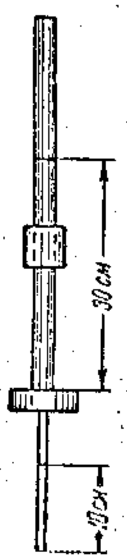
Тр. Совещания по проходимости колесных и гусеничных машин по целине и грунтовым дорогам. Москва, 1948. М.: АН, 1950

А. Ю. ИШЛИНСКИЙ и А. С. КОНДРАТЬЕВА

К ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ИСПЫТАНИЯ ГРУНТА УДАРНИКОМ ДОРНИИ

На практике нередко судят о механических свойствах грунтов по величине погружения в них металлического стержня под действием ударной нагрузки. Для этого, например, бросают с некоторой высоты железный лом («лом-ударник» Г. Д. Дубелира и Н. А. Пузакова) или применяют специальный прибор — ударник ДОРНИИ (фиг. 1) и подсчитывают число ударов, необходимых для погружения стержня на заданную глубину.



Фиг. 1. Ударник Дорнии.

Очевидно, что результаты таких испытаний грунта зависят не только от его механических свойств, но также и от площади поперечного сечения погружающегося в грунт стержня, его начальной скорости и массы. Поэтому, чтобы иметь возможность сравнивать результаты испытаний одного и того же грунта разными приборами, необходимо произвести аналитическое исследование закона погружения стержня в грунт.

Начальная скорость лома-ударника v_0, т. е. его скорость непосредственно перед соприкосновением с грунтом, может быть найдена по формуле

$$v_0 = \sqrt{2gh}, \qquad (1)$$

где h — высота падения.

В случае ударника ДОРНИИ начальная скорость может быть с достаточной точностью подсчитана по закону удара неупругих тел:

$$v_0 = \frac{m'}{m}\sqrt{2gh}, \qquad (2)$$

где m — масса всего ударника; m' — масса падающего груза.

Мы произведем анализ, предполагая, что деформирование грунта подчиняется законам, изложенным в помещенной далее статье А. Ю. Ишлинского и А. С. Кондратьевой «О качении жестких и пневматических колес по деформируемому грунту».

$$p = cx + \mu x \frac{dx}{dt}, \text{ при } x < \delta \qquad (3)$$

и

$$p = k + \mu\delta \frac{dx}{dt}, \text{ при } x > \delta. \qquad (4)$$

Здесь p — давление на грунт; x — осадка; c — характеристика жесткости грунта (коэффициент постели) — нагрузка в кг/см², необходимая для деформации грунта на 1 см; μ — коэффициент, характеризующий вязкость грунта; δ — некоторая характерная величина деформации грунта, по достижении которой изменяется закон его сопротивления деформированию.

Соответственно следует рассмотреть два случая движения ударника в зависимости от того, меньше или больше характерного значения δ деформация грунта.

В первом случае, при $x < \delta$, уравнение движения ударника имеет вид:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -pF = -\left(cx + \mu x \frac{dx}{dt}\right) F, \tag{5}$$

где F — площадь сечения стержня, проникающего в грунт.

Если положить

$$x = dy, \quad \alpha = \frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{cm}{F}} \tag{6}$$

и

$$t = \beta t, \quad \beta = \sqrt{\frac{m}{cF}}, \tag{7}$$

то уравнение (5) примет вид:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y - y\frac{dy}{dt}. \tag{8}$$

Первый интеграл этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$u - \ln(1 + u) = -\frac{y^2}{2} + c, \tag{9}$$

где

$$u = \frac{dy}{dt} = \frac{\beta}{d}\frac{dx}{dt} \tag{10}$$

и c — постоянная интегрирования, которую надлежит определять из начальных условий.

Пусть, например, стержень ударяется о грунт, еще не подвергавшийся деформированию. Тогда имеем для начального момента времени:

$$x = 0, \quad v = v_0; \tag{11}$$

откуда получаем

$$y = 0, \quad \text{при} \quad u = u_0 = \frac{\beta}{\alpha} v_0. \tag{12}$$

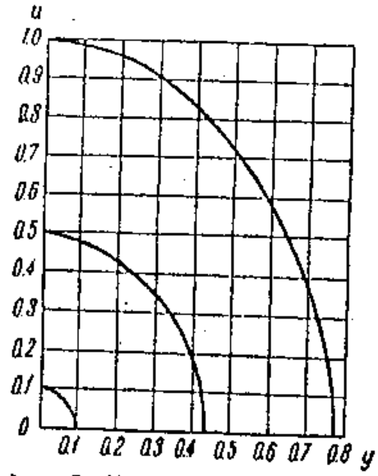
Используя условие (12), найдем для c выражение

$$c = u_0 - \ln(1 + u_0). \tag{13}$$

Таким образом, интеграл уравнения (8) для данного случая примет вид:

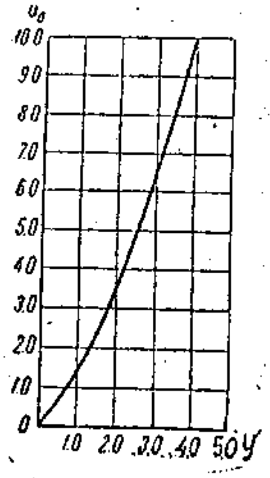
$$u_0 - u - \ln\frac{1 + u_0}{1 + u} = \frac{y^2}{2}. \tag{14}$$

Зависимость u от y для разных значений u_0, построенных по формуле (14), показана на фиг. 2. Эти графики, являющиеся фазовыми кривыми движений, определяемых уравнением (8), позволяют установить характер изменения скорости стержня по мере погружения его в



Фиг. 2. Кривые зависимости, выражаемой ур. (14):

$$y = \sqrt{2\,(u_0 - u) - \ln \frac{1 + u_0}{1 + u}}$$



Фиг. 3. График зависимости, выражаемой ур. (16)

грунт. К моменту остановки стержня, т. е. при $u = 0$, деформация грунта достигает значения

$$x_1 = \alpha y_1, \tag{15}$$

где y_1 определяется на основании формулы (14), в которой следует положить $u = 0$. Тогда:

$$y_1 = \sqrt{2\,[u_0 - \ln(1 + u_0)]}. \tag{16}$$

На фиг. 3 изображен график зависимости y_1 от u_0, по которому можно судить о величине первого погружения стержня от его начальной скорости.

Если u_0 значительно меньше единицы, то

$$u_0 - \ln(1 + u_0) \approx \frac{u_0^2}{2} \tag{17}$$

и, следовательно, в этом случае, согласно (14), приближенно

$$y_1 = u_0. \tag{18}$$

Аналогичное упрощение можно получить, если, напротив, u_0 значительно больше единицы; тогда имеет место зависимость

$$y_1 \approx \sqrt{2u_0}. \tag{19}$$

Для подсчета осадки грунта при повторных ударах стержня о грунт следует вновь использовать интеграл (9) дифференциального уравнения (8), определяя произвольную постоянную из условия

$$y = y_{n-1}, \text{ при } u = u_0, \tag{20}$$

где y_{n-1} — осадка грунта в результате предшествующих ударов.

Получим:

$$u_0 - u - \ln \frac{1 + u_0}{1 + u} = \frac{1}{2}\,y^2 - \frac{1}{2}\,y_{n-1}^2. \tag{21}$$

Обозначая через y_n полную осадку грунта после n-го удара, имеем полагая в (21) $u = 0$:

$$y_n^2 = y_{n-1}^2 + 2[u_0 - \ln(1 + u_0)]. \tag{22}$$

В частности, если $y_0 = 0$, то

$$y_1^2 = 2[u_0 - \ln(1 + u_0)];$$

$$y_2^2 = y_1^2 + 2[u_0 - \ln(1 + u_0)] = 2\cdot 2[u_0 - \ln(1 + u_0)];$$

$$y_3^2 = y_2^2 + 2[u_0 - \ln(1 + u_0)] = 3\cdot 2[u_0 - \ln(1 + u_0)].$$

И вообще:

$$y_n = \sqrt{n \cdot 2\,[u_0 - \ln(1 + u_0)]}, \tag{23}$$

или

$$y_n = y_1\sqrt{n}. \tag{24}$$

Таким образом, пока $x < \delta$ и, следовательно, $y < \frac{\delta}{a}$, осадка грунта растет пропорционально квадратному корню из числа произведенных ударов. Следовательно, каждый последующий удар вызывает меньшую деформацию грунта, чем предыдущий.

При $x > \delta$ дифференциальное уравнение движения ударника (5) должно быть заменено следующим:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -pF = -\left(k + \mu\delta\frac{dx}{dt}\right)F. \tag{25}$$

Если положить:

$$x = \frac{km}{\mu^2\delta^2 F}Z \tag{26}$$

и

$$t = \frac{m}{\mu\delta F}\theta, \tag{27}$$

то уравнение (25) приведется к виду

$$\frac{d^2Z}{d\theta^2} = -1 - \frac{dZ}{d\theta}. \tag{28}$$

Первый интеграл этого уравнения имеет вид:

$$W - \ln(1 + W) = -Z + D, \tag{29}$$

где

$$W = \frac{dZ}{d\theta} = \frac{\mu\delta}{k}v, \qquad v = \frac{dx}{dt}, \tag{30}$$

а D — новая постоянная интегрирования.

Так как D входит в выражение для Z аддитивно, то при ее определении можно для каждого удара стержня о грунт принимать условие

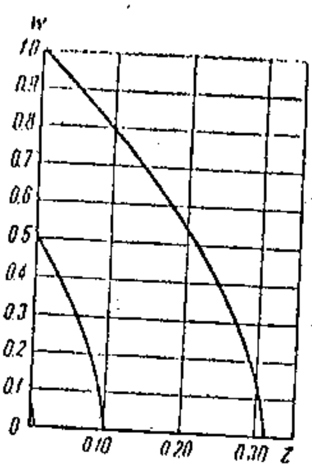
$$Z = 0, \text{ при } W = W_0,$$

и отсчитывать деформацию Z при каждом ударе сначала.

Получим:

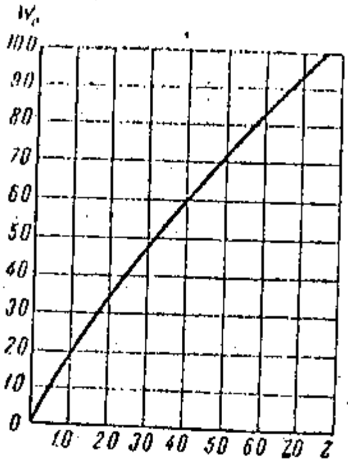
$$Z = W_0 - W - \ln\frac{1 + W_0}{1 + W}. \tag{31}$$

На фиг. 4 изображены графики изменения W как функции Z, построенные для некоторых частных значений W_0. Эти графики позволяют судить об уменьшении скорости стержня по мере погружения его в грунт при каждом ударе.



Фиг. 4. График зависимости, выражаемой ур. (31):

$$Z = W_0 - W - \ln \frac{1 + W_0}{1 + W}$$



Фиг. 5. График зависимости, выражаемой ур. (32):

$$Z = W_0 - \ln (1 + W_0)$$

Чтобы получить осадку грунта Z, в результате очередного удара следует положить в формуле (31) $W = 0$. Получим:

$$Z_1 = W_0 - \ln (1 + W_0). \tag{32}$$

Эта зависимость изображена графически на фиг. 5.

Аналогично предыдущему, при малых значениях W_0, по сравнению с единицей, получим

$$Z_1 = \frac{1}{2} W_0^2. \tag{33}$$

Так как на основании формул (26) и (30)

$$Z_1 = \frac{\mu^2 \delta^2}{km} Fx, \qquad W_0 = \frac{m\delta}{k} v_0,$$

то, подставляя эти выражения в (33), получим

$$kFx_1 = \frac{1}{2} mv_0^2. \tag{34}$$

Последняя формула имеет простой механический смысл, так как в правой ее части стоит выражение живой силы ударника в момент начала соприкосновения его с грунтом, а в левой части — выражение работы сил сопротивления грунта, в предположении, что эти силы постоянные, т. е. не зависят от скорости.

Заметим, что живая сила ударника пропорциональна высоте падения груза. Поэтому осадка грунта в результате каждого удара должна быть пропорциональна (при условии $W_0 \ll 1$) высоте падения груза. Это обстоятельство подтверждается экспериментальными наблюдениями при испытаниях грунта ударником ДОРНИИ.

Таким образом, это испытание не дает возможности определить, как это следует из формулы (32), коэффициент вязкости грунта μ, позволяя найти лишь коэффициент k. Для определения коэффициента μ можно воспользоваться экспериментом над стержнем, погружающимся в грунт при постоянном давлении p, и вычислить μ по формуле

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k_0 - k}{\mu\delta}. \tag{35}$$

Отметим, кстати, что, в соответствии с изложенной здесь теорией, осадка в результате первого удара о грунт всегда оказывается больше осадки от последующих ударов. Это обстоятельство может быть использовано для косвенного определения коэффициента μ.

Во всем предыдущем изложении мы считали грунт абсолютно неупругим. Однако опыты, проведенные научным сотрудником ДОРНИИ А. М. Кривисским, показали наличие некоторых упругих деформаций при ударе о грунт копром с большой площадью поперечного сечения.

Заметим, что соответствующим изменением законов деформирования грунта можно математически описать теорию удара копра и с учетом упругих деформаций грунта [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ю. Ишлинский. Линейные законы деформирования не вполне упругих тел. ДАН СССР, т. 26, № 1, 1940, стр. 23.