

на правах рукописи

Цуканов Иван Юрьевич

**КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГИХ ТЕЛ С РЕГУЛЯРНЫМ  
РЕЛЬЕФОМ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН).

- Научный консультант: **Горячева Ирина Георгиевна**  
академик РАН, д.ф.-м.н., профессор,  
заведующая лабораторией трибологии  
ИПМех РАН
- Официальные оппоненты: **Пожарский Дмитрий Александрович**  
д.ф.-м.н., профессор, Заведующий  
кафедрой «Прикладная математика» ФГБОУ  
ВО «Донской государственной технической  
университет»
- Соляев Юрий Олегович**  
д.ф.-м.н., ст.н.с. лаборатории  
неклассических моделей композитных  
материалов и конструкций ФГБУН  
«Институт прикладной механики РАН»
- Галыбин Александр Николаевич**  
д.ф.-м.н., профессор, г.н.с. лаборатории  
геомеханики ФГБУН «Институт физики  
Земли им. О.Ю. Шмидта РАН»
- Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное  
учреждение науки Институт проблем  
машиноведения Российской академии наук  
(ИПМаш РАН)

Защита состоится г. в 15 часов на заседании диссертационного  
совета 24.1.098.01 на базе ИПМех РАН по адресу: просп. Вернадского 101,  
корп. 1, Москва.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИПМех РАН  
<https://ipmnet.ru/files/diss/2024/1/Tsukanov-diss.pdf>

Автореферат разослан «    » 2024г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета 24.1.098.01  
к.ф.-м.н.

Е.Я. Сысоева

## Общая характеристика работы

**Актуальность работы.** В связи с возрастающим применением материалов с низким значением модуля упругости (полимеров и эластомеров) в различных технических, медицинских и электронных устройствах, в которых эти материалы используются в контакте с более жестким телом или телом из того же материала, имеющим поверхностный рельеф (текстуру) актуальной проблемой является развитие теории контактных задач для упругих тел с регулярным рельефом поверхностей, позволяющих оценить влияние микрогеометрии взаимодействующих поверхностей на характеристики контактного взаимодействия, силу трения и распределение подповерхностных напряжений, и управлять процессами трения и изнашивания за счет выбора оптимальных параметров поверхностного рельефа в широком диапазоне параметров нагружения.

Первые исследования в данном направлении, посвященные плоским периодическим контактными задачам при приложении нормальных сил, были отражены в работах Н.И. Мухелишвили, И.Я. Штаермана, Н.М. Westergaard. Существенный вклад в развитие задач дискретного контакта в плоской постановке при приложении нормальных сил внесли Л.А. Галин, Е.А. Кузнецов, С.М. Мхитарян, И.А. Солдатенков, G.M.L. Gladwell, R. Jackson и др. Первые и основополагающие результаты по пространственной задаче дискретного контакта были получены в работах А.Е. Андрейкива, Л.А. Галина, И.Г. Горячевой, В.В. Панасюка. Существенный вклад в развитие этого класса задач внесли В.М. Александров, И.И. Аргатов, А.Н. Галыбин, И.Г. Горячева, Д.А. Пожарский, О.Г. Чекина, J. Greenwood, K.L. Johnson, V.A. Yastrebov и др. Задачи дискретного контакта при приложении нормальных и касательных сил в плоской постановке рассматривались в работах Ю.А. Антипова, И.Г. Горячевой, Е.А. Кузнецова, Р.М. Мартыняк, И.А. Солдатенкова, M. Ciavarella, L.M. Keer и др. Контактные задачи с учетом адгезионного взаимодействия рассматривались И.Г. Горячевой, Ю.Ю. Маховской, И.А. Солдатенковым, Ю.О. Соляевым, Г. В. Федотенковым, K.L. Johnson и др. Применение задач дискретного контакта к теории взаимодействия технических поверхностей исследовали А.Ю. Албагачиев, Н.Б. Демкин, В.В. Измайлов, И.В. Крагельский, Н.К. Мышкин, П.М. Огар, М.И. Петроковец, Э.В. Рыжов, А.Г. Суслов, F.M. Borodich, J. Greenwood и др.

Большинство технических и натуральных поверхностей не являются идеально гладкими и имеют отклонения от правильной формы на различных масштабных уровнях, которые формируют их рельеф. Рельеф поверхностей весьма различен как по способу возникновения, так и по масштабу (волнистость, шероховатость) и может наноситься искусственно или получаться в результате различных видов поверхностной обработки.

Поскольку область фактического контакта может составлять десятые или сотые доли номинальной области контакта (односвязной области, включающей в себя все пятна фактического контакта), то максимальные фактические давления на пятнах контакта превосходят номинальные (осредненные по номинальной области контакта) в сотни раз.

Дискретность контакта играет важную роль в протекании физических процессов, происходящих при контактном и фрикционном взаимодействии (упругих и пластических деформаций, адгезии и когезии, фрикционного разогрева, фазовых переходов), а также оказывает влияние на электросопротивление, массоперенос, изнашивание и усталостное разрушение поверхностных слоев материалов, на поверхностное натяжение и смачивание поверхностей, на протекающие в зоне смазанного контакта гидродинамические явления и т.д.

Актуальность и востребованность развития аналитических методов решения задач дискретного контакта, и в частности задач для поверхностей с регулярным рельефом не вызывает сомнений. Применение аналитических методов исследования дает возможность не только оценить влияние микрогеометрии на характеристики контактного взаимодействия, силу трения и т.д., но и управлять этими процессами за счет выбора оптимальных параметров поверхностного рельефа.

**Целью диссертационной работы** является развитие аналитических методов решения контактных задач теории упругости для исследования взаимодействия упругих тел с поверхностным рельефом в широком диапазоне нагрузок и геометрии рельефа, что включает в себя следующие **задачи**:

- развитие точных и асимптотических методов решения плоских периодических контактных задач при неизвестной области контакта и симметричной форме выступов (впадин) рельефа поверхностей в широком диапазоне нагрузок;

- развитие асимптотических методов решения периодических контактных задач для двумерной волнистой поверхности и упругого полупространства;

- установление связи между геометрией поверхностного рельефа и контактными характеристиками взаимодействующих упругих тел (распределением контактных давлений, площадью фактического контакта, относительным смещением поверхностей) в широком диапазоне приложенных нагрузок;

- оценка влияния неровностей поверхности различных масштабных уровней микрорельефа на контактные характеристики взаимодействующих упругих тел;

- оценка влияния формы и размеров выступов и впадин поверхностного рельефа на контактные характеристики, а также на размер зон сцепления и проскальзывания при приложении нормальных и касательных нагрузок.

**Научная новизна** работы состоит в следующем:

1. Получены точные и асимптотические решения не рассмотренных ранее контактных задач теории упругости в плоской постановке с неизвестными границами зон контакта, позволяющие рассчитать контактные характеристики поверхностей, в том числе с двухуровневой периодической системой неровностей, имеющих форму, описываемую четной функцией координаты.
2. Получены асимптотические решения пространственной периодической задачи о контактном взаимодействии поверхности с волнистым микрорельефом, нанесенным в двух взаимно перпендикулярных направлениях (с одинаковым периодом) и упругого полупространства. Построенные решения позволяют изучить влияние неосесимметричной формы выступов/впадин микрорельефа на изменение контактных характеристик при малых, умеренных и больших нагрузках.
3. Получено аналитическое решение периодической контактной задачи в плоской постановке для поверхности с двухуровневой волнистостью и упругой полуплоскости при малой высоте неровностей второго уровня. Проанализировано влияние параметров неровностей второго уровня на контактные характеристики взаимодействующих тел.

4. Получено решение контактной задачи для волнистого цилиндра и упругой полуплоскости при наличии одной и двух зон начального контакта тел. Проанализировано влияние геометрических параметров цилиндра и его волнистости на переход от односвязной области фактического контакта к многосвязной.
5. Даны решения плоских контактных задач для упругой полуплоскости и упругого тела с рельефом, форма которого описывается заданными параметрически периодическими функциями, в условиях частичного проскальзывания при приложении нормальной и касательной сил (в предположении близости упругих постоянных взаимодействующих тел). Исследованы зависимости контактных давлений и касательных усилий, размеров областей контакта и зон сцепления (проскальзывания) от изменения соотношения касательной и нормальной силы и геометрических параметров рельефа.

**Достоверность результатов обусловлена** использованием известных методов механики деформируемого твердого тела и математического анализа. Большинство решений получены аналитически в замкнутом виде, их достоверность обеспечивается корректной постановкой задач и использованием соответствующего математического аппарата. Достоверность результатов расчетов подтверждается сравнением полученных решений с известными решениями в предельных случаях и с результатами численного моделирования, доступными из публикаций.

**Практическая значимость работы заключается в том,** что результаты диссертации могут быть использованы для моделирования влияния геометрических характеристик – формы и размеров выступов и впадин поверхностного рельефа на контактные и фрикционные свойства взаимодействующих упруго деформируемых тел, в которых одно или оба тела выполнены из материалов с низким значением модуля Юнга (например, полимерных материалов). Полученные результаты также позволяют решать задачу научно обоснованного выбора рациональных геометрических параметров рельефа контактирующих поверхностей для обеспечения требуемых контактных и фрикционных свойств сопряжений при заданных нагрузках и упругих свойствах материалов контактирующих тел в условиях нормального и тангенциального нагружения.

**Объектами** исследования являлись контактирующие под воздействием нормальных и касательных нагрузок упругие тела, имеющие рельеф на их поверхностях, представляющий собой систему выступов и впадин

**Методы исследования.** В работе использовались методы механики контактного взаимодействия и математического анализа. Для решения плоских и пространственных периодических контактных задач использовался также метод локализации, предложенный И.Г. Горячевой, методы механики разрушения, использование которых в механике контактного взаимодействия предложено К. Джонсоном. Для контактных задач с частичным проскальзыванием использованы положения теории Каттанео и Миндлина. Для построения решений контактных задач и их анализа также использовались методы интегральных преобразований и теория ортогональных многочленов.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Аналитические решения плоской контактной задачи для деформируемых и жестких тел с регулярным рельефом их поверхностей и упругой полуплоскости, позволяющие определить контактное давление, размер фактической области контакта и функцию дополнительного смещения в квадратурах и рядах по ортогональным многочленам во всем диапазоне нагрузок и при форме выступов/впадин, описываемой четной функцией координаты, а также их асимптотики в области малых, умеренных и больших нагрузок.

2. Асимптотические выражения для определения контактных характеристик (площадь фактической области контакта, дополнительное смещение за счет неровностей поверхности) при малых, умеренных и больших нагрузках для пространственного волнистого микрорельефа (с волнистостью в двух взаимно перпендикулярных направлениях) и методика приближенного определения формы области контакта и распределения контактных давлений при умеренных нагрузках для данного типа рельефа.

3. Аналитическое решение периодической задачи для жесткого тела с волнистым рельефом, имеющим два масштабных уровня неровностей, при внедрении ее в упругую полуплоскость и анализ влияния геометрических характеристик неровностей второго масштабного уровня на контактные характеристики – распределение контактного давления,

размер области фактического контакта и дополнительное смещение за счет неровностей волнистости.

4. Решение задачи о волнистом цилиндре, внедряющемся в упругую полуплоскость при одной и двух зонах контакта, возникающих вследствие различного типа начального касания.

5. Критерии перехода к многосвязной области при одной зоне начального контакта и различном сочетании геометрических параметров цилиндра и волнистости.

6. Аналитическое решение контактной задачи для периодического рельефа с параметрически заданной формой выступов и впадин и упругой полуплоскости при приложении нормальных и касательных сил в условиях частичного проскальзывания (при одинаковых упругих постоянных материалов взаимодействующих тел). Анализ влияния геометрии микрорельефа на контактные характеристики - распределение нормальных и касательных усилий, размеры области контакта, а также подобластей сцепления и проскальзывания на ней от соотношения нормальных и касательных сил.

**Апробация работы.** Результаты работы были предметом более чем 20 докладов на российских и международных научных конференциях, таких как:

1. Contact Mechanics International Symposium (CMIS-2018), Biella, Italy, May 16-18, 2018.
2. Всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике», посвященной 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева, 17 - 19 мая 2016, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия.
3. XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, Россия, 19-24 августа 2019
4. XLIX International Summer School – Conference Advanced Problems in Mechanics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Россия, 21-25 июня 2021
5. VII Международная научная конференция «Фундаментальные исследования и инновационные технологии в машиностроении», Москва, Россия, 14-16 декабря 2021.



6. XIV Международная научно-техническая конференция Трибология - машиностроению 2022, посвященная 100-летию со дня рождения А.П. Семёнова, Москва, Россия, 12-20 октября 2022.
7. XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. г. Санкт-Петербург. 21-25 августа 2023 г.

Результаты диссертационной работы также докладывались и обсуждались на семинаре по механике фрикционного взаимодействия им. И.В. Крагельского ИПМех РАН и семинаре по механике деформируемого твердого тела НИИ Механики МГУ.

Научные исследования, проведенные в диссертационной работе, осуществлялись в том числе в рамках грантов Российского научного фонда (проект 14-29-00198) и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 17-01-00352\_а; 18-58-00014\_Бел\_а; 19-08-00615\_а; 20-01-00400\_а).

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в работах [1-28], изданных в периодических научных изданиях, сборниках материалов и тезисов конференций. Список публикаций приведен в конце автореферата, среди публикаций 14 статей [1-14] напечатаны в периодических журналах, рекомендованных ВАК РФ и/или индексируемых в Web of Science, Scopus, в том числе 11 публикаций входят в категорию K1.

**Личный вклад автора.** Работы [1-5,10,11,14] выполнены автором диссертации самостоятельно. В работе [6] постановка задачи, ее решение и анализ результатов для случая упругой полуплоскости выполнены автором диссертации самостоятельно. Разработка модели для упругого основания, анализ и сравнение результатов выполнены совместно с А.Н. Любичевой. В работах [7-9, 12] автору частично принадлежат постановки контактных задач и методы их решения, анализ результатов проводился совместно с И.Г. Горячевой. В работе [13] автором проведены постановки задач и расчеты; формулировки идей и полученные результаты обсуждались с А.Ю. Албагачиевым и В.Д. Даниловым.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 190 страниц, включая 67 рисунков и 1 таблицу. Список литературы содержит 139 наименований.

**Соответствие паспорту научной специальности.** По теме и содержанию материалов исследования диссертационная работа соответствует актуальному паспорту специальности 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела, в части п. 3. Задачи теории упругости, теории пластичности, теории вязкоупругости.

### **Содержание работы**

Во **введении** представлен краткий обзор работ, посвященный тематике данного исследования, обоснована актуальность постановок задач, проводимых в рамках данной диссертационной работы, сформулирована цель, поставлены задачи работы, изложена научная новизна и практическая значимость представляемой работы, описаны методы исследований, сформулированы результаты, выносимые на защиту.

**В первой главе** представлен обзор литературы, посвященной развитию механики контактного взаимодействия тел с поверхностным рельефом и ее применению к расчету контактных характеристик деформируемых тел, включая работы, опубликованные по этой теме соискателем.

**Вторая глава** посвящена развитию методов решения плоских периодических контактных задач для поверхностей с регулярным рельефом.

Общая постановка задачи и решение для формы рельефа, описываемой четной функцией координаты.

Рассматривается внедрение в упругую полуплоскость жесткого тела, имеющего периодический регулярный рельеф (рисунок 1), профиль которого описывается четной функцией  $f(x)$ , для которой справедливо разложение в ряд Фурье вида:

$$f(x) = \Delta \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cos(2\pi n_i x / L) \quad (1)$$

где  $\Delta$  и  $L$  – амплитуда и период гармоника с наименьшей угловой частотой,  $n_i$  и  $k_i$  частотный и амплитудный коэффициенты для  $i$ -ой гармоника. Следует отметить, что величины  $\Delta$ ,  $L$  и  $k_i$  имеют размерность длины (м - в системе СИ), а величина  $n_i$  - характеризует угловую частоту и имеет размерность обратно пропорциональную длине ( $\text{рад}\cdot\text{м}^{-1}$  – в системе

СИ). В качестве периода гармоники с наименьшей угловой частотой используется для простоты  $L = 2\pi$ . Функция  $f(x)$  должна быть непрерывной и обладать абсолютно интегрируемой производной.

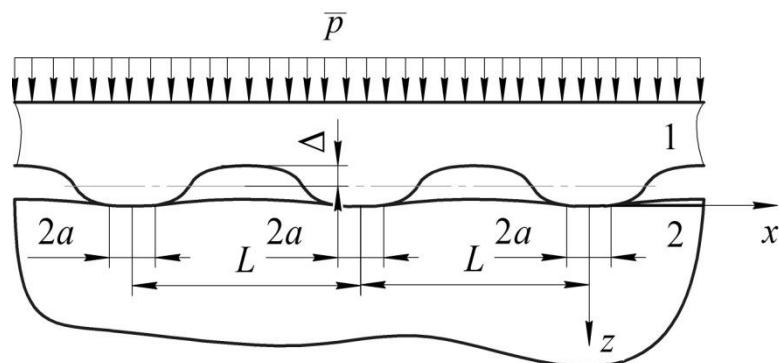


Рисунок 1. Схема взаимодействия тела с поверхностным регулярным рельефом и упругой полуплоскости: 1 – жесткое тело, ограниченное поверхностью с регулярным рельефом; 2 – упругая полуплоскость

К жесткому телу приложено номинальное давление,  $\bar{p} = P/L$ , где  $P$  – значение нормальной погонной нагрузки на одном периоде  $L$ . Задача рассматривается в рамках линейной теории упругости для полубесконечных тел в плоской постановке. При этом считается, что в поперечном направлении контактирующие тела имеют неограниченную длину (плоское деформированное состояние). Кроме того, принято, что для определения упругих перемещений полуплоскости от единичной сосредоточенной силы справедливо решение Фламана. Для выполнения допущений о применимости линейной теории упругости и об односвязности области контакта внутри одного периода ( $x \in [-a, a]$ ;  $2a < L$ ) необходимо выполнение следующих условий:  $\Delta \ll L$ ;  $k_i \ll 2\pi/n_i$ .

Интегральное уравнение периодической контактной задачи для одной зоны контакта на одном периоде имеет вид (Штаерман И.Я., 1949)

$$\frac{E^*}{2} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{L} \int_{-a}^a p(\xi) \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi(x-\xi)}{L} \right) d\xi, \quad x \in [-a, a], \quad (2)$$

где  $p(x)$  – контактное давление;  $h(x) = \delta - f(x)$  – функция начального зазора между поверхностями,  $\delta$  – величина сближения тел 1 и 2.

Выполняется условие контакта между телами:

$$h(x) = u_{z1}(x) - u_{z2}(x), x \in [-a, a], \quad (3)$$

где  $u_z(x)$  - упругие перемещения полуплоскости вдоль оси  $z$  при действии распределенной нормальной нагрузки, которые находятся согласно зависимости (Штаерман И.Я., 1949):

$$u_z(x) = \frac{2}{\pi E^*} \int_{-a}^a p(\xi) \ln \left( 2 \left| \sin \frac{\pi(x-\xi)}{L} \right| \right) d\xi + C. \quad (4)$$

В выражении (4)  $C$  – постоянная, зависящая от выбора точки начала отсчета смещений.

Параметр  $E^*$  в выражениях (2) и (4) является приведенным модулем упругости (Па) материалов упругой полуплоскости и тела с регулярным рельефом (Джонсон К., 1989).

К выражениям (2-4) следует добавить уравнение равновесия:

$$\bar{p} = \frac{1}{L} \int_{-a}^a p(x) dx. \quad (5)$$

Решение уравнений (2) и (5) вместе с условием контакта (3) определяют основные искомые параметры – распределение контактных давлений  $p(x)$  и зависимость длины зоны контакта  $2a$  от номинального давления  $\bar{p}$ .

Общее решение для контактного давления в квадратурах. Резольвента уравнения (2) при условии равенства нулю контактного давления на границах области контакта (Чибрикова Л. И., 1962) имеет следующий вид ( $L = 2\pi$ ):

$$p(x) = \frac{E^*}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{\partial h}{\partial x} \sqrt{\frac{\cos a - \cos x}{\cos a - \cos \xi}} \operatorname{cosec} \left( \frac{\xi - x}{2} \right) d\xi, p(\pm a) = 0. \quad (6)$$

Интеграл в (6) является сингулярным и требует специальных методов интегрирования. Для представления выражение (6) в форме, не содержащей сингулярного интеграла, воспользуемся следующей заменой переменных при  $L = 2\pi$  (Block J.M., Keer L.M., 2008):

$$u = \operatorname{tg}(\xi/2); \quad v = \operatorname{tg}(x/2); \quad \alpha = \operatorname{tg}(a/2). \quad (7)$$

Если функция зазора  $h(x)$  четная, то функция контактного давления  $p(u)$  тоже будет четной и с помощью алгебраических преобразований исходное уравнение (2) с ядром Гильберта преобразуется в интегральное уравнение с ядром Коши. Резольвента этого уравнения для давления, обращаящегося в нуль на границах зоны контакта, имеет вид

$$p(v) = -\frac{E^*}{2\pi} \sqrt{\alpha^2 - v^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} h'_x(u) \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}} \frac{1}{u - v} du, \quad p(\pm\alpha) = 0. \quad (8)$$

Далее, чтобы получить связь между полной нормальной нагрузкой  $P$  на одном периоде и полудлиной контактной зоны  $a$  используем уравнение равновесия в преобразованных переменных

$$P = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2p(v)}{1 + v^2} dv. \quad (9)$$

Используя изменение порядка интегрирования и возвращаясь к исходным переменным, можно получить выражение для определения номинального давления как функции полудлины зоны контакта:

$$\bar{p} = \frac{E^*}{4\pi} \frac{1}{\cos\left(\frac{a}{2}\right)^{-a}} \int_{-a}^a \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \operatorname{tg}\left(\frac{\xi}{2}\right)^2}} d\xi. \quad (10)$$

Распределение контактных давлений в преобразованных переменных  $p(v)$  можно определить с помощью интегрального преобразования Абеля функции  $\partial P / \partial \alpha$  (Barber J.R., 2018):

$$p(v) = \frac{1}{\pi} \int_v^{\alpha} \frac{P'_s(\eta) d\eta}{\sqrt{1 + \eta^2} \sqrt{\eta^2 - v^2}}, \quad (11)$$

где  $\eta = \operatorname{tg}(s/2)$ .

Возвращаясь к исходным переменным и выполняя тригонометрические преобразования, окончательно получим

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \int_x^a \frac{P'(s)ds}{\sqrt{\cos x - \cos s}}, \quad x \in [0, a]. \quad (12)$$

Решение задачи для рельефа поверхности, форма которого описывается четным тригонометрическим многочленом. Если функция формы рельефа задана в следующем виде:

$$f(x) = \Delta \left( \sum_{i=1}^N k_i - \sum_{i=1}^N k_i \cos(n_i x) \right), \quad L = 2\pi, \quad (13)$$

где  $\Delta$  – амплитуда гармоники с наименьшей частотой,  $n_i$  и  $k_i$  – частотный и амплитудный коэффициенты для  $i$ -ой гармоники ( $n_i \in \mathbb{N}^*$ );  $N$  – число гармоник, то применяя допущение об односвязности области контакта на одном периоде, которое выполняется при  $k_i \ll 2\pi/n_i$ , определение данных характеристик возможно на основе принципа суперпозиции:

$$p(x) = E^* \Delta \sum_{i=1}^N k_i p_i(x); \quad \bar{p} = E^* \Delta \sum_{i=1}^N k_i \bar{p}_i. \quad (14)$$

С использованием общих формул (10) и (12) выражения  $i$ -ой компоненты номинального давления и распределения контактных давлений имеют вид:

$$\bar{p}_i = -\frac{k_i n_i}{2} P_{n_i}^{(-1,0)}(\cos a); \quad (15)$$

$$p_i(x) = \frac{k_i n_i^2}{2\sqrt{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \int_x^a \frac{\sin s P_{n_i-1}^{(0,1)}(\cos s) ds}{\sqrt{\cos x - \cos s}}, \quad x \in [0, a]. \quad (16)$$

где  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$  – многочлен Якоби.

Для  $N = 1$  и  $n_1 = 1$ ;  $k_1 = 1$ , рельеф представляет собой синусоидальную волнистость. В этом случае вычисление интеграла в выражении (16) приводит к известному решению Вестергаарда (Westergaard Н.М., 1939). Интегральное выражение (16) обобщает данное решение на случай гармоник неровностей с произвольным  $n_i$  ( $n_i \in \mathbb{N}^*$ ).

Определение дополнительного смещения поверхностей для рельефа с формой выступов, описываемой гладкой четной функцией и четным тригонометрическим многочленом.

Интегрирование уравнения (2) приводит к интегральному уравнению, связывающее форму рельефа и контактные давления

$$\frac{E^*}{2}(C - f(x)) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a p(\xi) \ln \frac{1}{2 \left| \sin \frac{x-\xi}{2} \right|} d\xi, \quad -a < x < a \quad (17)$$

где  $C$  – некоторая постоянная.

Представив производную функции начального зазора  $h(x)$  и контактное давление  $p(x)$  в виде ряда по многочленам Чебышева первого рода  $T_j(x)$  аргумента  $\frac{\sin(x/2)}{\sin(a/2)}$ , и используя спектральные соотношения

(Александров В.М., Мхитарян С.М., 1983), уравнение (17) можно привести к следующему виду:

$$E^*(C - f(x)) = c_0 \sin \frac{a}{2} \ln \left( \frac{1}{\sin(a/2)} \right) - \sin \frac{a}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_j}{2^j} T_{2j} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \right) + \sin \frac{a}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_j}{2^{j+2}} T_{2j+2} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \right), \quad (18)$$

где коэффициенты разложения  $c_j$  определяются как

$$c_j = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-a}^a \frac{T_{2j+1} \left( \frac{\sin(\xi/2)}{\sin(a/2)} \right) \frac{\partial h(\xi)}{\partial \xi}}{\sqrt{\cos \xi - \cos a}} d\xi. \quad (19)$$

Величина дополнительного смещения  $\bar{\delta}$ , исходя из общего определения (Горячева И.Г., 2001), является разностью нормальных смещений поверхности полуплоскости в точках фактического контакта и смещения полуплоскости от действия номинального давления, распределенного на периоде:

$$\bar{\delta} = \bar{u}_z - u_z(0), \quad (20)$$

где  $\bar{u}_z$  – средние смещения контактирующих тел; т.е. смещения от номинального (среднего) давления на периоде;  $u_z(0)$  – смещения контактирующих тел в начале координат. С использованием выражений

(10), (18) и (19) была получена формула для определения дополнительного смещения  $\bar{\delta}$  при произвольной четной гладкой функции, описывающей форму рельефа.

$$\bar{\delta} = \frac{2}{\pi E^*} \int_0^a \frac{\partial h(\xi)}{\partial \xi} \arccos \left( \frac{\sin(\xi/2)}{\sin(a/2)} \right) d\xi - \frac{4\bar{p}}{E^*} \ln \left( \sin \frac{a}{2} \right), \quad (21)$$

Для рельефа поверхности, форма которого описывается четным тригонометрическим многочленом вида (13), формулу (21) для  $i$ -й составляющей (гармоники) профиля рельефа можно записать как

$$\bar{\delta}_i = 2n_i P_{n_i}^{(-1,0)}(\cos a) \ln \left( \sin \frac{a}{2} \right) - P_{n_i}^{(0,-1)}(\cos a) - 1; \quad \bar{\delta} = \frac{\Delta}{E^*} \sum_{i=1}^N k_i \bar{\delta}_i. \quad (22)$$

При  $N = 1$ ,  $k_i = 1$ ,  $n_i = 1$  профиль рельефа представляет собой синусоиду. При данных параметрах выражение (22) становится равным

$$\bar{\delta} = \frac{\Delta}{E^*} \sin^2 \frac{a}{2} \left( 1 - 2 \ln \left( \sin \frac{a}{2} \right) \right), \quad (23)$$

что в точности совпадает с выражением, найденным Е.А. Кузнецовым (Кузнецов Е.А., 1982).

Построение асимптотических решений для рельефа с симметричной формой выступов и впадин.

Если области контакта в периодической задаче расположены на некотором удалении друг от друга, что имеет место при небольших и умеренных нагрузках, то построение асимптотического решения возможно с применением метода локализации, разработанным И.Г. Горячевой (Горячева И.Г., 2001). При таком подходе учитывается искривление поверхности упругого полупространства под произвольным фиксированным выступом от действия других выступов рельефа. Решение задач, основанное на методе локализации, в первом приближении предполагает определение искривления границы полуплоскости под рассматриваемой неровностью, на которую действует сила  $P$ , от распределений давлений на пятнах контакта остальных неровностей, которое учитывается номинальным давлением вне некоторой области



(полосы длиной  $2b$ ), определяемой плотностью расположения неровностей и величиной номинального давления  $\bar{p}$  (рисунок 2).

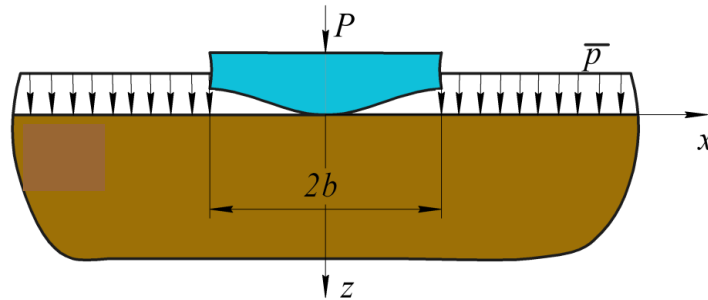


Рисунок 2. Эквивалентная схема контакта волнистой поверхности и упругой полуплоскости в соответствии с методом локализации

Контактная задача для единичного выступа в плоском случае описывается интегральным уравнением с ядром Коши, имеющему в случае четной функции формы выступа и ограниченного на обеих границах области контакта давления следующую резольвенту (Штаерман И.Я., 1949):

$$p(x) = \frac{E^*}{2\pi} \sqrt{a^2 - x^2} \int_{-a}^a h'(\xi) \frac{1}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \frac{1}{\xi - x} d\xi. \quad (24)$$

Функция формы зазора внутри области контакта определяется следующим условием:

$$h(x) = \delta - (f(x) + f_2(x)), \quad (25)$$

где  $f(x)$  – функция формы выступа,  $\delta$  – величина сближения тел,  $f_2(x)$  – искривление полуплоскости от действия остальных выступов за исключением рассматриваемого. Дополнительное искривление полуплоскости  $f_2(x)$  можно представить как разность перемещений от равномерной нагрузки, распределенной по всей полуплоскости и перемещений от той же нагрузки внутри полосы длиной  $2b$ . Производная функции зазора внутри области контакта единичного выступа в этом случае равна:

$$h'(x) = f'(x) + \frac{4}{\pi E^*} \frac{P_s}{L} \operatorname{arth} \left( \frac{2x}{L} \right), \quad |x| \leq a. \quad (26)$$

С использованием уравнения равновесия (5) и изменения порядка интегрирования (аналогично (10) и (11)) были получены асимптотические выражения для номинального давления и распределения контактных давлений в периодической задаче:

$$\bar{p} = \frac{E^*}{2L} \int_{-a}^a \frac{f'(\xi)\xi d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} + \frac{P_s}{L^2} \left( L - \sqrt{L^2 - 4a^2} \right), \quad 2a < L; \quad (27)$$

$$p(x) = \frac{E^*}{2\pi} \sqrt{a^2 - x^2} \int_{-a}^a \frac{f'(\xi)d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}(\xi - x)} + \frac{2P_s}{\pi L} \operatorname{arctg} \left( \frac{2\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{L^2 - 4a^2}} \right), \quad 2a < L, \quad (28)$$

где  $p_s(x)$  и  $P_s$  – контактное давление и полная нагрузка при вдавливании единичного выступа.

При значительных нагрузках зазор между контактирующими поверхностями становится малым и остается небольшая область внутри одного периода  $x \in [-l, l]$ , в которой контакт отсутствует (случай почти полного контакта). Эту область, где  $l = L/2 - a$  можно рассматривать как фиктивную сжимаемую трещину длиной  $2l$ , нагруженную некоторым давлением  $p_c(x)$ , равным (Джонсон К., 1989; Салганик Р.Л., Мохель А.Н., Федотов А.А., 2007)

$$p_c(x) = -2\bar{p} + p_f(x), \quad (29)$$

где  $p_f(x)$  – распределение давлений при полном внедрении (смятии) неровностей микрорельефа. Для функции профиля микрорельефа вида (13) распределение давлений при полном контакте в соответствии с выражением имеет вид [Xu Y., Jackson R.L., 2018]:

$$p_f(x) = \bar{p} + \frac{E^* \Delta}{2} \sum_{i=1}^N k_i n_i \cos(n_i x). \quad (30)$$

Так как контактное давление ограничено на концах отрезках зоны контакта, а перемещения внутри и вне зоны контакта непрерывны коэффициент интенсивности напряжений  $K_I$  фиктивной трещины при ее сжатии давлением  $p_c(x)$  должен равняться нулю (Джонсон К., 1989), откуда можно получить формулу связи для номинального давления и размера области отсутствия контакта  $2l$ .

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l \frac{p_c(s) ds}{\sqrt{l^2 - x^2}} = 0. \quad (31)$$

Дополнительное смещение за счет неровностей рельефа при почти полном контакте будет определяться как

$$\bar{\delta} = \Delta - \bar{u}_c, \quad (32)$$

где  $\Delta$  – амплитуда профиля рельефа;  $\bar{u}_c$  – средние перемещения поверхности фиктивной трещины.

Для рельефа поверхности, форма которого описывается четным тригонометрическим многочленом вида (13), получены выражения для номинального давления и дополнительного смещения для  $i$ -й составляющей профиля рельефа и  $L = 2\pi$ :

$$\bar{p}_i = \frac{\Delta E^* k_i n_i}{2} J_0(n_i l); \quad l = \pi - a, \quad (33)$$

$$\bar{\delta}_i = \Delta - \frac{k_i n_i}{4E^*} l^2 J_2(n_i l). \quad (34)$$

где  $J_n(x)$  – функция Бесселя первого рода порядка  $n$ .

На рисунке 3 показан пример сравнения кривых безразмерного номинального давления  $\bar{p}/p^*$ , где  $p^* = \pi E^* \Delta / L$  в зависимости от длины области контакта  $2a$  для точного решения, асимптотического решения по методу локализации асимптотического решения на основе механики разрушения для синусоидальной волнистости.

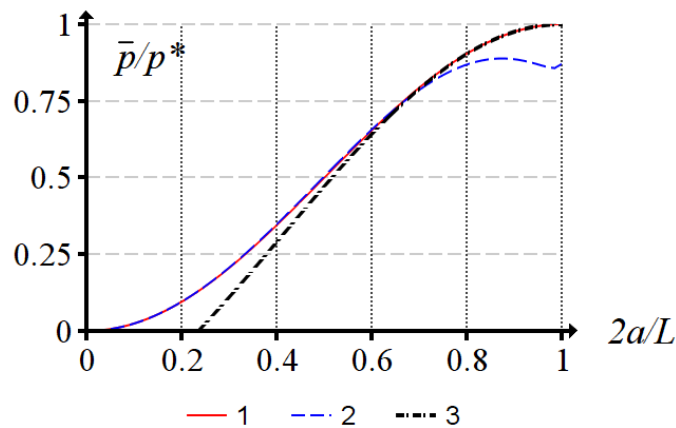


Рисунок 3. Зависимость безразмерного номинального давления от длины области контакта упругой полуплоскости и синусоидальной волнистой поверхности: 1 – точное решение; 2 – решение по методу локализации; 3 – решение при почти полном контакте

Таким образом, в **главе 2** получены точные и асимптотические решения контактной задачи при взаимодействии поверхности жесткого

тела с регулярным рельефом и упругой полуплоскости при произвольной симметричной форме выступов рельефа в квадратурах.

Анализ полученных во **второй главе** результатов дает возможность сделать следующие основные выводы:

- основным фактором, оказывающим влияние на характеристики контактного взаимодействия поверхности с регулярным рельефом и упругой полуплоскости при односвязной области контакта на периоде, является производная функции формы профиля;
- взаимным влиянием выступов (впадин) рельефа можно пренебречь при малых и больших нагрузках, но нельзя – при умеренных, что подтверждается сравнением полученного точного и асимптотических решений;
- влияние формы выступов рельефа и их взаимного расположения на контактные характеристики (распределение контактных давлений, размер области контакта и дополнительное смещение) с достаточной степенью точности можно рассматривать изолированно;
- изменение размера фактической области контакта с ростом нагрузки более чувствительно к форме микрорельефа, чем изменение величины дополнительного смещения, особенно при высоких нагрузках.

В **третьей главе** развиты асимптотические методы решения контактных задач для пространственного волнистого рельефа и упругого полупространства.

Пространственным волнистым рельефом является такой рельеф, у которого волнистость образована вдоль двух взаимно перпендикулярных направлений (двумерная волнистость), в отличие от плоского случая одномерной волнистости, рассмотренного в **главе 2**. В случае пространственного синусоидального рельефа с одинаковыми периодами в продольном и поперечном направлениях его форма (рисунок 4) описывается функцией

$$f(x, y) = \Delta \cos(2\pi x / L) \cos(2\pi y / L), \quad (35)$$

где  $\Delta, L$  – амплитуда и период волнистости.

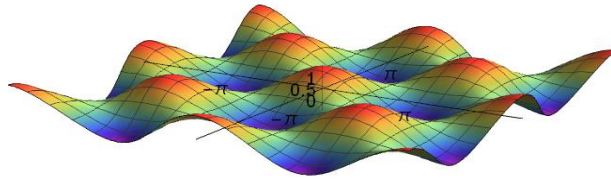


Рисунок 4. Геометрия пространственного волнистого рельефа

Постановка задачи. Определение интегральных контактных характеристик.

В соответствии с результатами **второй главы**, примем, что для малых и больших нагрузок влиянием соседних неровностей в первом приближении можно пренебречь и рассматривать только один выступ (впадину). Схема контакта такой неровности и упругого полупространства показана на рис. 5. Перейдя к цилиндрическим координатам  $\{r, \theta, z\}$  и применяя разложение Якоби-Ангера для  $L = 2\pi$  функция формы рельефа (13) была представлена в виде

$$f(r, \theta) = \Delta J_0(\sqrt{2}r) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi j}{2}\right) \Delta J_{2j}(\sqrt{2}r) \cos(2j\theta). \quad (36)$$

где  $J_i(x)$  — функция Бесселя первого рода и целого порядка  $i$ .

В случае малых нагрузок рассмотрена постановка контактной задачи для единичного выступа пространственного волнистого рельефа и упругого полупространства (рисунок 5).

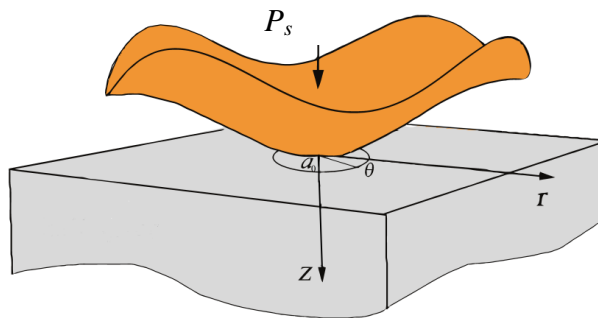


Рисунок 5. Контактное взаимодействие единичного выступа двумерной синусоидальной волнистости и упругого полупространства

Допущения в рассматриваемой постановке такие же, как в задачах, исследованных во **второй главе** (применительно к упругой полуплоскости).

Область контакта неровности, изображенной на рисунке 5, и упругого полупространства не всегда является круговой, вследствие отсутствия осевой симметрии у выступа. Однако, для определения интегральных контактных характеристик – площади фактического контакта (ФПК) и дополнительного смещения примем, что можно аппроксимировать область фактического контакта некоторой эффективной круговой областью радиуса  $a_0$ , в которой интегральные характеристики будут иметь идентичные зависимости от приложенного номинального давления  $\bar{p}$  (Barber J. R., Billings D. A., 1990).

Для определения интегральных контактных характеристик применен метод решения задач о штампе неосесимметричной формы для круговой области контакта (Copson E.T., 1947).

С использованием разложения (36) неизвестная  $j$ -я составляющая контактного давления, представленного в виде ряда Фурье на интервале  $[0, a_0]$ , где  $a_0$  – радиус эффективной круговой области может быть записана как:

$$p_j(r) = r^{j-1} \frac{d}{dr} \int_r^{a_0} \frac{th_j(t)dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}, \quad (37)$$

где

$$h_j(t) = -\frac{E^*}{\pi t^{2j}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{r^{j+1} g_{0j}(r) dr}{\sqrt{t^2 - r^2}}, \quad (38)$$

где  $g_{0j}(r)$  -  $j$ -я радиальная составляющая функции начального зазора, определяемая следующим образом:

$$g_{0j}(r) = \Delta - \Delta J_0(\sqrt{2}r) - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi j}{2}\right) \Delta J_{2j}(\sqrt{2}r). \quad (39)$$

Используя условие равновесия, полная нагрузка на штамп может быть выражена как:

$$P_s = 2\pi \int_0^{a_0} p_0(r) r dr + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{a_0} \cos\left(\frac{\pi j}{2}\right) p_{2j}(r) \cos(2j\theta) r dr d\theta. \quad (40)$$

С использованием выражений (37 – 40) можно заметить, что полная нагрузка на штамп зависит только от первого члена разложения функции  $g_{0j}(r)$ , не зависящего от  $\theta$ . Для  $j = 0$  выражение (3.10) соответствует осесимметричному случаю. Используя условие  $p(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow a_0$ , была определена зависимость полной нагрузки на выступ от радиуса эффективной круговой области контакта:

$$P_s = E^* \Delta \left( \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}a_0) - 2a_0 \cos(\sqrt{2}a_0) \right). \quad (41)$$

Величина номинального давления соответствует полной нормальной нагрузке, равномерно распределенной по номинальной площади контакта  $A_n$ , которая представляет собой квадрат со стороной  $L/\sqrt{2}$  (Johnson K.L., Greenwood J.A., Higginson J.G., 1985):

$$\bar{p} = \frac{\sqrt{2}P_s}{L}. \quad (42)$$

Функция дополнительного смещения может быть определена как разность между значением смещения рассматриваемого выступа и смещения от номинального давления, распределенного по номинальной (квадратной) области контакта в некоторой точке области контакта, например, при  $r = 0$ ,  $\theta = 0$  (Johnson K.L., Greenwood J.A., Higginson J.G., 1985):

$$\bar{\delta} = \delta_0 - \Delta \left( \bar{p} / p^* \right) \left( 4 \ln(\sqrt{2} + 1) \right), \quad (43)$$

где  $p^* = \frac{\sqrt{2}E^* \Delta}{2}$  - номинальное давление, необходимое для обеспечения полного контакта между поверхностями.

Поскольку ненулевые члены ряда (39) не дают вклада в функцию  $h_j(t)$  (выражение (38)) при  $r = 0$ , значение  $\delta_0$  определяется только нулевым членом ряда. Используя известное соотношение между внедрением штампа и радиусом круговой области контакта  $a_0$ , получено выражение для определения дополнительного смещения:

$$\bar{\delta} = 2\Delta \sin^2 \left( \frac{\sqrt{2}a_0}{2} \right) - \Delta \left( \bar{p} / p^* \right) \left( 4 \ln(\sqrt{2} + 1) \right). \quad (44)$$

Используя метод локализации, было уточнено поведение интегральных контактных характеристик при умеренных нагрузках за счет

учета влияния соседних неровностей в рамках эффективной круговой области контакта. Для равновысокой системы периодически расположенных осесимметричных выступов распределение давления  $p(r)$  согласно методу локализации определялось как (Горячева И.Г., 2001):

$$p(r) = p_s(r) + \frac{4P_s}{\pi^2 L^2} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{a_0^2 - r^2}}{\sqrt{A_0^2 - a_0^2}} \right), \quad (45)$$

где  $p_s(r)$  – контактное давление, действующие на единичном эффективном круговом пятне контакта соответственно,  $a_0$  – эффективный радиус пятна контакта,  $A_0 = \frac{L}{\sqrt{2}}$  – радиус круга, вне которого принимается во внимание величина номинального давления, действующего на упругое полупространство при внедрении периодической системы выступов.

При больших значениях нагрузки зазор между контактирующими поверхностями мал и определяется небольшими областями, в которых контакт отсутствует (случай почти полного контакта). С учетом того, что расстояние между этими областями значительно превышает их размер, была рассмотрена единственная область отсутствия контакта как сжимаемая круговая фиктивная трещина с эффективным радиусом  $b_0$ , при действии на нее неосесимметричного давления:

$$p_c(x, y) = -\bar{p} + p^* \cos(x) \cos(y). \quad (46)$$

Используя разложение в (36), выражение (46) можно представить в виде

$$p_c(r, \theta) = -\bar{p} + p^* J_0(\sqrt{2}r) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi j}{2}\right) p^* J_{2j}(\sqrt{2}r) \cos(2j\theta). \quad (47)$$

Аналогично плоскому случаю, рассмотренному во **второй главе**, при отсутствии сингулярности давлений на границе области контакта, коэффициент интенсивности напряжений (КИН)  $K_I$  должен быть равен нулю. КИН для неосесимметричного нагружения круговой трещины определяется как (Guidera J.T., Lardner R.W., 1975):

$$K_I(\theta) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{b_0}} \int_0^{b_0} \int_0^{2\pi} \frac{r \sqrt{b_0^2 - r^2} p_c(r, \varphi) d\varphi dr}{b_0^2 + r^2 - 2b_0 r \cos(\varphi - \theta)}, \quad (48)$$

Интегрирование на интервале  $[0, 2\pi]$  для  $p_c(r, \theta)$ , заданного выражением (47), показывает, что значение  $K_I$  независимо от



неосесимметричных составляющих ряда (47). Тогда, используя условие  $K_I = 0$ , получена зависимость между эффективным радиусом области отсутствия контакта  $b_0$  и приложенным номинальным давлением.

$$\bar{p} = \begin{cases} \frac{p^* \sin(\sqrt{2}b_0)}{\sqrt{2}b_0} & \text{при } b_0 \neq 0 \\ 1 & \text{при } b_0 = 0 \end{cases} . \quad (49)$$

Дополнительное смещение для случая почти полного контакта будет определяться аналогично плоской задаче, рассмотренной во **второй главе**

$$\bar{\delta} = \Delta - \frac{2}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{b_0} u_z(r, \theta) r dr d\theta. \quad (50)$$

где  $u_z(r, \theta)$  — смещения поверхности фиктивной трещины. Следуя работе (Martin P.A., 1982), если смещения поверхности  $u_z(r, \theta)$  могут быть представлены в виде разложения по угловой координате в четный тригонометрический ряд, то, исходя из формулы (50), только осесимметричная компонента смещений поверхности фиктивной трещины дает вклад в функцию дополнительного смещения, что приводит к асимптотическому выражению

$$\bar{\delta} = \Delta - \frac{p^*}{2\pi^3 E^*} \left( 2\sqrt{2}\pi \sin(\sqrt{2}b_0) - 4b_0\pi \cos(\sqrt{2}b_0) \right) - \frac{4b_0^2 p^*}{3\sqrt{2}\pi^2 E^*} \sin(\sqrt{2}b_0). \quad (51)$$

На рисунке 6 показаны графики безразмерной фактической площади контакта от безразмерного номинального давления. Для расчета безразмерных площадей областей контакта и областей отсутствия контакта использовалось отношение эффективной площади (круговой области)  $A_r$  к номинальной площади (квадратной области)  $A_n$ :  $A_r/A_n = 2\pi a_0^2/L^2$  — для задачи о единичном штампе и  $A_r/A_n = 1 - (2\pi b_0^2/L^2)$  — для задачи о фиктивной трещине.

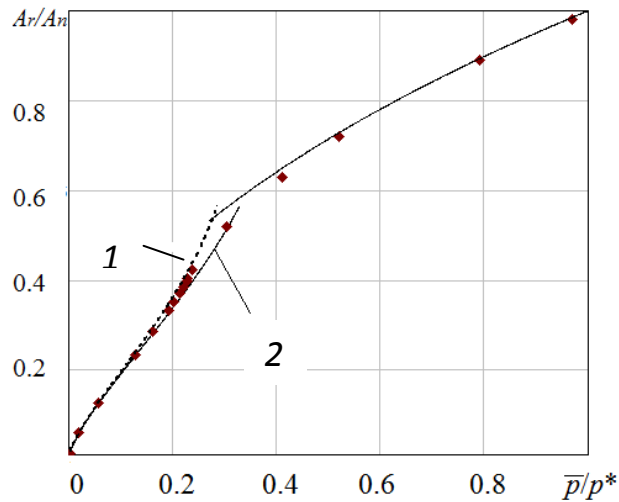


Рисунок 6. Зависимость ФПК от номинального давления: сплошные линии – асимптотические решения, точки – численное моделирование (Yastrebov V.A., Anciaux G., Molinari J.-F., 2014), 1 – решение без учета взаимного влияния неровностей; 2 – решение по методу локализации

На рисунке 7 показаны графики функции среднего зазора  $G = 1 - \bar{\delta}/\Delta$ , где  $\bar{\delta}$  – дополнительное смещение от номинального давления в сравнении с данными численного моделирования (Yastrebov V.A., Anciaux G., Molinari J.-F., 2014).

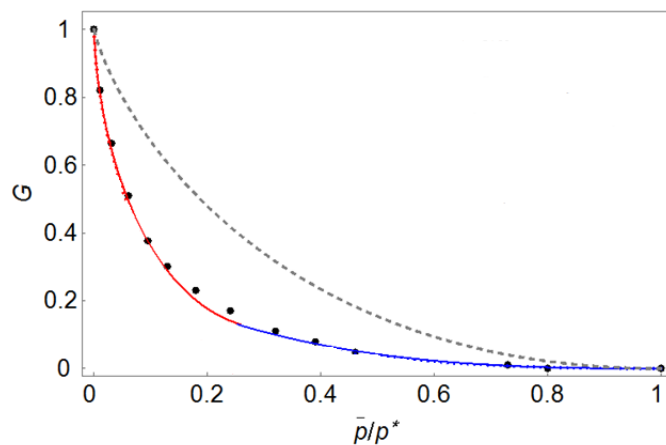


Рисунок 7. Графики зависимости среднего зазора от номинального давления: сплошные линии – асимптотические решения, точки - численное моделирование, штриховая линия – решение для одномерной волнистости (Кузнецов Е.А., 1982).

Из рисунков 6 и 7 видно, что предложенные асимптотические решения для фактической области контакта и функции дополнительного смещения хорошо согласуются с численными результатами для малых и

больших приложенных номинальных давлений, за исключением промежуточных значений, характеризующих переходный режим, когда пятна контакта сливаются (Yastrebov V.A., Anciaux G., Molinari J.-F., 2014). Средний зазор (дополнительное смещение) поверхностей в меньшей степени зависят от взаимного влияния неровностей. При этом контактная жесткость одномерной волнистой поверхности значительно выше, чем двумерной для всех значений номинального давления.

### Определение формы области контакта и распределения контактных давлений при малых и умеренных нагрузках.

Для определения формы фактической области контакта использован метод (Роров V.L., 2022), основанный на приближенном решении В.И. Фабриканта для неосисимметричного плоского штампа (Fabrikant V.I., 1986) и нахождение максимума приложенной внешней нагрузки к единичной неровности, как функции площади фактической области контакта  $A_r$ . Таким образом, рассматривая область контакта в виде функции в полярных координатах  $a(\theta)$ , где начало координат совпадает с началом координат эффективной круговой области контакта, функция  $a(\theta)$  должна быть такой, что функция  $P(A_r)$  принимает максимальное значение, т.е

$$a(\theta) = \arg \max_{a(\theta)} P(A_r), \text{ где } A_r = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a(\theta)^2 d\theta, \quad (52)$$

Представив функцию  $a(\theta)$  в виде

$$a(\theta) = a_0 + \delta a(\theta), \quad (53)$$

где  $\delta a$  – малое отклонение от круговой области контакта. В соответствии с условием (52) и указанным ранее методом (Роров V.L., 2022) была получена приближенная зависимость для определения функции формы области контакта:

$$a(\theta) \approx a_0 - \frac{\cos 4\theta}{a_0^4} \left( 7a_0^3 - 24a_0 - \sqrt{2}a_0^2 (a_0^2 - 12) \operatorname{ctg}(\sqrt{2}a_0) + 12\sqrt{2} \operatorname{tg}\left(\frac{a_0}{\sqrt{2}}\right) \right). \quad (54)$$

С использованием формулы (54) контактное давление при умеренных нагрузках можно приближенно представить в виде суммы осесимметричной составляющей и малого отклонения от нее:

$$p(r, \theta) \approx p_0(r_0, a_0) + \delta p(r_0, a_0, \theta). \quad (55)$$

Первое слагаемое в (55) определяется формулой (37) и может быть уточнено с использованием метода локализации согласно выражению (45).

Для определения второго слагаемого в формуле (55) использован метод наложений (Александров А.Я., Соловьев Ю.И., 1978), согласно которому для нахождения пространственного распределения давления решается совокупность плоских задач. Распределение давлений определяется интегралом:

$$p(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-r(\theta)}^{r(\theta)} \tilde{p}_n(\tilde{x}) T_n \left( \frac{\tilde{x}}{r(\theta)} \right) \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{r(\theta)^2 - \tilde{x}^2}} \cos(4\theta) + C, \quad (56)$$

где  $\tilde{x}, \tilde{y}$  - координаты при решении вспомогательной плоской задачи;  $\tilde{p}_j(\tilde{x})$  - контактное давление, соответствующее решению плоской задачи (в  $j$ -ом сечении);  $C$  - некоторая постоянная, определяемая условием  $p(r, \theta) \rightarrow 0$  при  $r(\theta) \rightarrow a(\theta)$ ;  $r(\theta)$  - функция изменения радиальной координаты внутри области контакта в соответствии с изменением ее формы,  $T_j(x)$  - многочлен Чебышева первого рода степени  $j$ .

На рисунке 8 показана форма области контакта (а) и контактное давление (б) при значении площади фактического контакта  $A_r$ , соответствующей некруговой области.

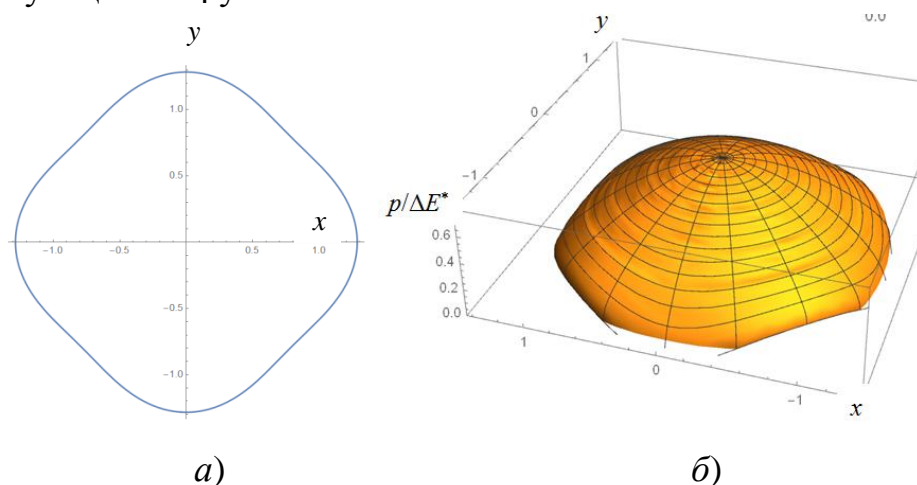


Рисунок 8. Область контакта (а) и распределение контактных давлений (б) при  $A_r/A_n = 0.26$

Сравнение распределения давлений для одномерной и двумерной синусоидальной волнистости при малых и умеренных нагрузках показал, что в сечении при  $\theta = 0$  распределения давлений практически совпадают по форме во всем диапазоне рассмотренных нагрузок. При этом в сечении  $\theta = \pi/8$  форма распределений давлений для плоского и пространственного

случаев существенно отличается, когда форма области контакта становится некруговой.

Анализ полученных в **третьей главе** результатов дает возможность сделать следующие основные выводы:

- интегральные контактные характеристики в основном зависят от геометрии осесимметричной составляющей функции формы двумерной волнистой поверхности, причем форма рельефа оказывает существенное влияние на контактные характеристики, что ограничивает использование квадратичной аппроксимации формы неровности случаями очень малых и очень больших нагрузок;
- дополнительное смещение поверхностей в меньшей степени зависит от взаимного влияния неровностей, чем фактическая площадь контакта;
- при малых значениях нагрузок форма распределения контактного давления для плоского и пространственного случая совпадает в произвольном сечении, пока форма области контакта остается круговой.

В **четвертой главе** методы решения контактных задач, развитые во **второй главе**, были применены для исследования влияния геометрических характеристик неровностей на двух масштабных уровнях на характеристики контакта поверхности с регулярным рельефом и упругой полуплоскости.

Постановка и решение контактной задачи для двухуровневой волнистой поверхности и упругой полуплоскости в условиях односвязной области контакта.

Схема контакта для двухуровневой волнистой поверхности и упругой полуплоскости на одном периоде изображена на рисунке 9. Рассматриваемая задача является периодической; предполагается бесконечное число зон контакта. К контактирующим поверхностям приложено номинальное давление  $\bar{p}$ . В качестве допущения примем, что контакт реализуется на одном интервале  $x \in [-a, a]$ ;  $2a \leq L$  (односвязная область контакта). Начальный контакт волнистой поверхности и полуплоскости происходит в одной зоне контакта.

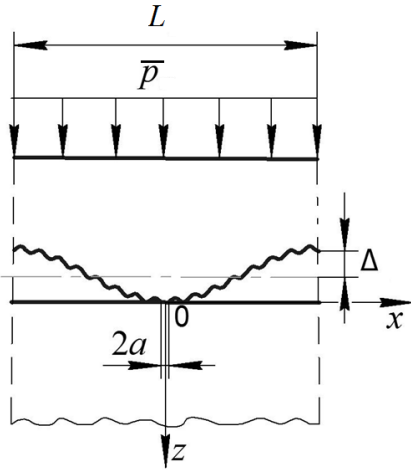


Рисунок 9. Схема контакта двухуровневой волнистой поверхности и упругой полуплоскости

Примем, что  $L = 2\pi$ , а функция формы волнистой поверхности состоит из двух членов тригонометрического ряда:

$$f(x) = \Delta(k_1 \cos(n_1 x) + k_2 \cos(n_2 x)), \quad (57)$$

где  $\Delta$  и  $L$  – амплитуда и период гармоники с наименьшей угловой частотой,  $n_{1,2}$  и  $k_{1,2}$  – частотные и амплитудные коэффициенты для 1-ой и 2-й гармоники соответственно ( $n_{1,2} \in \mathbb{N}$ ,  $k_{1,2} \in \mathbb{Q}$ ).

Задача рассматривается в рамках гипотезы плоского деформированного состояния и малых деформаций. Влиянием сил трения на распределение нормальных давлений пренебрегается. Далее для простоты примем  $k_1 = 1$  и  $n_1 = 1$ ,  $k_2 = k$  и  $n_2 = n$ . Для удовлетворения допущений о малости деформаций и односвязности зоны контакта на одном периоде необходимо выполнение следующих условий:  $\Delta \ll L$ ;  $k_2 \ll 2\pi/n_2$ . Принимая во внимание сделанные допущения, выражение (58) можно записать в следующем виде

$$f(x) = \Delta(\cos(x) + k \cos(nx)). \quad (58)$$

Основное уравнение периодической контактной задачи имеет вид (2):

В интегральном уравнении (2) функция зазора внутри отрезка контакта  $x \in [-a, a]$  определяется условием контакта:

$$h(x) = \delta - \Delta(1 - \cos x + k(1 - \cos nx)), \quad (59)$$

Так как область контакта не известна заранее, замыкает систему уравнений уравнение равновесия (5).

Воспользовавшись результатами общего решения периодической контактной задачи с неизвестными границами зоны контакта (формулы (15) и (16)) и допуская суперпозицию решений для отдельных гармоник, что обусловлено допущением односвязности области контакта, получены выражения для контактного давления и номинального давления в зависимости от полудлины области контакта.

$$p(x) = \frac{\Delta E^*}{2\sqrt{2}} \left| \cos \frac{x}{2} \right| \left( 2\sqrt{\cos x - \cos a} + kn^2 \int_x^a \frac{\sin \xi P_{n-1}^{0,1}(\cos \xi) d\xi}{\sqrt{\cos x - \cos \xi}} \right). \quad (60)$$

$$\bar{p} = \frac{\Delta E^*}{2} \left( \sin^2 \frac{a}{2} - kn P_n^{-1,0}(\cos a) \right), \quad (61)$$

Функция дополнительного смещения определяется в соответствии с общей формулой (22) и принципом суперпозиции.

$$\bar{\delta} = \frac{\Delta}{E^*} \left( \sin^2 \frac{a}{2} \left( 1 - 2 \ln \left( \sin \frac{a}{2} \right) \right) + 2kn P_n^{(-1,0)}(\cos a) \ln \left( \sin \frac{a}{2} \right) - k \left( P_n^{(0,-1)}(\cos a) - 1 \right) \right). \quad (62)$$

На рисунке 10 показаны распределения контактных давлений  $\tilde{p} = p(x)/p^*$ , где ( $p^* = \pi E^* \Delta/L$ ,  $L = 2\pi$ ) для двухуровневой волнистой поверхности, при внедрении в полуплоскость при разных значениях параметров  $n$  и  $k$  и номинальных давлениях  $\bar{p}/p^*$  (в связи с симметрией относительно оси  $x = 0$  показана лишь область  $x \geq 0$ ).

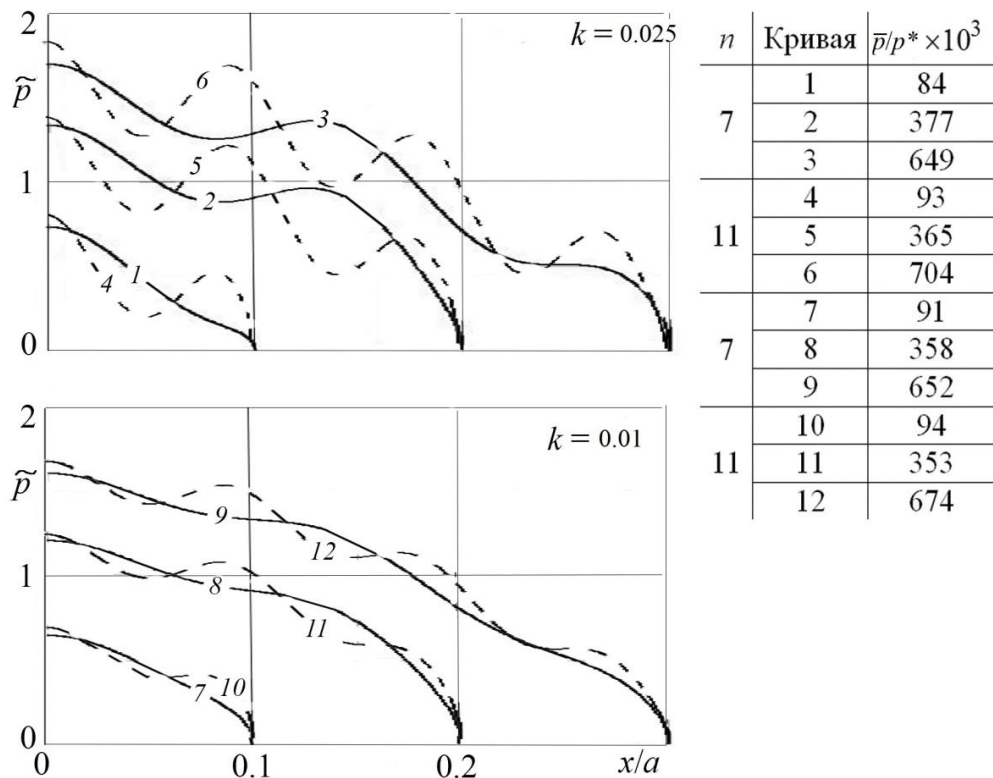


Рисунок 10. Графики распределения давления при контакте двухуровневой волнистой поверхности и полуплоскости

Графики, представленные на рисунке 10, показывают, что осцилляция давлений, связанная с наличием неровностей второго уровня,

неравномерна в пределах зоны контакта и наиболее выражена в центре зоны, что связано с наиболее плотным расположением неровностей вблизи начала координат. При этом вид эпюры и число ее пиков в значительной степени зависят от плотности контакта, определяемой величиной  $n$ . С ростом длины области контакта  $2a$  возрастает число максимумов распределения давления, так как большее число неровностей второго уровня входит в контакт. Уменьшение параметра  $k$ , соответствующее уменьшению амплитуды неровностей второго уровня, линейно снижает составляющую контактного давления, связанную с неровностями второго уровня.

На рисунке 11 показаны графики функции фактической длины области контакта и дополнительного смещения от номинального давления для одноуровневого и двухуровневого профилей волнистости.

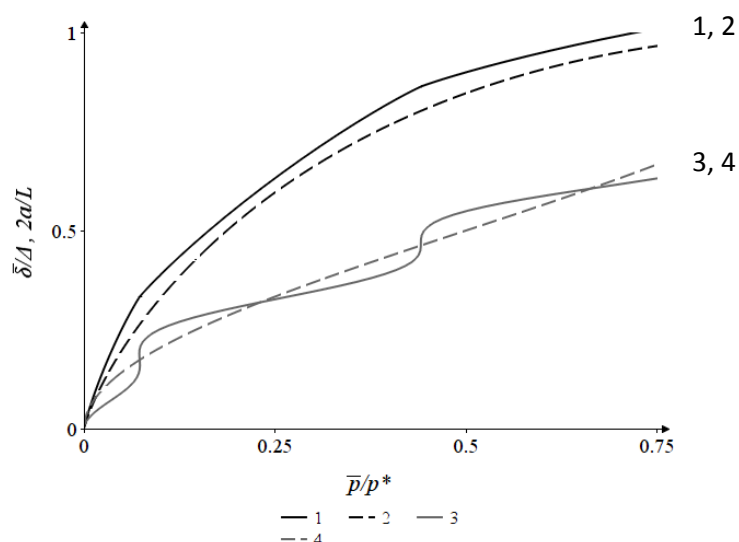


Рисунок 11. Дополнительное смещение полуплоскости (1, 2) и длина области контакта (3, 4) в зависимости от номинального давления при различных профилях волнистости ( $L = 2\pi, \Delta = 1$ ):  
 $f(x) = \Delta \cos(x) + 0,05\Delta \cos(7x)$  (1, 3);  $f(x) = \Delta \cos(x)$  (2, 4)

Из рис. 4.5. следует, что функция дополнительного смещения для двухуровневой волнистой поверхности имеет осциллирующий характер с ростом номинального давления, однако амплитуда этих осцилляций меньше, чем для кривой фактической области контакта. При этом осцилляция функции дополнительного смещения происходит не



относительно кривой, соответствующей одноуровневому профилю, а около некоторой средней кривой, т.е. общая податливость многоуровневого профиля при односвязной области контакта растет, а площадь фактического контакта, формируемая неровностями второго уровня, при этом в среднем не меняется.

Постановка и решение задачи о контакте волнистого цилиндра и упругой полуплоскости при различных схемах начального касания.

Для исследования влияния геометрии неровностей второго уровня на контактные характеристики при переходе к многосвязной области контакта в работе рассмотрена контактная задача для волнистого цилиндра и упругой полуплоскости. Схема задачи показана на рисунке 12.

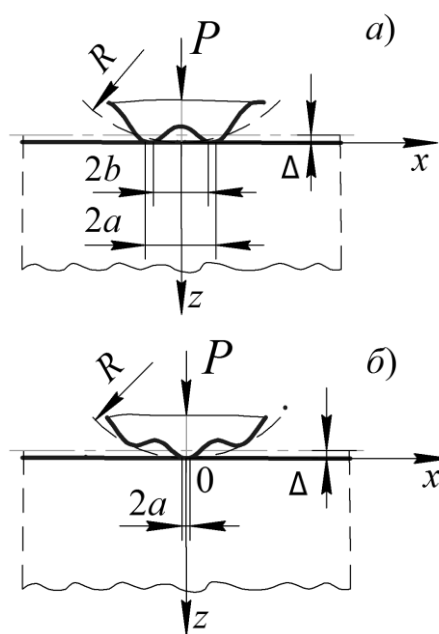


Рисунок 12. Схема контакта волнистого цилиндра и упругой полуплоскости при  $\psi = 0$  (а) и  $\psi = \pi$  (б)

Функция профиля поверхности волнистого цилиндра определяется следующим выражением:

$$f(x) = \frac{x^2}{2R} + \Delta \cos(nx + \psi) + C_0, \quad (63)$$

где  $R$  – радиус цилиндра;  $\Delta$ ,  $n$  – амплитуда и угловая частота волнистости;  $\psi$  – фаза, рассмотрены случаи  $\psi = 0$  (рис. 4.11, а) и  $\psi = \pi$  (рис. 4.11, б);  $C_0$  – константа, определяющая отсутствие зазора в зоне касания.

В качестве допущений примем, что амплитуда  $\Delta$  существенно меньше периода волнистости, равного  $2\pi/n$ , который, в свою очередь, значительно меньше радиуса цилиндра  $R$ . Влиянием сил трения и межмолекулярных сил на распределение контактных напряжений в задаче пренебрегается.

В случае  $\psi = 0$  (рисунок 12, а) в контакт изначально вступают две неровности, положение которых зависит от геометрических параметров цилиндра и волнистости. Интегральное уравнение контактной задачи для двухсвязной области имеет вид (Мусхелишвили Н.И., 1933):

$$h'(x) = \frac{2}{\pi E^*} \int_L \frac{p(\xi) d\xi}{x - \xi}, \quad (64)$$

где функция зазора  $h(x) = \delta - f(x)$ ,  $\delta$  – величина сближения двух тел;  $L$  – множество зон контакта, в данном случае  $L = L_1 \cup L_2$ ;  $L_1 = [-a, -b]$ ,  $L_2 = [b, a]$ ;  $E^*$  – приведенный модуль упругости материалов контактирующих тел.

Решение уравнения (64) для двух зон контакта с неизвестными границами и четной функцией формы неровностей имеет следующий вид (Ghanati P., Adibnazari S., 2019):

$$p(x) = \frac{E^* x \sqrt{(x^2 - b^2)(a^2 - x^2)}}{\pi} \int_b^a \frac{h'(\xi) d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - b^2)(a^2 - \xi^2)}(\xi^2 - x^2)}, \quad b < x < a. \quad (65)$$

Уравнения для определения граничных точек ( $a$  и  $b$ ), в которых контактное давление  $p(x)$  обращается в нуль, получены в работе путем преобразования общих условий существования ограниченного решения на всех концах линии интегрирования  $L$  (Ghanati P., Adibnazari S., 2019) в следующем виде:

$$\begin{cases} \int_b^a \frac{h'(\xi) d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - b^2)(a^2 - \xi^2)}} = 0 \\ \int_b^a \frac{\xi^2 h'(\xi) d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - b^2)(a^2 - \xi^2)}} = \frac{P}{E^*} \end{cases}, \quad (66)$$

При выполнении условия  $\Delta \ll 2\pi/n$  функция (63), описывающая форму волнистого цилиндра, может быть с достаточной точностью представлена рядом Тейлора 6-й степени. Тогда производная функции зазора  $h'(x)$  будет иметь вид:

$$h'(x) = -A_1 x^5 + A_2 x^3 + A_3 x, \quad (67)$$

$$\text{где } A_1 = \frac{\Delta n^6}{120}; \quad A_2 = \frac{\Delta n^4}{6}; \quad A_3 = \frac{1}{R} - \Delta n^2.$$

В соответствии с (66) и (67) система уравнений для определения границ областей контакта имеет вид:

$$\begin{cases} -A_1 \frac{1}{16}(3a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4) + A_2 \frac{1}{4}(a^2 + b^2) + A_3 \frac{1}{2} = 0 \\ -A_1 \frac{1}{32}(a^2 + b^2)(5a^4 - 2a^2b^2 + 5b^4) + A_2 \frac{1}{16}(3a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4) + A_3 \frac{1}{4}(a^2 + b^2) = \frac{P}{\pi E^*} \end{cases} \quad (68)$$

Из анализа системы (68) следует, что «закрытие» зазора между зонами контакта достижимо при  $b = 0$ , что приводит к ограничению на коэффициенты многочлена (67):  $A_1 \leq \frac{A_2^2}{6A_3}$ . Таким образом, получено

значение критической амплитуды волнистости  $\Delta_c$ , при которой возможно закрытие зазора при начальном контакте и фазе волнистости  $\psi = 0$ :

$$\Delta_c \approx \frac{0.64}{n^2 R}.$$

При достижении полного контакта в рамках приведенных допущений область контакта становится односвязной как в случае  $\psi = 0$ , так и в случае  $\psi = \pi$ , где начальное касание поверхностей реализуется на одном отрезке контакта  $x \in [-a, a]$  (рисунок 12, б). Для односвязной области контакта допустимо применение принципа суперпозиции, и контактное давление можно выразить как сумму двух составляющих:

$$p(x) = p_h(x) + p_w(x), \quad (69)$$

где  $p_h(x)$  – давление, соответствующее параболической компоненте функции зазора  $h(x)$  и рассчитываемое по теории Герца;  $p_w(x)$  – давление, соответствующее гармонической компоненте (волнистости). Решение интегрального уравнения (64) для  $L = [-a, a]$  и гармонической компоненты зазора получено в виде ряда по многочленам Чебышева 2-го рода:

$$p(x) = \frac{E^*}{2R} \sqrt{a^2 - x^2} \mp \frac{E^* \Delta n}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(an) U_{2k} \left( \frac{x}{a} \right), \quad x \in [-a, a], \quad (70)$$

где знак минус берется при  $\psi = 0$ , а знак плюс - при  $\psi = \pi$ ;  $J_k(x)$  – функция Бесселя 1-го рода целого порядка  $k$ ;  $U_k(x)$  – многочлен Чебышева 2-го рода. Полная нагрузка для односвязной области контакта определена интегрированием уравнения равновесия:

$$P = \frac{\pi E^* a^2}{4R} \mp \frac{\pi E^* \Delta n}{2} J_1(an). \quad (71)$$

Длина фактической области контакта  $L_r = 2a$  в случае односвязной области контакта и  $L_r = 2(a-b)$  - в случае двухсвязной области.

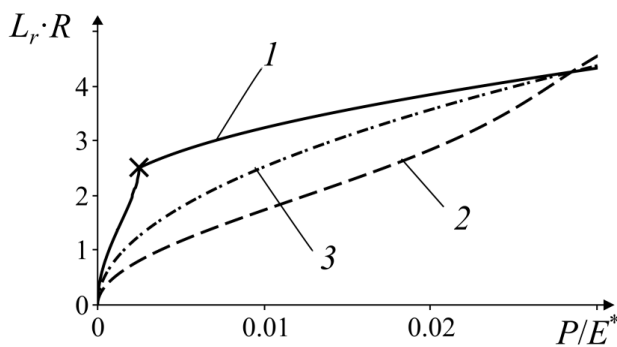


Рисунок 13. Зависимости длины области контакта  $L_r$  от нагрузки  $P$  при  $\psi = 0$  (1);  $\psi = \pi$  (2) и для гладкого цилиндра (3)

На рисунке 13 показаны графики длины фактической области контакта в зависимости от приложенной нагрузки при  $R/\Delta = 1300$ ,  $n = 9$  и различном значении фазы  $\psi$ . Значком «x» обозначена точка перехода от двухсвязной области контакта к односвязной. Из рисунка 13 следует, что фаза гармонической волнистости оказывает значительное влияние на

поведение фактической длины области контакта для небольших нагрузок. Это связано с различием как в количестве областей контакта, так и в производной функции зазора  $h(x)$ . Кривая для гладкого цилиндра находится между кривыми для  $\psi = 0$  и  $\psi = \pi$ . Переход от двухсвязной области контакта к односвязной характеризуется немонотонным изменением кривой длины фактической области контакта.

При увеличении отношения высоты и периода волнистости односвязная область контакта переходит в многосвязную. Для определенного соотношения приложенной нагрузки условие перехода соответствует появлению отрицательных контактных давлений в решении для односвязной области  $p_{\min}(x) = 0, |x| \neq a$ . С другой стороны, односвязность области контакта во всем диапазоне нагрузок обеспечивается условием монотонности нормальной силы как функции полудлины области контакта, т.е.  $P'(a) \geq 0$ . На основе указанных условий получены приближенные выражения для определения верхней и нижней оценок амплитуды волнистости, при которой происходит переход к многосвязной области контакта в зависимости от угловой частоты волнистости и радиуса цилиндра. При значении высоты волнистости, расположенном между верхней и нижней оценками наблюдается переходный режим, когда при одних нагрузках будет реализовываться односвязная область контакта, а при других – многосвязная.

Анализ полученных в **четвертой главе** результатов дает возможность сделать следующие основные выводы:

- при взаимодействии двухуровневой волнистой поверхности с упругой полуплоскостью в рамках односвязной области контакта распределение контактных давлений, зависимость длины фактической области контакта и дополнительного смещения от нагрузки носит осциллирующий характер, на вид кривых в значительной степени влияет плотность контакта, определяемая соотношением амплитуд и периодов неровностей двух уровней;
- с ростом угловой частоты гармоники неровностей второго уровня зависимость длины фактической области контакта от номинального давления становится более немонотонной, что характерно для перехода от односвязной области контакта к дискретным пятнам;
- функция профиля поверхности оказывает существенное влияние на возможность осуществления полного контакта при конечном количестве зон контакта. При описании профиля многочленом 6-й степени и выше возможно соотношение между геометрическими параметрами, при котором «заполнение» впадины между неровностями не достигается;
- существует переходный режим взаимодействия волнистого цилиндра и полуплоскости, когда при одних нагрузках будет реализовываться односвязная область контакта, а при других – многосвязная. При этом с ростом приложенной нагрузки критическая высота волнистости, необходимая для поддержания односвязной области контакта, увеличивается.

В **пятой главе** исследовано влияние формы рельефа на характеристики контакта с упругой полуплоскостью при нормальном и тангенциальном нагружении.

Постановка и общее решение периодической контактной задачи в условиях частичного проскальзывания в рамках теории Каттанео-Миндлина.

Исходная система интегральных уравнений и уравнений равновесия для определения нормальных и касательных усилий имеет вид ( $L = 2\pi$ ) (Block J.M., Keer L.M., 2008):

$$\begin{cases} \frac{E^*}{2} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a p(\xi) \operatorname{ctg} \left( \frac{x-\xi}{2} \right) d\xi - \beta q(x); & P = \int_{-a}^a p(x) dx; \\ \frac{E^*}{2} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a q(\xi) \operatorname{ctg} \left( \frac{x-\xi}{2} \right) d\xi + \beta p(x); & Q = \int_{-a}^a q(x) dx, \end{cases} \quad (72)$$

где  $h(x)$  и  $g(x)$  – разности нормальных и касательных смещений контактирующих тел внутри зоны контакта соответственно;  $p(\xi)$ ,  $q(\xi)$  – нормальные и касательные усилия соответственно;  $P$ ,  $Q$  – полные нормальные и касательные силы, действующие на одном периоде соответственно;  $\beta$  – параметр, характеризующий несоответствие упругих констант материалов контактирующих тел;  $E^*$  – приведенный модуль упругости.

В теории Каттанео и Миндлина (Mindlin R.D., 1949) упругие постоянные материалов контактирующих тел принимаются одинаковыми, при этом  $\beta = 0$ . В этом случае уравнения системы (72) становятся независимыми.

При приложении касательной силы в зоне контакта возникают силы трения. Так как контакт является неконформным, то по краям области контакта будут возникать зоны проскальзывания. При этом в центре зоны контакта шириной  $2a$  будет присутствовать область сцепления шириной  $2c$ . Так как граничные условия задачи симметричны, то области проскальзывания шириной  $b$  слева и справа от границы зоны сцепления будут одинаковыми, т.е.  $b = a - c$ .

Предполагается, что действие сил трения в зоне проскальзывания подчиняется закону Амонтона:

$$q(x) = -\mu p(x), \quad c \leq |x| \leq a; \quad (73)$$

где  $\mu$  – коэффициент трения.

Принимая во внимание симметрию зон проскальзывания и форму рельефа относительно начала координат, касательные усилия в зоне сцепления определяются в соответствии с принципом суперпозиции (Ciavarella M., 1998):

$$q(x) = -\mu p(x) + q^*(x), \quad -c \leq x \leq c; \quad c < a, \quad (74)$$

где  $q^*(x)$  – дополнительные касательные усилия, необходимые для обеспечения конечного значения коэффициента трения на границе областей контакта.

Так как относительные касательные перемещения  $g(x)$  в зоне сцепления от действия нормальной нагрузки  $P$  постоянны, интегральное уравнение для определения дополнительных касательных усилий  $q^*(x)$  в зоне сцепления можно записать в виде:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c q^*(\xi) \operatorname{ctg}\left(\frac{x-\xi}{2}\right) d\xi = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-a}^a p(\xi) \operatorname{ctg}\left(\frac{x-\xi}{2}\right) d\xi, \quad |x| < c, \quad (75)$$

Решение задач и определение контактных характеристик для рельефов с одинаковой и различной формой выступов и впадин.

Для профиля рельефа с различной параметрически заданной формой выступов и впадин предложена следующая функция:

$$f(x) = 2\Delta \sin^{2n}\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad (76)$$

где  $\Delta$  – амплитуда профиля;  $L$  – расстояние между впадинами (период);  $n$  – параметр, задающий радиус кривизны углубления (ширину выступа);  $n \in \mathbb{N}^*$ , четно и является безразмерным параметром. При  $n = 1$  профиль представляет собой синусоиду. С увеличением степени  $n$  растет ширина плоского участка выступов, а углубления становятся более узкими. Схема контакта приведена на рисунке 14.

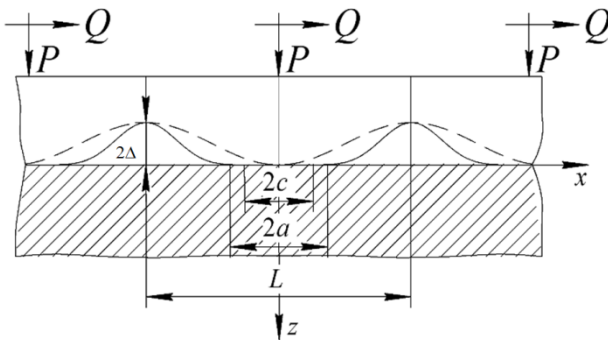


Рисунок 14. Контакт поверхности с регулярным рельефом вида (76) и упругой полуплоскости при наличии зон сцепления и проскальзывания

Используя методы, разработанные во второй главе, а также формулы (72-75) были получены выражения для определения контактных характеристик.

Выражения для длины области контакта и области сцепления для такого рельефа выражены в замкнутой форме и имеют вид:

$$a = \frac{L}{\pi} \arcsin \left( \frac{\Gamma(n)P}{2\sqrt{\pi}\Delta E^* \Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right)} \right)^{\frac{1}{2n}}, \quad (77)$$

$$c = \frac{L}{\pi} \arcsin \left( \sqrt{\left( \frac{\Gamma(n)P}{\sqrt{\pi}\Delta E^* \Gamma(0.5 + n)} \left(1 - \frac{Q}{\mu P}\right) \right)^{\frac{1}{n}}} \right). \quad (78)$$

На рисунке 15 показаны графики безразмерной длины фактической области контакта  $2a/L$  от безразмерного номинального давления  $\bar{p} = P / Lp^*$ .

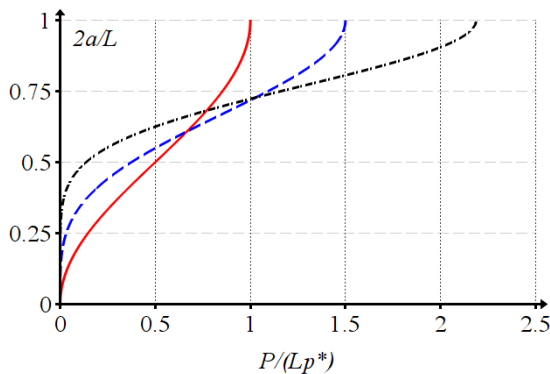


Рисунок 15. Зависимость длины фактической области контакта  $2a/L$  от номинального давления:  $n = 1$  (кривая 1),  $n = 2$  (кривая 2),  $n = 4$  (кривая 3)

рельефа, показанного на рисунке 14.

Из рисунка 16 видно, что в условиях неполного контакта (рисунок 16, а) область проскальзывания растет медленно при малых касательных усилиях и быстро при значительных. С увеличением степени  $n$  рост области проскальзывания снижается, особенно при высоких значениях  $Q$ . Случай полного контакта (рисунок 16, б) отличается уменьшением участка медленного роста зоны проскальзывания с увеличением  $Q$  для всех значений  $n$ .

При малых и умеренных нагрузках увеличение радиуса кривизны выступов приводит к увеличению длины фактической области контакта, а при высоких нагрузках наблюдается обратная зависимость, связанная с уменьшением ширины и радиуса кривизны впадин и взаимным влиянием зон контакта.

На рисунке 16 приведены графики отношения касательной нагрузки к нормальной в зависимости от отношения размера зоны сцепления  $2c$  к размеру области контакта  $2a$  для



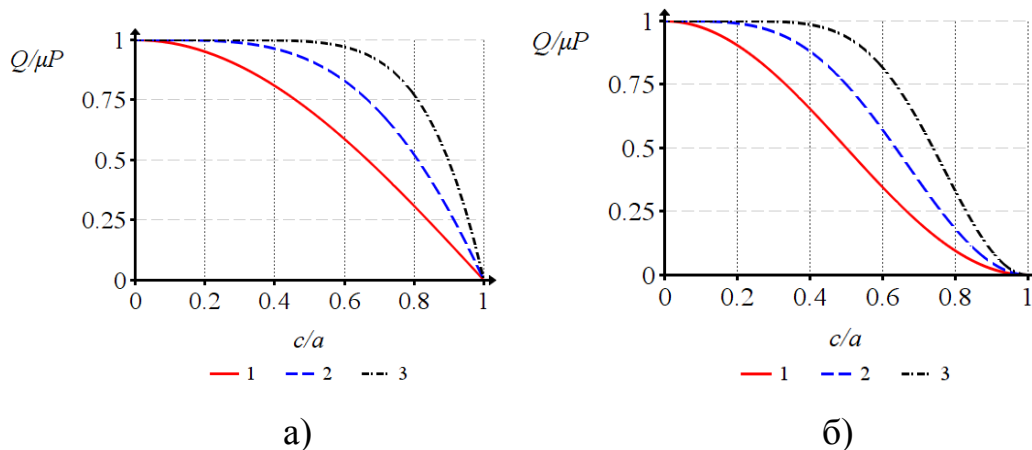


Рисунок 16. Зависимость величины  $Q/\mu P$  от отношения  $c/a$  при  $2a = L/2$  (а) и при  $2a = L$  (б) при  $n = 1$  (1);  $n = 2$  (2) и  $n = 4$  (3)

Для профиля рельефа с одинаковой параметрически заданной формой выступов и впадин была предложена следующая функция:

$$f(x) = \frac{\Delta(m+1)\cos(2\pi x/L)}{|m\cos(2\pi x/L)|+1}, \quad (79)$$

где  $\Delta$  — амплитуда профиля,  $L$  — период профиля,  $m$  — параметр формы. Величины  $\Delta$  и  $L$  имеют размерность длины (м, в системе СИ), а параметр  $m$  — безразмерная величина. График функции (79) для различных значений параметра  $m$  представлен на рисунке 17.

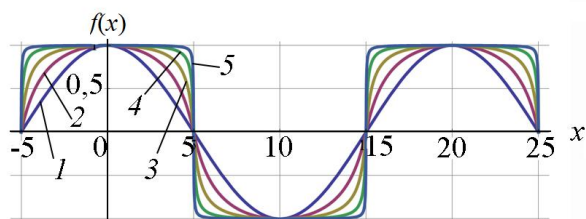


Рисунок 17. Графики функции (79) при  $m = 0,2$  (1); 2 (2); 8 (3); 35 (4); 250 (5)

При  $m = 0$  функция (79) представляет собой синусоиду. При малой величине параметра  $m$  и  $\Delta \ll L$  профиль поверхности может считаться гладким, и соответствующая контактная задача будет рассматриваться как задача с неизвестными границами областей контакта. С помощью

методов, приведенных во **второй главе** были получены выражения для определения контактных характеристик. Распределение контактных давлений определяется выражением:

$$p(x) = G(x) \frac{\sqrt{2\pi\Delta E^*}}{L} |\cos(\pi x/L)| \sqrt{\cos(2\pi x/L) - \cos(2\pi a/L)}, \quad , 2a < L \quad (80)$$

где  $G(x) = (m + 1)^2 \left( |m \cos(2\pi x / L)| + 1 \right)^{-2} \left( m \cos(2\pi a / L) + 1 \right)^{-1}$ .

На рисунке 18 показаны распределения контактных давлений при увеличении полудлины области контакта  $a$  при двух значениях параметра  $m$ .

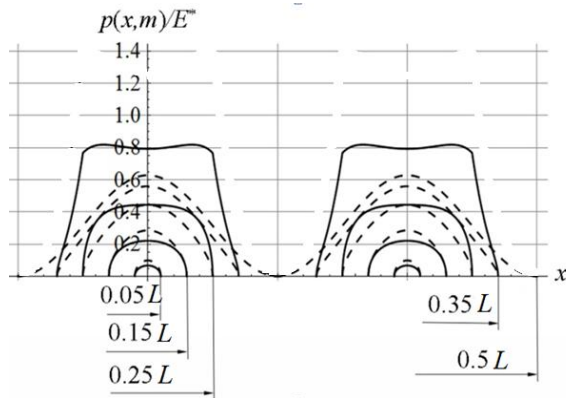


Рисунок 18. Изменение контактного давления с ростом полудлины области контакта при  $m = 0$  (штриховые линии) и  $m = 0.5$

С увеличением параметра  $m$  при малых нагрузках максимальное давление уменьшается по мере увеличения радиуса кривизны выступа. С увеличением параметра  $m$  распределение давления сначала стремится к равномерному, а затем приобретает вид с пиками вблизи концов зон контакта. Вместе со значительным увеличением угла наклона выступов эффект взаимного влияния обеспечивает сильный рост максимума давления при

увеличении  $m$ . Анализ графиков зависимостей размера области сцепления, показал, что с ростом параметра  $m$  размер зоны сцепления снижается медленнее с ростом величины  $Q$ , и затем происходит резкий переход от сцепления к проскальзыванию. При этом следует, отметить, что графики для рельефов с одинаковой и различной формой выступов и впадин по характеру почти не отличаются и схожим образом «реагируют» на изменение параметров формы  $m$  и  $n$  соответственно.

На основе полученного решения была проведена оценка совместного влияния формы выступов и их взаимного влияния на эквивалентные напряжения по Мизесу, которая показала, что с ростом параметра формы  $m$  область максимальных эквивалентных напряжений становится более вытянутой и приближается к границе областей контакта.

Анализ полученных в **пятой главе** результатов дает возможность сделать следующие основные выводы:

- При умеренных нагрузках и значительном увеличении угла наклона профиля рельефа эффект взаимного влияния обеспечивает сильный рост максимума эпюры давлений при увеличении параметров формы

рельефа  $m$  (при одинаковой форме выступов и впадин) и  $n$  (при различной форме выступов и впадин) .

- Эффект взаимного влияния выступов рельефа приводит к увеличению максимальных касательных усилий с ростом нормальной нагрузки (размера области контакта), а также с ростом параметров формы рельефа  $m$  и  $n$ .
- В условиях неполного контакта область проскальзывания растет медленно при малых касательных усилиях и быстро при значительных. С увеличением параметров формы рельефа  $m$  и  $n$  рост области проскальзывания снижается, особенно при высоких значениях касательной силы. Переход от неполного контакта к полному приводит к уменьшению участка медленного роста зоны проскальзывания с увеличением касательной силы для всех рассмотренных значений  $m$  и  $n$ .

В заключении сформулированы **основные результаты** диссертационной работы.

**Основные результаты** настоящей диссертационной работы заключаются в следующем:

1. Получены точные и асимптотические решения (распределение контактных давлений, размер области контакта, функция дополнительного смещения) контактных задач теории упругости в плоской постановке с неизвестными границами зон контакта для рельефа с симметричной формой выступов (впадин), описываемой четной функцией координаты, и приведены примеры использования этих решений для расчета контактных характеристик для типичных профилей рельефа поверхности (волнистый, пилообразный, система цилиндрических выступов и т.д.).

2. Построены асимптотические решения пространственной периодической контактной задачи для поверхности с пространственным волнистым рельефом и упругого полупространства. Получены выражения для определения интегральных контактных характеристик (площадь фактического контакта, функция дополнительного смещения, максимальное давление), формы области контакта и контактного давления в различных диапазонах нагрузок.

3. В результате решения задачи о контакте волнистой поверхности с двумя масштабными уровнями неровностей и упругой полуплоскости получены аналитические выражения для расчета распределения

контактных давлений, размера фактической области контакта и дополнительного смещения за счет неровностей волнистости при односвязной области контакта. Исследовано влияние геометрии неровностей на двух масштабных уровнях на контактные характеристики взаимодействующих поверхностей при малой высоте неровностей второго масштабного уровня.

4. В результате решения задачи о внедрении волнистого цилиндра в упругую полуплоскость оценено влияние типа начального контакта (с одной и двумя областями) на длину областей контакта и распределение контактных давлений.

5. Получены приближенные оценки амплитуды и частоты волнистости, при которых происходит переход к многосвязной области контакта при внедрении волнистого цилиндра в упругую полуплоскость с одной зоной начального контакта.

6. Даны решения плоских задач механики контактного взаимодействия упругих тел с периодическим рельефом при приложении нормальных и касательных сил в условиях частичного проскальзывания при одинаковых упругих постоянных материалов взаимодействующих тел. Форма выступов и впадин регулярного рельефа задавалась параметрически, что позволяло проанализировать совместное влияние угла наклона, кривизны выступов (впадин) рельефа и расстояния между ними на контактные и фрикционные характеристики поверхностей. В результате решения задач найдены выражения для распределения контактных давлений, касательных усилий, размера зон контакта, подобластей сцепления и проскальзывания в зависимости от отношения нормальных и касательных сил, а также формы выступов (впадин) рельефа. Проведен анализ влияния геометрических параметров рельефа на концентрацию напряжений в подповерхностных слоях в условиях нагружения по нормали к поверхности.

#### **Публикации автора по теме диссертации**

- 1. *Tsukanov I. Y. An extended asymptotic analysis for elastic contact of three-dimensional wavy surfaces // Tribology Letters. 2019. V. 67, no. 4. P. 107***
- 2. *Tsukanov I. Y. Effects of shape and scale in mechanics of elastic interaction of regular wavy surfaces // Proc. Inst. Mech. Eng. J: J. Eng. Tribol. 2016. V. 231 no. 3, P. 332-340.***

3. ***Tsukanov I. Y.*** Partial contact of a rigid multisinusoidal wavy surface with an elastic half-plane // *Advances in Tribology*. 2018. V. 2018. Article ID 8431467.
4. ***Цуканов И.Ю.*** Периодическая контактная задача для поверхности с двухуровневой волнистостью // *ПММ*. 2018. Т. 82. Вып. 3. С. 372-380.
5. ***Цуканов И.Ю.*** К вопросу о контакте волнистого цилиндра и упругой полуплоскости // *ПММ*. 2022. Т. 86. Вып. 5. С. 685-694.
6. ***Lyubicheva A. N., Tsukanov I. Y.*** The influence of 2D periodic surface texture on the partial slip problem for elastic bodies // *Eur J Mech A Solids*. 2022. V. 91. 104405.
7. ***Goryacheva I. G., Tsukanov I. Y.*** Analysis of elastic normal contact of surfaces with regular microgeometry based on the localization principle // *Front. Mech. Eng.* 2020. 6:45.
8. ***Горячева И.Г., Цуканов И.Ю.*** Развитие механики дискретного контакта с приложениями к исследованию фрикционного взаимодействия деформируемых тел (Обзор) // *ПММ*. 2020. Т. 84. Вып. 6. С. 757-789.
9. ***Goryacheva I. G., Tsukanov I. Y.*** Modeling of normal contact of elastic bodies with surface relief taken into account // *J. Phys.: Conf. Ser.* 991 012028.
10. ***Tsukanov I. Y.*** Pressure concentration in 2D elastic regular rough contacts: The effect of asperity interaction // *Lecture Notes in Mechanical Engineering. Advanced Problem in Mechanics II. APM 2020*. P. 314-319.
11. ***Цуканов И.Ю.*** Геометрические соотношения в упругом контакте поверхностей с регулярной шероховатостью // *Проблемы машиностроения и автоматизации* 2016. № 2 . С. 40-44.
12. ***Горячева И. Г., Цуканов И. Ю.*** Моделирование упругого контакта тел с регулярным микрорельефом // *Вестник Брянского государственного технического университета*. 2018. № 11. С. 81–87.
13. ***Цуканов И.Ю., Албагачиев А.Ю., Данилов В.Д.*** Влияние геометрии неровностей при упругом контакте поверхностей с регулярным микрорельефом // *Вестник машиностроения*. 2016. № 12. С. 51-56.
14. ***Цуканов И.Ю.*** Упругий контакт симметричных криволинейных и волнистых поверхностей произвольной формы. Обобщенный подход // *Трение и смазка в машинах и механизмах*. 2015. № 10. С. 3-13.
15. ***Цуканов И.Ю.*** Выбор модели контакта шероховатых поверхностей в зависимости от метода их механической обработки / *труды Десятой юбилейной Всероссийской научно–технической конференции с участием иностранных специалистов «Трибология–машиностроению»*. Москва. ИМАШ РАН. 2014. С. 136-137.

16. Цуканов И.Ю. Развитие аналитических замкнутых решений классической контактной задачи Герца для криволинейных и волнистых поверхностей произвольной формы. XXVI Международная инновационно-ориентированная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС-2014): труды конференции (Москва 17-19 декабря 2014 г. М.: Изд-во ИМАШ РАН, 2015. С. 269-273.
17. Албагачиев А.Ю., Цуканов И.Ю. Эффект взаимного влияния при внедрении жестких сферических неровностей и смятии упругих неровностей произвольной формы / Научные труды IV Международной научной конференции “Фундаментальные исследования и инновационные технологии в машиностроении”. М.: СПЕКТР, 2015. С. 30-33.
18. Цуканов И.Ю. Выбор рациональной формы регулярного микрорельефа для поступательных узлов трения со смазкой / Материалы семинара «Химмотология в автомобильной технике. Теория и практика применения автомобильных топлив и смазочных материалов. Москва, 11.12.2015. М.: Издательский центр РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина, 2015. С. 58-60.
19. Цуканов И.Ю. Эффекты формы и масштаба в механике упругого взаимодействия регулярных шероховатых поверхностей / Тезисы докл. Всерос. науч.-техн. конф. «Механика и математическое моделирование в технике», посвященной 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева. М.: Изд.-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. С. 92-96.
20. Цуканов И.Ю., Албагачиев А.Ю. Геометрические связи в упругом контакте поверхностей с регулярными неровностями / Труды XI международной научно-технической конференции «Трибология-машиностроению», посвященной 100-летию со дня рождения Р.М. Матвеевского. М.: Институт компьютерных исследований, 2016. С. 262-264.
21. Цуканов И.Ю., Угурчиев У.Х., Новикова Н.Н. К вопросу о применении модели неровности произвольной формы в инженерном анализе контакта шероховатых поверхностей. / Труды XI международной научно-технической конференции «Трибология-машиностроению», посвященной 100-летию со дня рождения Р.М. Матвеевского. М.: Институт компьютерных исследований, 2016. С. 264-265.
22. Цуканов И. Ю. Упругий контакт индентора с волнистой поверхностью в условиях плоской и пространственной задач / XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Т. 3: Механика деформируемого твердого тела. Т. 3. РИЦ БашГУ Уфа: 2019. С. 1013–1015.
23. Цуканов И. Ю. Влияние текстуры на проскальзывание контактирующих поверхностей материалов / VIII Международная конференция Деформация и разрушение материалов и наноматериалов. Москва. 19-22 ноября 2019 г./ Сборник материалов. ИМЕТ РАН Москва: 2019. С. 211–213.

24. Цуканов И. Ю., Муравьева Т. И., Шкалей И. В. Оценка адгезионных свойств поверхностей кремниевых пластин после химического травления // Трибология - машиностроению: Труды XIII Международной научно-технической конференции. Т. 67. М.: ИМАШ РАН, 2020. С. 341–345.
25. Цуканов И. Ю., Шкалей И. В. Исследование контактных характеристик при взаимодействии упругого цилиндра и регулярно шероховатой поверхности / Научные труды VII Международной научной конференции “Фундаментальные исследования и инновационные технологии в машиностроении”. М.: ИМАШ РАН, 2021. С. 252–253.
26. Любичева А. Н., Цуканов И. Ю. Влияние двумерной текстуры на сцепление поверхностей в условиях частичного проскальзывания // Труды 64-й Всероссийской научной конференции МФТИ. 29 ноября – 3 декабря 2021 года. Аэрокосмические технологии. М.: МФТИ, 2021.
27. Любичева А. Н., Цуканов И. Ю. Сцепление текстурированных поверхностей при частичном проскальзывании / Трибология – машиностроению: Труды XIV Международной научно-технической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.П. Семёнова. — М.: ИМАШ РАН, 2022. С. 185–187.
28. Цуканов И. Ю. Влияние мелкомасштабных составляющих неровностей на фактическую область контакта поверхностей упругих тел / Трибология – машиностроению: Труды XIV Международной научно-технической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.П. Семёнова. М.: ИМАШ РАН, 2022. С. 296–298.