Сингулярные лагранжевы многообразия и асимптотические собственные функции оператора $-\frac{d}{dx}D(x)\frac{d}{dx}$, заданного на отрезке и вырождающегося на его концах

С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский

Пусть $D(x)$ — гладкая функция на отрезке $[a,b]$, положительная на интервале (a,b) и имеющая невырожденные нули в точках a и b. Для оператора L в $L^2([a,b])$, определенного как расширение по Фридрихсу минимального оператора, заданного дифференциальным выражением $-\frac{d}{dx}D(x)\frac{d}{dx}$, мы строим квазиклассические асимптотические собственные функции при больших значениях спектрального параметра λ.

Согласно общим принципам, такие асимптотики связаны с инвариантными лагранжевыми многообразиями соответствующей гамильтоновой системы. В рассматриваемом одномерном случае интересующее нас лагранжево многообразие Λ_0 есть просто линия уровня $H(x,p)=1$ гамильтониана $H(x,p)=p^2D(x)$. Она представляет собой объединение двух кривых $p=\pm 1/\sqrt{D(x)}$, имеющих особенности (импульс p стремится к бесконечности) на концах отрезка $[a,b]$, причем классическое движение по этим кривым не удовлетворяет условию “полноты потока”: точка уходит на бесконечность за конечное время.

Специальное каноническое преобразование g регуляризует многообразие Λ_0, причем регуляризованное многообразие Λ оказывается гладким (диффеоморфным окружности) лагранжевым многообразием в “расширенном” фазовом пространстве $\mathbf{\Phi}$. Квазиклассические собственные функции доставляются модифицированным каноническим оператором Маслова на Λ, конструкция которого отличается от стандартной использованием отвечающего преобразованию g квантованного (по Фоку) канонического преобразования (которое оказывается не чем иным, как преобразованием Ганкеля) вместо преобразования Фурье. Соответствующие условия квантования выделяют асимптотические собственные значения $\lambda_n \to \infty$, а квазиклассические собственные функции после ряда упрощений выражаются в конечном виде через функции Бесселя сложного аргумента.

Исследование поддержано грантом РНФ № 16-11-10282.