчетной сетки для кольца с внутренним радиусом отверстия $R = 1,5$ мм и внешним $b = 10$ мм достаточно было, вследствие симметрии, взять только 1/4 часть (Рис. 4.2.1).

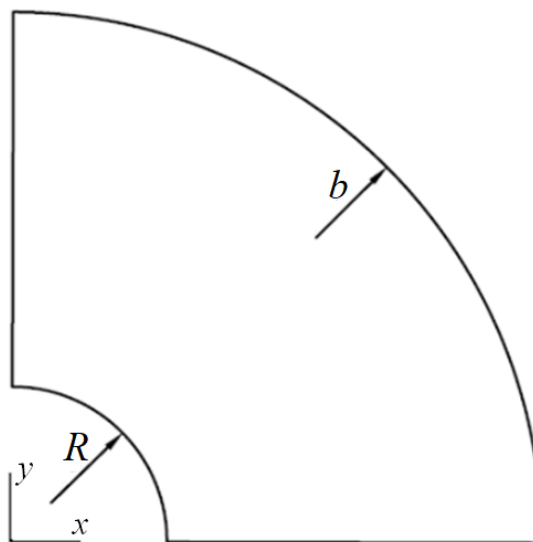


Рис. 4.2.1 – Расчетная область для решения МКЭ упругопластической задачи Ламе по этапам итерационной процедуры

После построения модели, были заданы свойства материала. Для данной задачи было задано идеальное упругопластическое тело со следующими характеристиками: $E = 210$ ГПа, $\nu = 0,3$, $\sigma_y = 250$ МПа. Вычислительная сетка была выбрана четырехугольной с средним значением длины элемента ребра 0,02 мм.

Сначала было получено решение задачи в упругопластической постановке с наложением следующих граничных условий: внешнее давление $q_0 = 0,9\sigma_Y$; край отверстия свободен от усилий; стороны оснований модели, прилегающих к отверстию, могут свободно перемещаться только вдоль своих осей (в силу симметрии модели).

Результат численного решения в упругопластической постановке дал для радиуса пластической зоны значение $r_Y = 4,29$ мм, что хорошо согласуется с аналитическим решением, полученным ранее в § 4.1.

Следующим этапом являлось итерационное решение этой же задачи с исходной упругой постановкой, но с использованием численного модуля программы ANSYS. Результаты расчета для 5 итераций сведены в Табл. 4.2.1.

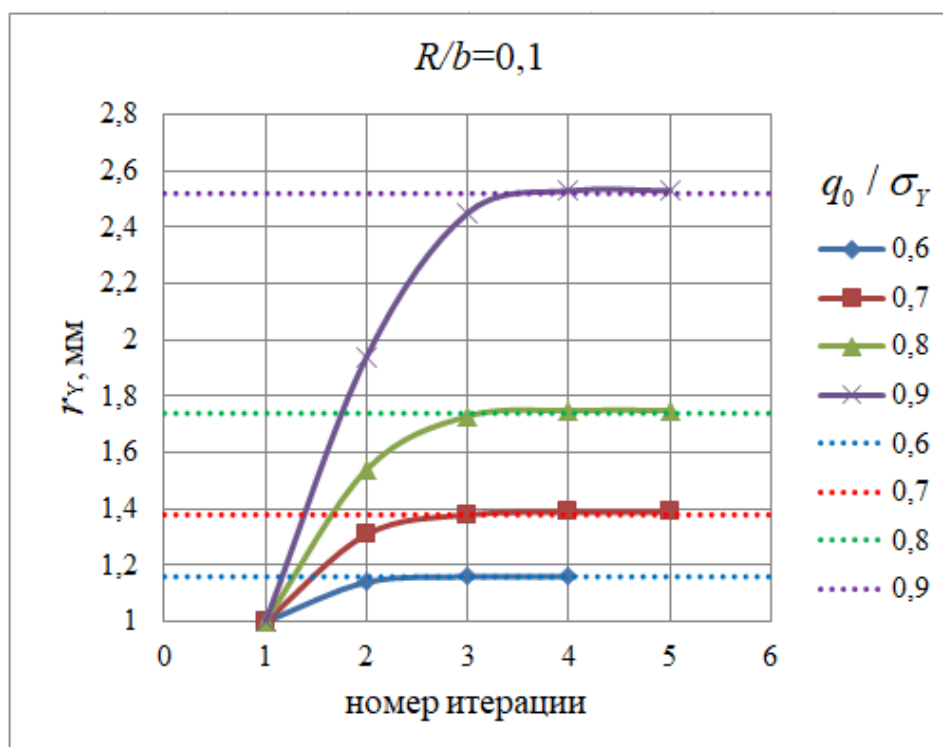
Табл. 4.2.1

Номер итерации	r_Y , мм	$\psi(r_Y)$	q_1 / σ_Y
1	3,03	0,509	0,563
2	4,08	0,664	0,711
3	4,288	0,689	0,734
4	4,305	0,691	0,736
5	4,305	0,691	0,736

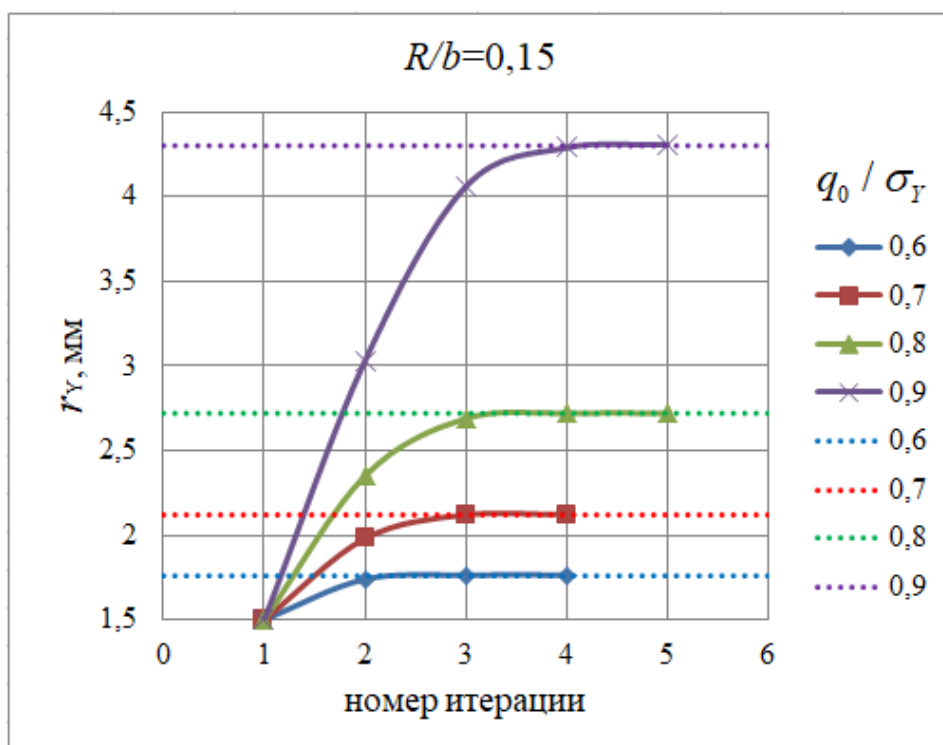
Видно, что в первом приближении радиус пластической зоны совпадает с аналогичным значением, полученным из упругого решения. Дальнейшие приближения также оказались близки к полученным аналитическим методом. Начиная с 4-й итерации значение радиуса пластической зоны совпало со значением радиуса пластической зоны, найденным из аналитического решения упругопластической задачи Ламе и далее не менялось.

Аналогичные итерационные решения упругопластической задачи Ламе по нахождению радиуса r_Y с использованием МКЭ были выполнены и при других вариантах значений q_0 и R . Эти значения и результаты расчетов представлены

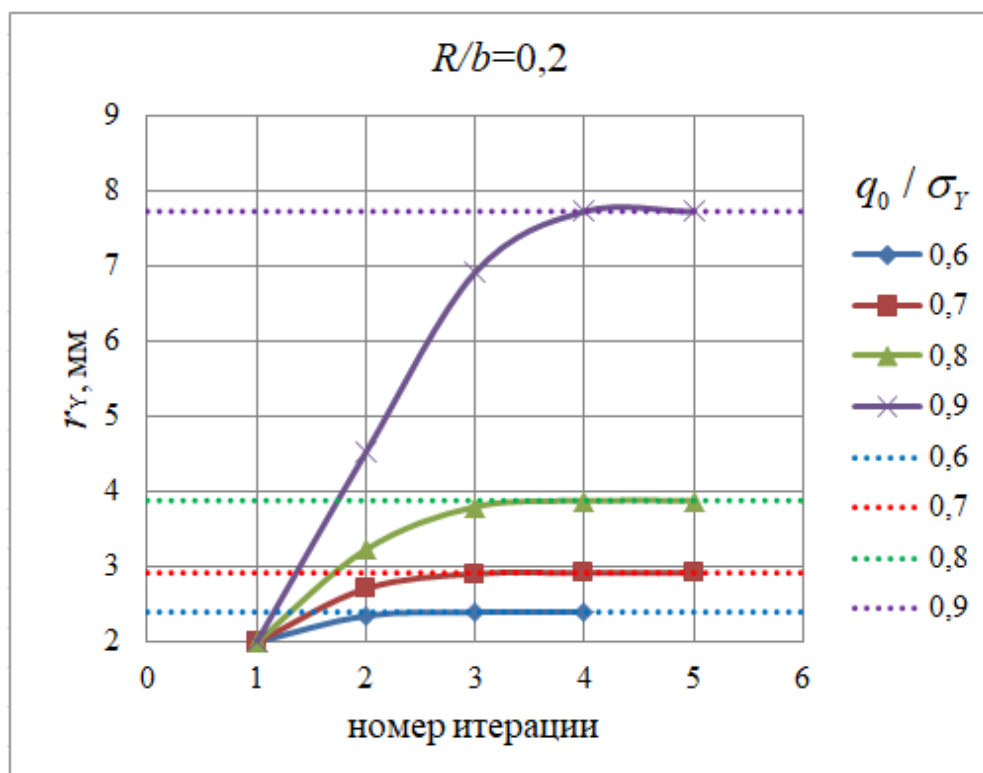
в виде графиков на Рис. 4.2.2 (сплошными линиями), где также показаны (пунктиром) результаты точного аналитического решения соответствующих задач Ламе в упругопластической постановке по методике [51].



а)



б)



в)

Рис. 4.2.2 – Результаты решения упругопластической задачи Ламе при различном соотношении q_0 / σ_Y : а) – при $R = 1$ мм, б) – при $R = 1,5$ мм, в) – при $R = 2$ мм

Как видно из приведенных графиков сходимость к точным аналитическим решениям для радиуса r_Y наступает на 3-й и 4-й итерациях в зависимости от значений внешнего давления q_0 и внутреннего радиуса кольца R . Можно также отметить, что максимальное отклонение радиуса пластической зоны r_Y не превышает 0,72% от значения, полученного из точного решения.

Предложенный подход будет впоследствии обобщен для реализации полуаналитического решения упругопластической задачи Галина и Кирша.

§ 4.3. К вопросу о сходимости итерационной процедуры решения на примере упругопластической задачи Ламе

Ниже рассмотрены возможности аналитического доказательства сходимости итерационной процедуры упругого аналитического решения при заранее неизвестном положении границы пластической зоны.

4.3.1. Сходимость итерационного решения упругопластической задачи Ламе при малых упругопластических деформациях

Следуя работе [119], рассмотрим процедуру итерационного решения упругопластической задачи Ламе. Для этого рассмотрим кольцо, внутренний и внешний радиусы которого обозначим через R и b , находящееся под действием равномерной внешней нагрузки $q_0 = \sigma_Y / 2$, при которой возникает пластическая зона радиуса r_Y (Рис. 4.1.1, а, § 4.1).

Первое приближение для радиуса пластической зоны $r_1 = r_Y$ находится из решения исходной упругой задачи Ламе при равенстве эквивалентного напряжения пределу текучести материала кольца [117]:

$$r_1^4 = \frac{3q_0^2 R^4 b^4}{\sigma_Y^2 (b^2 - R^2)^2 - q_0^2 b^4}, \quad (4.3.1)$$

Во втором приближении решается задача Ламе для оставшейся упругой части кольца (Рис. 4.1.1, б, § 3.1) с внутренним давлением q_1 , равном радиальной компоненте напряжения в пластической зоне σ_r^p ; последняя может быть выражена через некоторую функцию $0 \leq \psi(r) < \pi/3$ через соотношения (4.1.3, § 4.1). Откуда, определив значение $\psi = \psi_1$ при $r = r_1$, получим для q_1 величину:

$$q_1 = \frac{2 \sin \psi_1}{\sqrt{3}} \sigma_Y \quad (4.3.2)$$

Второе приближение для радиуса пластической зоны находится из решения упругой задачи Ламе о действии на кольцо $r_1 \leq r \leq b$ нагрузок q_0 и q_1 при равенстве эквивалентного напряжения пределу текучести материала кольца [117]:

$$r_2^4 = \frac{3(q_0 - q_1)^2 r_1^4 b^4}{\sigma_Y^2 (b^2 - r_1^2)^2 - (q_1 r_1^2 - q_0 b^2)} \quad (4.3.3)$$

Далее итерационная процедура (4.3.2) и (4.3.3) продолжается до тех пор, пока последующее значение радиуса границы пластической зоны практически не будет отличаться от предыдущего значения.

При малых уровнях пластичности сходимость итерационной процедуры может быть показана аналитически.

1. Рассмотрим сначала предельный случай, когда $q_0 = \sigma_Y / 2$. Тогда, принимая для наглядности $b^2 \gg R^2$, из (4.1.3, § 4.1) получим $r_1 = r_Y = R$ и $\psi_1 = 0$. Соответственно, из (4.3.2) следует $q_1 = 0$. Таким образом, итерационная процедура останавливается на первом шаге. Полученное значение радиуса пластической зоны совпадает с радиусом внутреннего контура кольца, что соответствует точному решению упругопластической задачи Ламе при $q_0 = \sigma_Y / 2$ [117].

2. Рассмотрим случай, когда $q_0 = (\sigma_Y / 2)(1 + \beta)$; при этом $\beta \ll 1$, $\beta > 0$. Из формулы (4.3.1), отбрасывая члены высших порядков малости, получим:

$$r_1 = R(1 + 2\beta / 3) \quad (4.3.4)$$

Подставляя это значение радиуса пластической зоны во второе равенство (4.1.3, § 4.1), получим трансцендентное уравнение относительно ψ_1 :

$$1 + \frac{2\beta}{3} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}} \exp(\psi_1 \sqrt{3} / 2)}{\sqrt{2} \sqrt{\sin(\pi / 3 - \psi_1)}} \quad (4.3.5)$$

Ранее было установлено, что при $q_0 = \sigma_Y / 2$ на границе области пластичности $\psi_1 = 0$. При малом увеличении нагрузки естественно ожидать, что значение функции ψ на границе области пластичности будет мало отличаться от нуля. Примем её равной $\psi_1 = \kappa\beta$, где $\kappa = O(1)$. Тогда, раскладывая числитель и знаменатель правой части (4.3.5) в ряды Маклорена и отбрасывая члены высших порядков малости, найдем, что $\kappa = 1 / \sqrt{3}$.

Соответственно, из (4.3.2) получаем:

$$q_1 = 2\beta\sigma_Y / 3 \quad (4.3.6)$$

Подставляя значения r_1 и q_1 из (4.3.4) и (4.3.6) в выражение (4.3.3), получим значение радиуса r_2 , совпадающее с r_1 , что свидетельствует о сходимости итерационной процедуры при малой пластичности уже на втором шаге.

4.3.2. Сходимость итерационного решения упругопластической задачи Ламе при больших упругопластических деформациях

Рассмотрим случай, когда $q_0 = K_0\sigma_Y$, где $0,5 < K_0 < 1$. Решая итерационную задачу, из (4.3.1) определим радиус пластической зоны в первом приближении:

$$r_1 = R\sqrt[4]{3K_0^2 / (1 - K_0^2)} \quad (4.3.7)$$

Во втором приближении, подставляя (4.3.7) в (4.1.3, § 4.1), получим трансцендентное уравнение относительно $\psi = \psi_1$:

$$\frac{K_0^2}{1 - K_0^2} = \frac{1}{4} \frac{\exp(\psi_1 2\sqrt{3})}{\sin^2(\pi / 3 - \psi_1)} \quad (4.3.8)$$

Это уравнение не имеет явного решения. Поэтому рассмотрим численно один из промежуточных случаев, например $K_0 = 1 / \sqrt{2}$. При этом значении

K_0 величина $r_1 = r_{1,0} = 1,303R$. Далее из (4.3.8) определяем $\psi_1 = 0,215$, а затем из (4.1.3, § 4.1) $q_1 = 0,246\sigma_Y$.

Подставляя найденные значения q_1 и r_1 в (4.3.3) определяем радиус пластической зоны во втором приближении $r_2 = 1,367R$. Повторяя данную процедуру еще один раз получим, $\psi_2 = 0,251$, $q_2 = 0,287\sigma_Y$, $r_3 = 1,38R$, откуда видно, что отношения R/r_1 , r_1/r_2 , r_2/r_3 равны 0,76, 0,95, 0,99. Таким образом, начиная с третьей итерации величина радиуса пластической зоны практически не изменяется.

Аналогично случаю малых пластических деформаций можно аналитически показать, что когда $K_0 = (1 + \varphi) / \sqrt{2}$, $\varphi \ll 1$, $\varphi > 0$, то выражения для радиусов пластической зоны будут отличаться от найденных при конкретном значении K_0 наличием слагаемого порядка φ . Так например значение радиуса в первом приближении даст величину $r_1 = R(1,303 + 0,99\varphi)$.

§ 4.4. Аналитическое итерационное решение упругопластической задачи Галина

Следуя работе [123], рассмотрим задачу Галина о двусосном растяжении пластины с отверстием радиуса R и внешних растягивающих усилий P_1 и P_2 (Рис. 4.4.1).

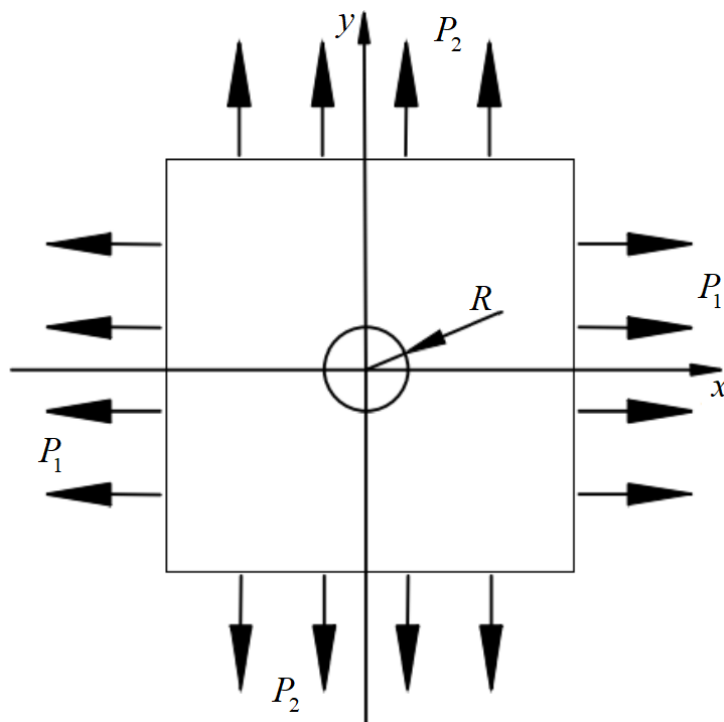


Рис. 4.4.1 – Распределение растягивающих усилий для задачи Галина

Воспользовавшись критерием текучести Треска для плоской деформации [58]:

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = 4k^2 \quad (4.4.1)$$

где k - половина от предела текучести σ_Y , с учетом упругого аналитического решения данной задачи для напряжений в полярных координатах (1.1.18, § 1.1), найдем параметрическое уравнение для определения границы зоны пластичности:

$$(P_1 - P_2)(3R^4 - 2R^2r^2 + r^4)\cos 2\theta + R^2r^2(P_1 + P_2) = 2kr^4 \quad (4.4.2)$$

Из (4.4.2) видно, что оно сводится к биквадратному уравнению:

$$A_1r^4 + A_2r^2 + A_3 = 0, \quad (4.4.3)$$

где $A_1 = (P_1 - P_2)\cos 2\theta - 2k$, $A_2 = R^2[(P_1 + P_2) - 2(P_1 - P_2)\cos 2\theta]$,

$$A_3 = 3R^4(P_1 - P_2)\cos 2\theta.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию полного охвата отверстия пластической зоной, имеет вид:

$$r = -\frac{\sqrt{-2A_1 \left(A_2 + \sqrt{-4A_1 A_2 + A_2^2} \right)}}{2A_1} \quad (4.4.4)$$

Рассмотрим пример, который использовался в [58] при определении упругопластической границы. В этом случае значения внешних усилий примем равными $P_1 = 3k$ и $P_2 = 2,4k$. Подстановка этих значений в выражение (4.4.4) с учётом (4.4.3) показывает, что граница пластической зоны в первом приближении близка к эллипсу с полуосями $1,49R$ вдоль x и $1,84R$ - вдоль y .

Точное решение упругопластической задачи Галина приводит к эллиптической границе пластической области вида [58]:

$$\frac{X^2}{(1 + \delta^*)^2} + \frac{Y^2}{(1 - \delta^*)^2} = 1 \quad (4.4.5)$$

где $\delta^* = (P_2 - P_1) / 2k$, $X = x / r_s$, $Y = y / r_s$, $r_s = R \exp[(q - 1) / 2]$, $q = (P_1 + P_2) / 2k$.

При выбранных значениях нагрузок она пересекает положительные оси декартовых координат в точках $1,64R$ (по x) и $3,045R$ - по y . Видно, что упругое решение приводит к значительным погрешностям при определении границ пластической зоны.

Рассмотрим теперь следующие приближения решения упругопластической задачи Галина итерационным методом. Здесь уже решения в упругой области будут строиться численно, а для решений в пластической зоне будут использоваться аналитические представления.

§ 4.5. Итерационное решение упругопластической задачи Галина полуаналитическим методом

Рассмотрим решение упругопластической задачи Галина предложенным итерационным методом.

Исходная расчетная модель для пластины со сторонами m и n , отверстием радиуса R и растягивающих внешних усилий P_1 и P_2 показана на Рис. 4.5.1, *a*. В силу симметрии, достаточно рассматривать четверть пластины.

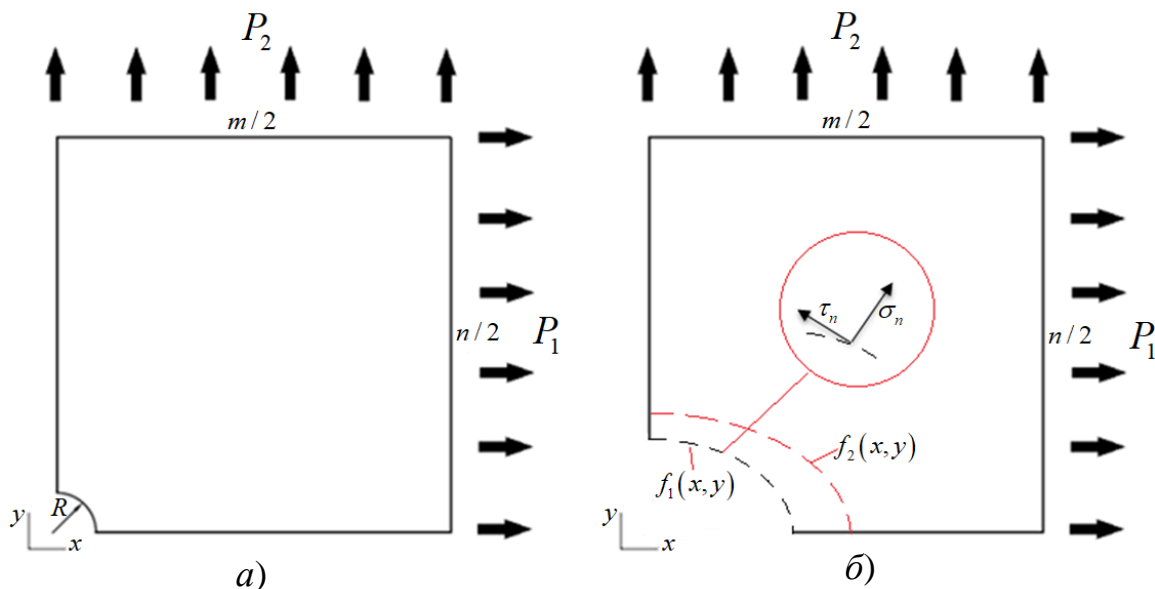


Рис. 4.5.1 – Расчетные схемы по этапам итерационной процедуры для упругопластической задачи Галина

Численное решение этой задачи в упругой постановке позволяет найти распределение для компонент напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} в зависимости от радиальной координаты r с началом в центре отверстия пластины

Используя критерий текучести Треска (4.4.1, § 4.4), получим границу пластической зоны в первом приближении в виде некоторой кривой $f_1(x, y)$ (на Рис. 4.5.1, *б* она отображена черной штриховой линией).

Для второй итерации рассматривается упругая область с внутренней границей $f_1(x, y)$, которая проходит по наружной границе зоны пластичности, найденной из первой итерации. Выражения для компонент напряжений по этой границе можно считать известными, так как внутренней границей пластической зоны является отверстие, вблизи которого напряжённое состояние может считаться осесимметричным; для напряжений в ней справедливы формулы [136]:

$$\sigma_r^p = 2k \ln(r/R), \quad \sigma_\theta^p = 2k[1 + \ln(r/R)], \quad \tau_{r\theta}^p = 0 \quad (4.5.1)$$

Здесь: σ_r^p , σ_θ^p и $\tau_{r\theta}^p$ - напряжения в полярных координатах (r, θ) , p - индекс для обозначения напряжений в пластической зоне.

Определяя проекции напряжений (4.5.1) на оси декартовой системы координат x, y по формулам перехода [134]:

$$\begin{aligned} \sigma_x^p &= \sigma_r^p \cos^2 \theta + \sigma_\theta^p \sin^2 \theta \\ \sigma_y^p &= \sigma_r^p \sin^2 \theta + \sigma_\theta^p \cos^2 \theta, \\ \tau_{xy}^p &= 0,5(\sigma_r^p - \sigma_\theta^p) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

найдем функции изменения нормальной σ_n и касательной τ_n составляющих напряжений к упругопластической границе первого приближения [50]:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x^p \cos^2 \phi + \sigma_y^p \sin^2 \phi + \tau_{xy}^p \sin 2\phi \\ \tau_n &= 0,5(\sigma_x^p - \sigma_y^p) \sin 2\phi + \tau_{xy}^p \cos 2\phi \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

(здесь ϕ - угол между нормалью к границе $f_1(x, y)$ и осью x).

На Рис. 4.5.1, б показана расчетная модель упругой задачи для второй итерации, которая приводит, с учетом критерия (4.4.1, § 4.4), к новой границе пластической зоны $f_2(x, y)$, изображенной на 4.5.1, б красной штриховой линией. Последующие итерации выполняются подобно описанной и проводятся до момента, пока не совпадут положения границы пластической зоны для двух последних итераций.

§ 4.6. Реализация численного и полуаналитического решений упругопластической задачи Галина

Рассмотрим теперь решение задачи Галина в упругопластической постановке с использованием программной среды ANSYS Workbench версии 2019 R3.

При описании поведения материала зададим следующие его свойства: предел текучести $\sigma_Y = 250$ МПа, модуль Юнга $E = 210$ ГПа. Для параметров пластины зададим $R = 1$ мм, $m = n = 50$ мм. Стороны оснований численной модели, прилегающие к отверстию (Рис. 4.5.1, § 4.5), могут свободно перемещаться только вдоль своих осей.

Вычислительная сетка была выбрана четырехугольной с квадратичной аппроксимацией переменных. Среднее значение длины элемента ребра составляет 0,1 мм. Для внешних нагрузок были приняты значения $P_1 = 3k$ и $P_2 = 2,4k$, где $k = \sigma_Y / 2$.

В результате численного решения исходной задачи получено, что пластическая зона полностью охватывает отверстие, а её граница практически совпадает с границей, полученной из точного решения, пересекая оси координат в точках $1,64R$ по оси x и $3,045R$ по оси y .

При реализации полуаналитической итерационной процедуры получено постепенное сближение приближённой границы пластической зоны с точной границей. Результаты расчетов представлены на Рис. 4.6.1.

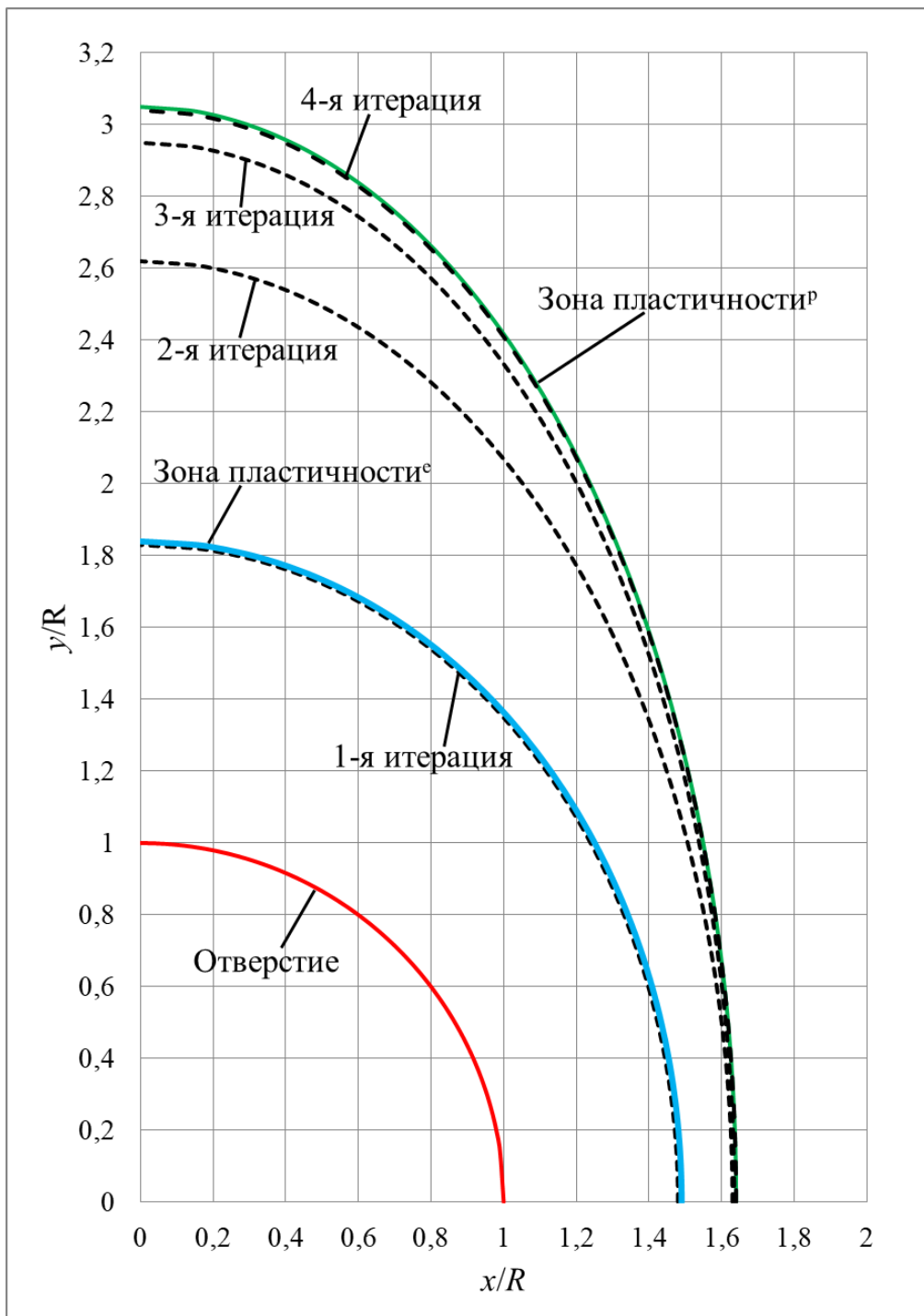
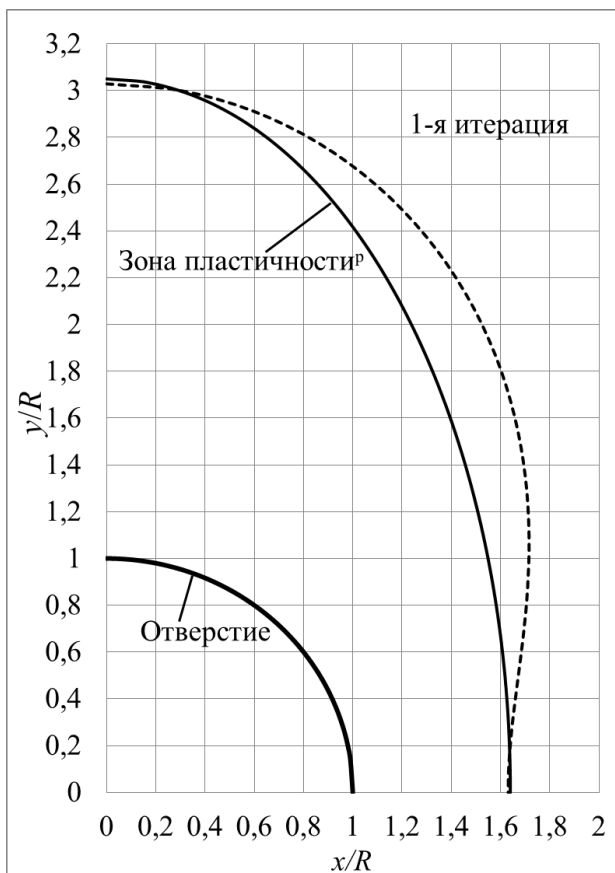


Рис. 4.6.1 – Результаты расчетов по определению зон пластичности для задачи Галина по точному, численному и полуаналитическому итерационному решениям

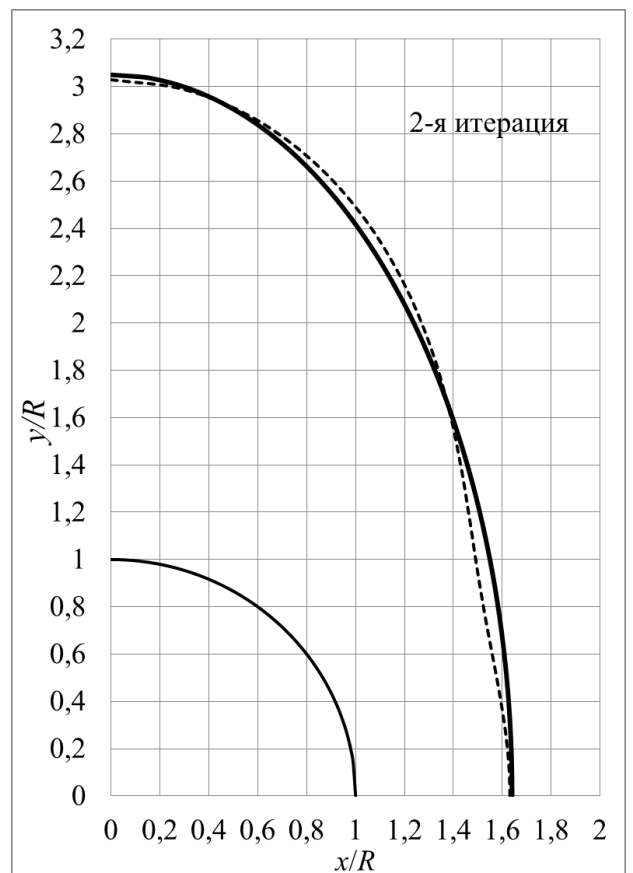
Из Рис. 4.6.1 видно, что граница зоны пластичности, определённая из численного решения упругой задачи (отображена пунктирной линией), практически совпадает с зоной пластичности^e, полученной из точного упругого решения

(4.4.4, § 4.4) - первой итерации полуаналитического метода (отображена синей сплошной линией). Далее, с ростом номера итераций, происходит постепенное сближение приближённого контура границы пластической зоны с зоной пластичности^p, полученной из точного упругопластического решения (4.4.5, § 4.4) (отображена зеленой сплошной линией) и уже на четвертой итерации наблюдается практически полное совпадение с этой границей. В последующих приближениях её положение не меняется. Ранее подобный результат был получен при тестировании метода на решении упругопластической задачи Ламе [117, 120].

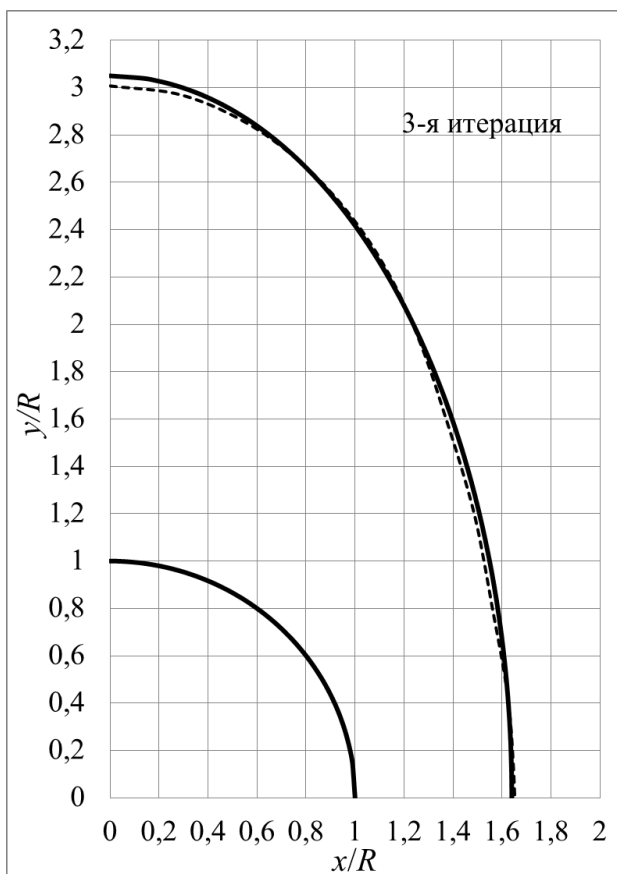
Для сравнения рассмотрим также решение той же задачи с помощью метода возмущений [65]. Результаты 4-х приближений для границы пластической зоны при значениях $P_1 = 3k$ и $P_2 = 2,4k$, полученные этим методом, показаны на Рис. 4.6.2 (а, б, в, г).



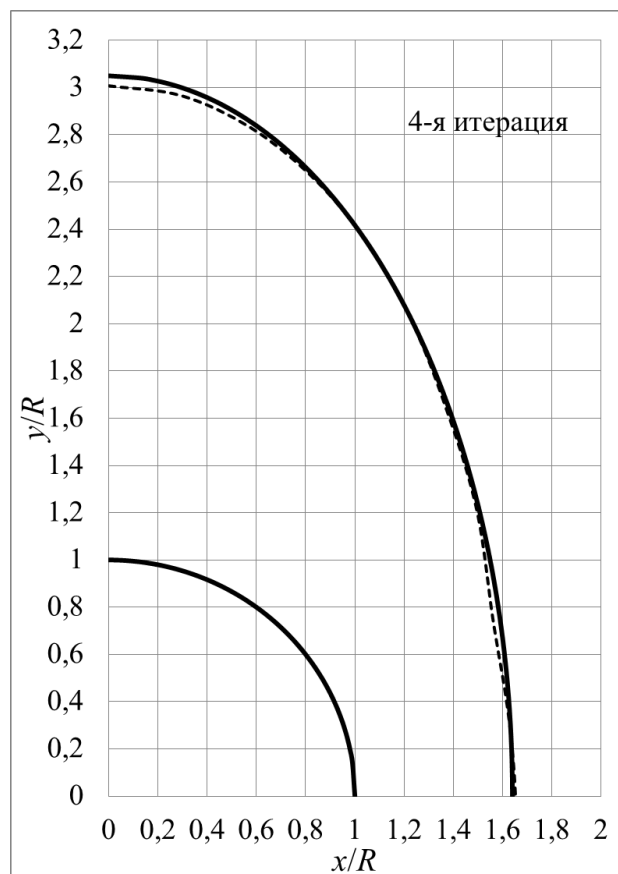
а)



б)



б)



г)

Рис. 4.6.2 – Результаты расчетов по определению зон пластичности для задачи Галина методом возмущений

На Рис. 4.6.2 сплошными линиями показаны положения отверстия и границы зоны пластичности из точного решения, пунктиром - положения границы пластической зоны для каждой итерации. Несмотря на, в целом, хорошее сближение результатов приближённого решения методом возмущений с точными, видно, что, начиная с 3-й итерации, улучшение положения границы пластической зоны не происходит. При этом, полученные кривые для границ на каждом этапе итерации описываются кривыми, которые отличны от эллипсов и могут выходить за наружные пределы зоны пластичности из точного решения. Отметим также, что метод возмущений работает только при малых отличиях в постановке задачи от осесимметричного случая и, в силу этого, не может быть использован, например, для решения задачи Кирша в упругопластической постановке.

В предложенном итерационном методе положение граница зоны пластичности постепенное приближается к границе пластичности, найденной из точного решения, и не выходит за ее пределы. Отсутствие ограничений для соотношения внешних нагрузок также говорит о преимуществе метода, а его дальнейшее применение может быть рассмотрено также и для задач в неосесимметричной постановке, где зоны пластичности не полностью охватывают отверстие.

§ 4.7. Применение комплексных потенциалов при итерационном решении задачи с учетом неравномерного распределения нагрузки по контуру отверстия

При построении итерационной аналитической процедуры решения задачи о растяжении пластины с круговым отверстием в упругопластической постановке с использованием метода уточняемого положения упругопластической границы требуется решение серии упругих задач о растяжении пластины с отверстиями разной формы и разным способе приложения нагрузок по их контуру.

Рассмотренная ранее задача Галина показала, что уже после первого шага итерационной процедуры, образуется промежуточная упругопластическая граница, отличная от круговой, которая подвержена действию неравномерно распределённых нормальной и касательной компонент напряжений из пластической зоны. Рассматривая упругую область вне этой границы как пластину с отверстием, контур которого совпадает с контуром упругопластической границы, получаем во втором и последующих приближениях итерационного метода упругую задачу для внешности такого отверстия при известной, но неравномерной нагрузке его контура с условием равенства нулю главного вектора нагрузки [137]. С помощью конформного отображения данной односвязной области на внешность единичного круга, решение такой задачи может быть сведено к решению задачи для области, ограниченной окружностью.

В качестве примера на Рис. 4.7.1 показано распределение нагрузки по контуру упругопластической границы первого приближения, аппроксимированное функцией:

$$P = P_0 + \tilde{P}_2 \cos 2\theta \quad (4.7.1)$$

где P_0 - постоянная составляющая, \tilde{P}_2 - амплитуда давления, зависящего от полярного угла θ .

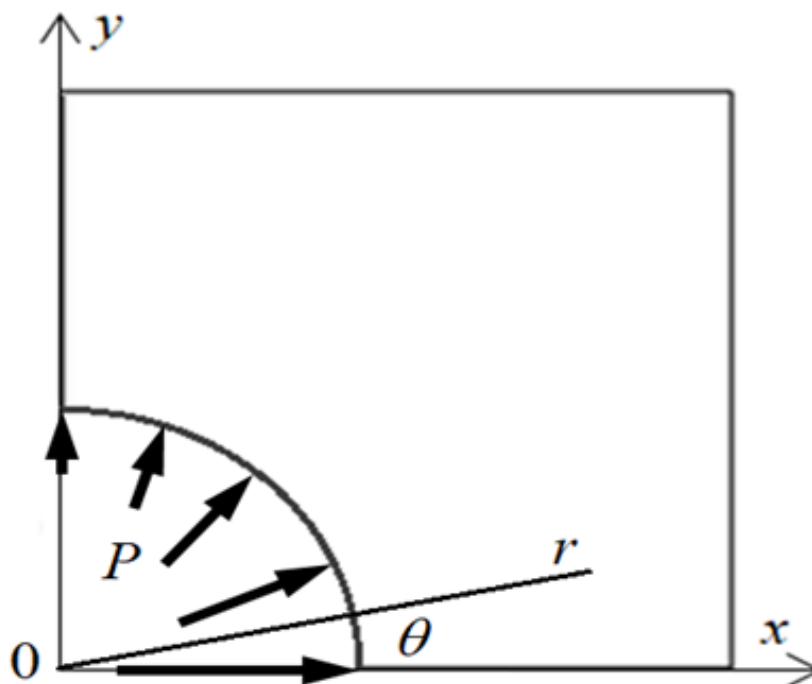


Рис. 4.7.1 – Распределение давления по контуру кругового отверстия в пластине

Для P_0 и \tilde{P}_2 приняты значения $P_0 = 1,2k$, $\tilde{P}_2 = 0,4k$ (k - половина предела текучести материала пластины). Эти значения получены после реализации первого приближения итерационного метода в модельной упругопластической задаче Галина о двухосном растяжении бесконечной пластины с круговым отверстием радиуса R при выбранных им расчётных значениях параметров нагрузки на бесконечности (§ 4.4). Сама упругопластическая граница при этом совпадает с эллипсом, имеющим полуоси $1,49R$ вдоль x и $1,84R$ - вдоль y .

Конформное отображение области вне эллиптической границы на внешность круга даётся формулой [137]:

$$\omega(\zeta) = \tilde{R} \left(\zeta + \frac{\tilde{m}}{\zeta} \right), \quad 0 \leq \tilde{m} < 1 \quad (4.7.2)$$

Окружности $|\zeta| = 1$ соответствует эллипс с центром в начале координат и полуосями $\tilde{a} = \tilde{R}(1 - \tilde{m})$, $\tilde{b} = \tilde{R}(1 + \tilde{m})$, где \tilde{a} и \tilde{b} определены вдоль осей x и y соответственно.

Рациональным способом решения задачи для внешности круга является представление неизвестных функций в виде степенных рядов с нахождением неизвестных коэффициентов при удовлетворении граничным условиям [137, 138]. Рассмотрим решение этой задачи при неравномерном давлении по контуру отверстия вида (4.7.1).

В общем случае аналитическое решение задачи теории упругости для бесконечной плоскости с круговым отверстием можно свести к определению двух функций комплексного переменного $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ ($z = re^{i\theta}$) которые, при распределении (4.7.1) давления по контуру отверстия, должны удовлетворять граничному условию [137]:

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} - e^{2i\theta} [\bar{t}\Phi'(t) + \Psi(t)] = -P, \quad t = Re^{i\theta} \quad (4.7.3)$$

Функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ могут быть представлены в виде степенных рядов:

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n z^{-n}, \quad \Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}'_n z^{-n} \quad (4.7.4)$$

с коэффициентами \tilde{a}_n , \tilde{a}'_n подлежащими определению.

Заданную на границе функцию нагрузки (4.7.1) представим в виде комплексного ряда Фурье:

$$P(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{in\theta}, \quad A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\theta) e^{-in\theta} d\theta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.7.5)$$

Подстановка выражений (4.7.4), (4.7.5) в граничное условие (4.7.3) приводит к системе уравнений для определения неизвестных коэффициентов. Выпишем первые из них:

При $e^{i\theta}$ и $e^{2i\theta}$:

$$2\tilde{a}_0 - \frac{\tilde{a}'_2}{\tilde{R}^2} = A_0, \quad \frac{\overline{\tilde{a}_1 - \tilde{a}'_1}}{\tilde{R}} = A_1, \quad \frac{\overline{\tilde{a}_2}}{\tilde{R}^2} - \tilde{a}'_0 = A_2, \quad (4.7.6)$$

при $e^{in\theta}$ ($n \geq 3$):

$$\frac{\overline{\tilde{a}_n}}{\tilde{R}^n} = A_n, \quad (4.7.7)$$

при $e^{-in\theta}$ ($n \geq 1$):

$$\frac{1+n}{\tilde{R}^n} \tilde{a}_n - \frac{\tilde{a}'_{n+2}}{\tilde{R}^{n+2}} = A_{-n}, \quad (4.7.8)$$

Коэффициенты A_n , определённые из (4.7.5), имеют значения: $A_0 = -P_0$; $A_1 = A_{-1} = 0$; $A_2 = A_{-2} = -\tilde{P}_2 / 2$; $A_{\pm n} = 0$, $n \geq 3$.

С учетом найденных A_n и выражений (4.7.6) - (4.7.8), получим следующие представления для функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$:

$$\Phi(z) = -\frac{\tilde{P}_2 \tilde{R}^2}{2z^2}, \quad \Psi(z) = \frac{P_0 \tilde{R}^2}{z^2} - \frac{\tilde{P}_2 \tilde{R}^4}{z^4}, \quad (4.7.9)$$

Общие выражения для напряжений в полярных координатах через функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ имеют вид [137]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= 4\operatorname{Re}\Phi(z) \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\tau_{r\theta} &= 2[\overline{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]e^{2i\theta} \end{aligned} \quad (4.7.10)$$

Отсюда, с учётом (4.7.9), получим:

$$\sigma_{rr,\theta\theta} = -\frac{\tilde{R}^2}{r^2} \left[\tilde{P}_2 (2\cos^2 \theta - 1) \left(1 \pm \left(\frac{\tilde{R}^2}{r^2} - 1 \right) \right) \mp P_0 \right],$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{4\tilde{R}^2 \tilde{P}_2 (\tilde{R}^2 - r^2) \cos \theta \sin \theta}{r^4}$$
(4.7.11)

При $\tilde{P}_2 = 0$ имеет место частный случай равномерного давления по контуру отверстия, описанный в [137-139].

Исходя из полученных выражений для напряжений, может быть определено положение границы зоны пластичности. Для этого воспользуемся условием текучести Треска [58]:

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = 4k^2$$
(4.7.12)

Подстановка (4.7.10) в условие (4.7.12) приводит к неявному уравнению для определения границы пластичности:

$$\frac{2\tilde{R}^2 \left[\tilde{P}_2 (\tilde{R}^2 - r^2) (2\cos^2 \theta - 1) - r^2 P_0 \right]}{r^4} = 2k$$
(4.7.13)

Аналитический вид границы пластичности (4.7.13) полностью согласуется с численным решением, показанный в [123].

В данном параграфе рассмотрен случай для нормальной компоненты напряжения приложенной к контуру отверстия. Для улучшения сходимости итерационной методики, необходимо еще учитывать касательную составляющую напряжения. Данная задача аналогично решается с помощью предложенного метода с применением комплексных потенциалов. Однако, если вид одной из компонент напряжения имеет сложную аппроксимирующую функцию (как, например, в случае задачи Галина такая функция описывает касательную компоненту по контуру отверстия), то определение функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, а следовательно, и напряжений, приводит к сложным и

громоздким уравнениям, которые могут быть решены только с использованием численных методов.

Аналогичная проблема возникает при рассмотрении границ отверстий, описываемых сложным видом уравнений, полученных из итерационной процедуры решения упругопластических задач. В этом случае затруднение возникает в представлении конформного отображения границы на внешность единичного круга. Такой пример можно найти в случае рассмотрения задачи Кирша (§ 1.4), где при внешней растягивающей нагрузке $P_1 \geq 3\sigma_y / 4$ после первого итерационного упругого приближения граница пластичности описывается сложной кривой. В противоположность этому является использование итерационного метода для упругопластической задачи Галина. Здесь, на каждом этапе итерационного решения, границы пластичности описываются простым уравнением для эллипса [123].

§ 4.8. Итерационное решение упругопластической задачи Кирша полуаналитическим методом

4.8.1. Аналитическое представление для границы пластичности из упругого решения задачи Кирша

Рассмотрим решение задачи Кирша об одноосном растяжении пластины с отверстием радиуса R и внешней растягивающей нагрузке P_1 (Рис. 4.8.1).

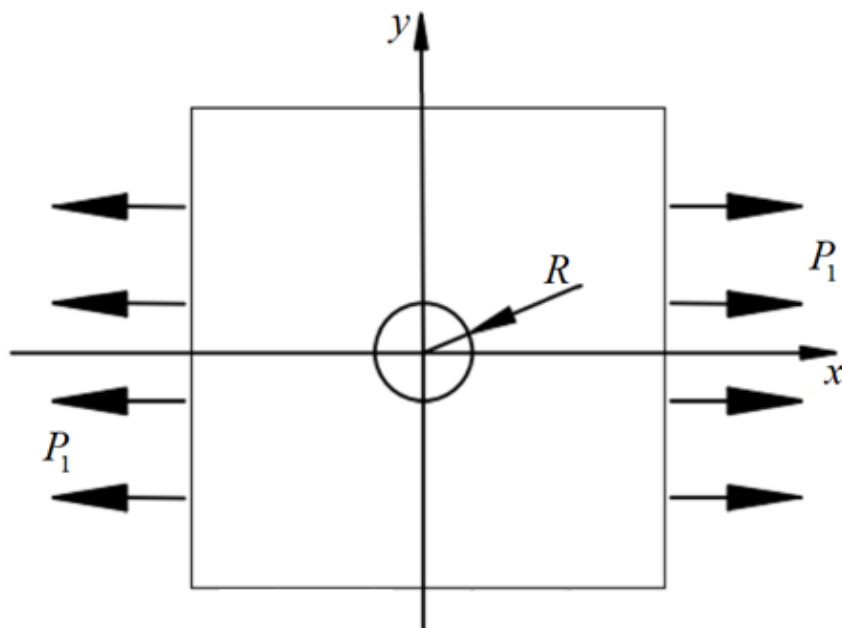


Рис. 4.8.1 – Распределение растягивающих усилий для задачи Кирша

Воспользовавшись критерием текучести Треска для плоского напряженного состояния [65]:

$$(\sigma_r - 2k)(\sigma_\theta - 2k) + \tau_{r\theta}^2 = 0 \quad (4.8.1)$$

где k - половина от предела текучести σ_Y .

С учетом упругого аналитического решения данной задачи для напряжений в полярных координатах (1.1.20, § 1.1), получим уравнение для определения границы зоны пластичности в виде:

$$\frac{A_1 r^8 + A_2 r^6 + A_3 r^4 + A_4 r^2 + A_5}{r^8} = 0, \quad (4.8.2)$$

где $A_1 = -2k(P_1 - 2k)$, $A_2 = P_1 R^2 \left[(P_1(4 \cos 2\theta - 1) + 8k) \cos 2\theta - 2P_1 \right] / 2$,

$A_3 = -P_1^2 R^4 \left[\cos 2\theta (2 \cos 2\theta + 1) - 1/4 \right]$, $A_4 = 3P_1^2 R^6 (1 + \cos 2\theta / 2)$,

$A_5 = -9P_1^2 R^8 / 4$.

Решение этого уравнения, из позволяет определить удовлетворяющее условию полного охвата отверстия пластической зоной, имеет вид:

$$r = -\frac{\sqrt{-2A_1 \left(A_2 + \sqrt{-4A_1 A_2 + A_2^2} \right)}}{2A_1} \quad (4.8.3)$$

Уравнение (4.8.3) позволяет аналитически определить границу пластичности в первом приближения итерационной процедуры.

4.8.2. Реализация численного и полуаналитического решений упругопластической задачи Кирша

Рассмотрим пример определения упругопластической границы для задачи Кирша при условии возникновения малой пластической зоны, когда граница пластичности в первом приближении из упругого решения не выходит за пределы границы пластичности из численного упругопластического решения (Рис. 1.6.1, *a*, § 1.6). В этом случае значения для внешнего усилия примем равными $P_1 = 2\sigma_Y / 5$.

При численной реализации задачи Кирша в упругопластической постановке воспользуемся моделью пластины показанной на Рис. 4.8.1. Для материала зададим следующие его свойства: предел текучести $\sigma_Y = 250$ МПа, модуль Юнга $E = 210$ ГПа. Для параметров пластины зададим $R = 1$ мм, $m = n = 50$ мм. Стороны оснований численной модели, прилегающие к отверстию, могут свободно перемещаться только вдоль своих осей.

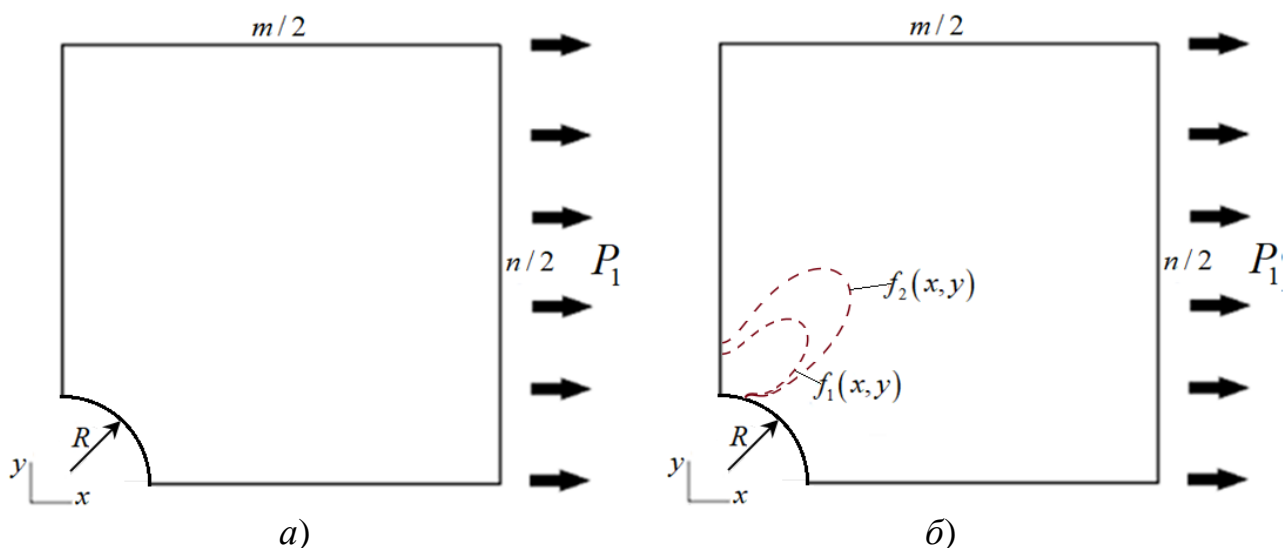


Рис. 4.8.1 – Расчетные схемы по этапам итерационной процедуры для упругопластической задачи Кирша

Вычислительная сетка была выбрана четырехугольной с квадратичной аппроксимацией переменных. Среднее значение длины элемента ребра составляет 0,1 мм.

При реализации полуаналитической итерационной процедуры решения упругопластической задачи Кирша, воспользуемся методикой описанной в § 4.5 для упругопластической задачи Галина.

Численное решение задачи Кирша в упругой постановке позволяет найти распределение для компонент напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} в зависимости от радиальной координаты r с началом в центре отверстия пластины

Используя критерий текучести Треска (4.8.1), получим границу пластической зоны в первом приближении в виде некоторой кривой $f_1(x, y)$ (Рис. 4.8.1, б).

Для второй итерации рассматривается упругая область с внутренней границей $f_1(x, y)$. Выражения для компонент напряжений по этой границе можно считать известными, которые определяются по формулам (4.5.1, § 4.5).

Далее, с учетом (4.5.2 и 4.5.3, § 4.5) определяем функции изменения нормальной σ_n и касательной τ_n составляющих напряжений к упругопластической границе первого приближения.

На Рис. 4.8.1, б показана расчетная модель упругой задачи для второй итерации, которая приводит, с учетом критерия (4.8.1), к новой границе пластической зоны $f_2(x, y)$, изображённой на 4.8.1, б. Последующие итерации выполняются подобно описанной и проводятся до момента, пока не совпадут положения границы пластической зоны для двух последних итераций.

В результате численного решения исходной задачи в упругопластической постановке получено, что пластическая зона не охватывает полностью отверстие.

При реализации полуаналитической итерационной процедуры получено постепенное сближение приближённой границы пластической зоны с точной границей. Результаты расчетов представлены на Рис. 4.8.2.

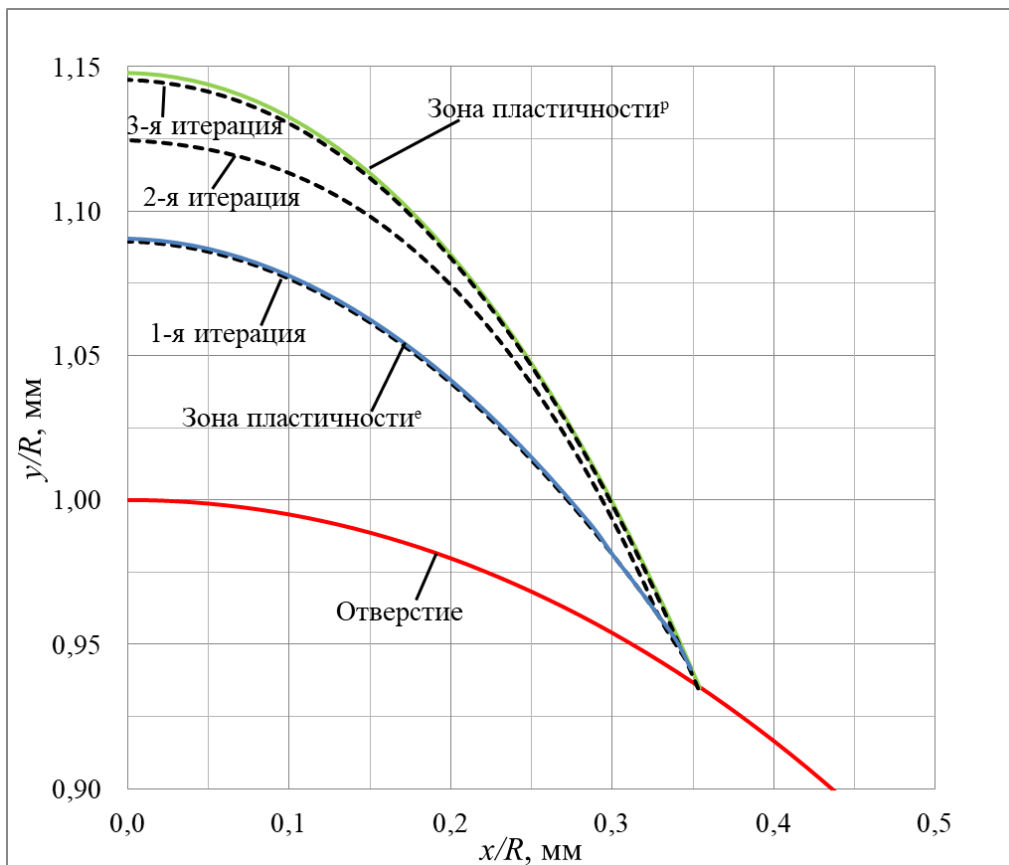


Рис. 4.8.1 – Результаты расчетов по определению зон пластичности для задачи Кирша по точному, численному и полуаналитическому итерационному решениям

Из Рис. 4.8.1 видно, что граница зоны пластичности, определённая из численного решения упругой задачи (отображена пунктирной линией), практически совпадает с зоной пластичности^e, полученной из точного упругого решения (4.8.2) - первой итерации полуаналитического метода (отображена синей сплошной линией). Далее, с ростом номера итераций, происходит постепенное сближение приближённого контура границы пластической зоны с зоной пластичности^p, полученной из численного упругопластического решения (отображена зеленой сплошной линией) и уже на третьей итерации наблюдается практически полное совпадение с этой границей. В последующих приближениях её положение не меняется.

Глава 5. Экспериментальная диагностика напряжений с учетом эффекта пластичности в окрестности зондирующего отверстия

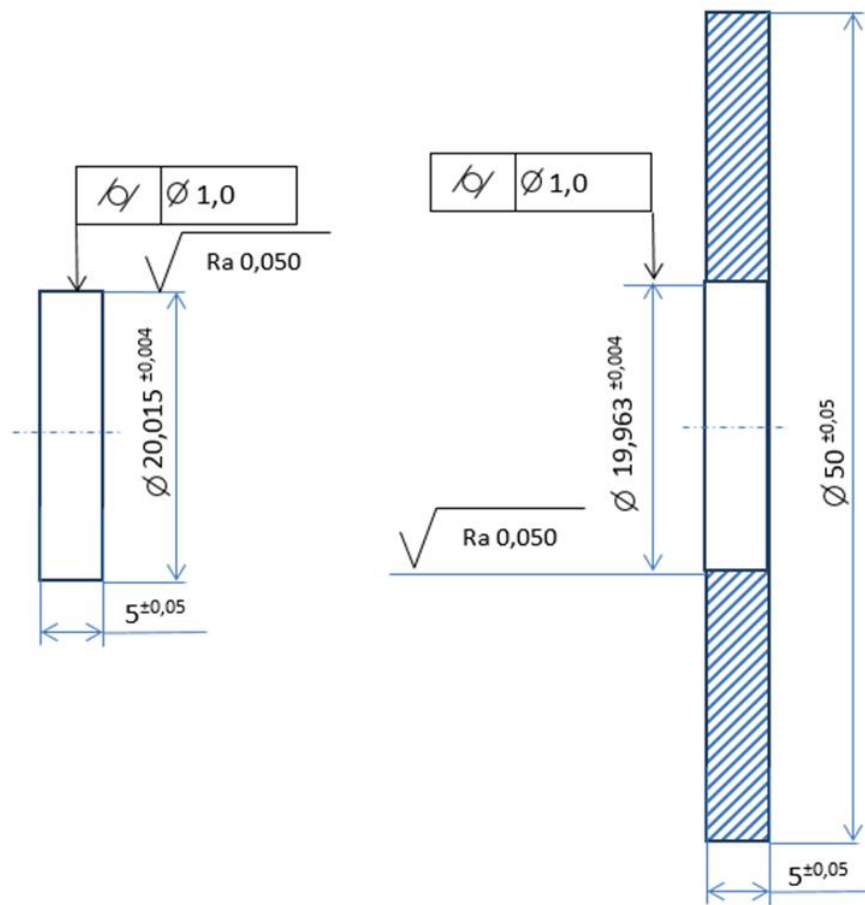
§ 5.1. Подготовка образцов

Для проведения тестирующих экспериментов на образцах с заданным распределением высоких остаточных напряжений были спроектированы и изготовлены образцы в виде сплошных дисков, полученных методом температурной посадки колец на вкладыши. В соответствии со сделанными расчётами по задаче Гадолина были подобраны материалы для внутренних дисков (вкладышей) и охватывающих колец. Так как создаваемые напряжения должны были быть близкими к пределу текучести материала вкладышей (материал вкладышей считаем идеально упругопластическим), то в качестве такого материала была выбрана сталь 20 с относительно невысоким значением предела текучести - 250 МПа. Для материала колец, напротив, была выбрана сталь 45, которая после термообработки приобретала предел текучести не менее 900 МПа.

Аналитические результаты показывают, что чем выше наведённое напряжение во вкладыше в диапазоне от половины до предела текучести материала, тем больше при экспериментальных измерениях должно регистрироваться круговых интерференционных полос с центрами на зондирующем отверстии. Число и расположение этих полос будет характеризовать уровень исходных напряжений в образце. Так, если для напряжения в половину предела текучести линия уровня высвобожденного отверстием микроперемещения, равного половине длины волны лазера, будет практически совпадать с краем отверстия, то при напряжении, равном 0,9 предела текучести должно быть несколько полос в пределах видимости интерферометра. Данное соображение повлияло на выбор прогнозируемого натяга между кольцом и вкладышем, а также на величину диаметра сопряжения; в соответствии с выражением (3.2.1, § 3.2) он должен быть минимальным, но при этом не вносить дополнительные краевые эффекты

в интерферограмму поля перемещений поверхности вкладыша в окрестности отверстия. Для первой группы образцов были приняты габаритные размеры вкладышей и колец, изображенные на Рис. 5.1.1, *a*, которые при правильном изготовлении и посадке должны были обеспечить во вкладышах уровень напряжений в 0,9 от предела текучести материала вкладышей.

Для второй группы образцов в качестве исследуемого образца использован составной диск, собранный из кольца и цилиндрического вкладыша. Эскиз и размеры такого диска показаны на Рис. 5.1.1, *в*. Для данного образца $\delta = 0,254 \pm 0,008$ мм. Такой натяг обеспечивает контактное давление (по формуле 3.2.1, § 3.2) $q_0 = 300 \pm 10$ МПа. Однако, предел текучести материала вкладыша - (как уже отмечалось) был меньше этого значения. Поэтому внутри вкладыша было создано осесимметричное пластическое напряженное состояние: $\sigma_r = \sigma_\theta = -\sigma_Y$. Эти напряжения сохраняются постоянными вплоть до границы контакта с кольцом. Соответственно, для напряжений в кольце будут справедливы формулы (3.2.3, § 3.2), в которых $q_0 = \sigma_Y$.



a)



b)

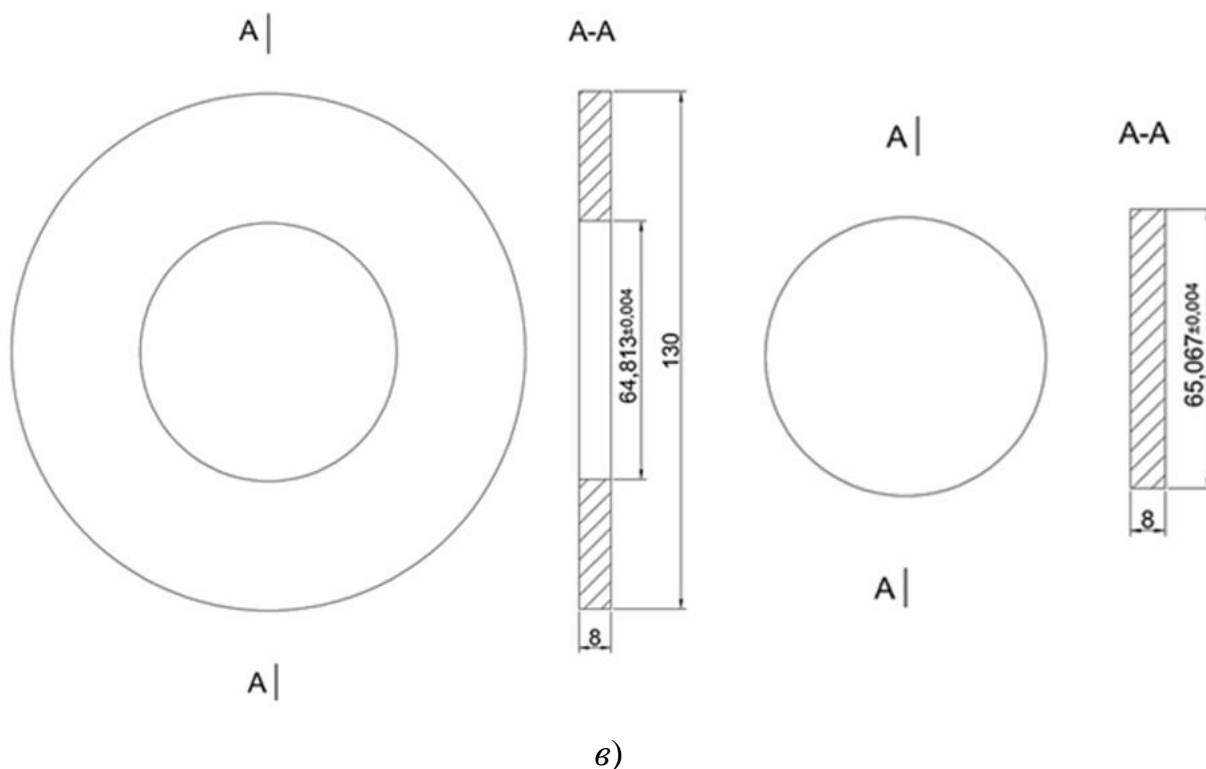
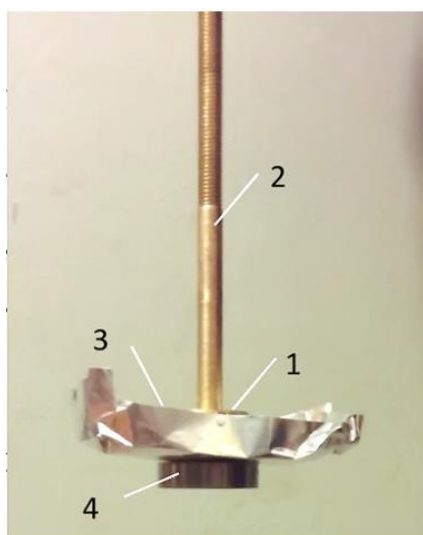


Рис. 5.1.1 – Подготовка экспериментальных образцов для исследования напряжений с помощью метода отверстия

Изготовление образцов по эскизам Рис. 5.1.1, *а* выполнялось на Московском инструментальном заводе. Было сделано 10 пар колец и вкладышей. Кроме того, для тренировки операции горячей посадки был сделан дополнительный вкладыш с меньшим на 23 микрона диаметром, чем внутренний диаметр колец. Примерно такие зазоры должны образовываться при помещении вкладышей, охлаждённых в жидком азоте до -195°C в кольца, нагретые до 170°C . На Рис. 5.1.1, *б* представлен общий вид колец и вкладышей перед их сборкой с натягом.

Для введения вкладышей в кольца с минимальным зазором, образующимся при перепаде температуры порядка 350°C , было сделано специальное приспособление, изображённое на Рис. 5.1.2, *а*. Оно представляло собой круглую латунную пластинку 1 с, выступающим из неё, длинным тонким осевым стержнем 2. Снаружи к пластинке приклеивалось небольшое блюдце из металлической фольги 3, а к фольге – вкладыш 4.



а)



б)

Рис. 5.1.2 – Сборка экспериментальных образцов для исследования осесимметричных напряжений с помощью метода отверстия

Технология сборки образца состояла в следующем. Кольцо горизонтально укладывалось на нагревательную поверхность; при этом, для минимизации теплового удара при погружении в него вкладыша, охлаждённого до температуры жидкого азота, между кольцом и нагревательной поверхностью выкладывалась прокладка из тонкого картона. Снаружи для уменьшения тепловыделения кольцо также закрывалось накладкой из тонкого картона с центральным отверстием, несколько превышавшим по диаметру отверстие в кольце.

Сначала производился нагрев кольца до температуры около 160°C , которая контролировалась цифровым термометром с термопарой. Затем в специальную ёмкость заливался жидкий азот и в него погружался вкладыш вместе с блюдцем. После окончания кипения азота, т. е. при полном охлаждении вкладыша, он вместе с блюдцем вынимались; в блюдце при этом оставался жидкий азот, который, постепенно выкипая, сохранял пониженную температуру вкладыша. Далее вкладыш без усилия вводился в кольцо на всю его толщину, нагревательный элемент отключался и, после остывания, вкладыш, находящийся уже в кольце, отделялся от фольги и латунного держателя. На Рис. 5.1.2, б приведена фотография одного из собранных образцов.

Проектирование и сборка образцов выполнялась силами сотрудников лаборатории механики прочности и разрушения материалов и конструкций ИПМех РАН. В результате в первой группе образцов вкладыши после сборки находились в упругом состоянии, а во второй группе - в пластическом состоянии.

§ 5.2. Проявление осесимметричных и неосесимметричных напряжений с помощью метода отверстия

Следующим этапом было проявление осесимметричных напряжений в собранных образцах с помощью метода отверстия. Процедура высверливания образцов сопровождалась спекл-интерферометрической регистрацией поля микроперемещений в окрестности отверстия.

Оптическая спекл-интерферометрия основана на интерференции когерентного излучения, отраженного от поверхности исследуемого неоднородного объекта, в результате чего формируются интерференционные полосы и случайная спекл-структура деформации, которые возникают в процессе перераспределения напряжений, смещают отдельные участки спекл-структуры. Сравнивая полученное изображение с исходным, определяют поля перемещений.

На Рис. 5.2.1 показан образец на голографическом столе под оптическим блоком спекл-интерферометра (на фото Рис. 5.2.1 виден оптический блок и прижимные приспособления, два из которых – в центре - для фиксации образцов на столе).



Рис. 5.2.1 – Исследование экспериментального образца с помощью спекл-интерферометрической установки

Первая группа испытаний была проведена для образцов для образцов с упругим состоянием материала до высверливания зондирующего отверстия. Для сравнения с результатами теоретического решения требовались сквозные отверстия, для сравнения с расчетными результатами выполнялись как сквозные, так и несквозные отверстия. На Рис. 5.2.2 приведены фотографии участка поверхности образца, наблюдаемого через видеокамеру спекл-интерферометра: слева – исходное состояние с небольшим надсверливанием, справа – тот же вид после сквозного сверления с наложением миллиметровой линейки. Вследствие осесимметричности исходного напряжённого состояния, для наблюдения была выбрана только часть поверхности образца, включающая отверстие.

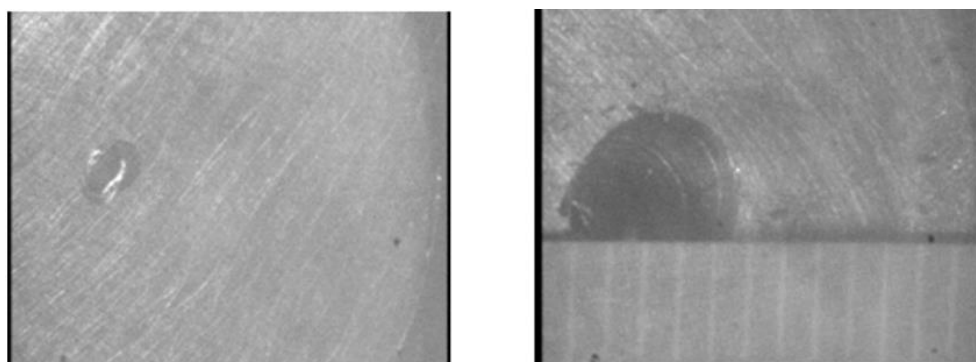


Рис. 5.2.2 – Участок исследуемого экспериментального наблюдаемый через видеокамеру спекл-интерферометра

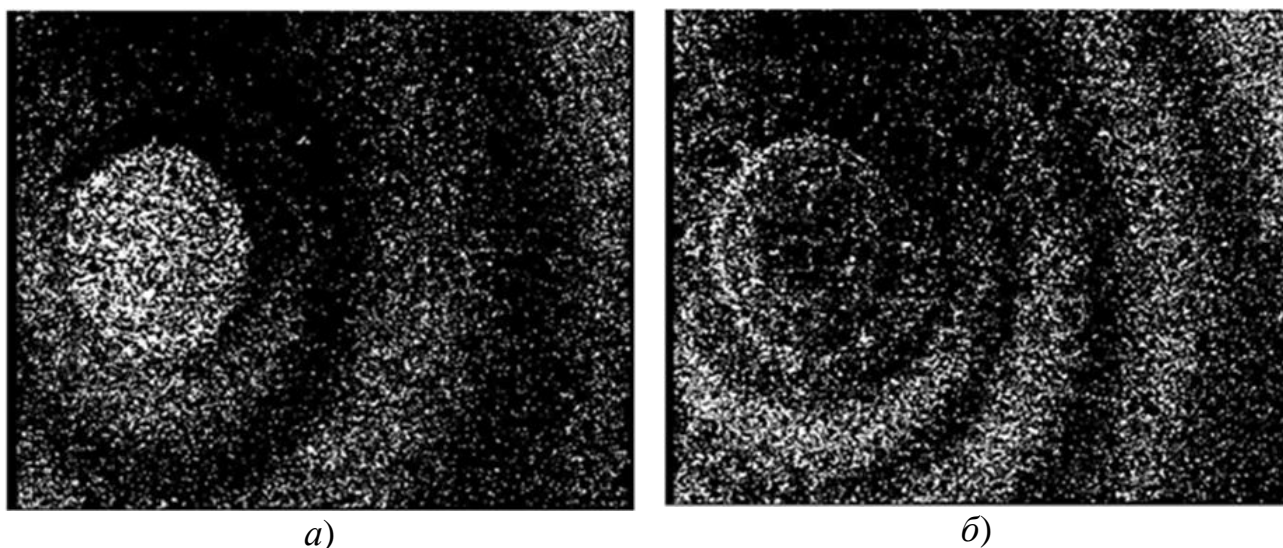
Сначала на двух образцах были просверлены сквозные отверстия диаметром 3 мм. Такой выбор диаметра отверстия был обусловлен результатами предварительных расчётов, которые показали, что при большем диаметре отверстия и напряжении $0,9\sigma_y$ зона, наведенной отверстием, пластичности распространяется на весь вкладыш. Ожидалось, что в окрестности отверстия будут наблюдаться несколько кольцевых интерференционных полос, соответствующих распределению перемещений. Однако результирующие интерферограммы для сквозного отверстия не показали ни одной полосы.

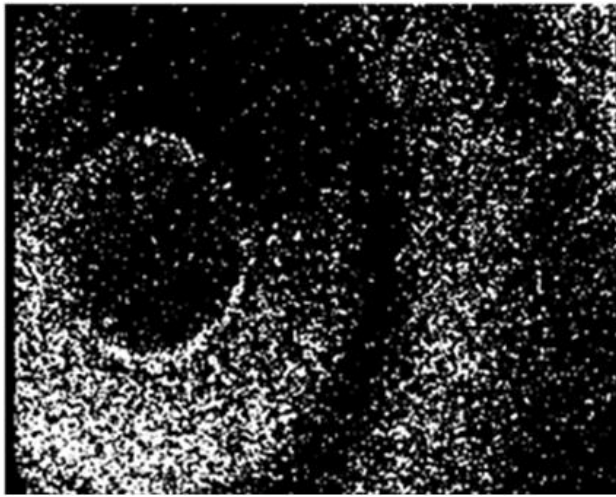
На остальных образцах выполнялось ступенчатое сверление. На Рис. 5.2.3, *a-d* показаны спекл-интерферограммы при ступенчатом сверлении с шагом 1 мм (0,2 от толщины) для одного из образцов.

На Рис. 5.2.3, *a* показана интерферограмма, получившаяся при сверлении на глубину 1 мм. На ней видны две кольцевые полосы, окружающие отверстие и третья на краю отверстия. Расстояние по нормали к поверхности между двумя соседними полосами определяется по формуле:

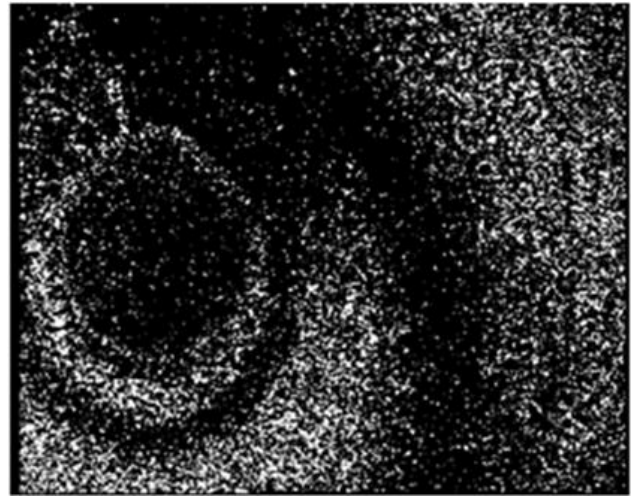
$$w = \frac{\lambda}{2 \cos \alpha}, \quad (5.2.1)$$

где λ - длина волны лазера, α - половина угла между направлениями освещения и наблюдения.

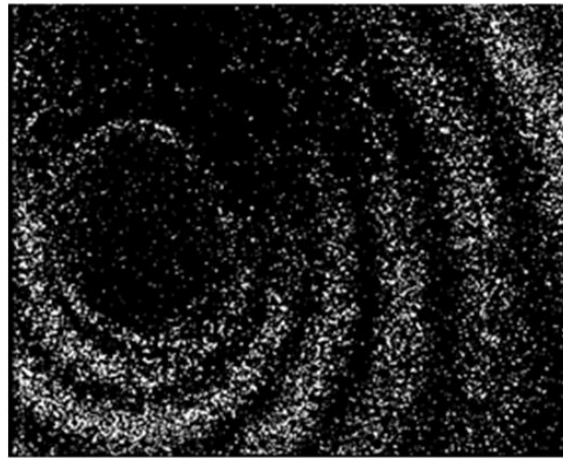




а)



б)



в)

Рис. 5.2.3 – Картины спекл-интерферограмм, вызванные полем микроперемещений в окрестности зондирующего отверстия

Для оптической схемы Рис. 5.2.1 $\lambda = 532$ нм, $\alpha = 22^\circ$. Следовательно, разность высот между соседними полосами составляет 286 нм. Таким образом, три полосы на интерферограмме Рис. 5.2.3, а показывают перепад высот между краем вкладыша и краем отверстия примерно 572 нм. Определение направления перемещения по способу изменения длины оптического пути предметного пучка показало отрицательный знак, т.е. опускание поверхности от исходного состояния.

На Рис. 5.2.3, б показана интерферограмма, получившаяся при сверлении на глубину 2 мм. Здесь зарегистрированы дополнительно 4 полосы с

отрицательным знаком, показывающие перепад высот ещё около $286 \cdot 3 = 858$ нм. При получении этой и последующих интерферограмм в качестве исходного уровня принималась поверхность после предыдущего этапа сверления.

На Рис. 5.2.3, *в* показана интерферограмма, получившаяся при сверлении на глубину 3 мм. Здесь зарегистрированы дополнительно 2 полосы с «зарождением» третьей, показывающие перепад высот около $286 \cdot 2 = 572$ нм. знак полос по-прежнему отрицательный.

На Рис. 5.2.3, *г* показана интерферограмма, получившаяся при сверлении от глубины 3 мм до глубины 4 мм. Здесь зарегистрированы 3 полосы положительного знака, показывающие перепад высот около $286 \cdot 2 = 572$ нм в обратном направлении по сравнению с предыдущими этапами.

На Рис. 5.2.3, *д* показана интерферограмма, получившаяся при сверлении от глубины 4 мм до глубины 5 мм – на полную толщину вкладыша. Здесь зарегистрированы 6 полос положительного знака, показывающие перепад высот около $286 \cdot 5 = 1430$ нм.

Суммируя перепады высот при сверлении до половины толщины вкладыша, имеем около 2 мкм относительного опускания поверхности. Подсчитывая аналогично перепады высот при сверлении на оставшуюся глубину ниже середины толщины, получаем также 2 мкм, но уже обратного знака. Таким образом, осесимметричный изгиб образца, нарастающий при сверлении до половины толщины, компенсируется при дальнейшем сверлении. Такая картина наблюдалась при ступенчатом сверлении всех образцов.

Для численного моделирования экспериментально зарегистрированного процесса деформирования была разработана специальная расчетная схема, учитывающая относительную близость края вкладыша к зондирующей отверстию. Расчетная схема подобна изображенной на Рис. 2.1.1 (§ 2.1), но с внешней цилиндрической границей. При этом, поперечная ось симметрии модели была закреплена в нижней точке и не смещалась в боковых направлениях. Рассматривая, как и раньше, четверть сечения пластины

предполагалось, что при $y = 0$ сторона пластины закреплена относительно оси Ox , при $x = 0$ сторона пластины закреплена относительно оси Oy .

Сравнение полученного в эксперименте максимального суммарного перемещения одного знака, наблюдавшегося при заглаблении отверстия на половину толщины, с результатами численного решения для отверстия, показало хорошее согласование по нормальному перемещению поверхности образца. Соответствующий рисунок линий уровня прогиба с шагом по высоте 266 нм изображен на Рис. 5.2.4.

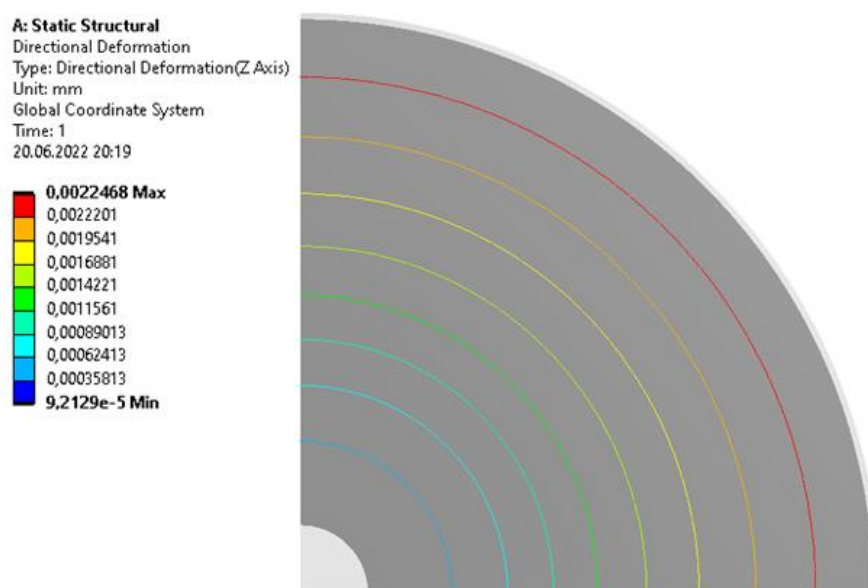


Рис. 5.2.4 – Распределение линий уровня с шагом по высоте 266 нм из численного решения для отверстия с глубиной 0,5 толщины экспериментального образца

Общий перепад уровней между краем вкладыша и края отверстия поверхности составил около 2,15 мкм, в то время как экспериментально зарегистрированный перепад составил 2 мкм. Тем самым, отличием составило 7,5%.

Далее была проведена вторая группа испытаний для составного диска с пластическим состоянием вкладыша сформированным в результате специально организованного натяга. На Рис. 5.2.5 представлены кривые распределения по радиальной координате окружной и радиальной компонент напряжений в со-

бранном образце: фиолетовыми сплошными и точечными линиями показано совпадение аналитических и численных распределений напряжений по упругой модели, зелёными - по упругопластической модели.

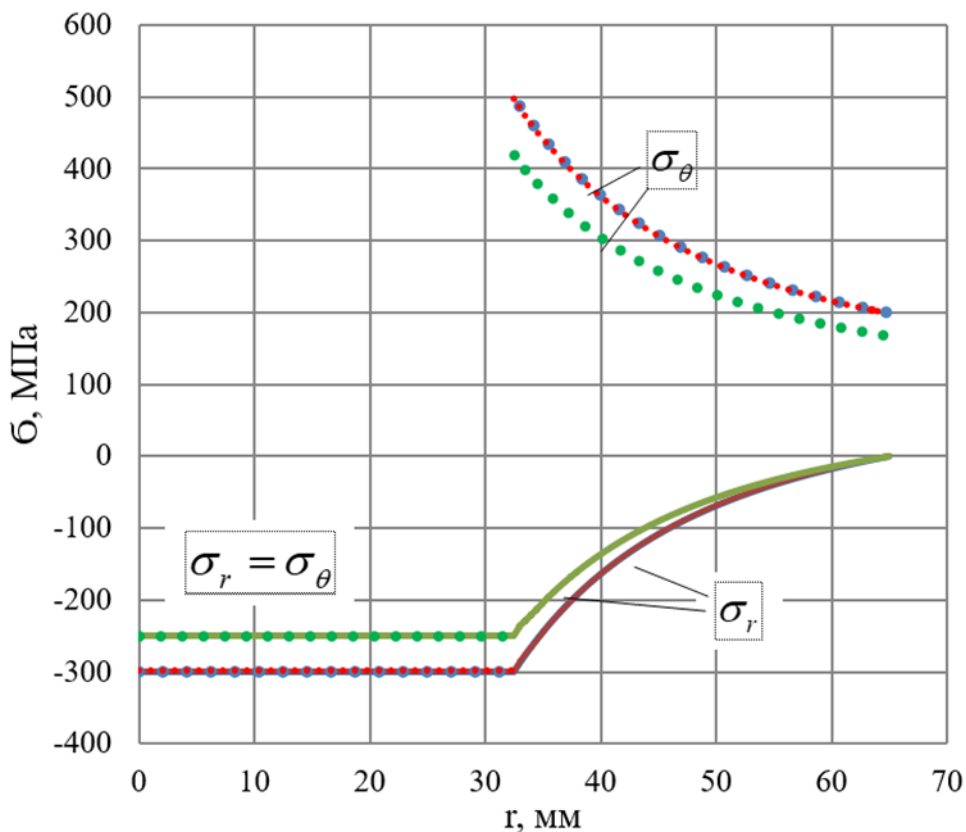


Рис. 5.2.5 – Распределение окружных и радиальных напряжений по радиальной координате составного диска

Полученные распределения напряжений использованы для тестирования метода отверстия как в численном, так и в реальных экспериментах с регистрацией нормальных перемещений поверхности образца в окрестностях зондирующих отверстий.

Исследование напряженного состояния составного образца с помощью регистрации возмущений поверхности методом спекл-интерферометрии проводили на вкладыше и кольце в точках, удаленных на 7 мм от границы контакта (Рис. 5.2.6). Диаметр отверстия - 4 мм, глубина сверления - 2 мм.

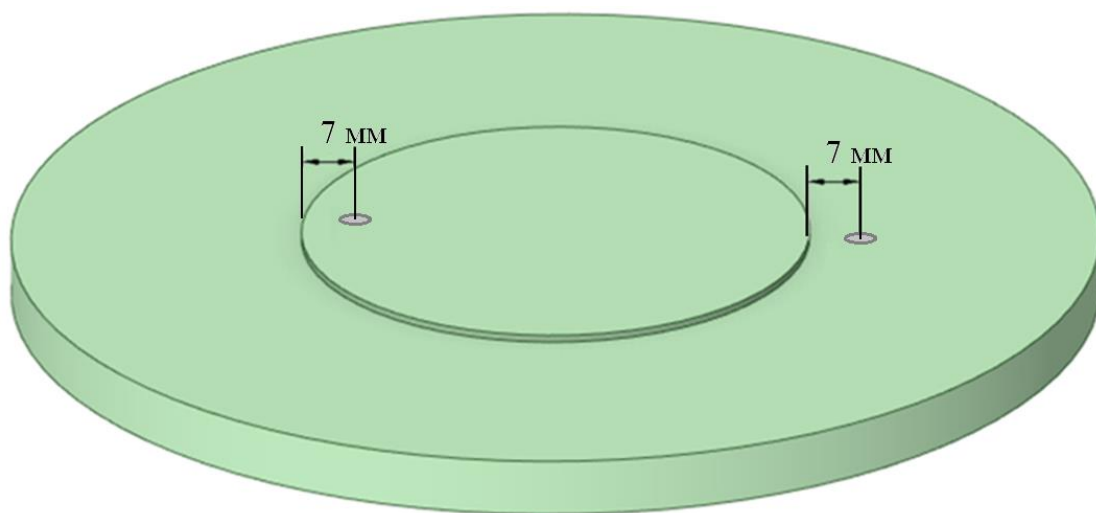
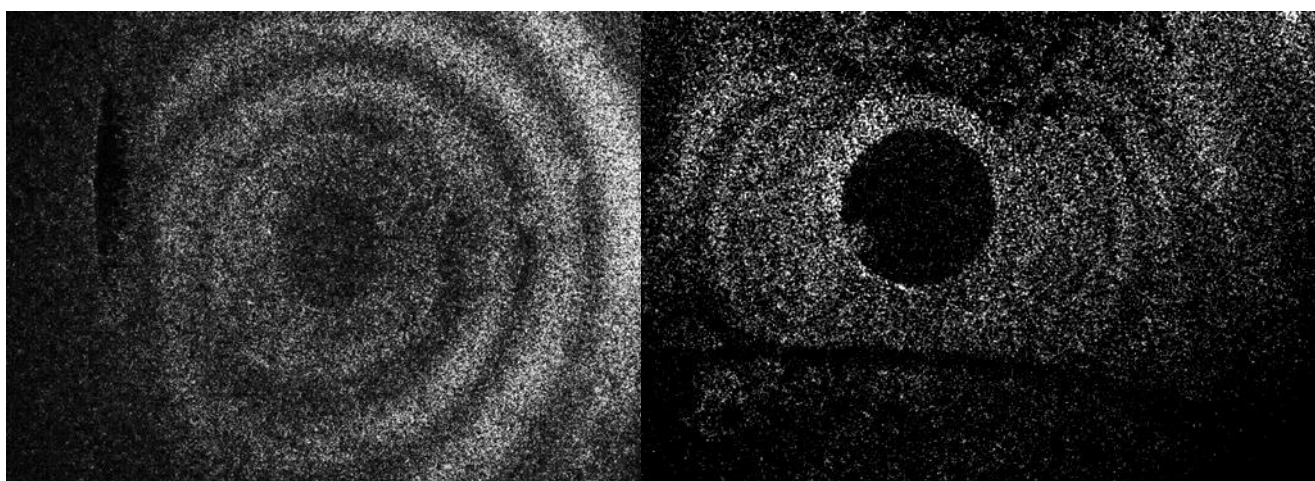


Рис. 5.2.6 – Области измерения деформаций с помощью с помощью регистрации возмущений поверхности методом оптической спекл-интерферометрии

Результаты полученных интерферограмм для такого образца показаны на Рис. 5.2.7.



a)

б)

Рис. 5.2.7 – Спекл-интерферограммы для вкладыша (а) и кольца (б)

Из рисунка видно, что формы полос на Рис. 5.2.7, *a* указывают на осесимметричное напряженное состояние, а на Рис. 5.2.7, *б* - на двухосное, - с неравными значениями напряжений по радиальной и окружной координатам.

По спекл-интерферограммам, представляющим линии уровня перемещений поверхности образца в окрестности зондирующего отверстия, в соответствии с алгоритмом [4] определялись напряжения, исходя из цены полосы в

напряжениях при выбранных диаметре и глубине отверстия, материале образца и числа полос. Для упругой зоны образца (Рис. 5.2.7, б) получено значение окружного напряжения 300 МПа, радиального напряжения - 170 МПа. В зоне пластичности (Рис. 5.2.7, а) значение сжимающих напряжений, рассчитанных по числу полос, оказались равными - 300 МПа, что выше расчётных на 20%. Это указывает на несовершенство существующего алгоритма определения напряжений в спекл-интерферометрической методике [4] применительно к пластической зоне.

Подстановка полученных значений напряжений в соотношение (3.2.3, § 3.2), позволила получить фактическое значение контактного давления $q_0 = 235$ МПа. Относительная ошибка результатов экспериментального измерения контактного давления методом сверления отверстий от значения, ограниченного пределом текучести материала втулки, при исследовании методом оптической спекл-интерферометрии составила 6%. Экспериментальные результаты оказались меньше исходных, что предположительно связано с релаксацией напряжений от момента изготовления образца.

§ 5.3. Залечивание внутренних дефектов в поле сжимающих напряжений с использованием пластических свойств материалов

Влияние пластичности проявляется не только при изучении остаточных напряжений, но и может быть использовано для залечивания внутренних дефектов в материале.

5.3.1. Залечивание внутреннего дефекта в упругопластическом поле сжимающих напряжений

Рассмотрим задачу о залечивании цилиндра с внутренней кольцевой полостью, находящегося под действием внешнего давления P . Схематично сечение цилиндра показано на Рис. 5.3.1, где R - радиус цилиндра, r - радиус

ближайшей к оси цилиндра стороны полости, c - высота цилиндра, d - высота кольцевой полости, f - ширина кольцевой полости, a - ось цилиндра, m и n - вертикальные стороны кольцевой полости.

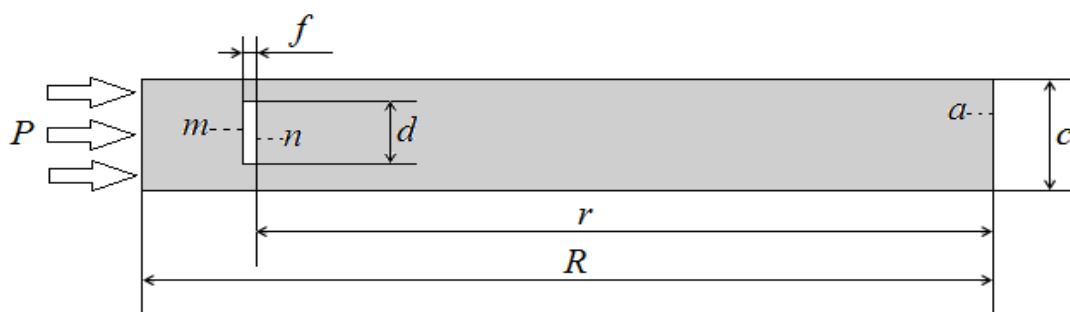


Рис. 5.3.1 – Сечение цилиндра с кольцевой полостью

Материал цилиндра: модуль Юнга $E = 210$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, предел текучести $\sigma_y = 250$ МПа. Для построения трехмерной расчетной модели использован 20-ти узловой гексаэдрический конечный элемент с параболической аппроксимацией переменных. Средний размер ребра гексаэдрического элемента расчетной сетки около кольцевой полости составлял $\langle l \rangle = 0,001$ мм. Максимальное значение ребра гексаэдрического элемента для всей модели принималось равным $l_{\max} = 0,01$ мм. Решение задачи получено как в упругой, так и в упругопластической постановке при следующих параметрах модели: $R = 10$ мм, $r = 9$ мм, $c = 1$ мм, $d = 0,2$ мм, $f = 0,01$ мм. Для задачи в упругопластической постановке дополнительно задавалась кривая деформирования с учетом пластических свойств материала. Следует отметить, что задаваемая в ANSYS кривая деформирования является диаграммой одноосного растяжения материала. Переход к пластическому состоянию в расчетной модели находится из условия пластичности Мизеса. Решение нелинейной упругопластической задачи выполняется по итерационной схеме Ньютона-Рафсона [140] с пересчетом матрицы жесткости на каждой итерации.

Оценка степени залечивания дефекта, образованного полостью, получена посредством анализа зависимости радиальных перемещений U_r , вертикальных сторон m и n от величины внешнего давления P . На Рис. 5.3.2 представлены

характерные графики зависимостей $U_r(Z, P)$, полученных в результате упругопластического решения задачи (Z – вертикальная координата по высоте полости с началом в её центре).

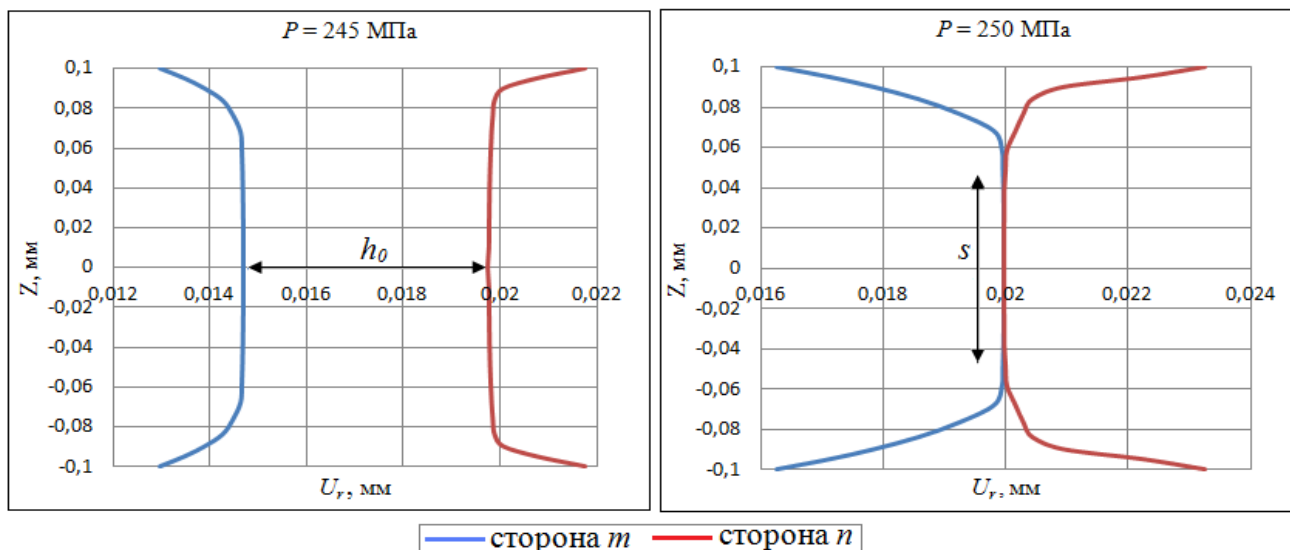


Рис. 5.3.2 – Изменение радиальных перемещений сторон кольцевой полости по высоте полости при давлении, незначительно ниже и равном пределу текучести материала цилиндра

Результаты расчета показывают, что увеличение внешнего давления P ведет к сближению сторон m и n кольцевой полости. Видно, что незначительное увеличение давления до предела текучести приводит к кардинальному сближению этих сторон. Максимальное сближение сторон полости наблюдается в её средней части при $Z = 0$ (Рис. 5.3.2); здесь же возникает максимальное контактное давление p_c . Высота области полного соприкосновения сторон m и n определялась параметром s (Рис. 5.3.2), а соотношение залеченного объёма к объёму исходной полости определялось величиной $V_r, \%$. В Табл. 5.3.1 приведены результаты численного расчёта величин h_0 , p_c , s и V_r в зависимости от давления P для упругопластической постановки задачи.

P , МПа	$h_0 \cdot 10^{-3}$, мм	p_c , МПа	s , мм	V_r , %
240,0	8,186	–	–	17,56
245,0	5,090	–	–	46,07
247,5	2,498	–	–	67,05
249,0	0,608	–	–	83,44
250,0	0	33,07	0,085	88,27
255,0	0	89,40	0,124	94,16
260,0	0	127,50	0,137	96,60

На Рис. 5.3.3 представлены эпюры контактных давлений p_c по высоте заполнения полости для уровней внешнего давления 250, 255, и 260 МПа, при которых возникали состыкованные участки несквозной полости.

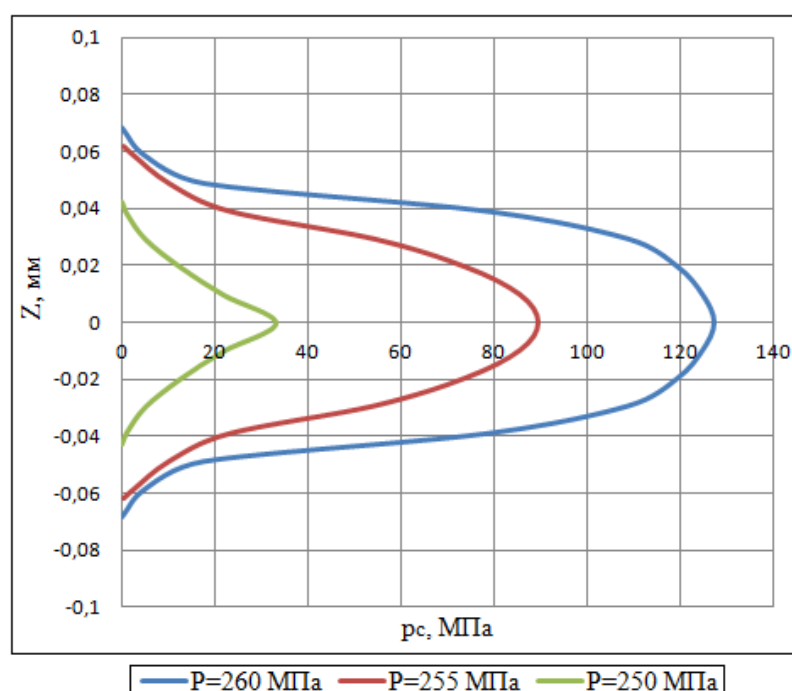


Рис. 5.3.3 – Эпюры контактного давления по высоте состыковавшихся участков внутренней полости цилиндра для внешнего давления 250, 255, и 260 МПа

Как видно из Табл. 5.3.1 и Рис. 5.3.3, соприкосновение сторон m и n полости возникает при уровне давления $P=250$ МПа, равном пределу текучести материала. При этом длина области s составляет 42,7 % от высоты полости d , а заполнение полости происходит на 88,3 %. Увеличение давления до $P=260$ МПа приводит к возрастанию области контакта до 68,8 % от исходной высоты полости, а ее заполнение достигает 96,6 %. При этом в области полного контакта возникают сжимающие напряжения с максимальным значением в 50 % от исходного давления.

Как известно [141], при сдавливании металлов и сплавов пластическая деформация разрушает и удаляет хрупкие поверхности окисных пленок, расширяет контакт соединяемых поверхностей, т.е. обеспечивает условия, необходимые для образования и развития объемного процесса диффузии, лежащего в основе диффузионной сварки. Основными факторами, способствующими диффузионной сварке, являются давление и температура. Многочисленными опытами установлено, что между этими параметрами существует зависимость, близкая к гиперболической, особенно при малых температурах и больших давлениях. Эта зависимость справедлива при условии приблизительно равной прочности соединений, сваренных при различных температурах нагрева и давлениях. При этом повышенная температура используется для приведения материала в пластическое состояние. Следует также отметить, что по результатам наблюдений [141] при диффузионной сварке одноименных материалов полностью стирается физическая граница раздела между свариваемыми деталями; материал не претерпевает существенного изменения физико-химических свойств.

В описанной выше задаче контактирующие поверхности уже находятся в пластическом состоянии, поэтому повышение температуры выше нормальных условий испытания не требуется. Поскольку сжатие сторон полости происходит в пластическом состоянии при давлении на уровне и выше максимально необходимого для диффузионной сварки (10 - 40 МПа), то можно полагать, что результатом такого соединения будет монолитный материал,

аналогичный тому, который образуется при сварке. Ввиду необратимости пластической деформации при исчезновении причины соединения сторон полости, т.е. остаточного или наведенного напряженного состояния, размыкания соединения в залеченной полости не произойдет.

Отметим также, что при рассмотрении задачи в упругой постановке смыкание сторон кольцевой полости не происходит даже при высоких значениях давления. Так, для $P = 260$ МПа минимальное значение h_0 составило $9,5 \cdot 10^{-3}$ мм; при этом заполнение полости не превысило 8 %.

5.3.2. Залечивание сквозной проточки в упругопластическом поле сжимающих напряжений

Следующий пример залечивания сжимающими напряжениями пустотного дефекта рассмотрен на модели цилиндра со сквозной кольцевой вырезкой шириной f , находящегося под действием внешнего давления P . Ввиду наличия сквозной вырезки расчетная модель состоит из внутреннего цилиндра радиуса r и внешнего кольца с наружным радиусом R . Решение задачи получено для плоского напряженного состояния расчетной модели. В силу симметрии задачи рассматриваем $1/4$ часть цилиндра (Рис. 5.3.4); стороны j и i расчетной модели могут перемещаться только в направлении осей X и Y соответственно.

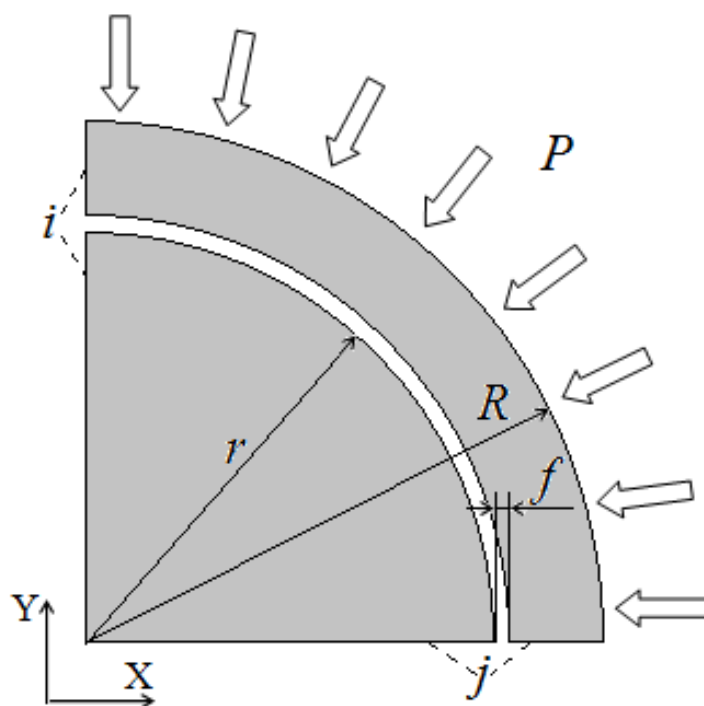


Рис. 5.3.4 – Модель цилиндра с кольцевой вырезкой

Для дискретизации области использован 8-узловой четырехугольный элемент с параболической аппроксимацией переменных. Средний размер ребра четырехугольного элемента составлял $\langle l \rangle = 0,01$ мм. Решение, как и в первом примере, выполнялось в упругой и в упругопластической постановках при следующих геометрических параметрах модели: $R = 10$ мм, $r = 9$ мм, $f = 0,01$ мм.

По результатам численного решения установлено, что нулевое расстояние между внутренним цилиндром и внешним кольцом обеспечивается при давлении $P = 25$ МПа, составляющем 10 % от предела текучести материала σ_Y . Величина контактного давления p_c в этом случае составляет $\sim 1,7$ % от внешнего давления. При $P = \sigma_Y$, контактное давление возрастает в 55 раз, что составляет ~ 90 % от внешнего давления. Зависимости контактного давления p_c от внешнего давления P приведены в Табл. 5.3.2.

P , МПа	Упругое решение	Упругопластическое решение
	p_c , МПа	p_c , МПа
25	4,10	4,13
50	29,12	29,14
100	79,10	80,06
150	129,27	134,90
200	180,50	191,17
250	226,20	227,40

В этой задаче различие результатов решения упругой и упругопластической задач незначительно. Для $P < 100$ МПа расхождение по значениям контактного давления p_c не превышает 1,2 %. При более высоких значениях внешнего давления P максимальное отличие для контактного давления p_c не превышает 6 %. Это объясняется тем, что в модели сквозного дефекта соединение его поверхностей достигается уже при напряжениях, составляющих малую долю от предела текучести, в то время как контакт сторон несквозного внутреннего пустотного дефекта обеспечивается при напряжениях, равных пределу текучести с учетом пластических свойств материала.

Следует отметить, что в случае залечивания сквозной проточки возникающее напряжение на стыке поверхностей при достижении внешним давлением предела текучести составляет величину, более чем в 6 раз превышающую аналогичный показатель для внутренней полости. Однако оно не приводит к появлению сплошной пластической зоны, облегчающей диффузию металла. В зависимости от степени волнистости и шероховатости стыкуемых поверхностей разреза при их сближении под действием внешнего давления в области контакта могут создаваться металлические связи в масштабе отдельных сминаемых микровыступов, так как давление, распределенное по ним, может превышать предел текучести, а сближение зерен металла на этих поверхностях может доходить до расстояний порядка размера

кристаллической решетки [142, 143]. Оценка, выполненная по методике [142], показывает, что даже в случае полированных поверхностей контакта из углеродистой стали общая фактическая площадь физического контакта при давлении порядка предела текучести материала цилиндра не превышает 9 % от площади стыкуемых поверхностей разреза, что не является гарантией от разрыва при снятии внешнего давления. Для достижения сплошного неразрывного контакта поверхностей сквозного разреза требуется намного более высокое внешнее давление, что коррелирует с данными, приведенными в [142, 143].

Полученные результаты могут быть использованы при разработке способа залечивания трещин в ответственных элементах конструкций, таких как трубчатые опоры, трубы газонефтепроводов и др. Для этого в них должно быть создано поле сжимающих напряжений, например, путем посадки с натягом распределённых по длине трубы внешних колец.

Заключение

Целью проведенного исследования являлось расширение области применимости метода зондирующего отверстия для диагностики остаточных напряжений на диапазон высоких остаточных напряжений с учетом эффекта пластичности, а также разработка итерационного метода решения упругопластических задач с уточняемым положением упругопластической границы.

К основным результатам работы относятся:

1. Отработка численной процедуры решения трехмерной упругопластической задачи о сквозном и несквозном отверстиях в упругой пластине с напряжениями на модельных задачах Кирша в двумерной и трехмерной постановках применительно к спекл-интерферометрическим измерениям;
2. Разработка метода диагностики остаточных напряжений по нормальным перемещениям в окрестности зондирующего отверстия, учитывающая пластическое состояние материала, вызванное концентрацией напряжений в окрестности отверстия. Определение погрешностей упругого решения при диагностике высоких остаточных напряжений. Корректировка известных соотношений для цены полосы в напряжениях с учетом пластического состояния материала;
3. Теоретическое моделирование связей нормальных перемещений поверхности образца с осесимметричными остаточными напряжениями с на задачах Ламе и Гадолина в упругопластических постановках;
4. Разработка итерационной процедуры решения упругопластических задач с уточняемым положением упругопластической границы. Отработка итерационной процедуры на решениях плоских упругопластических задач Ламе, Галина и Кирша;
5. Проведение экспериментальных исследований в цилиндрических образцах по диагностике напряжений с учетом эффекта пластичности в

окрестности зондирующего отверстия и их сопоставление с результатами численного решения упругопластических задач;

6. Проведение численных экспериментов, показывающих возможность залечивания внутренних дефектов в поле сжимающих напряжений с использованием пластических свойств материалов.

Литература

1. Биргер И.А. Остаточные напряжения. М.: Машгиз. - 1963. - 232 с.
2. Касаткин Б.С., Кудрин А.Б., Лобанов Л.М. [и др.]. Экспериментальные методы исследования деформаций и напряжений. Киев: Наукова думка. - 1981. - 584 с.
3. Поздеев А.А., Няшин Ю.И., Трусов П.В. Остаточные напряжения. Теория и приложения. М.: Наука. - 1982. - 109 с.
4. Чернышев Г.Н., Попов А.Л., Козинцев В.М., Пономарев И.И. Остаточные напряжения в деформируемых твердых телах. М.: Наука, Физматлит. - 1996. - 240 с.
5. Handbook of Measurement of Residual Stresses / Society for Experimental Mechanics; Ed. Dr. Jian Lu. - Upper Saddle River, N.J, Lilburn, Georgie: The Fairmont Press, Inc., 1996. - 238 p.
6. Nelson D.V., McCrickerd J.T. Residual Stress Determination Through Combined Use of Holographic Interferometry and Blind Hole Drilling. Experimental Mechanics. - 1986. - v. 26, № 4. - pp. 371-378.
7. Mathar J. Determination of Initial Stresses by Measuring the Deformation Around Drilled Holes. Transactions ASME. - 1934. - v. 56, № 4. - pp. 249-254.
8. Soete W., Vancrombrugge R. An Industrial Method for the Determination of Residual Stresses. Proceedings SESA. - 1950. - v. 8, № 1. - pp. 17-28.
9. Milbradt K.P. Ring Method Determination of Residual Stresses. Proceedings SESA. - 1951. - v. 9, № 1. - pp. 63-74.
10. Kelsey R.A. Measuring Non-Uniform Residual Stresses by the Hole Drilling Method. Proceedings SESA. - 1956. - v. 14, № 1. - pp. 181-194.
11. Ишлинский А.Ю. Об остаточных напряжениях при крутке. Укр. матем. ж. - 1952. - Т. 4, вып. 6. - с. 155-167.

12. Винокуров В.А. Сварочные деформации и напряжения. М.: Машиностроение. - 1968. - 236 с.
13. Окерблом Н.О. Сварочные деформации и напряжения. М.-Л.: Машгиз. - 1948. - 246 с.
14. Поздеев А.А., Няшин Ю.И., Трусков П.В. Остаточные напряжения. Теория и приложения. М.: Наука. - 1982. - 109 с.
15. Касаткин Б.С., Кудрин А.Б., Лобанов Л.М. [и др.]. Экспериментальные методы исследования деформаций и напряжений. Киев: Наукова думка. - 1981. - 584 с.
16. Иванов С.Д., Чернышев Г.Н., Попов А.Л., Антонов А.А., Козинцев В.М. Технологические напряжения в сварных соединениях. М.: Изд. МГОУ. - 2004. - 254 с.
17. Гольдштейн Р.В., Козинцев В.М., Куров Д.А., Попов А.Л., Челюбеев Д.А. Восстановление термического цикла сварки и определение остаточных напряжений по следам изотерм // Механика твердого тела. - 2013. - №1 - с. 106-112.
18. Разумовский И.А., Чернятин А.С. Экспериментально-расчетный метод оценки нагруженности натуральных конструкций с поверхностными трещинами // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2009. - № 3. - с. 35-42.
19. Махутов Н.А., Разумовский И.А., Косов В.С., Апальков А.А., Одинцев И.Н. Исследования остаточных напряжений с применением электронной цифровой спекл-интерферометрии в натуральных условиях // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. - 2008. - т. 74, № 5. - с. 47-51.
20. Nelson D.V., McCrickerd J.T. Residual Stress Determination Through Combined Use of Holographic Interferometry and Blind Hole Drilling // Experimental Mechanics. - 1986. - v. 26, № 4. - pp. 371-378.
21. A.S. Kobayashi. Handbook on Experimental Mechanics / Society for Experimental Mechanics; Prentice-Hall. - 1987. - 790 p.

22. Rendler N.J., Vigness I. Hole-drilling Strain-gage Method of Measuring Residual Stresses // *Experimental Mechanics*. - 1966. - v. 6, № 12. - pp. 577-586.
23. Попов А. Л., Козинцев В. М., Челюбеев Д. А., Левитин А. Л. Метод отверстия в диагностике остаточных напряжений // *Прикладная математика и механика*. - 2021. - т. 85, № 2. - С. 210–238.
24. Schajer G.S. Hole-drilling residual stress measurements at 75: origins, advances, opportunities. *Exp Mech*. – 2010. v. 50. pp. 245–253
25. Дюрелли А., Холл Дж., Стерн Ф. [и др.]. Экспериментальная механика. М.: Мир. - 1990. - 1168 с.
26. Махутов Н.А. Экспериментальные исследования напряжений в конструкциях. М.: Наука, 1992. - 208 с.
27. Standard Test Method for Determining Residual Stresses by the Hole-Drilling Strain-Gage Method. - 2013 ASTM E837-13a. - 16 p.
28. ГОСТ Р52891 «Контроль остаточных технологических напряжений методом лазерной интерферометрии». Стандартиформ. - 2009. - 13 с.
29. Yarushina V.M., Dabrowski M., Podladchikov Y.Y. An analytical benchmark with combined pressure and shear loading for elastoplastic numerical models// *Geochem. Geophys. Geosyst*. - 2010. - v. 11, № 8, Q08006.
30. Beaney E.M., Procter E.A. Critical Evaluation of the Center-Hole-Technique for the Centre-Hole Method // *Strain*. - 1974. - v. 10, № 1. - pp. 7-14.
31. Mordfin L. Mechanical Relaxation of Residual Stresses, ASTM STP 993 // American Society for Testing and Materials. Philadelphia. - 1988. - pp. 7-18.
32. Beghini M., Bertini L. Fatigue crack propagation through residual stress fields with closure phenomena // *Engineering Fracture Mechanics*. - 1990. - v. 36, № 3. - pp. 379-387.
33. Lin Y. C., Chou C. P. Errors induced by local yielding around hole-drilling method for measuring residual stress of material // *J. Mater. Sci. Technol*. - 1995. - № 11. - pp. 600-605.
34. Kümmel J., Braun D., Gibmeier J., Schneider J., Greiner C., Schulze V. Study on micro texturing of uncoated cemented carbide cutting tools for wear im-

- provement and built-up edge stabilization // Journal of Materials Processing Technology. - 2015. v. 215. - pp. 62-70.
35. Beghini M., Bertini L., Santus C. A procedure for evaluating high residual stresses using the blind hole drilling method, including the effect of plasticity. J. Strain Analysis. - 2010. № 45. - c. 301-318.
 36. Vangi D., Tellini S. Hole-drilling strain-gauge method: residual stress measurement with plasticity effects. J Eng Mater Technol. - 2010. - v. 132, № 1, - 011003, pp. 1-7.
 37. Moharami R., Sattari-Far I. Experimental and numerical study of measuring high welding residual stresses by using the blind-hole-drilling technique. J. Strain Analysis. - 2008. - № 43. - c. 141-148.
 38. Beaney E.M. Accurate measurement of residual stress on any steel using the center hole method. Strain. - 1976. - № 12. - c. 99-106.
 39. Gibmeier J., Kornmeier M., Scholtes B. Plastic deformation during application of the hole-drilling method // Fifth European Conference on Residual Stresses (ECSR 5). Trans Tech, Delft, The Netherlands. - 1999. - v. 1 - pp. 131–136.
 40. Puymbroeck E.V., Nagy W., De Backer H. Effect of plasticity on residual stresses obtained by the incremental hole-drilling method with 3D FEM Modelling. Materials Research Proceedings «Residual Stresses 2016: ICRS-10». - v. 2. - pp. 235-240.
 41. Seifi R., Salimi-Majd D. Effect of plasticity on residual stresses measurement by hole drilling method. Mech. Mater. - 2012. - № 53. - pp. 72-79.
 42. Lin Y.C., Chou C.P. Errors induced by local yielding around hole-drilling method for measuring residual stress of material. J Mater Sci Technol. - 1995. - № 11. - pp. 600-605.
 43. Mirbach D. Hole-drilling method for residual stress measurement - consideration of elastic-plastic material properties. Mater Sci Forum Switzerland. - 2014. - v. 768-769. - pp. 174-181.

44. Chupakhin S., Kashaev N., Huber N. Effect of elastoplastic material behaviour on determination of residual stress profiles using the hole drilling method. *J. Strain Anal. Eng.* - 2016. - № 51. - pp. 572-581.
45. Lobanov L., Savitsky V. Residual stresses determination with plasticity effects by electron speckle-interferometry hole-drilling method. *Materials Research Proceedings «Residual Stresses 2016: ICRS-10»*. - v. 2 - pp. 389-394.
46. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение. - 1975. - 400 с.
47. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. Шк. - 1969. - 608 с.
48. Анин Б.Д., Черепанов Г.П. Упруго-пластическая задача. Новосибирск: Наука СО. - 1983. - 239 с.
49. Alexandrov S. Elastic/plastic discs under plane stress conditions. Berlin: Springer. - 2015. - 114 p.
50. Варданян Г.С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебник / Г.С. Варданян [и др.]; под ред. Г.С. Варданяна – изд. АСВ, Москва. - 1995. - 568 с.
51. Попов А.Л., Челюбеев Д.А., Бухалов В.И. Задача Гадолина в упруго-пластической постановке // *ПММ*. - 2018. - т. 82, № 6. - с. 804-812.
52. Галин Л.А. Упруго-пластическое кручение призматических стержней полигонального сечения // *ПММ*. - 1944. - т. 8, № 4. - с. 307-322.
53. Галин Л.А. Упруго-пластическое кручение призматических стержней // *ПММ*. - 1949. - т. 13, № 3. - с. 285-296.
54. Соколовский В.В. Плоское равновесие пластического клина // *ЯММ*. - 1950. - т. 14, № 4. - с. 391-404.
55. Соколовский В.В. Плоское и осесимметричное равновесие пластической массы между жесткими стенками // *ПММ*. - 1950. - т. 14, № 1. - с. 75-92.
56. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа. - 1969. - 608 с.

57. Соколовский В.В. Упругопластическое равновесие цилиндрической трубы при наличии упрочнения материала // ЯММ. - 1943. - т. 7, № 4. - с. 273-292.
58. Галин Л.А. Плоская упруго-пластическая задача // ПММ. - 1946. - т.10, № 3. - с. 367-378.
59. Галин Л.А. Упруго-пластические задачи. М.: Наука. - 1984. - 232 с.
60. Черепанов Г.П. Обратная упруго-пластическая задача в условиях плоской деформации // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. - 1963. - с. 57-60.
61. Черепанов Г.П. Об одном методе решения упруго-пластических задач // ПММ. - 1963. - т. 27, № 3. - с. 428-435.
62. Tuba I.S. Plane strain distribution in perfectly plastic regions around circular holes due to unequal biaxial loads // J. Strain Anal. Eng. Des. - 1966. - v. 1, № 5. - pp. 394-397.
63. Остросаблин Н.И. Определение смещений в задаче Л.А. Галина // В сб. Динамика сплошной среды. Новосибирск. Институт гидродинамики СО АН СССР. - 1973. № 14. - с. 67-70.
64. Аннин Б.Д. Одна плоская упруго-пластическая задача при экспоненциальном условии текучести // Инж. журнал. Механика твердого тела. - 1966. - №3. - с. 122-123.
65. Ивлев Д.Д., Ершов Л.В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука. - 1978. - 208 с.
66. Парасюк О. С. Упругопластическая задача с небигармоническим пластическим состоянием // Докл. АН СССР. - 1948. - т. 63, №4. - с. 367-370.
67. Савин Г.Н. Концентрация напряжений около отверстий. М.Л.: Гос. изд-во технико-теорет. Лит-ры. - 1951. - 496 с.
68. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наукова думка. - 1968. - 891 с.

69. Кузнецов А.И. Плоская деформация неоднородных пластических тел // Вестник Ленингр. Ун-та. Серия математика, механика, астрономия. - 1958. т. 13, № 3 - с. 112-131.
70. Быковцев Г.И., Цветков Ю.Д. Двумерная задача нагружения упруго-пластической полости, ослабленной отверстием // Прикл. матем. и механика. - 1987. - т. 51, №2. - с. 314-322.
71. Ковалев А.В., Спорыхин А.Н. Об одном приближенном решении задачи Галина-Ивлева для сложной модели среды // Проблемы механики неупругих деформаций. М.: Физматлит. - 2001. - с. 167-173.
72. Артемов М.А. О двухосном растяжении толстой пластины из упрочняющего упругопластического материала // ПМТФ. - 1985. - №6. - с. 158-183.
73. Ochensberger W., Christian C., Manfred H. Amendment to the Galin Plane Elastoplastic Solution// J. Eng. Mech. - 2013. - v. 139. - pp. 1658-1662.
74. Chakrabarty J. Theory of plasticity. Amsterdam: Elsevier. - 2006. - 882 p.
75. Kirsch G. Die Theorie d. Elastizitat u. d. Bedurfnisse d. Festigkeitslehre, Zeitschrift des Vereines deutscher Ing. - 1898. - 42. - pp. 797–807.
76. Шарафутдинов Г.З. Решение задачи Кирша в трехмерной постановке // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. - 2001. - № 6. - с. 20-25.
77. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. М.: ИЛ. - 1954. - 648 с.
78. Tuba I.S. An analytic method for elastic-plastic solutions // Int. Solids Structures. - 1967. - v. 3. - pp. 543-564.
79. Фаербург И.И. Растяжение пластинки с круговым отверстием за пределом упругости // Тр. ЦАГИ. - 1947. - № 615. - с. 1-13.
80. Перлин П.И. Приближенный метод решения упруго-пластических задач // Инж. сб. - 1960. - т. 28. - с. 145-150.
81. Перлин П.И. Решение плоских упруго-пластических задач для двухсвязных областей // Инж. журн. - 1961. - т. 1, № 4. - с. 68-76.
82. Leitman M., Villaggio P. Plastic Zone around Circular Holes // J. Eng. Mech. - 2009. - v. 135, № 12. - pp. 1467–1471.

83. Сажин В. С. Упруго-пластическая задача для бесконечной плоскости с квадратным отверстием // Прикл. механика. - 1965. - т. 1, № 11. - с. 134-137.
84. Сажин В. С. Упруго-пластическое распределение напряжений вокруг отверстия, близкого к квадрату // Инж. Журн. - 1964. - т. 4, № 2. - с. 364-368.
85. Остросаблин Н.Н. Плоское упругопластическое распределение напряжений около круговых отверстий. Новосибирск: Наука. - 1984. - 113 с.
86. Куршин Л.М., Суздальницкий И.Д. Упруго-пластическая задача для плоскости, ослабленной двоякопериодической системой других отверстий // Прикл. математика и механика. - 1968. - т. 32, № 3. - с. 463-467.
87. Ильюшин А.А. Связь с теорией Сен-Венана, Леви, Мизеса и с теорией малых упругопластических деформаций // Прикл. мат. и мех. - 1945. - т. 9, № 3 - с. 207-218.
88. Ильюшин А.А. Пластичность. Ч.1. Упруго-пластические деформации. М.: ГИТТЛ. - 1948. - 377 с.
89. Биргер И.А. Некоторые общие методы решения задач теории пластичности // Прикл. мат. и мех. - 1951. - т. 15, № 6 - с. 765-770.
90. Биргер И.А. Некоторые математические методы решения инженерных задач. М.: Оборонгиз. - 1956. - 151 с.
91. Биргер И.А. Расчет конструкций с учетом пластичности и ползучести // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика. - 1965. - № 2. - с. 113-119.
92. Соколов А.П. Об упругопластическом состоянии пластинки // ДАН СССР. - 1948. - т. 60, № 1. - с. 33-36.
93. Ивлев Д. Д. Выпучивание эксцентричной трубы // Изв. АН СССР. ОТН. - 1956. - №10. - с. 112-166.
94. Ивлев Д. Д. Приближенное решение плоских упругопластических задач теории идеальной пластичности // Вестник МГУ. - 1957. - №5. - с. 17-26.
95. Кузнецов В. В. Концентрация напряжений вблизи эллиптического отверстия упругопластического тела // Прикладная механика. - 1972. - № 5.

96. Кузнецов В. В. Об определении деформированного состояния упруго-пластической толстой плиты с эллиптическим отверстием // Прикладная механика. - 1973. - т. 9, № 9. - с. 133-137.
97. Пальмов В.А. Упругая плоскость с отверстием случайной формы // В кн.: Труды Ленинградского политехнич. ин-та. - 1964. - №235. - с. 48-56.
98. Шейнин В.И., Фотиева Н.Н. Влияние неровностей контура выработки на напряженное состояние обделки напорного гидротехнического тоннеля // Инж. Журнал. - 1967. - №4. - с. 161-165.
99. Шейнин В.И. Распределение напряжений в окрестности горных выработок с учетом неровностей контура // Основания, фундаменты и механика грунтов. - 1965. - №4. - с. 21-23.
100. Каминский А.А. Концентрация напряжений возле свободных и подкрепленных криволинейных отверстий со случайными неровностями // Прикладная механика. - 1970. - т. 6, № 9. - с. 66-72.
101. Тунгускова З.Г. Концентрация напряжений вблизи отверстия с периодическими неровностями // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. - 1970. - №4. - с. 127-133.
102. Качанов Л.М. Пластическое кручение круглых стержней переменного диаметра // ПММ. - 1948. - т. 12, № 4. - с. 375-386.
103. Качанов Л.М. Ползучесть овальных и равностенных труб // Изв. АН СССР. ОТН. - 1956. - № 9. - с. 28-32.
104. Ильюшин А.А. Деформация вязко-пластического тела // Уч. Записки МГУ. - 1940. - № 39. - с. 3-81.
105. Ишлинский А.Ю. Об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прута // ПММ. - 1943. - т. 7, № 3. - с. 25-39.
106. Жуков А.М. К вопросу о возникновении шейки в образце при растяжении // Инж. Сборник. - 1949. - т. 5, № 2. - с. 34-51.
107. Rice J.R., Yokobori T., Kawasaki T., Swedlow J.L. Plastic yielding near a crack tip / Proc. 1-st Intern. Conf. on Fracture. // Japanese Society for Strength and Fracture of Materials. Sendai. Tokyo. - 1966. - v. I, pp. 283-308.

108. Тарасьев Г.С., Толоконников Л.А. Концентрация напряжений около полостей в несжимаемом материале // Концентрация напряжений. Киев: Наукова думка. - 1962. - № 1. - с. 251-255.
109. Толоконников Л.А., Яковлев С.П., Кузин В.Ф. Плоская деформация со слабой пластической анизотропией // Прикл. механика. - 1969. - т. 5, № 8. - с. 71-76.
110. Друянов Б.А. Вдавливание штампа в толстую пластически неоднородную полосу // Изв. АН СССР. ОТН. - 1959. - №3. - с. 35-41.
111. Друянов Б.А. Вдавливание шероховатого штампа в толстую пластически неоднородную полосу // Изв. АН СССР. ОТН. - 1960. - №6. - с. 29-34.
112. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: ИЛ. - 1961. - 778 с.
113. Бухалов В.И., Попов А.Л. Разработка методики решения обратных задач осесимметричного упругопластического деформирования диска с отверстием // Международная молодежная научная конференция «XLIII ГАГАРИНСКИЕ ЧТЕНИЯ». Сборник тезисов докладов «Механика и моделирование материалов и технологий». - 2017. - с. 15-16.
114. Бухалов В.И., Попов А.Л. Расчет упругопластической посадки колец // Международная молодежная научная конференция «XLIV ГАГАРИНСКИЕ ЧТЕНИЯ». Сборник трудов секции «Механика и моделирование материалов и технологий». - 2018. - с. 27.
115. Bukhalov V.I., Popov A.L., Chelyubeev D.A., Gadolin's Theory in Elastoplastic Formulation. Mechanics of Solids. - 2019. - v. 54, № 2. - pp. 356-363.
116. Александров С.Е., Бухалов В.И., Попов А.Л. Итерационное решение упругопластической задачи Ламе // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сб. Тр. Уфа: РИЦ БашГУ. - 2019. - с. 197.
117. Бухалов В.И., Попов А.Л. Разработка итерационной процедуры решения задачи Кирша в упругопластической постановке // Международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы прикладной мате-

- матики, информатики и механики». Сб. Тр. Воронеж: Науч.-исслед. публ. - 2020. - с. 1277-1282.
118. Перельмутер М.Н., Попов А.Л., Челюбеев Д.А., Бухалов В.И. Анализ эффективности залечивания дефектов при их заполнении различными материалами // Международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». Сб. Тр. Воронеж: Науч.-исслед. публ. - 2020. - с. 1492-1496.
119. Бухалов В.И., Попов А.Л., К вопросу о сходимости итерационной процедуры решения упругопластической задачи Ламе // Международная молодежная научная конференция «XLVI ГАГАРИНСКИЕ ЧТЕНИЯ». Сборник трудов секции «Механика и моделирование материалов и технологий». - 2020. - с. 14-17.
120. Bukhalov V.I., Popov A.L., Verification of the iterative procedure for solving the elastoplastic Kirsch problem on the Lamé problem. Journal of Physics: Conference Series (1614). - 2020. - pp. 1-6.
121. Перельмутер М.Н., Бухалов В.И., Анализ концентрации напряжений при капсульном самозалечивании материалов // 5-я Международная научно-техническая конференция в дистанционном формате «Живучесть и конструкционное материаловедение (ЖивКоМ – 2020)». Сб. тр. конф. М.: ИМАШ. - 2020. - 57-60.
122. Бухалов В.И., Перельмутер М.Н., Попов А.Л., Залечивание внутренних дефектов в поле сжимающих напряжений с использованием пластических свойств материалов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. - 2021. - № 2. - 36-43.
123. Bukhalov V.I., Verifying the Movable Elastoplastic Boundary Method by Using Galin's Problem. Journal of Physics: Conference Series (2095) 1. - 2021. - 012087. - pp. 1-9.
124. Автаев В.В., Бухалов В.И., Козинцев В.М., Медведев, Попов А.Л., Челюбеев Д.А., Яковлев Н.О. Исследование распределения внутренних напряжений в соединении с натягом // XIV Всероссийская конференция по ис-

- пытаниям и исследованиям свойств материалов «ТестМат». М.: НИЦ «Курчатовский институт» - ВИАМ. - 2022. - с. 363 - 378.
125. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Наука. - 1978. - 464 с.
126. Шарафутдинов Г.З. Решение задачи Кирша для пластинки из неоднородного по толщине материала // Изв. РАН. Мех. тв. тела. - 2019. - № 1. - с. 63-71.
127. Чернышев Г.Н., Попов А.Л., Козинцев В.М. Полезные и опасные остаточные напряжения // Журн. Природа - 2002. - №10. - с. 17–24.
128. Гадолин А.В. Теория орудий, скреплённых обручами // Артилл. ж. - 1861. - №12. - с. 1033–1071.
129. Ribeiro J., Monteiro J., Vaz M., Lopes H., Piloto P. Measurement of Residual Stresses with Optical Techniques // Strain. - 2009. v. 45. - pp. 123-130.
130. Steinzig M., Hayman G. J., Prime M. B. Verification of a Technique for Holographic Residual Stress Measurement // Residual Stress Measurement and General Nondestructive Evaluation. ASME 2001. - v. 429. - pp. 65-70.
131. Blessing G.V., Hsu N.N., Proctor T.M. Ultrasonic-shear-wave Measurement of Known Residual Stress in Aluminum // Exp. Mech. - 1984. - № 24. - pp. 218-222.
132. Brand P.C., Prask H.J., Blackburn J., Fields R.J., Proctor T.M. Possible Standard Specimens for Neutron Diffraction Residual Stress Measurements // Proc. Mat. Res. Soc. Symp. - 1995. - v. 376. - pp. 429-433.
133. Gnaupel-Herold T., Prask H.J., Clark A.V., Hehman C.S., Nguyen T.N. A comparison of neutron and ultrasonic determinations of residual stress // Meas. Sci. Technol. - 2000. - № 11. - pp. 436–44.
134. Popov A.L., Alexandrov S.E., Kozintsev V.M. et al. Effect of plasticity at out-of-plane electronic speckle pattern interferometry diagnostics of axisymmetric stresses by the holedrilling method // J. Strain Anal. Eng. - 2018. - v. 53. - № 1. - pp. 3–14.

135. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. Издательство «Наукова думка». Киев. - 1972. - 506 с.
136. Качанов Л.М. Основы теории пластичности М.: Наука. - 1969. - 420 с.
137. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука. - 1966. - 708 с.
138. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз. - 1958. – 370 с.
139. Лурье А.И. Теория упругости. - М.: Наука. - 1970. - 940 с.
140. ANSYS Mechanical APDL Structural Analysis Guide // ANSYS, Inc. Southpointe 275 Technology Drive. Canonsburg, Release 15. - 2013. – P. 522.
141. Казаков Н.Ф. Диффузионная сварка материалов. - М.: Машиностроение. - 1976. – 312 с.
142. Кочергин К.А. Сварка давлением. - Л.: Машиностроение. - 1972. – 216 с.
143. Колмогоров В.Л. Механика обработки металлов давлением. - М.: Металлургия. - 1986. – 689 с.