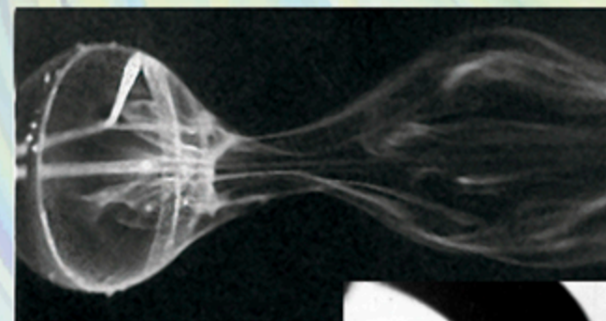


ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ

# 13-я международная конференция - ШКОЛА МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ



30 ноября -  
02 декабря 2022 г.

ФГБУН ИНСТИТУТ  
ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ  
им. А.Ю. Ишлинского РАН



# ВОЛНЫ И ВИХРИ В СЛОЖНЫХ СРЕДАХ

МАТЕРИАЛЫ ШКОЛЫ



ФГБУН ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ  
им. А.Ю. Ишлинского РАН

Москва, 2022г.

Москва, 2022г.

*FUNDAMENTAL AND ENVIRONMENTAL FLUID MECHANICS*



**13-АЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ  
ШКОЛА МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ**

# **ВОЛНЫ И ВИХРИ В СЛОЖНЫХ СРЕДАХ**

**Москва, 30 ноября – 02 декабря, 2022**

## **WAVES AND VORTICES IN COMPLEX MEDIA**

**PROCEEDINGS OF  
13-th INTERNATIONAL CONFERENCE –  
SCHOOL OF YOUNG SCIENTISTS**

**Moscow, November 30 – December 02, 2022**

УДК 532

ББК

22/253

В67

**Волны и вихри в сложных средах:** 13-ая международная конференция – школа молодых ученых; 30 ноября – 02 декабря 2022 г., Москва: Сборник материалов школы. – М.: ООО «ИСПО-принт», 2022. – 322 с.

ISBN 978-5-91741-284-9

Материалы 13-ой международной конференции – школы молодых ученых “Волны и вихри в сложных средах”, посвященной обсуждению фундаментальных и прикладных проблем механики жидкостей и газов в природных и техногенных системах.

*Ключевые слова:* волны, вихри, математическое и лабораторное моделирование, неоднородные жидкости, течения в сложных средах.

УДК 532  
ББК 22/253

Proceedings of the 13-th international conference – scientific school of young scientists “Waves and vortices in complex media” dedicated to the discussion of fundamental and applied problems in fluid and gas mechanics for environmental and technological systems.

*Keywords:* waves, vortices, mathematical and laboratory modelling, inhomogeneous fluids, fluxes in complex media.

ISBN 978-5-91741-284-9

© Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, 2022

## **ОРГАНИЗАТОРЫ ШКОЛЫ:**

*Федеральное государственное бюджетное учреждение*

**Российская академия наук**

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки*

**Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН**

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки*

**Математический институт им. В.А. Стеклова РАН**

---

## **ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ:**

акад. А.Г. Куликовский – почетный председатель, проф. Ю.Д. Чашечкин – сопредседатель, чл.-корр. РАН С.Е. Якуш – сопредседатель, чл.-корр. РАН Д.А. Губайдуллин – зам. председателя, проф. С.Ф. Урманчеев – зам. председателя, Е.В. Есина – уч. секретарь, В.Г. Байдулов, проф. Т. Боднар (Чехия), проф. Р.М. Вильфанд, чл.-корр. РАН А.М. Гайфуллин, проф. А. Герчински (США), д.ф.-м.н. Е.В. Ерманюк, д.ф.-м.н. А.Г. Зацепин, акад. Д.М. Климов, проф. А.Д. Косинов, проф. А.Н. Осипцов, акад. О.В. Руденко, проф. Ф. Фрони (Франция), проф. Я. Фукумото (Япония), д.ф.-м.н. О.Г. Чхетиани

---

## **НАУЧНАЯ ПРОГРАММА:**

- Системы фундаментальных уравнений и конститутивные модели течений сложных сред;
- Методы математического и лабораторного моделирования течений;
- Волны, вихри, когерентные структуры, турбулентность и лигаменты в течениях жидкостей и газов;
- Механика простых и сложных жидкостей с фазовыми переходами, газожидкостных систем и суспензий, включая течения в электрических или магнитных полях и в экстремальных условиях;
- Техника современного эксперимента;
- Технические и технологические приложения.

---

## **СПОНСОРЫ:**

**Российская академия наук  
Институт проблем механики  
им. А.Ю. Ишлинского РАН  
Журнал «Аксиомы»**



## **ORGANIZERS:**

**Russian Academy of Sciences**

**Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS**

**Steklov Mathematical Institute of the RAS**

---

## **INTERNATIONAL PROGRAM COMMITTEE:**

Acad. RAS A.G. Kulikovsky (honorary chair), Prof. Yu.D. Chashechkin (co-chair), Dr. S.E. Yakush (cochair), Corr.m. RAS D.A. Gubaidullin (deputy chair), Prof. S.F. Urmacheev (deputy chair), E.V. Esina (sci. secr.), Dr. V.G. Baydulov, Prof. T. Bodnar (Czech), Dr. O.G. Chkhetian, Dr. E.V. Ermanyuk, Prof. P. Fraunie (Fra), Prof. Ya. Fukumoto (Jap), Corr.m. RAS A.M. Gaifullin, Prof. A. Herczynski (USA), Acad. D.M. Klimov, Prof. A.A. Kosinov, Prof. A.N. Osipov, Acad. O.V. Rudenko, Prof. R.M. Vilfand, Dr. A.G. Zatspin

---

## **SCIENTIFIC PROGRAM:**

- **Systems of fundamental equations and constitutive models of complex media flows;**
  - **Methods of mathematical simulation and laboratory modeling of flows;**
  - **Waves, vortices, coherent structures, turbulence and ligaments in fluid and gas flows;**
  - **Mechanics of simple and complex liquids with phase transitions, gas-fluid systems and suspensions, including flows in external electric or magnetic fields and extreme conditions;**
  - **Technique of modern experiment;**
  - **Engineering and technological applications.**
- 

## **SPONSORS:**

**Russian Academy of Sciences**

**Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS**

**Axioms**

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Идущие общественные и экономические перемены оказывают влияние на все стороны жизни, включая науку и образование. В современном мире к традиционной «проблеме разобщенности» научных работников добавились «информационная перегруженность» и «академическая индоктринация», отражающая свойства сложившейся системы образования и специализации научных исследований. Академическая разобщенность стала наблюдаться не только в отношениях между научными группами и лабораториями, но и в работе международных научных организаций, объединений, производственных структур и целых отраслей промышленности.

В качестве инструмента разрешения возникающих противоречий привлекается традиционный механизм объективизации результатов и минимизации негативных факторов – проведение конференций (семинаров, собраний, дискуссий), актуальность которого только возрастает. Смена приоритетов и тематики научных исследований, затрудняющие создание новых направлений и иллюстрирующих их научных собраний, подчеркивает важность сохранения традиционных конференций с учетом коррекции тематики и программ работы.

Тематика серии конференций-школ молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах», которая началась в 2010 году как инструмент анализа результатов, полученных в ходе выполнения Программы фундаментальных исследований III/4 «Динамика формирования и взаимодействия волн и вихрей в сплошных средах» Отделения энергетики, механики, машиностроения и процессов управления РАН, последовательно расширялась и стала включать все большее число гидродинамических проблем. Интерес к конференции устойчиво рос, и постепенно она трансформировалась небольшого из академического мероприятия в международную конференцию, уделяющую особое внимание молодым участникам. Заседания проводились в Москве (2010-2014 и 2016-2021 гг.) или в Калининграде (2015 г.) и не прерывались в эпидемический период 2020-2021 гг. Выбранная смешанная форма дистанционного и персонального участия оказалась достаточно гибкой и позволила в этом году вернуться к формату традиционной конференции с возможностью дистанционного подключения заинтересованных слушателей.

В число тем, включенных для обсуждения на 13-ой международной конференции «Волны и вихри в сложных средах», вошли: Системы фундаментальных уравнений и конститутивные модели течений сложных сред; Методы математического и лабораторного моделирования течений; Волны, вихри, когерентные структуры, турбулентность и лигаменты в течениях жидкостей и газов; Механика простых и сложных жидкостей с фазовыми переходами, газожидкостных систем и суспензий, включая течения в электрических или магнитных полях и в экстремальных условиях; Техника современного эксперимента; Технические и технологические приложения.

Тематика отражает сохранение направленности конференции, ориентированной на разработку моделей течений природных систем, атмосферы и океана, транспортных и промышленных технологий, сохраняющих возможность априорной оценки точности и прямого сравнения расчетов с данными экспериментов и наблюдений в реальных условиях. Традиционно, для включения в программу конференции заявки прислали сотрудники научных институтов Российской академии наук (ИПМех РАН, ОИВТ РАН, ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, ИО им. П.П. Ширшова РАН, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, ИАП РАН, Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, ИВП РАН, ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, ИМСС, филиал ПФИЦ УрО РАН, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Хри-

стиановича СО РАН, Институт катализа им. Г.К.Борескова СО РАН, Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Институт прикладной физики РАН, ФИЦ Морской гидрофизический институт РАН), ряда университетов (МФТИ, НИЯУ МИФИ, МГТУ им. Н.Э. Баумана, МГУ им. М.В.Ломоносова, НИИ МГУ, НИУ МЭИ, РУТ МИИТ, РУДН, РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина, НИУ ВШЭ, ЯрГУ им. П.Г.Демидова, Ярославская государственная сельскохозяйственная академия, Башкирский государственный университет, Уфимский государственный нефтяной технический университет, Пермский государственный научно-исследовательский университет, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Волжский государственный институт транспорта, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининградский государственный технический университет» ФГБОУ ВО «КГТУ», Севастопольский ГУ Филиал Государственного морского университета им. адмирала Ф.Ф. Ушакова, Тольяттинский государственный университет), а также институтов промышленности (ЦАГИ, НИКИЭТ им. Н.А. Доллежала, ООО «ЛУКОЙЛ-Инжиниринг»), научных центров России (Московский центр фундаментальной и прикладной математики), Франции (Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels, Mediterranean Institute of Oceanography, Université de Toulon, Aix Marseille Université), Японии (Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University), Колумбии (Университет Индустриаль де Сантандер). Объявленная программа была выполнена практически полностью.

В отсутствие целевого финансирования научных мероприятий, Оргкомитет считает своей приятной обязанностью поблагодарить всех участников конференции «Волны и вихри в сложных средах», реально поддерживающих открытый обмен научными суждениями – инструмент формирования новых идей, а также решения традиционных и вновь возникающих научно-практических проблем.

Поскольку, в силу сложившихся организационных условий, сборник материалов публикуется после окончания конференции-школы, сообщаем о принятом решении участников продолжить работу конференции в 2023 году.

Оргкомитет

## CAPILLARY AND ACOUSTIC WAVES OF A DROPLET IMPACT

*Yuli D. Chashechkin*

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow*

[yulidch@gmail.com](mailto:yulidch@gmail.com)

Currently, more and more attention has been paid to the simultaneous study of the physical, hydrodynamic and acoustic processes accompanying the coalescence of a freely falling drop with a target fluid at rest. The changeable and at the same time reproducible patterns of flows, the mechanisms of formation of flows and waves are of scientific and practical interest. Ring capillary-gravitational waves were noticed at the end of the XIX century. Acoustic waves of the droplet impact were first recorded in the air at the beginning of the last century, and with the advent of hydrophones they were registered in water. In recent years, rain noise measurements have been used to determine the intensity of precipitation in the remote regions of the ocean. At the same time, theoretical and laboratory studies of all types of droplet flow waves are being developed.

The description of hydrodynamic processes is carried out on the definitions of a fluid as a moving continuous medium. The equilibrium state of the fluid is characterized by the distribution of the Gibbs potential [1], as well as its derivatives that are thermodynamic quantities (density, entropy, pressure, temperature, concentration of dissolved substances and suspended particles); molecular transfer coefficients – viscosity, thermal conductivity and diffusion; wave propagation parameters (velocities sound, light); charge transfer (electrical conductivity) and electromagnetic fields transfer. A fluid flow is defined as an intrinsic or forced joint transfer of matter, momentum and energy. In droplet flows, the effect of all energy transfer mechanisms is clearly manifested – a macroscopic mechanism with current and waves, a slow diffusion-dissipative one and a direct fast atomic-molecular mechanism [2].

The extensive list of elements of the droplet impact flows pattern includes a cavity; a crown with spikes, from the tops of which small droplets fly out; a splash that throws out large secondary droplets; gas cavities that transform into bubbles, gravitational-capillary and acoustic waves. They are observed at the stages of the structure reorganization. In a viscous exponentially stratified liquid with a vertical density profile  $\rho = \rho_{00} \exp(-z/\Lambda)$ , two-dimensional periodic sections of the form  $\rho \sim \rho_{00} A_+ \exp i(\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega t)$  in the range of capillary-gravitational waves are characterized by a dispersion relation describing both the traditional wave and the less studied fine-structured components that are ligaments [3]

$$\begin{cases} -N^2 k_x^2 + e^{z/\Lambda} (k_x^2 - k_{z,l}^2) \omega (ik_x^2 \nu - ik_{z,l}^2 \nu + \omega) = 0 \\ gk_x^2 - 3ik_x^2 k_{z,l} \nu \omega + k_{z,l} (ik_{z,l}^2 \nu - \omega) \omega + k_x^4 \gamma = 0, \quad \gamma = \sigma/\rho_{00} \end{cases} \quad (1)$$

Here  $N = \sqrt{g/\Lambda}$  is the buoyancy frequency,  $g$  is the gravity acceleration,  $\gamma = \sigma/\rho$  is the density-based value of the surface tension coefficient  $\sigma$ ,  $\omega$ ,  $\mathbf{k} = (k_x, k_z)$  are the frequency and the wave vector (without an index characterizing the wave component, and with an index  $l$  – the ligamentous (singularly perturbed) part of the solution,  $\nu$  is the kinematic viscosity.

The capillary waves, which are formed at different stages of the evolution of the impact flow, play an important role in the formation of gas bubbles, which can come off under the action of fast flows. They are formed by ligaments that arise in thin films during the conversion of available energy in the free surface elimination process of merging liquids. The gas cavity, which comes off with the formation of a thin bridge, emits packets of acoustic waves of various frequencies and durations. Below, only the regular part of the traditional dispersion

relation for sound waves in a homogeneous liquid is analyzed (the equation is degenerated by singular components [2])

$$\left( \mathbf{k}^2 \left( 1 - \frac{i\omega \tilde{\nu}}{c_s^2} \right) - \frac{\omega^2}{c_s^2} \right) (\omega + i\nu \mathbf{k}_l^2)^2 = 0 \quad (2)$$

Here  $c_s$  is the speed of sound, the index  $l$  characterizes the ligaments.

The typical examples of capillary wave patterns in drip flows are shown in Fig. 1. Short waves on the bottom part of the submerging drop occur when a droplet that previously flows from the top of the spike on the crown veil strikes (Fig.1, a, b), Capillary waves on the crown wall in the growth and decline stage are shown in Fig. 1 c, d. The circular capillary waves covering the crown or base of the splash are most fully studied. At large distances from the source, the inhomogeneities of the phase surfaces of such waves are smoothed out (Fig. 1, d,e), the observations are consistent with the calculations [4].

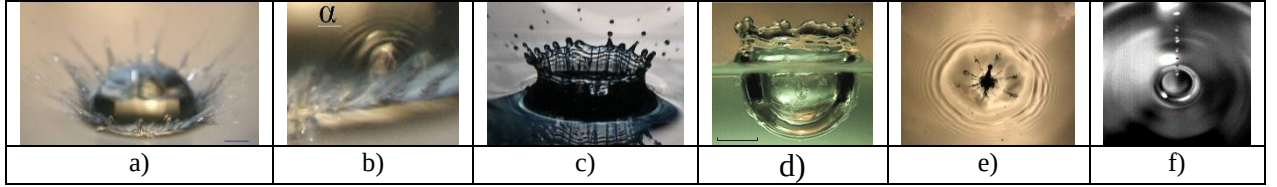


Fig. 1. The capillary waves in the droplet impact flows: a, b) – droplet fall marks on the surface of the submerging droplet (the full image and the part of the image), c, d) – waves on the walls of the crown, e, f) – ring waves around the crown and the base of the streamer.

From the analysis of the wave periodograms on the cavity wall it follows that the intensity and wavelength  $\lambda$  increase over time, the frequency  $f$  decreases, and the dispersion relation is performed fairly accurately.

In the experiment, short capillary and acoustic waves are emitted in packets during abrupt changes in the spatial structure of the flow. Capillary waves are observed at the boundary of the coalescence area of the incident drop with the fluid, around the base of the splash, on the walls of the crown and cavities. Acoustic waves are formed during the pinch off gas cavities with the formation of a bursting bridge [5].

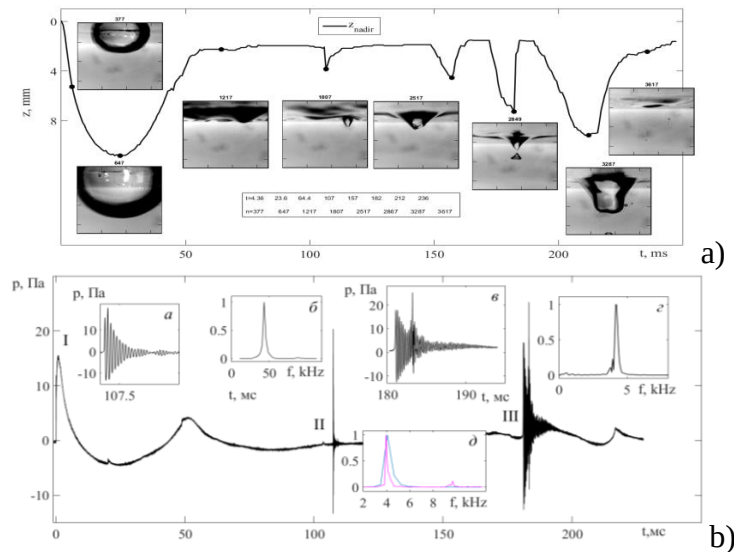


Fig. 2. A periodogram of changes in the depth of the cavities and a phonogram of the sound signals pressure on the general time scale, the photographs of the flow at the time points marked with dots, scans and energy spectra of acoustic waves are on the insets.



The cavities are formed sequentially when the drop, the base and the top of the splash, the second and first drops that come off its tip are immersed (Fig. 2). With the undisturbed surface of the fluid, the drop is in contact with the top, and the cavity 1 has smooth walls. The returning drop comes into contact with the cavity walls by its side surface, which increases the share of the transmitted convertible energy when the free surface is eliminated, and causes the shape distortion of the cavity walls, the formation of protrusions and fast fine flows. The gas cavities which come off with broken bridge emit sound packets.

The variety of components, the clarity of fine structures, and the reproducibility of flow patterns in general indicate the important role of all energy transfer mechanisms and the necessity to develop a theory of flows based on a complete system of fluid mechanics equations with closing equations of state for the Gibbs potential and density.

**ACKNOWLEDGEMENTS.** The work was supported by the Russian Science Foundation (project 19-19-00598-II). The experiments were carried out at the stands of "HPC IP-Mech RAS".

### REFERENCES

1. Feistel R. Thermodynamic properties of seawater, ice and humid air: TEOS-10, before and beyond // *Ocean Sciences*. 2018, 14, 471–502.
2. Chashechkin Y.D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // *Axioms*. 2021. V. 10. 286. <https://doi.org/10.3390/axioms10040286>.
3. Chashechkin Yu.D., Ochirov A.A. Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field // *Axioms*. 2022. V. 11(8). 402. doi: 10.3390/axioms11080402.
4. Zhu G.Z., Li Z.H., Fu D.Y. Experiments on ring wave packet generated by water drop. *Chin. Scie. Bul.*, 2008, vol. 53, no. 11, pp. 1634–1638
5. Чашечкин Ю.Д. Пакеты капиллярных и акустических волн импакта капли // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки*. 2021. № 1(94). С. 73–92.



## FUNDAMENTALS OF ENGINEERING MATHEMATICS OF FLUID FLOWS

*Yuli D. Chashechkin*

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow*

[yulidch@gmail.com](mailto:yulidch@gmail.com)

The lack of scientific description of a number of successfully operating systems and technologies could be observed while discussing the fluid mechanics role in the development of industrial technologies, methods for analyzing the state and forecast of the environmental evolution. The disunity of approaches reflected in the table of contents of the main treatises emphasizes the division of a single subject into sections – aerodynamics and hydrodynamics, methods (analytical, numerical or laboratory modeling), processes (flows, waves, vortices, traces ...), models (fundamental, reduced, constitutive, ...), and a large number of other gradations [1]. Following the recommendation of D.I. Mendeleev "not to separate the question of drag on bodies in air from the question of drag in water" [2], a unified approach to the description of fluid and gases flows is being developed. The approach consist of two independent mutually complementary disciplines – **Engineering Mathematics** – *The axiomatic doc-*

*trine of the principles of symbols content selection, the rules of operations and criteria for accuracy control, and Technical Physics – The empirical-axiomatic doctrine of nature as a whole, the properties and structure of matter, all types of state changes with error control.* The criteria for physical quantities choice are observability, i.e. the availability of error estimate in measurements, and compliance in semantic content with analogous symbols of engineering mathematics [3].

In mathematical description the concepts of a real or complex number, time, vector space, invariants and motion – a continuous orthogonal transformation of metric space into itself with a parameter  $t$  (time) conserving distances and the mutual arrangement of objects are used.

The description of hydrodynamic phenomena is based on the definition of a fluid as a flowing continuous medium. The equilibrium state of the fluid is characterized by the Gibbs potential distribution [3] and its derivatives – thermodynamic quantities (density, entropy, pressure, temperature, concentration of dissolved substances and suspended particles); molecular transfer coefficients – viscosity, thermal conductivity and diffusion; wave propagation parameters (the velocities of sound and light); the transfer of a charge (electrical conductivity) and electromagnetic fields transfer. The fluid flow is defined as an *intrinsic or forced joint transfer of momentum, energy and matter, which is described by a system of fundamental equations of fluid mechanics*. The analysis of the system was initially given in 1944 in the first edition [1]. Taking into account the compatibility condition, it determines complete sets of functions, which describe the dynamics and structure of real fluids and gases flows.

The classification of the flows structural components is based on the complete solutions analysis of the linearized system of fundamental equations for periodic flows, taking into account the compatibility condition. The classification includes waves of various types (acoustic, inertial, internal gravitational, hybrid) and accompanying ligaments – interfaces and fibers forming a fine structure of the medium [3]. A detailed analysis of the dispersion relations for surface gravitational-capillary waves in a viscous, exponentially stratified liquid was given in [4].

In a nonlinear approximation, the interaction of waves with each other and with ligaments expands the scenarios of the flows evolution [5]. A large number of simultaneously presented deterministic components with their own space-time characteristics explain the complex nature of sensor signals in a real physical experiment. The fulfillment of synchronism conditions for individual flow components is manifested in the formation of the spatial flow structure, in which waves, vortices, jets and wakes can be expressed in dependence on the conditions.

The theory of fluid flows was created and has been developing in the approximation of a continuous medium. Real liquids and gases consist of atoms and molecules that form aggregates of various composition and number of elements - associates, complexes, clathrates, clathrates, compounds with individual atoms, clusters and others. Linear scales of these aggregates are in the range from  $10^{-8}$  to  $10^{-6}$  cm, the temporary ones are from  $10^{-12}$  to  $10^{-8}$  cm. Each of the components of the medium structure is characterized by its own internal energy, which accumulates in its formation and is partially lost in its destruction, providing the fluidity property of liquids and gases.

The free exchange of energy between the flow components (the kinetic energy of mechanical motion  $E_k = \rho \mathbf{u}^2 / 2$  and various components of internal energy, which is usually characterized by the Gibbs potential  $dG = -s_e dT + V dP + S d\sigma + \mu dS_i$ ) ensures the formation of fast thin fibers (ruffles, trickles) in all types of flows, which are described by ligaments in complete solutions of the fundamental equations system [3]. The standard designations are:  $s_e$  – entropy,  $T$  – temperature,  $V = 1/\rho$  – specific volume,  $P$  – pressure,  $S$  – interface area,

$\sigma$  – surface tension coefficient,  $\mu_i$  – chemical potential of the  $i$  component,  $S_i$  – concentration of dissolved or suspended matter.

The large heat capacity of liquids gives a room to neglect temperature effects in a number of problems and obtain experimentally verifiable solutions of a studied system of fundamental equations. At the same time, the undisturbed density profile  $\rho(z) = \rho_0 \exp(-z/\Lambda)$  in the direction of the gravity line  $\mathbf{g} = (0, 0, g_z)$ , where  $\Lambda = |d \ln \rho / dz|^{-1}$  is the buoyancy scale set by the salinity distribution  $S_i$ , replaces the state equation. The reduced system of fundamental equations takes the form [6]:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{00} (\exp(-z/\Lambda) + s), \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{\nabla P}{\rho_{00}} + \nu \Delta \mathbf{v} - s \cdot \mathbf{g}, \quad \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = \kappa_S \Delta s + \frac{v_z}{\Lambda} \end{aligned} \quad (1)$$

with no-slip boundary conditions for the velocity and non-flux of matter on a solid surface [3] or kinematic and dynamic conditions on a free surface [1]. Here  $s$  is the salinity perturbation, including the salt compression effect,  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  is velocity,  $P$  is pressure minus a hydrostatic one,  $\nu = 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{c}$  and  $\kappa_S = 1.41 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{c}$  are kinematic viscosity and diffusion coefficients,  $t$  is time,  $\nabla$  and  $\Delta$  are Hamilton and Laplace operators.

Regular solutions of a linearized system (1) describe waves, singular solutions describe ligaments, the transverse scale of which  $\delta$  is determined by kinetic coefficients and the buoyancy frequency: in the velocity field  $\delta_N^v = \sqrt{\nu / N}$ , and in the density or its gradient field  $\delta_N^k = \sqrt{\kappa_S / N}$ ; or by the wave frequency  $\delta_\omega^v = \sqrt{\nu / \omega}$ ,  $\delta_\omega^k = \sqrt{\kappa_S / \omega}$ ; or the flow velocity  $U$   $\delta_U^v = \nu / U$ ,  $\delta_U^k = \kappa_S / U$  [3,6].

In the flow, all components, both large (vortices and waves) and thin ligaments interact non-linearly with each other, generating new harmonics [5], and degenerate under the influence of dissipative factors. In the close vicinity of the body, the transformation processes of internal energy play an important role, forming thin ligaments.

Modern hard and soft methods enable us to find the solutions of the system (1) in a wide range of the problem parameters - the size, shape and velocity of the body, the type and magnitude of stratification, the rate of formation and duration of the flow observation. Due to the complexity of the internal multi-scale structure, all flows continuously evolve and do not come into a stationary state over time even under stationary external conditions. The observed and calculated flow patterns near the inclined strip are shown in Fig. 1.

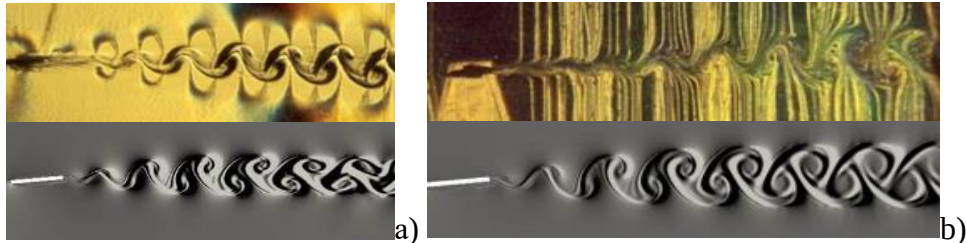


Fig. 1. Observations (from above) and calculation of vortex flows past an inclined thin plate  $L = 2.5 \text{ cm}$  long moving at a speed  $U = 4.3 \text{ cm/s}$  in a stratified ( $N = 0.83 \text{ c}^{-1}$ ,  $T_b = 7.6 \text{ c}$ ) and potentially homogeneous liquid ( $T_b = 7.3 \text{ days}$ )

The recommendations on improving measurement techniques and procedures for transferring results to natural and engineering systems are discussed. They arise from the results of experiments and calculations.

**ACKNOWLEDGEMENTS.** The work was supported by the Russian Science Foundation (project 19-19-00598-II). The experiments were carried out at the stands of "HPC IP-Mech RAS".

## REFERENCES

1. *Landau, L.D.; Lifshitz, E.M.* Fluid Mechanics. V.6. Course of Theoretical Physics; Pergamon Press: Oxford, UK, 1987; 560 p
2. *Mendeleyev D.I.* O soprotivlenii zhidkostey i o vozdukhoplavanii. SPb, Tip. V.Demakova, 1880, 239 s. (*Mendelev D.I.* On the resistance of liquids and on aeronautics. SPb, Type. V. Demakova, 1880, 239 p. In Russian)
3. *Chashechkin Y.D.* Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // *Axioms*. 2021. V. 10. 286. <https://doi.org/10.3390/axioms10040286>.
4. *Chashechkin Yu.D., Ochirov A.A.* Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field // *Axioms*. 2022. V. 11(8). 402. doi: 10.3390/axioms11080402.
5. *Chashechkin Yu. D.* Conventional partial and new complete solutions of the fundamental equations of fluid mechanics in the problem of periodic internal waves with accompanying ligaments generation // *Mathematics*. 2021. V. 9. No. 586. <https://doi.org/10.3390/math9060586>.
6. *Chashechkin Yu. D., Zagumennyi I. V.* 2D hydrodynamics of a plate: from creeping flow to transient vortex regimes // *Fluids*. 2021. V. 6(9). 310. <https://doi.org/10.3390>.



## SURFACE WAVES IN A VISCOUS CONTINUOUSLY STRATIFIED FLUID

*Yuli D. Chashechkin<sup>1</sup>, Artem A. Ochirov<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow*

<sup>2</sup>*P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl*

[otchirov@mail.ru](mailto:otchirov@mail.ru)

The problems of wave propagation in inhomogeneous media attract the researchers' attention due to a large number of scientific and practical applications. If we talk about stratified liquids, then more often the attention of observers is drawn to the study of internal waves. The present study is aimed at studying the propagation of surface waves.

We consider a viscous fluid with kinematic viscosity  $\nu$  in a Cartesian coordinate system  $Oxyz$  in which the axis  $Oz$  is directed vertically upwards against the direction of gravity  $\mathbf{g}$ , and the plane  $Oxy$  coincides with the equilibrium position of the fluid surface. We will examine the movements that do not depend on the horizontal coordinate  $y$ . We assume that the liquid is stratified according to the exponential law  $\rho_0(z) = \rho_{00}e^{-z/\Lambda}$ . A stratified fluid is characterized by the scale of stratification  $\Lambda = |d \ln \rho / dz|^{-1}$ , the buoyancy frequency  $N = \sqrt{g / \Lambda}$  and the buoyancy period  $T_b = 2\pi / N$ . The task is to study the wave movements of the type  $A = A_0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega t)$  and the accompanying subtle flows – ligaments. In a flat for-

mulation, the fluid velocity field  $\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_z \mathbf{e}_z$  can be represented as partial derivatives of the flow function  $\psi$

$$u_x = \partial_z \psi, \quad u_z = -\partial_x \psi \quad (1)$$

The mathematical formulation of the problem, taking into account the simplifications made, will be written as follows:

$$z < \zeta : \begin{cases} \rho = \rho_{00} (\exp(-z/\Lambda) + s(x, z, t)) \\ \rho \partial_t \mathbf{u} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \rho \nu \Delta \mathbf{u} = \rho \mathbf{g} - \nabla P \\ \partial_t \rho + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$z = \zeta : \begin{cases} \partial_t (z - \zeta) + \mathbf{u} \cdot \nabla (z - \zeta) = 0 \\ \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{n} (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}) = 0 \\ P - P_0 - \sigma \nabla \cdot \mathbf{n} - 2\rho \nu \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla(z - \zeta)}{|\nabla(z - \zeta)|} = \frac{-\partial_x \zeta \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2}}, \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{e}_x + \partial_x \zeta \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2}}$$

Here, the function  $s(x, z, t)$  describes the density perturbation associated with wave motion,  $P$  is the hydrodynamic pressure,  $P_0$  is the atmospheric pressure,  $\sigma$  is the coefficient of surface tension, and  $\mathbf{n}$  and  $\boldsymbol{\tau}$  are the vector of the external normal and the tangent to the free surface, respectively.

The problem (1) – (3) contains a set of natural parameters that define time and spatial scales. The time scales of the problem are determined by the buoyancy period  $T_b = 2\pi/N$  and the wave motion period  $T_\omega = 2\pi/\omega$  (or, respectively, the buoyancy frequency  $N$  and the wave motion frequency  $\omega$ ) and by the time that is spent on the free run of a distance equal to the capillary constant of the liquid  $T_{vg}^\gamma = \delta_g^\gamma / \nu = \sigma / \rho_{00} \nu g$ . Spatial scales of the problem are determined by the stratification scale  $\Lambda$ , viscous scales  $\delta_g^\nu = \sqrt[3]{\nu^2/g}$ ,  $\delta_N^{\nu g} = (\nu g)^{1/3}/N$ ,  $\delta_N^\nu = \sqrt{\nu/N}$  and capillary constant  $\delta_g^\gamma = \sqrt{\gamma/g} = \sqrt{\sigma/\rho_{00}g}$ .

The solution of the problem is sought in the form of a traveling wave

$$\psi = (A_+ e^{ik_x x - i\omega t} + A_- e^{-ik_x x - i\omega t}) (e^{k_z z} + \beta e^{k_l z}) \quad (4)$$

by the method of decomposition by a small parameter proportional to the amplitude of the wave motion. As a result of substitution (4), the dispersion relations are obtained:

$$\begin{cases} -N^2 k_x^2 + e^{z/\Lambda} (k_x^2 - k_{z,l}^2) \omega (ik_x^2 \nu - ik_{z,l}^2 \nu + \omega) = 0 \\ g k_x^2 - 3ik_x^2 k_{z,l} \nu \omega + k_{z,l} (ik_{z,l}^2 \nu - \omega) \omega + k_x^4 \gamma = 0 \end{cases} \quad (5)$$

It is convenient to analyze the relations (5) in a dimensionless form, using the proper parameters of the problem as the dimensionalization parameters: the buoyancy frequency  $N$  and the viscous wave scale  $\delta_N^{\nu g} = (\nu g)^{1/3}/N$ . Dimensionless relations (5) have the form:

$$\begin{cases} -k_{*x}^2 + ie^{z/\Lambda} (k_{*x}^2 - k_{*z,l}^2)^2 \varepsilon \omega_* + e^{z/\Lambda} (k_{*x}^2 - k_{*z,l}^2) \omega_*^2 = 0 \\ k_{*x}^2 + k_{*x}^4 \delta \varepsilon - 3ik_{*x}^2 k_{*z,l} \varepsilon^2 \omega_* + ik_{*z,l}^3 \varepsilon^2 \omega_* - k_{*z,l} \varepsilon \omega_*^2 = 0, \quad \delta = N\gamma/\nu g, \quad \varepsilon = N\nu^{1/3}/g^{2/3} \end{cases} \quad (6)$$

Here, the subscript \* indicates the corresponding dimensionless quantities. Equations (6) have regular and singular solutions. The regular solution describes the wave component of

the wave motion and in the limiting transition of low viscosity is reduced to the solution of dispersion relations for an ideal fluid. The singular solution disappears in the limit transition. The singular solution describes a subtle concomitant flow - ligament.

For a wave solution in a linear approximation with respect to the parameter  $\varepsilon$ , we obtain for physically realizable roots:

$$k_{*x} = -\frac{2^{1/3}}{\alpha} + \frac{\alpha}{3 \cdot 2^{1/3} \delta \varepsilon}$$

$$k_{*z} = \frac{\sqrt{\omega_*^2 - e^{-z/\Lambda}}}{\omega_*} \left( -\frac{2^{1/3}}{\alpha} + \frac{\alpha}{3 \cdot 2^{1/3} \delta \varepsilon} \right) + \varepsilon \frac{ie^{-2z/\Lambda} \left( -\frac{2^{1/3}}{\alpha} + \frac{\alpha}{3 \cdot 2^{1/3} \delta \varepsilon} \right)^3}{2\omega_*^4 \sqrt{\omega_*^2 - e^{-z/\Lambda}}}$$

$$\alpha = \left( 27\delta^2 \varepsilon^3 \omega_* \sqrt{\omega_*^2 - 1} + \sqrt{108\delta^3 \varepsilon^3 + 729\delta^4 \varepsilon^6 \omega_*^2 (\omega_*^2 - 1)} \right)^{1/3}$$
(7)

For an elegant solution up to the summands of the order  $O(\varepsilon^{3/2})$  for physically realizable roots, it is true:

$$k_{*x} = \pm \sqrt{(\delta \varepsilon)^{-1} \left( ((1+i)(2\omega_*^2 - 1)/\sqrt{2\omega_*}) \varepsilon^{3/2} - 1 \right)}$$

$$k_{*l} = \frac{(1-i)2\delta\omega_*^3 + (1+i)(e^{-z/\Lambda} + \omega_*^2) \left( ((1+i)(2\omega_*^2 - 1)/\sqrt{2\omega_*}) \varepsilon^{3/2} - 1 \right)}{2\sqrt{2}\omega_*^{5/2}\delta\sqrt{\varepsilon}}$$
(8)

Figure 1a shows the dependence of the wavelength on the frequency of wave motion for the wave solution for different types of fluids with different values of the buoyancy frequency. Figure 1b shows the dependences of the group (solid lines) and phase (dotted lines) velocities on the frequency of wave motion for these liquids.

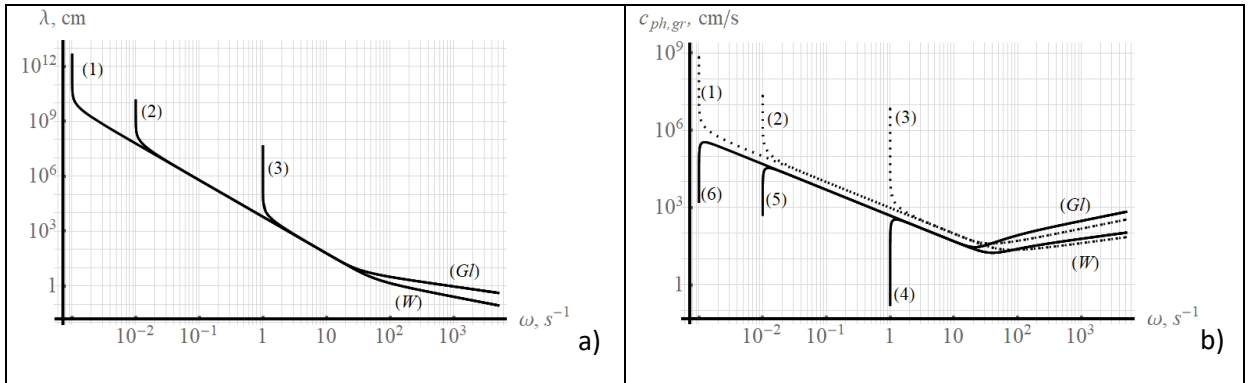


Fig. 1. The dependence of wavelength (a) and phase and group velocities (b) on frequency for fluids with water (W) and glycerin (Gl) parameters. Indices (1), (6) correspond to the buoyancy frequency  $N = 0,001c^{-1}$ , indices (2), (5) – to the buoyancy frequency  $N = 0,01c^{-1}$ , indices (3), (4) – to the buoyancy frequency  $N = 1c^{-1}$ . Solid lines indicate the group velocities, the dotted lines indicate phase velocities.

The dispersion relations were analyzed, describing the relationship between frequency and wavelength or wave number, as well as other parameters of the problem. The expressions for the phase and group velocities of wave motion and their analogues for the accompanying ligaments are obtained. Energy and momentum flows are also visualized on the characteristic scales of wave and ligament flows. The influence of fluid stratification on wave characteristics is investigated.



**ACKNOWLEDGEMENTS AND GRANTS.** The study was supported by the Russian Science Foundation (project 19-19-00598-II" Hydrodynamics and energetics of drops and droplet jets: formation, motion, break-up, interaction with the contact surface" <https://rscf.ru/en/project/19-19-00598/>).

## REFERENCES

1. Chashechkin Yu.D., Ochirov A.A. Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field // *Axioms*. 2022. V. 11(8). 402. doi: 10.3390/axioms11080402.



## DOUBLE-RESONANCE DAMPING OF GRAVITY-CAPILLARY WAVES ON WATER COVERED WITH A VIACO-ELASTIC FILM OF FINITE THICKNESS

*S.A.Ermakov<sup>1,2</sup>, G.E.Khazanov<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>*Institute of Applied Physics, Russian Academy of Science, Nizhny Novgorod*

<sup>2</sup>*Volga State University of Water Transport, Nizhny Novgorod*

[stas.ermakov8@gmail.com](mailto:stas.ermakov8@gmail.com), [grisha\\_mu@mail.ru](mailto:grisha_mu@mail.ru)

Analysis of gravity-capillary wave (GCW) on the water surface covered with films of organic surfactants or mineral oils is very important in the context of the problem of ocean pollutions and their remote sensing. A hydrodynamic theory of GCW developed in a number of papers shows that surfactant films can strongly enhance the GCW damping coefficient (DC). One of the most interesting features is that DC reaches a maximum at certain finite values of the film elasticity, not at infinite elasticity. Apart from GCW another type of wave motion can exist in a viscous fluid with an elastic surface. This motion corresponds to quasi horizontal oscillations in a viscous boundary layer below a film, so-called Marangoni waves (MW). An intriguing feature has been revealed that the maximum of the GCW DC corresponded to MW which frequencies and wavelengths were roughly close to those of GCW, i.e. when the two wave modes were in “resonance”. A hypothesis was proposed and became very common in the literature that the GCW damping maximum is due to the resonance absorption of GCW energy by MW. An alternative explanation of GCW resonance-like damping due to an infinitely thin film was developed by Dysthe and Rabin (1986) and later by Ermakov (2003). It has been shown that GCW contain a rotational (r-) component which can be described formally as MW “excited” by the potential (p-) component of GCW, and this excitation is the most effective and, correspondingly, DC has a maximum when the frequencies and wave numbers of GCW and MW are close to each other.

In this work the mentioned approach is used for analysis of GCW damping due to films of finite thickness with elastic boundaries, e.g. for oil/oil product films.

The analysis of waves in a viscous two-layer fluid was based on the linearized Navier-Stokes equation, the continuity equation and kinematic and dynamic boundary conditions at the water-film (wf) and film – air (fa) surfaces. The solution to these equations was sought as a sum of p- and r-components, the first corresponded to an ideal fluid, the second one appeared due to fluid viscosity. First, MW as a purely rotational solution in the absence of GCW were analyzed in detail. Then, the structure of GCW containing p- and r-components was discussed. The r-component is coupled with the p-part of GCW which velocity and wave number satisfy the GCW dispersion relation. The vertical structure of the GCW r-component is found being identical to MW, so the first could be termed as a “forced” MW coupled with

the p-component of GCW. The structure of GCW depends strongly on film thickness and is shown for “thin” and “thick” films in Fig.1. For the thick film two “forced” MW appear located near the upper and lower film boundaries, while for a thin film only one MW exist below the water surface.

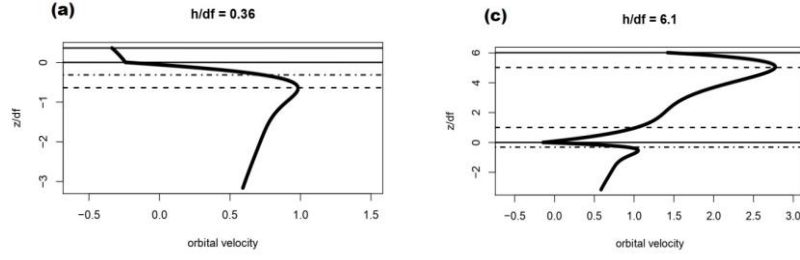


Fig.1. Horizontal orbital GCW velocity vs. depth.  $h$  is film thickness,  $d_f = \sqrt{2\nu_f / \omega}$  the boundary layer in film. GCW wavenumber  $k=3$  rad/cm, frequency  $\omega = 65$  rad/s, film viscosity is 10 water viscosity, i.e.  $\nu_f = 10\nu_w$ . Surface tension of water-film and film-air surfaces  $\sigma_{wf} = 20$  mN/m,  $\sigma_{fa} = 30$  mN/m, and the elasticities  $E_{wf} = 45$  mN/m,  $E_{fa} = 12$  mN/m. Dashed and dashed/dotted lines mark the boundary layer in film and water.

GCW DC was found as the wave energy dissipation rate divided by the total GCW energy. The dissipation rate was determined mostly by the r-component, while the GCW energy was due to the p-component. The calculated GCW DC for a “thick” film clearly indicates the occurrence of two maxima which appear due to the resonance with two “forced” MW localized at the upper and lower boundaries if the elasticities of these boundaries are different (Fig. 2, left). If the upper elasticity  $E_{fa}$  is zero only one maximum exists (see, Fig.2, right).

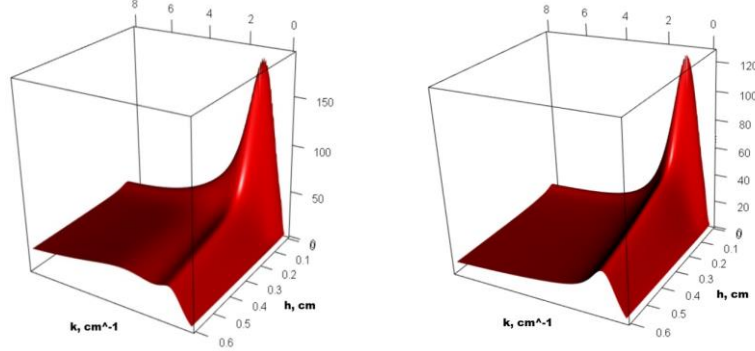


Fig. 2. GCW damping coefficient normalized by the damping rate for a clean water surface.  $\sigma_{wf} = 20$  mN/m,  $\sigma_{fa} = 30$  mN/m,  $\nu_w = 0.0085$  cm<sup>2</sup>/s,  $\nu_f = 15\nu_w$ , film density  $\rho_f = 0.85$  g/cm<sup>3</sup>,  $E_{wf} = 65$  mN/m,  $E_{fa} = 15$  mN/m (left);  $E_{wf} = 65$  mN/m,  $E_{fa} = 0$  mN/m (right)

GCW DC dependence on wave number for a thick film is noticeably wider than for a thin film, and this fact can be used as a “sign” of thick films with elastic boundaries.

One should emphasize that the dependence of the damping coefficient on film thickness is characterized by a strong maximum at the film thickness comparable with the viscous boundary layer thickness. The obtained dependencies for the damping coefficient were found to be in good agreement with existing laboratory measurements (for more detail, see Ermakov and Khazanov, Phys. Fluids **34**, 092107 (2022); <https://doi.org/10.1063/5.0103110>).

**ACKNOWLEDGEMENTS.** This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement #-075-15-2020-776)

## EXCHANGES OF KINETIC ENERGY AT THE OCEAN ATMOSPHERE INTERFACE

*P. Fraunié D. Bourras*

*Mediterranean Institute of Oceanography, Université de Toulon, Aix Marseille Université,  
France*

*[fraunie@univ-tln.fr](mailto:fraunie@univ-tln.fr)*

An overview of high resolution recent investigations of the marine atmospheric boundary layer and the Ekman ocean surface layer in the western Mediterranean sea is presented, from in situ measurements and numerical modeling.

Basic concepts, experimental facilities and numerical models abilities are discussed from the point of view of kinetic energy exchanges across air/sea interface.

### REFERENCES

1. *Bourras, D, H. Branger, G. Reverdin, L. Marié, R. Cambra, L. Baggio, C. Caudoux, G. Caudal, S. Morisset, N. Geyskens, A. Weill, and D. Hauser, 2014. A New Platform for the Determination of Air–Sea Fluxes (OCARINA): Overview and First Results. J. Atmos. Oceanic Technol., 31, 1043-1062.*
2. *Bourras D. et al, Air-Sea Turbulent Fluxes from a Wave-following Platform during six Experiments at Sea, 2019 J. Geophys. Res. 124,6, 4290-4321.*
3. *Shrira V., P. Forget 2015, On the Nature of Near-Inertial Oscillations in the Uppermost Part of the Ocean and a Possible Route towards HF Radar Probing of Stratification, J. Physical Oceanogr., 45(10), 2660-2678.*



## OKABE & INOUE'S CONTRIBUTION TO FORMATION AND METAMORPHOSES OF A VORTEX RING

*Yasuhide Fukumoto*

*Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University, Japan*

*[yasuhide@imi.kyushu-u.ac.jp](mailto:yasuhide@imi.kyushu-u.ac.jp)*

Over 60 years ago, Jun-ichi Okabe and Susumu Inoue succeeded in experiments of visualizing detailed processes of creation of a vortex ring and its subsequent metamorphoses to the decaying stage [1, 2]. Vortex rings were created in two ways. One way is to eject an impulsive jet of colored fluid vertically upwards from a mouthpiece into a still water, by means of head difference [1] and the other way is to impinge a falling drop of colored fluid upon the surface of water [2]. By the former method, their visualization technique was capable of clearly capturing subtle processes in which the ejected fluid lump is rolled into a toroidal form, entraining surrounding water. Their photo was caught by the eyes of George Batchelor and one of them was put on the cover of his worldwidely influential textbook on fluid dynamics. The second method uncovered a rich variety of secretive metamorphoses, for instance, creation of daughter vortex rings through instability to varicose waves. Their reports, though written in English, have been forgotten in fluid dynamics communities. This talk revives their lost contributions and hopefully makes a link with the cutting-edge status of vortex dynamics.

## REFERENCES

1. J. Okabe and S. Inoue, The generation of vortex rings, Rep. Res. Inst. Appl. Mech., Kyushu Univ. Vol. 8, No. 32 (1960) pp. 91-101.
2. J. Okabe and S. Inoue, The generation of vortex rings II, Rep. Res. Inst. Appl. Mech., Kyushu Univ. Vol. 9, No. 36 (1961) pp. 147 -161.



## УДАР СТРУИ ЖИДКОСТИ ПО ЖИДКОСТИ И СМОЧЕННОЙ СТЕНКЕ

А.А. Аганин

Институт механики и машиностроения ФИЦ Казанский научный центр РАН  
[aganin\\_aa@imm.knc.ru](mailto:aganin_aa@imm.knc.ru)

### ВВЕДЕНИЕ.

Высокоскоростной удар жидкости (струй, каплей) по поверхности тела обладает значительным разрушительным потенциалом, что имеет большое практическое значение. Так, удар каплей может вызывать повреждения паровых турбин, трубопроводных систем атомных электростанций, летательных аппаратов в условиях дождя [1-3]. Удар струй, образующихся при схлопывании пузырьков у стенки, считается одной из причин кавитационной эрозии поверхностей тел, контактирующих с жидкостью [4, 5].

В ходе высокоскоростного удара жидкости (капли, струи) по сухой стенке обычно выделяют две стадии (рис.1). Первая стадия реализуется в начале удара, когда угол наклона  $\theta$  поверхности бьющей жидкости к стенке не превышает некоторого критического значения  $\theta^*$ . На этой стадии боковая граница распространяющейся вверх ударной волны остается присоединенной к поверхности стенки. При  $\theta > \theta^*$  реализуется вторая стадия, когда боковая граница ударной волны отрывается от стенки и в окрестности кромки контакта жидкости и стенки возникает радиальное растекание жидкости. Считается, что представляющие наибольший интерес максимальные давления на стенке возникают на периферии области ударного воздействия при переходе от первой стадии ко второй.

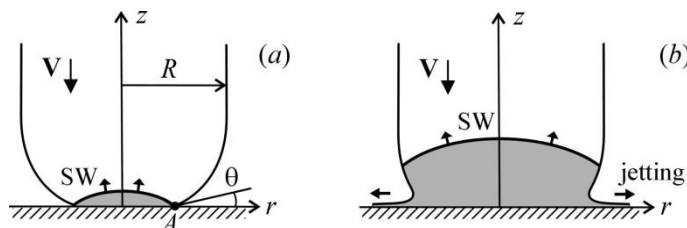


Рис.1. Стадии удара с присоединенной УВ (а) и боковым растеканием (б).

При высокоскоростном ударе для анализа его первой стадии обычно применяют теорию Хеймана [6] (или ее модификацию Лессера [7]). В настоящей работе приводится обобщение данной теории на случаи удара струи по поверхности жидкости и смоченной стенке.

### ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ОБОБЩЕНИЙ ТЕОРИИ ХЕЙМАННА.

В работе Хеймана [6] рассматривается первая стадия удара жидкости по сухой стенке (рис.1а), когда край ударной волны (УВ) остается присоединенным к стенке. Предполагается, что в малой окрестности края области контакта жидкости и стенки

$r = r_A$  в каждый момент времени ударную волну можно рассматривать как косую плоскую, которая возникает при ударе по стенке аналогичного, но плоского потока жидкости со свободной поверхностью, наклоненной к стенке под соответствующим углом  $\theta$ . Для удобства анализа делается переход к подвижной системе координат, связанной с краем области удара, перемещающимся вдоль стенки со скоростью  $V \operatorname{ctg} \theta$ . В результате такого перехода косая ударная волна становится стационарной.

При высокоскоростном ударе массы жидкости по жидкости (рис.2) возникают две ударные волны: одна – в бьющей жидкости, другая – в жидкости-мишени. Как и при ударе по сухой стенке, выделяются две стадии. Первая реализуется в начале удара, пока угол наклона  $\theta$  поверхности бьющей жидкости к поверхности жидкости-мишени не превышает некоторого критического значения  $\theta^*$ . На этой стадии боковые границы ударных волн совпадают между собой и остаются присоединенными к краю области контакта. Вторая стадия реализуется при  $\theta > \theta^*$ . На этой стадии боковая граница первой ударной волны уходит вверх по внешней поверхности бьющей жидкости, а боковая граница второй удаляется от оси  $z$  в радиальном направлении по поверхности жидкости-мишени. В окрестности кромки контакта бьющей жидкости и жидкости-мишени развивается выплеск.

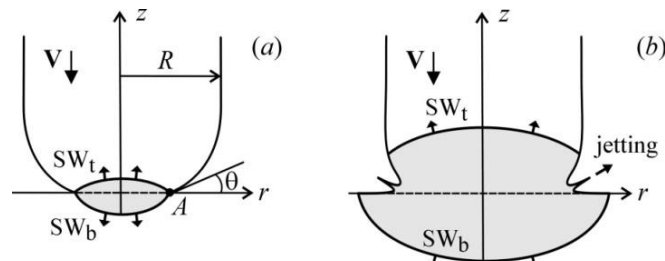


Рис.2. Стадии удара с присоединенными УВ (a) и боковым растеканием (b)

Для первой стадии удара жидкости по жидкости можно получить обобщение теории Хеймана. Аналогично удару по сухой стенке предполагается, что в малой окрестности края области контакта бьющей жидкости и жидкости-мишени  $r = r_A$  в каждый момент времени в этой малой области ударные волны можно рассматривать как косые плоские, возникающие при ударе по неподвижной жидкости аналогичного, но плоского потока жидкости со свободной поверхностью, наклоненной к жидкости-мишени под соответствующим углом  $\theta$ . Как и в случае сухой стенки, делается переход к подвижной системе координат, связанной с краем  $r = r_A$ , перемещающимся в ходе удара вдоль поверхности жидкости-мишени со скоростью  $V \operatorname{ctg} \theta$ . В результате такого перехода косые ударные волны становятся стационарными.

При высокоскоростном ударе жидкости по смоченной стенке (рис.3) сначала возникают две ударные волны: одна – в бьющей жидкости, другая – в смачивающем стенку слое жидкости. Первая распространяется вверх по бьющей жидкости, а вторая – вниз к стенке по смачивающему слою. Воздействие на стенку реализуется с момента образования на ней отраженной ударной волны. При достаточно тонком смачивающем слое можно выделить две стадии воздействия. Первая стадия осуществляется в начале воздействия, когда отражение падающей на стенку ударной волны является регулярным. Затем реализуется вторая стадия, на которой отражение имеет нерегулярный характер (Маховское отражение). Развитие выплеска на поверхности смачивающего стенку слоя возникает в этом случае позднее.

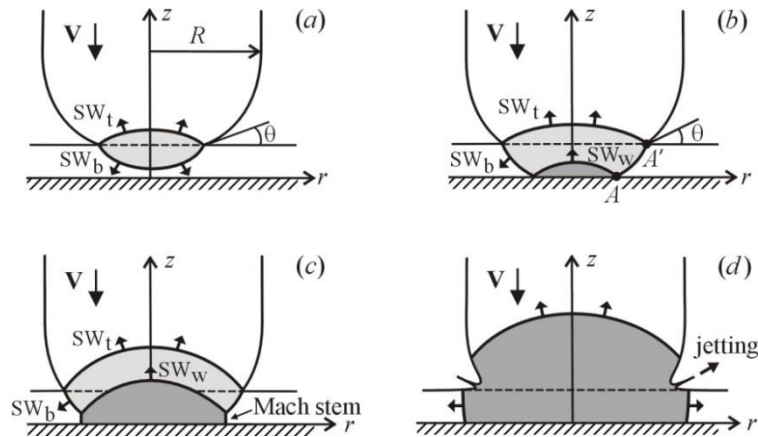


Рис.3. Фазы удара с присоединенными УВ (а), с регулярным (b) и нерегулярным (c) отражением SW<sub>b</sub> и с боковым растеканием (d).

В случае достаточно малой толщины смачивающего стенку слоя для первой стадии ударного воздействия на смоченную стенку, где отражение является регулярным, можно также получить обобщение теории Хеймана. Для этого предполагается, что произвольный бесконечно малый элемент фронта ударной волны SW<sub>b</sub> распространяется к стенке по нормали к своей поверхности как плоская ударная волна без изменения параметров за разрывом. Другими словами, пренебрегается ослабление падающей на стенку ударной волны при ее распространении по слою за счет ее криволинейности, что допустимо в случае малой толщины слоя по сравнению с радиусом кривизны ударной волны и малого пути ударной волны вдоль оси  $r$  по сравнению с радиусом области контакта. Аналогично удару по сухой стенке предполагается, что в малой окрестности края области контакта бьющей жидкости и смачивающего стенку слоя  $r = r_A'$  первая стадия воздействия развивается квазистатически. Считается также, что в каждый момент времени в этой малой области все ударные волны (в том числе и отраженную от стенки) можно рассматривать как косые плоские. Такие волны возникают при ударе по влажной стенке аналогичного, но плоского потока жидкости со свободной поверхностью, наклоненной к поверхности смачивающего слоя под соответствующим этому моменту углом  $\theta$  (рис. 6b). Делается переход к подвижной системе координат, связанной с краем  $r = r_A'$ , перемещающимся вдоль поверхности смачивающего стенку слоя со скоростью  $V \cot \theta$ . Отметим, что поскольку в этой системе координат ударные волны SW<sub>t</sub> и SW<sub>b</sub> являются стационарными, то и кромка A области воздействия на стенку в этой системе координат также является неподвижной. В результате такого перехода все косые ударные волны, в том числе и отраженная от стенки, становятся стационарными.

В результате обобщений теории Хейманна на случаи удара по жидкости (рис.2) и по смоченной стенке (рис.3) получены алгебраические выражения для определения характеристик удара на краю области ударного воздействия в зависимости от скорости удара  $V$  и угла удара  $\theta$ . Получены также алгебраические выражения для определения критических характеристик (т.е. характеристик, соответствующих критическому углу  $\theta^*$ ) удара жидкости по жидкости (рис.2).

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00100. Автор благодарен Т.С. Гусевой за проведенные расчеты и полезные обсуждения.



### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Engel O.G.* Waterdrop collisions with solid surfaces // J. Res. Natl. Bur. Stand. 1955. V.54. No.5. P.281–298
2. *Bowden F.P., Brunton J.H.* The deformation of solids by liquid impact at supersonic speeds // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A 1961. V.263. P.433–450.
3. *Fujisawa N., Morita R., Nakamura A. and Yamagata Ya.* Critical Consideration on Wall Thinning Rate by Liquid Droplet Impingement Erosion // E-Journal of Advanced Maintenance. 2012. V.4. No.2. P.79-87.
4. *Kornfeld M., Suvorov L.* On the destructive action of cavitation // J. Appl. Phys. 1944. V.15. P.495-506.
5. *Hawker N.A., Ventikos Y.* Interaction of a strong shockwave with a gas bubble in a liquid medium: a numerical study // Journal of Fluid Mechanics. 2012. V.701. P.59–97.
6. *Heymann F.J.* High-speed impact between a liquid drop and a solid surface // J. Appl. Phys. 1969. V.40. No.13. P. 5113-5122.
7. *Lesser M.B.* Analytic solutions of liquid-drop impact problems // Proc. R. Soc. Lond. A. 1981. V.377. P.289-308.



### ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА НА ПОЛОСЧАТОЙ СУПЕРГИДРОФОБНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

*А.И. Агеев, А.Н. Осипцов*

*Научно-исследовательский институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва*  
[aaiaageev@mail.ru](mailto:aaiaageev@mail.ru) [osiptsov@imec.msu.ru](mailto:osiptsov@imec.msu.ru)

#### ВВЕДЕНИЕ.

Супергидрофобные поверхности (СГП), обладая свойством отталкивания жидкости, являются объектом интенсивных исследований и имеют широкий диапазон применения: самоочищение, снижение трения, защита от обледенения и др. Супергидрофобные поверхности сочетают механическое текстурирование, необходимое для создания контролируемого микрорельефа поверхности, и химическую гидрофобность, обеспечивающую статическое удерживание рельефом газовых пузырьков или низковязкой жидкости. Трение между жидкостью и газом локально мало, поэтому осредненное макроскопическое трение на СГП также снижено, а измеренная средняя скорость проскальзывания жидкости на СГП не равняется нулю. Именно эффект снижения трения, наблюдаемый как в ламинарном, так и турбулентном режимах течения, сделал СГП объектом интенсивных теоретических и экспериментальных исследований. На сегодняшний день механизм снижения трения на СГП для ламинарных течений подробно исследован, получены количественные оценки и качественное описание влияния микрорельефа поверхности и состояния газовых пузырьков на величину эффекта снижения трения [1]. Для турбулентных режимов течения пока не существует удовлетворительного общепринятого объяснения снижения трения, наблюдаемого в экспериментах, а результаты численного моделирования противоречивы.

Помимо снижения трения, наличие микрорельефа на СГП может оказывать заметное влияние и на осредненные теплофизические свойства таких поверхностей. Так как СГП содержит пузырьки газа, теплопроводность которого на несколько порядков



ниже теплопроводности рабочей жидкости и материала, образующего твердые участки СГП, такая поверхность изменяет осредненный тепловой поток и теплофизические параметры течения. Например, процесс испарения одиночных капель жидкости, помещенных на СГП, занимает гораздо больше времени, чем испарение на стандартной поверхности без микрорельефа [2]. Понимание теплофизических свойств текстурированных СГП в настоящее время также является одной из приоритетных задач, обусловленных практическим использованием текстурированных поверхностей. Численное исследование теплофизических свойств СГП вызывает определенные вычислительные трудности, которые связаны с необходимостью определения поля скорости и распределения температуры в области, содержащей криволинейные межфазные границы, на которых изменяется тип динамических и тепловых граничных условий. В настоящей работе на модельной задаче о течении жидкости в плоском микроканале с нагретыми стенками, одна из которых является супергидрофобной, выполнено численное исследование локальных и осредненных тепловых потоков на СГП, полосчатая текстура которой образована микрокавернами в форме периодически расположенных прямоугольных каверн, полностью либо частично заполненных газовыми пузырьками с искривленным мениском.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Рассматривается установившееся течение несжимаемой теплопроводной ньютоновской жидкости в микроканале, нижняя стенка которого является супергидрофобной. Текстура СГП образована поперечными потоку прямоугольными микрокавернами, содержащими сжимаемый газ (см рис. 1, где  $L$  – длина элемента полосчатой СГП с микрокаверной,  $d$  – ширина микрокаверны с газом,  $\delta$  – сдвиг краев мениска на боковых стенках микрокаверны,  $\theta$  – статический угол смачивания, определяющий форму поверхности пузырька. Рассматриваются случаи ненулевого (левая каверна) и нулевого (правая) значения  $\delta$ . Начало декартовой системы координат  $Ox^*y^*z^*$  располагается в середине линии, соединяющей угловые точки микрокаверны; ось  $Oz^*$  направлена вдоль микрокаверны. Для моделирования периодического течения выделяется участок микроканала, содержащий одиночную микрокаверну с газом.

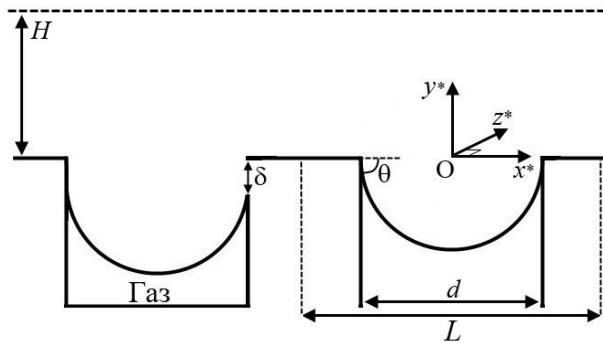


Рис. 1. Схема задачи и система координат.

В качестве характерных масштабов задачи выбираются:  $L$  – линейный размер,  $U$  – скорость жидкости,  $\mu^*U/L$  – давление,  $T_0^*$  – температура твердых участков СГП. Для напорного течения  $U$  определяется расходом через поперечное сечение микроканала  $Q^*/H$ . После процедуры обезразмеривания уравнения Навье-Стокса и притока тепла принимают вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{Re}(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p + \Delta \mathbf{u};$$

$$\text{Re Pr}(\mathbf{u} \cdot \nabla T) = \Delta T$$

Здесь  $\mathbf{u}$  и  $T$  – скорость и температура жидкости соответственно,  $\text{Re}$  – число Рейнольдса,  $\text{Pr}$  – число Прандтля. Для рассматриваемых случаев  $L \sim 10\text{--}100$  мкм и  $\text{Re} \ll 1$ , поэтому

течение жидкости вблизи прямоугольной каверны с газом описывается линейными уравнениями Стокса. В зависимости от значения множителя  $RePr$  в левой части уравнения притока тепла возникают два случая:  $RePr \ll 0$  и  $RePr \sim 1$ . В пределе  $RePr \ll 0$  уравнение притока тепла сводится к уравнению Лапласа, а динамическая и тепловая задачи решаются отдельно; когда  $RePr \sim 1$ , получаем уравнение конвективной диффузии, и для определения температурного поля необходимо сначала вычислить вектор скорости  $\mathbf{u}$  в области течения. Ниже представлены лишь некоторые результаты расчетов для случая, когда не учитывается конвективный перенос тепла, а изменение теплового потока на нижней стенке канала определяется геометрическими параметрами каверны и межфазной поверхности. Анализ снижения трения на полосчатой СГП с учетом формы поверхности газового пузырька выполнен в предыдущих работах авторов (см. [1] и цитированные там предыдущие работы авторов).

Для анализа теплового потока в области, содержащей каверну СГП, ставятся следующие граничные условия. На участках нижней твердой стенки –  $T = 1$ , на – верхней границе, соответствующей гладкой стенке канала:  $T = T_1^*/T_0^* > 1$ ; на боковых границах расчетной области ставятся периодические условия  $T(y) = 1 + ky$ , где  $k = (T_1^* - T_0^*)L/T_0^*H$ . Для разреженной системы каверн с  $d/L < 0.5$  распределение температуры на боковых границах расчетной области мало отличается от распределения температуры в прямоугольной области, ограниченной гладкими стенками. На поверхности пузырька задается условие отсутствия потока тепла  $\partial T/\partial n = 0$ .

Для решения уравнения Лапласа в области, содержащей межфазную границу с заданными на ней смешанными граничными условиями, использован метод граничных интегральных уравнений, который позволяет заменить решение уравнения Лапласа в области со сложной геометрией сверткой фундаментальных решений дифференциального оператора с неизвестными «плотностями», распределенными по границе области [3]. «Плотностями» фундаментальных решений в данном случае являются значения  $T$  и  $\partial T/\partial n$  на границе расчетной области. Неизвестные значения плотностей фундаментальных решений определяются на основе решения граничных интегральных уравнений, записанных для граничных точек [3]. Для этого граница расчетной области представляется непрерывной ломаной, а интегральное уравнение заменяется конечной суммой интегралов вдоль элементов разбиения границы. В результате получается система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений искомых функций, решение которой находится методом Гаусса. После нахождения  $(T, \partial T/\partial n)$  на границе расчетной области определяется значение  $T$  во внутренних точках расчетной области, а также осредненная температура стенки  $T_w = \langle T \rangle$  и тепловой поток  $\langle k \rangle$ .

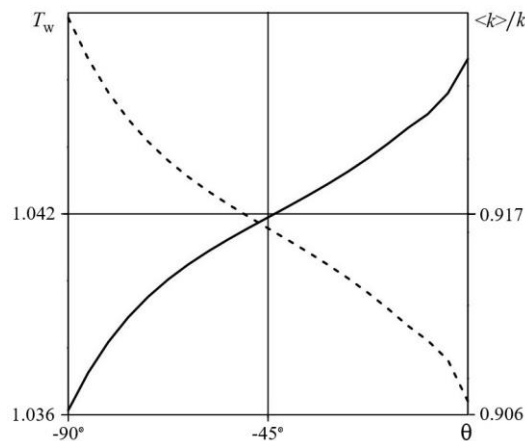


Рис. 2. Зависимость  $T_w$  (сплошная линия) и  $\langle k \rangle$  (пунктирная) от формы поверхности пузырька  $\theta$ ;  $H/L = 1$ ,  $d/L = 0.5$ ,  $\delta = 0$ ,  $k = 0.5$

При “выпрямлении” поверхности пузырька  $T_w$  возрастает, а тепловой поток убывает. Для выбранных значений параметров каверны уменьшение теплового потока достигает 10%. Для других значений геометрических параметров каверны зависимость  $T_w$  и  $\langle k \rangle$  качественно повторяют представленные результаты.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена по госбюджетному плану МГУ при частичной поддержке гранта РФФИ № 20-01-00103.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агеев А.И., Осипцов А.Н. Макро- и микрогидродинамика вязкой жидкости вблизи супергидрофобной поверхности // Коллоидный журнал. 2022. Т. 84. № 4. С. 380-395.
2. Hays R. et al. Thermal transport to sessile droplets on superhydrophobic surfaces with rib and cavity features // ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition. American Society of Mechanical Engineers. 2013. V. 56369.
3. Katsikadelis J.T. Boundary Elements: Theory and Applications (Els. Sci. Ltd., 2002).



## АКУСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРЕГРЕТОЙ ЖИДКОСТИ С ПАРОГАЗОВЫМИ ПУЗЫРЬКАМИ

*У.О. Агишева, И.И. Вдовенко, М.Н. Галимзянов*

*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального  
исследовательского центра РАН, Уфа*

[monk@anrb.ru](mailto:monk@anrb.ru)

В данной работе рассмотрено распространение слабых возмущений в перегретой водовоздушной пузырьковой среде, когда в пузырьках помимо пара воды присутствует инертный газ (например, воздух), не участвующий в фазовых переходах. Построены карты зон устойчивости рассматриваемых систем в зависимости от величины перегретости жидкости на плоскости «объемное содержание – радиус пузырьков». Проанализировано влияние начального перегрева (от сотых долей градуса до десяти градусов) на эволюцию гармонических волн. Для неустойчивых систем изучена зависимость инкремента от величины радиуса пузырьков при увеличении перегретости воды.

### ВВЕДЕНИЕ.

В настоящей работе рассмотрены особенности распространения звука и развития неустойчивости в перегретой жидкости, содержащей газовые зародыши в зависимости от величины ее перегретости, определяемой как  $\Delta T_0 = T_0 - T_s(p_0)$ .

Здесь отметим, если в жидкости газовые зародыши отсутствуют, то состояние равновесия парогАЗОЖИДКОСТНОЙ системы определяется тремя параметрами, в качестве которых можно взять, например, объемное содержание пузырьков  $\alpha_0$ , их радиус  $a_0$  и давление в жидкой фазе  $p_0$  (в качестве последнего параметра можно взять температуру  $T_0$ ). При наличии в системе газовых зародышей ее состояние определяется четырьмя параметрами (значение параметров  $\alpha_0$ ,  $a_0$ ,  $p_0$ ,  $T_0$ , например).

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Пусть в жидкости, находящейся при температуре  $T_0$  и давлении  $p_0$ , имеются сферические пузырьки радиусом  $a_0$ , которые содержат пар и не растворимый в жидкой фазе газ. Тогда, при условии механического и теплового равновесия рассматриваемой системы («жидкость–парогазовые пузырьки»), при состояниях, достаточно далеких от критического состояния, имеют место следующие условия [1]:

$$p_{g0} = p_{v0} + p_{a0} = p_0 + \frac{2\sigma}{a_0}, \quad p_{v0} = p_s(T_0) \quad (1)$$

где  $p_{i0}$  ( $i = v, a$ ) – парциальные давления пара и газа в пузырьках;  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения воды. Здесь и в дальнейшем нижние индексы  $i = \ell, v, a$  относятся соответственно к параметрам жидкости, пара и газа, а нижний индекс (0) соответствует состоянию равновесия. Согласно второму уравнению из (1) полагается, что парциальное давление пара  $p_{v0}$  равно равновесному значению давления для температуры жидкости  $T_0$ , в предположении плоской межфазной поверхности. Отмечено, если состояние жидкости достаточно далеко от критического, то это условие всегда выполняется.

Рассмотрим распространение малых возмущений в рассматриваемой системе в плоскоодномерном и односкоростном приближении. Полагая, что жидкость является акустически сжимаемой и принимая общие допущения для пузырьков жидкостей, используется система макроскопических уравнений масс, числа пузырьков, импульсов и давления в пузырьках в приближении цилиндрической симметрии [2].

### ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ.

Решение выше приведенной системы будем искать в виде затухающей бегущей волны:

$$p_i, p_g, v, a \sim \exp[i(Kx - \omega t)], \quad T_i' = T_i(r) \exp[i(Kx - \omega t)], \quad (i = g, \ell),$$

$$k' = k(r) \exp[i(Kx - \omega t)],$$

$$(K = k + i\delta, \quad C_p = \omega/k, \quad i = \sqrt{-1}),$$

где  $K$  – волновой вектор,  $\delta$  и  $C_p$  – соответственно коэффициент затухания и фазовая скорость волны. Из условия существования решения такого вида с учетом эффектов акустической разгрузки [3] пузырьков получим дисперсионное уравнение

$$\frac{K^2}{\omega^2} = \frac{1}{C_\ell^2} + 3 \frac{\rho_{\ell 0}^0 \alpha_0}{\psi}, \quad (2)$$

$$\psi = \frac{3\gamma p_{g0}}{Q} - \frac{\rho_{\ell 0}^0 \omega^2 a_0^2}{\varsigma} - 4i\rho_{\ell 0}^0 v_\ell^{(\mu)} \omega - \frac{2\sigma}{a_0},$$

$$p_{g0} = p_0 + \frac{2\sigma}{a_0}, \quad \xi = 1 - i\omega t_A, \quad t_A = \frac{a_0}{\sqrt[3]{\alpha_{v0}} C_\ell},$$

$$Q = 1 + \left( \frac{\gamma - 1}{k_0} H_a \text{kh}(y_g) + \frac{\gamma}{1 - k_0} H_v \text{kh}(z) \right) \left( \frac{H_a}{k_0} + \frac{\gamma \text{kh}(z)}{(1 - k_0) \beta \text{shv}(y_\ell)} \right)^{-1},$$

$$\text{kh}(x) = 3(x \text{cth}(x) - 1)x^{-2},$$

$$\text{shv}(x) = 3(1 + x(A_0 x \text{th}(x(A_0 - 1)) - 1)(A_0 x - \text{th}(x(A_0 - 1))))^{-1} x^{-2}$$

или  $\text{shv}(x) = 3(1 + x)x^{-2},$

$$A_0 = \alpha_0^{-1/3}, \quad y_\ell = \sqrt{-i\omega a_0^2 / \nu_\ell^{(T)}}, \quad z = \sqrt{-i\omega a_0^2 / D}, \quad \beta = (\gamma - 1)\eta H_v \chi^2, \\ \eta = \frac{\rho_{\ell 0}^0 C_1}{\rho_{g 0}^0 C_g}, \quad \chi = \frac{c_g T_0}{L}, \quad H_v = \frac{B_v}{B_0}, \quad H_a = \frac{B_a}{B_0}, \quad H = H_v - H_a.$$

Пренебрегая сжимаемостью жидкости ( $C_p \rightarrow \infty$ ) и слагаемым  $k_0 \alpha_0 / \beta$  по сравнению с единицей, из дисперсионного уравнения (2) при  $\omega \rightarrow 0$  следует следующая формула для равновесной скорости звука

$$C_e = \sqrt{\frac{p_{g0}}{\rho_{\ell 0}^0 \alpha_0} ((1 - k_0) H_a + k_0 \alpha_0 \gamma / \beta) - \frac{2}{3} \frac{\sigma}{a_0 \rho_{\ell 0}^0 \alpha_0}}, \quad (3)$$

которая обобщает известные формулы Мэллока и Ландау. В частности, при точке кипения  $T_0 = T_s(p_0)$ , отсюда с учетом выражений из (2) получим

$$C_e = \sqrt{k_0 \left( \frac{\rho_{g0}^0}{\rho_{\ell 0}^0} \right)^2 \left( \frac{B_0}{B_v} \right)^2 \frac{L^2}{c_\ell T_0} + \frac{4}{3} \frac{\sigma}{a_0 \rho_{\ell 0}^0 \alpha_0}}. \quad (4)$$

Отметим, что при получении (3) пренебрегалось сжимаемостью жидкости, а также  $\alpha_0$  по сравнению с единицей. Для частных случаев ( $2\sigma / a_0 p_0 \ll 1$ ), когда соответственно  $k_0 = 0$  и  $k_0 = 1$  (3) будем иметь формулы Мэллока [4] и Ландау [5].

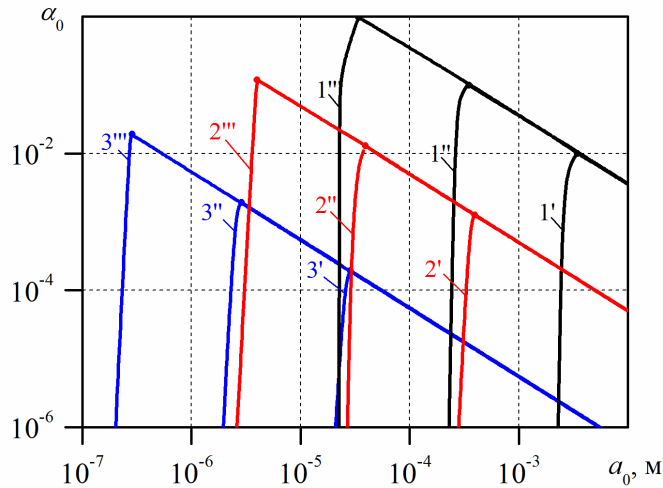


Рис. 1. Линии, определяющие на плоскости  $(a_0, \alpha)$  границу раздела устойчивых и неустойчивых состояний перегретой воды с паровоздушными пузырьками. Линии 1, 2 и 3 соответствуют следующим значениям величины перегрева  $\Delta T_0 = 0.1, 1$  и  $10$  K.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** На основе аналитических и численных расчетов построены карты зон устойчивости в области  $(a_0, \alpha)$  мелкодисперсной пузырьковой парогазожидкостной смеси в зависимости от величины перегретости жидкости  $\Delta T_0$  (Рис. 1). Получено приближенное соотношение для расчета значения равновесного радиуса, расположенного на границе области устойчивости.

Рассмотрено влияние перегретости жидкости  $\Delta T_0$  на величину фазовой скорости и коэффициента затухания, когда система находится в устойчивом состоянии. Установлено, что для рассмотренного равновесного радиуса ( $a_0 = 10^6$  м) в зоне устойчивости перегрев не существенно влияет на изменение фазовой скорости и коэффициента затухания.

хания, что связано с достаточно высокой концентрацией инертного газа в пузырьках. Декремент затухания в устойчивой области меняется не более чем в два раза.

### **БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ**

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России в сфере научной деятельности, номер для публикаций АААА-А19-119022190031-5.

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
2. *Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И.* Акустика и устойчивость перегретой жидкости с газовыми зародышами // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60. № 3. С. 85-95.
3. *Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш., Вахитова Н.К.* Проявление сжимаемости несущей фазы при распространении волны в пузырьковой среде // Доклады АН СССР. 1989. Т. 304. № 5. С. 1077–1081.
4. *Накоряков В.Е., Шрейбер И.Р.* Распространение малых возмущений в парожидкостной смеси // Проблемы теплофизики и физической гидродинамики, Новосибирск, 1974. С. 161–166.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Физматлит., 2006. 736 с.



## **ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ В ТРУБЕ ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ, СОДЕРЖАЩИЙ ПУЗЫРЬКОВУЮ ОБЛАСТЬ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ**

*У.О. Агишиева, М.Н. Галимзянов*

*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального  
исследовательского центра РАН, Уфа*

[monk@anrb.ru](mailto:monk@anrb.ru)

В данной работе изучены двумерные осесимметричные волновые возмущения в канале с водой, содержащей тороидальный коаксиальный кластер, заполненный водовоздушной пузырьковой смесью. По результатам численных расчетов проанализирована зависимость максимальной амплитуды давления, формирующейся в канале, от геометрических параметров кластера и канала, а также от амплитуды первоначального воздействия. Установлено, что в случае цилиндрического кластера амплитуда волнового сигнала за пузырьковой зоной в несколько раз превышает амплитуду для случая цилиндрического тороидального кластера. В ходе численных исследований показано, что фокусировка сигнала за пузырьковой областью происходит раньше для сплошного цилиндра, чем для тороидального.

### **ВВЕДЕНИЕ.**

Задачи, связанные с фокусировкой энергии волны в жидкости связаны с проблемой создания гидроакустических аналогов лазерных систем, которые сначала могут поглощать внешнее воздействие, а потом переизлучать ее с существенным увеличением амплитуды и возможной концентрацией энергии в заданном направлении [1]. Отметим несколько работ, посвященных анализу способности аккумулировать и "переизлучать" энергию внешнего воздействия пассивных и активных (содержащих пузырьки взрывчатого газа) пузырьковых сред. В работе [2] изучена динамика распространения импульсных сигналов в жидкости содержащей пузырьковую завесу конечных размеров, показав-



но, что в зависимости от временной протяженности первоначального импульса внутри завесы может происходить нарастание амплитуды давления выше, чем амплитуда исходного сигнала. В [3] в рамках модели Иорданского, Когарко, Виингардена (ИКВ) выполнены численные исследования «накачки» сферического пузырькового кластера и формирования в кластере башнеобразного импульса давления. Показано, что изменением величины объемной концентрации газовой фазы удастся регулировать координату пятна фокусировки волны. Результаты численного моделирования ударной волны с тороидальным пузырьковым кластером в жидкости и возникновение направленного излучения в жидкость приведено в [4].

В данной работе рассмотрена динамика волн в цилиндрическом канале с содержащей тороидальный пузырьковый кластер (рис.1). Анализируется зависимость максимальной амплитуды давления, формирующейся в канале, от геометрических параметров кластера и канала, а также от амплитуды первоначального воздействия.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Рассмотрим двумерные осесимметричные волновые возмущения в канале с водой, содержащей тороидальный коаксиальный кластер, заполненный водовоздушной пузырьковой смесью, рис. 1. Волновое движение в канале инициируется мгновенным повышением давления на границе  $z=0$  на некоторое амплитудное значение  $\Delta p_{10}$  и поддерживается все время расчета. Требуется определить динамику волнового процесса в канале при  $t>0$ .

Для описания волнового движения, принимая общие допущения для пузырьковых жидкостей, используется система макроскопических уравнений масс, числа пузырьков, импульсов и давления в пузырьках в приближении цилиндрической симметрии [5].

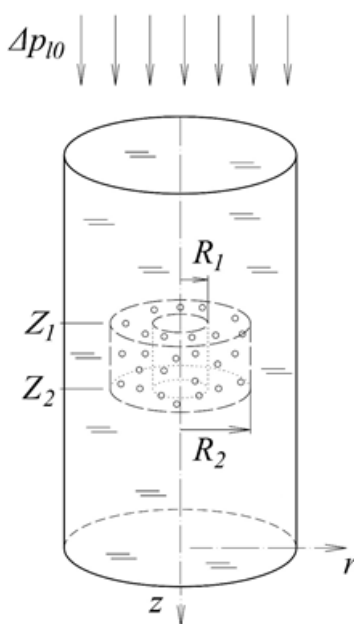


Рис.1. Схема задачи.  $Lz$ ,  $RC$  — длина и радиус канала,  $Z1$  и  $Z2$  — координаты кластера,  $R1$  и  $R2$  — внутренний и внешний радиусы кластера.

### РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ.

Зависимость максимального давления на оси трубы от первоначальной амплитуды давления представлено на рис. 2. Отметим, когда амплитуда первоначальной волны типа «ступенька» меньше 0.2 МПа фокусировка волны на оси канала не происходит. С увеличением амплитуды первоначальной волны от 0.3 до 1.5 МПа происходит увеличение амплитуды результирующей волны от 27 до 35 МПа. Дальнейшее увеличение

амплитуды первоначальной волны приводит к незначительному увеличению амплитуды результирующей волны. Такая зависимость амплитуды результирующей волны от амплитуды первоначальной, связано со сносом образовавшегося внутри кластера башнеобразного распределения давления по направлению координаты  $z$ . В этом случае, фокусировка на оси канала происходит позже и сформировавшиеся в кластере башнеобразные всплески амплитуды успевают рассеяться при движении к оси канала. Зависимость максимальной амплитуды давления, формирующейся на оси канала, от амплитуды граничной волны типа ступенька в пределах от 0.3-2.5 МПа можно аппроксимировать следующей формулой

$$\Delta p_l^{\max} = -93.8 * p_0 + 45.4 * \Delta p_{l0} - \frac{\Delta p_{l0}^2}{p_0}$$

На рис. 2 представлена аналогичная зависимость для пузырькового кластера имеющей форму диска геометрические параметры которого  $Z1, Z2, R2$  одинаковы с параметрами тороидального кластера, а  $R1=0$ . Из рисунка видно, что амплитуда волны фокусирующейся в пузырьковом кластере имеющей форму однородного диска в диапазоне начальной амплитуды  $\Delta p_{l0} \in (0.3-3)$  МПа более чем в два раза превышает амплитуду волны сфокусированной тороидальным пузырьковым кластером. Зависимость максимальной амплитуды давления, формирующейся на оси канала, из-за фокусировки на пузырьковом диске от амплитуды первоначальной волны можно аппроксимировать следующим выражением

$$\Delta p_l^{\max} = -21.0 * p_0 + 97.9 * \Delta p_{l0} - 2.3 * \frac{\Delta p_{l0}^2}{p_0}$$

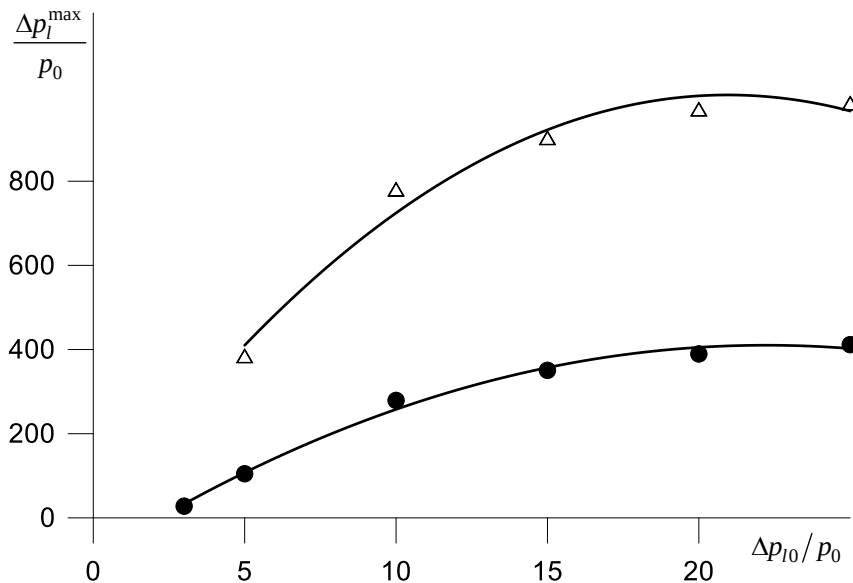


Рис. 2. Зависимость максимального давления на оси трубы от амплитуды начального давления  $\Delta p_{l0}$ . Символы  $\bullet$  соответствуют тороидальному пузырьковому кластеру,  $\Delta$  – сплошному диску заполненному пузырьковой смесью.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** Исследована динамика волн в канал с водой, содержащей соосный тороидальный пузырьковый кластер. Проанализировано влияние пузырьковой зоны в виде сплошного диска и диска тороидальной формы на динамику волны в канале. Установлено, что в случае сплошного диска амплитуда волнового сигнала за пузырьковой зоной в несколько раз превышает амплитуду для случая диска тороидальной формы. Также установлено, что фокусировка сигнала за пузырьковой областью происходит раньше для случая сплошного диска, чем для зоны тороидальной формы.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России в сфере научной деятельности, номер для публикаций АААА-А19-119022190031-5.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кедринский В.К. Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
2. Галимзянов М.Н., Гималтдинов И.К., Шагапов В.Ш. Двумерные волны давления в жидкости, содержащей пузырьки // Известия РАН. Механика жидкости и газа, № 2, 2002. С. 139-147.
3. Кедринский В.К., Шокин Ю.И., Вишнев В.А. и др. Генерация ударных волн в жидкости сферическими пузырьковыми кластерами // Докл. РАН. 2001. Т381, №6. С. 773-776.
4. Кедринский В.К., Вишнев В.А., Лазарева Г.Г. и др. Фокусировка осциллирующей ударной волны, излученной тороидальным облаком пузырьков // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2004. Т. 125, вып. 6. С. 1302-1310.
5. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987, 464 с.



## РАСПРОСТРАНЕНИЕ УЗКИХ ПАКЕТОВ В СРЕДАХ СО СКАЧКООБРАЗНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ.

*А.И. Аллилуева*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

[esina\\_anna@list.ru](mailto:esina_anna@list.ru)

Теория комплексного ростка Маслова описывает асимптотические решения широкого класса дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений с гладкими коэффициентами. Эти решения представляют собой функции, локализованные вблизи множеств положительной коразмерности в пространстве независимых переменных (в простейшем случае это гауссовы пучки, сосредоточенные вблизи точки или кривой) и определяются геометрическими объектами в фазовом пространстве, а именно комплексными векторными расслоениями над изотропными поверхностями, инвариантными относительно фазового потока, соответствующего символу рассматриваемого (псевдо)дифференциального оператора. В то же время в различных приложениях часто встречаются уравнения, коэффициенты которых содержат особенности (в частности, они могут сингулярно зависеть от малого параметра). Для этих задач теория комплексного ростка непосредственно не применима, а именно: на множествах, соответствующих носителям особенностей, необходимо перестраивать указанные геометрические объекты. В настоящей работе мы опишем эту перестройку в простейшей, но важной ситуации: рассмотрим асимптотику решения задачи Коши для волнового уравнения, в котором скорость нерегулярно зависит от малого параметра. В качестве начального условия выбираем гауссов пакет, локализованный вблизи одной точки; тем самым комплексный росток Маслова представляет собой расслоение над отрезком траектории, выходящим из этой точки. Основной результат — явные формулы асимптотики реше-

ния задачи Коши; эти формулы содержат правила преобразования комплексного ростка в точках нерегулярности скорости.

Если в качестве начального условия выбрать быстро осциллирующий волновой пакет, локализованный вблизи множества полной размерности, то соответствующий геометрический объект является лагранжевой поверхностью. Перестройка этих поверхностей в аналогичной задаче для волнового уравнения была описана ранее; геометрическая конструкция в этом случае наиболее естественная, а именно: поверхности «отражаются и преломляются» по законам геометрической оптики. В нашей ситуации закон преобразования комплексного ростка Маслова оказывается нетривиальным и зависит от внешней геометрии поверхности, на которой сосредоточены нерегулярности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Allilueva, A.I., Shafarevich, A.I. Maslov's Complex Germ in the Cauchy Problem for a Wave Equation with a Jumping Velocity. Russ. J. Math. Phys. 29, 1–10 (2022).



## ТЕНЕВАЯ КАРТИНА ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ, ВЫЗВАННЫХ ПАДЕНИЕМ КАПЛИ В СТРАТИФИЦИРОВАННУЮ ЖИДКОСТИ

*Р.Н. Бардаков*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

[bard@ipmnet.ru](mailto:bard@ipmnet.ru)

Практический и научный интерес к проблеме изучения течений, вызванных падением капли в жидкость, связан с широким распространением родственного природного явления. Его можно наблюдать как в природе, так и в техногенных условиях, от дождя до плохо закрытых кухонных кранов.

В данной работе с помощью теневых методов прослеживается эволюция течения, возникшего в результате столкновения свободно падающей капли со стратифицированной жидкостью. Высота падения варьировалась от 30 до 100 см. Обращалось внимание как на малые времена развития течения, порядка времени жизни каверны [1], так и на большие времена, соответствующие глубокому погружению вещества капли в приемную жидкость. В опытах для создания капель использовалась жидкость разной плотности от пресной, более легкой, чем принимающая среда, до сильно соленой воды, соответствующей плотности на дне бассейна. Эксперименты проводились в бассейне размером 50x50x20 см с прозрачными окнами размером 39x39 см по большим сторонам. Окна выполнены из оптического стекла и именно через них осуществляется основная часть наблюдений. Бассейн заполнялся до половины приемной жидкостью, которая использовалась в экспериментах: пресная вода, соленая вода с заданной плотностью и стратифицированная жидкость. Стратификацию создавали на основе водного раствора поваренной соли методом непрерывного вытеснения.

Визуализация фазовой картины течений осуществлялась с помощью теневого прибора, оптическая ось которого проходила через центр окон бассейна. В ходе экспериментов использовались методы визуализации «щель-нож» и «щель-резьба». Во всех случаях щель располагалась вертикально.

Видео- и фотофиксация экспериментальных данных осуществлялась с помощью камеры CANON 6D. Это устройство позволяет делать фотоснимки с качеством 20 Мп и осуществлять видеозапись в качестве Full HD (разрешение 1920×1080). Диапазон выдержек для фотосъемки составляет от 1/4000 до 30 с. Так вот это устройство обеспечивает возможность осуществлять непрерывную фотосъемку со скоростью 4,5 кадра в секунду.

Капли создавались с помощью насадки, прикрепленной к мачте, установленной над центром бассейна. жидкость к соплу подавалась по трубкам из резервуара, закрепленного на возвышенности, под действием сил гравитации. Поток жидкости регулировался специальным клапаном и в проводимых экспериментах настраивался на частоту падения примерно одна капля каждые две минуты.

Съемка области интереса жидкости проводилась в автоматическом режиме. На пути капли был расположен инфракрасный оптоэлектронный датчик. Показания датчиков считывались с частотой 1 МГц с помощью программируемого контроллера Arduino Uno R3.

Регистрация производилась на камеру, управляемую микроконтроллером. Созданная установка позволяет провести серию экспериментов в автоматическом режиме, изменяя задержку срабатывания камеры по заданной программе.

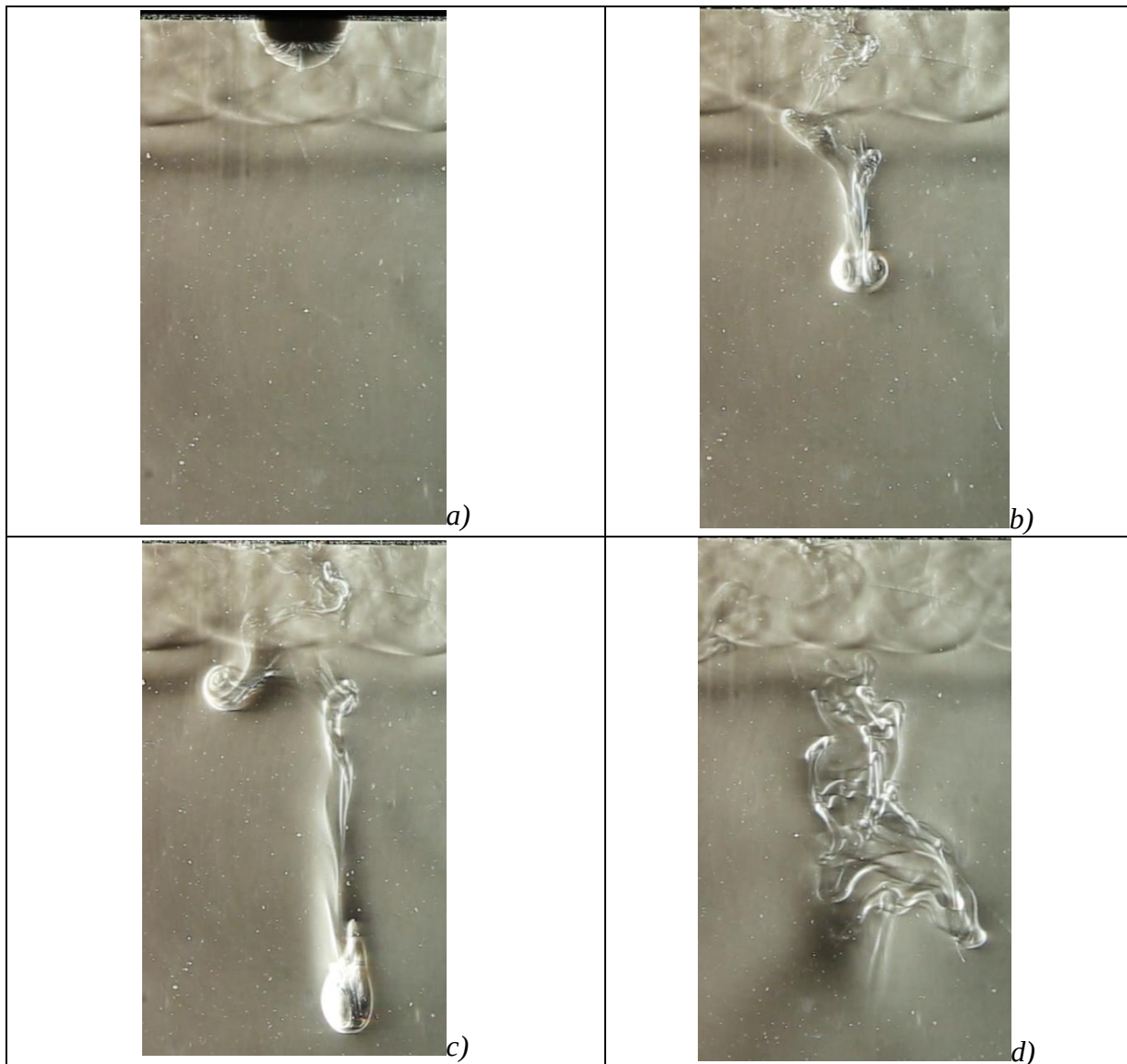




Рис. 1. Структура течений в стратифицированной жидкости.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598-П).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильиных А.Ю., Чашечкин Ю.Д. Гидродинамика контакта падающей капли со свободной поверхностью жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 2. С. 3 -12.



### О РЯБИ ФАРАДЕЯ НА ПОВЕРХНОСТИ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

*Д.Ф. Белоножко, Н.М. Садриева*

*Федеральное государственное образовательное учреждение высшего образования  
«Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова», Ярославль*

[belonozhko@mail.ru](mailto:belonozhko@mail.ru)

#### ВВЕДЕНИЕ.

Рябью Фарадея называется периодическая рельефная структура, возникающая на горизонтальной свободной поверхности жидкости, заполняющей контейнер, который совершает малые вертикальные колебания [1, 2]. Явление обусловлено параметрической раскачкой малоамплитудных капиллярно-волновых возмущений свободной поверхности. В настоящей работе проводится теоретический анализ явления формирования ряби Фарадея при наличии вертикальной стратификации плотности жидкости.

#### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ.

Задача решалась в неинерциальной системе отсчета, совершающей вертикальные колебания вместе с наполненной жидкостью контейнером. Использовалась декартова прямоугольная система координат  $Oxyz$  с осью  $Ox$  направленной горизонтально вдоль поверхности жидкости. Ось  $Oz$  полагалась направленной вертикально вверх против направления действия поля силы тяжести  $g$ . Для простоты течение жидкости считалось независимым от горизонтальной координаты  $y$ . Поверхностное натяжение жидкости  $\gamma$  полагалось заданными. Считалось, что плотность жидкости в невозмущенном состоянии изменяется с глубиной по экспоненциальному закону

$\rho = \rho_0(1 + \exp(-z/\Lambda))$ , где  $r(z) = \exp(-z/\Lambda)$ . Параметр вертикального масштаба изменения плотности  $\Lambda$  выражался через частоту плавучести  $N = \sqrt{g/\Lambda}$ . Эффектами вязкости, диффузии и теплопроводности пренебрегалось. Полагалось, что система координат вместе с жидкостью совершает малые гармонические вертикальные колебания заданной амплитуды  $a$  и частоты  $2f = \omega/\pi$  относительно неподвижной инерциальной системы отсчета. Исследовалась устойчивость системы по отношению к малым возмущениям  $z = \xi(t, x)$  свободной поверхности жидкости.

В первом приближении по малому параметру, пропорциональному отношению амплитуды возмущения к его длине, в рамках приближения Буссинеска математическая формулировка задачи имеет вид [3]:

$$z < 0: \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0(1+r(z))} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0(1+r(z))} \frac{\partial p}{\partial z};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v}{\Lambda} r(z) = 0;$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = v; \quad -\rho_0 \xi \left( 1 - \frac{4a\omega^2}{g} \cos(2\omega t) \right) g + p = -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2};$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad v \rightarrow 0;$$

Здесь  $u \equiv u(t, x, z)$  и  $v \equiv v(t, x, z)$  - горизонтальная и вертикальная компоненты поля скоростей;  $p \equiv p(t, x, z)$  - возмущения к равновесному распределению давления в жидкости.

### УСЛОВИЕ РАСКАЧКИ РЕЗОНАНСНОЙ МОДЫ

С помощью стандартной аналитической процедуры задача преобразуется к уравнению для амплитуды волнового возмущения свободной поверхности. В результате, задача сводится к уравнению Матье [4]:

$$\frac{d^2 \xi(\tau)}{d\tau^2} + (\Omega^2 - 2q \cos(2\tau)) \xi(\tau) = 0; \quad (1)$$

$$\Omega^2 = \frac{F(\alpha, N, k)}{\omega^2}; \quad \tau = \omega t; \quad \alpha = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho_0 g}}.$$

Здесь  $k = 2\pi/\lambda$  - волновое число возмущения с длиной волны  $\lambda$ ;  $\alpha$  - капиллярная постоянная жидкости. Функция  $F(\alpha, N, k)$  довольно громоздким образом зависит от своих параметров, и, чтобы не загромождать изложение, её полный вид здесь не приводится. В пределе отсутствия стратификации  $F(\alpha, N, k)$  превращается в квадрат частоты капиллярно-волнового движения на поверхности несжимаемой жидкости:  $F(\alpha, N, k) \rightarrow gk(1 + \alpha^2 k^2)$  при  $N \rightarrow 0$ .

На основании известных свойств уравнения (1), несложно выписать условие главного параметрического резонанса:

$$\omega^2 = F(\alpha, N, k). \quad (2)$$



При заданных значениях частоты вертикальных осцилляций контейнера  $f = \omega/(2\pi)$  уравнение (2) можно разрешить относительно длины волны, которая наиболее эффективно участвует в резонансном взаимодействии. Полученное значение длины волны целесообразно принять за оценку величины характерного масштаба периодического рисунка, формирующего рябь Фарадея. Таким образом, удаётся исследовать зависимость характерного размера ячеек Фарадея от частоты колебаний контейнера при различных значениях параметров задачи.

### РЕЗУЛЬТАТЫ.

В результате исследования уравнения (2) выяснилось, что при усилении стратификации в области длинных волн и низких частот появляется область индифферентности системы к параметрической раскачке. Она тем шире, тем больше вертикальный градиент плотности жидкости.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Faraday M. On the a peculiar class acoustical figures and on certain forms assumed by a group of particles upon elastic surface//Phil. Trans. Roy. Soc., London. 1831. V.121. P. 209-318.
2. Белоножко Д.Ф., Апарнева А.В. // Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та. 2017. № 6. 1760401
3. А.А. Очиров, Ю.Д. Чашечкин Двумерные периодические волны в невязкой непрерывно стратифицированной жидкости//Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2022. Т.58. № 5. С.1-9.
4. Benjamin T. B. The stability of the plane free surface of liquid in a vertical periodic motion//Proc. Roy. Soc. A. 1954. V.225, No4, P. 505-515



## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОСОМ СКАЧКЕ УПЛОТНЕНИЯ РАЗРЫВНЫМ МЕТОДОМ ЧАСТИЦ

С.В. Богомолов<sup>1</sup>, А.Е. Кувшинников<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ВМК МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, <sup>2</sup> ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, Москва  
[bogomo@cs.msu.su](mailto:bogomo@cs.msu.su) , [kuvsh90@yandex.ru](mailto:kuvsh90@yandex.ru)

Одним из классов методов, используемых для решения эволюционных задач, являются методы частиц. Непрерывная модель заменяется дискретной — совокупностью частиц, которые обладают набором свойств, таких как масса, скорость и положение в пространстве. При такой постановке изменение системы во времени определяется законами, регулирующими взаимодействие частиц.

### РАЗРЫВНЫЙ МЕТОД ЧАСТИЦ.

Среди множества методов частиц мы рассматриваем разрывный метод частиц, названный так из-за отказа от использования сглаживающих функций ядра. Как было показано в статьях [1, 2], разрывный метод частиц минимально размывает разрывы, что является крайне важным для нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа.

Опишем модификацию разрывного метода с новым вариантом коррекции плотности, ранее представленную в [3]. Введём равномерную сетку по времени с шагом  $\tau$ . Рассматриваем систему как набор  $N$  макрочастиц. Для описания частиц введём следующие обозначения:  $x_i^k$ ,  $y_i^k$  — координаты центра  $i$ -й частицы в  $k$ -й момент времени,  $u_i^k$ ,  $v_i^k$  — компоненты скорости частицы,  $H_i^k$  — высота (плотность) частицы. Также у

каждой частицы есть неизменяемая во времени масса, что говорит о консервативности метода.

Методы частиц основаны на создании системы ОДУ вида:

$$\begin{cases} \frac{dx_i(t)}{dt} = u_i, \frac{dy_i(t)}{dt} = v_i, \\ x_i(0) = x_i^0, y_i(0) = y_i^0, i = 1, \dots, N, \end{cases}$$

из которой при помощи процесса микро-макро перехода [1] получается уравнения в частных производных. Стоит учитывать, что скорость может быть постоянной, зависеть от координат, и даже от плотности распределения частиц. Система решается методом Эйлера:

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \tau u_i^k, y_i^{k+1} = y_i^k + \tau v_i^k.$$

После сдвига частиц расстояния между ними могут измениться. Новый алгоритм основан на сохранении массы, находящейся между частицами. Масса, находящаяся между координатами частиц, равна полусумме масс частиц, и, в отсутствии диффузии, должна оставаться постоянной. Введём обозначение  $S_{ij}^k$  — масса, находящаяся между  $i$ -ой и  $j$ -ой частицами. Массу  $S_{ij}^k$  вычисляем как площадь трапеции:

$$S_{ij}^k = \frac{1}{2} (H_i^k + H_j^k) \sqrt{(x_i^k - x_j^k)^2 + (y_i^k - y_j^k)^2}.$$

В отсутствии диффузии масса между частицами не изменяются со временем. Запомним значения  $S_{ij}^0$  в начальный момент времени  $t = 0$ .

Решим систему уравнений газовой динамики [4]. Расчетная область делится на конечное число областей, служащих основаниями частиц. Возникает 4 типа частиц (плотности, плотности импульса по каждой координате и плотности энергии). Решаем системы обыкновенных дифференциальных уравнений для координат 4 типов частиц методом Эйлера.

В двумерном случае партнёр для взаимодействия выбирается с помощью минимизации «прицельного» параметра — угла между вектором относительной скорости и вектором, соединяющим центры частиц (алгоритмически — максимизация косинуса этого угла). Пусть  $j$ -я частица воздействует на  $i$ -ю, тогда:

$$H_i^{k+1} = \frac{2S_{ij}^0}{\sqrt{(x_i^{k+1} - x_j^{k+1})^2 + (y_i^{k+1} - y_j^{k+1})^2}} - H_j^k.$$

Вычисленные на предыдущем шаге значения плотности, импульса, и энергии позволяют определить давление в центре частицы. Для этого необходимо воспользоваться уравнением состояния:

$$p = (\gamma - 1) \left( E - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \right).$$

Для определения значений давления и скорости на границе частицы используется схема учёта давления, основанная на «взаимодействии» частиц. Если на шаге по времени на одной из границ частицы происходило взаимодействие, то значение давления и скорости на этой границе полагается равными давлению и скорости той частицы, которая явилась причиной перестройки. Если же взаимодействия не произошло, то давление на границе полагается равным давлению в центре частицы.

## РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ.

Будем сравнивать разрывный метод частиц (МЧ) с солверами открытого программного пакета OpenFOAM rhoCentralFoam (rCF), pisoCentralFoam (pCF), QGDFoam (QGDF). Для этого всеми методами будем решать классическую двумерную невязкую задачу моделирования косого скачка уплотнения.

На плоскую пластину падает сверхзвуковой поток газа с числом Маха  $M$  под углом  $\beta$ . Перед началом пластины возникает косой скачок уплотнения. Данная задача, рассматривается в рамках системы уравнений Эйлера и имеет точное аналитическое решение [5]. Варьировались следующие параметры: угол наклона потока  $\beta$  равен  $6^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $20^\circ$ , число Маха изменяется от 2 до 3 с шагом 0.5. Давление в набегающем потоке  $P_\infty = 101325$  Па, температура  $T_\infty = 300$  К.

На рис. 1 изображено установившееся решение для поля давления. Угол падения набегающего потока  $\beta = 10^\circ$ , число Маха  $M = 2$ . Рисунок показывает, что полученная картина течения соответствует аналитическому решению.

Также для оценки отклонения полученных численных результатов от известного точного решения во всей расчетной области используем аналог нормы  $L_2$ :

$$\sqrt{\sum_m |y_m - y_m^{exact}|^2 S_m} / \sqrt{\sum_m |y_m^{exact}|^2 S_m}.$$

Здесь  $y_m$  — давление  $p$  частицы  $m$ ,  $S_m$  — площадь частицы.

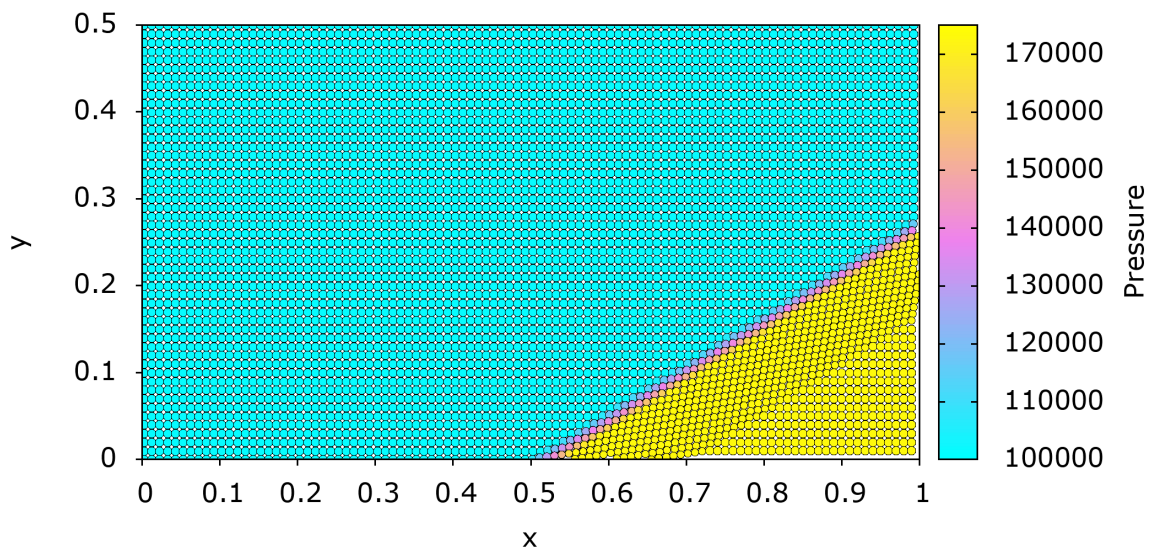


Рис. 1. Распределение давления.

На рис. 2 представлена зависимость отклонения от точного решения в аналоге нормы  $L_2$  для давления для числа Маха  $M = 2.5$  в зависимости от солвера и угла падения набегающего потока. Представленная на рисунке картина также является типичной для сравниваемых солверов при средних числах Маха в выбранном диапазоне их изменения.

## РЕЗУЛЬТАТЫ.

С помощью модификации разрывного метода частиц, в которой не учитывается форма частиц, решена задача газовой динамики об образования косого скачка уплотнения. Полученные результаты сравнивались с аналитическим решением в норме  $L_2$ . Обработка результатов расчетов с помощью средств научной визуализации наглядно демонстрируют возможность использования разрывного метода частиц в двумерных задачах.

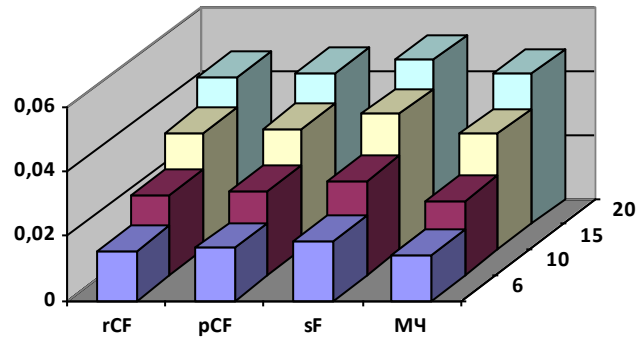


Рис. 2. Изменение отклонения от точного решения для давления в зависимости от угла падения и солвера для числа Маха 2.5.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богомолов С.В., Кузнецов К.В. Метод частиц для системы уравнений газовой динамики // Матем. моделирование. 1998. Т. 10. № 7. С. 93–100.
2. Богомолов С.В., Кувшинников А.Е. Разрывный метод частиц на газодинамических примерах // Матем. моделирование. 2019. Т. 31. № 2. С. 63–77.
3. Bogomolov. S.V., Kuvshinnikov A.E. A discontinuous shapeless particle method for the quasi-linear transport // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Т. 2099. № 012009.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Физматлит. 2015. С. 728.
5. Ames Research Staff. Equations, Tables, and Charts for Compressible Flow. NACA TR-1135. 1953.



### ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОПТИМАЛЬНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ АДАПТИВНОЙ МЕХАНИЗАЦИИ ЗАДНЕЙ КРОМКИ КРЫЛА ПАССАЖИРСКОГО САМОЛЕТА

Ю.Н. Бородина, И.А. Губанова, В.Б. Курилов, А.Ю. Слитинская, А.П. Цыганов  
Федеральное автономное учреждение «Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского», г. Жуковский  
[jkl125@mail.ru](mailto:jkl125@mail.ru)

В последние несколько десятилетий наблюдается устойчивая тенденция по упрощению взлетно-посадочной механизации пассажирских самолетов. Использование сложной многозвенной взлетно-посадочной механизации существенно утяжеляет и удорожает самолет и снижает его конкурентные преимущества. В последнее время для перспективных самолетов рассматривается адаптивная механизация задней кромки крыла. Применение адаптивной механизации позволяет существенно упростить механизм выдвижения, сводя его к повороту относительно неподвижной оси или оси с небольшим смещением. Однако для оптимизации такого положения приходится использовать дополнительный элемент в виде отклоняемого вниз интерцептора.

В настоящей работе представлен цикл исследований по определению оптимального сочетанию углов отклонения закрылка и отклоняемого интерцептора. Экспериментальные исследования проводились на большеразмерной модели механизированного крыла перспективных ЛА ТМК-1.

По результатам исследований получены оптимальные сочетания углов отклонения интерцептора и положений закрылка. Результаты исследований могут быть использованы при проектировании взлетно-посадочной механизации нового поколения перспективных пассажирских самолетов.



## АМПЛИТУДНО-ФАЗОВАЯ СТРУКТУРА ПОЛЕЙ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ОКЕАНЕ С РЕАЛЬНЫМИ СДВИГОВЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ

*В.В.Булатов*

*Институт проблем механики им.А.Ю.Ишлинского РАН, Москва,  
[internalwave@mail.ru](mailto:internalwave@mail.ru)*

Решена задача о генерации гармонических внутренних гравитационных волн в океане с реальными и модельными распределениями по глубине частоты плавучести и фонового сдвигового течения. Для реальных и модельных распределений частоты плавучести и фоновых сдвиговых течений приведены результаты численных расчетов амплитудно-фазовых характеристик волновых полей. Численно изучена трансформация амплитудно-фазовых картин полей внутренних гравитационных волн в зависимости от параметров генерации. Показано, что относительно коротко волновые пакеты могут концентрироваться на глубинах, соответствующих экстремумам функции, зависящей от компонент волнового вектора и вектора сдвиговых течений. Также показано, что пространственная изменчивость направления распространения волновых пакетов может приводить к достаточно заметной вертикальной амплитудной перестройке собственных функций. Показано, что использование модельных представлений для основных гидрологических характеристик (частоты плавучести и фоновых сдвиговых течений) позволяют упростить основную спектральную задачу. Показано, что модельные представления гидрологических характеристик дают возможность качественно верно описать основные особенности дисперсионных поверхностей и фазовых структур волновых полей. Для описания амплитудных зависимостей волновых полей необходимо использовать результаты численного решения основной спектральной задачи. Поэтому для исследования волновой динамики реального океана необходимо сочетание, как точных численных методов исследования волновых полей, так и различных асимптотических подходов, позволяющих исследовать основные качественные особенности возбуждаемых волн.

### **ВВЕДЕНИЕ.**

В реальных океанических условиях вертикальная и горизонтальная динамика фоновых сдвиговых течений в значительной степени связана с внутренними гравитационными волнами (ВГВ) [1-5]. В океане такие течения могут проявляться, например, в области сезонного термоклина и оказывать заметное влияние на динамику ВГВ [6,7]. Обычно предполагается, что фоновые течения с вертикальным сдвигом скорости слабо зависят от времени и горизонтальных координат. Если масштаб изменения течений по горизонтали много больше длин ВГВ, а масштаб временной изменчивости много больше периодов ВГВ, то такие течения можно рассматривать как стационарные и горизонтально однородные. Для исследования механизма взаимовлияния течений и ВГВ можно рассматривать различные модельные представления для стратификации и сдвиговых течений. Синтез численных, аналитических и асимптотических результатов может дать

первоначальное качественное и количественные представления о волновых океанических процессах с учетом фоновых сдвиговых течений. Можно ожидать также, что учет реальных свойств параметров морской среды позволяет исследовать новые качественные эффекты волновой генерации.

Асимптотические решения требуют верификации полученных аналитических результатов, оценки границ их применимости, поэтому сравнение численных и асимптотических результатов представляет особый интерес для исследования динамики ВГВ в океане с течениями. Метод Фурье является одним из основных методов решения задач волновой динамики ВГВ в океане с произвольными фоновыми сдвиговыми течениями. Полученные с помощью этого метода интегральные представления решений, требуют численного и асимптотического анализа. Методы прямого численного моделирования не всегда эффективны для исследования генерации ВГВ произвольными нелокальными и нестационарными источниками возмущений, особенно с учетом изменчивости основных гидрологических параметров, и требуют верификации и сравнения с решениями модельных задач. Поэтому при анализе динамики ВГВ в реальном океане необходимо использовать комбинацию, численных, асимптотических и аналитических методов [8].

### **ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.**

Целью настоящей работы является численное исследование амплитудно-фазовой структур ВГВ в океане конечной глубины с фоновыми сдвиговыми течениями для произвольных и модельных вертикальных распределений частоты плавучести и скоростей фоновых сдвиговых течений. В работе получены численные решения, которые описывают основные амплитудно-фазовые характеристики полей ВГВ в океане конечной глубины, как для произвольных, так и модельных распределений частоты плавучести и фоновых сдвиговых течений. В общем случае решение дисперсионного уравнения и качественный анализ получаемых дисперсионных соотношений и амплитудных зависимостей собственных функций представляет значительную математическую трудность.

Для аналитического решения задачи можно использовать модельные представления основных гидрологических параметров: постоянное распределение частоты плавучести и линейные зависимости фонового сдвигового течения от глубины. Использование модельных представлений для основных гидрологических характеристик (частоты плавучести и фоновых сдвиговых течений) позволят редуцировать основную спектральную задачу к более простой, а также исследовать эту упрощенную задачу аналитически. Аналитические и численные результаты показывают, что асимптотические конструкции, использующие модельные представления частоты плавучести и фоновых сдвиговых скоростей качественно верно могут описывать амплитудно-фазовую структуру ВГВ. Численные расчеты показывают, что учет реальных распределений основных гидрологических параметров океана дает возможность изучить все многообразие генерируемых волн.

Изменение основных параметров волновой генерации вызывает заметную качественную перестройку фазовых картин возбуждаемых полей ВГВ, связанную с трансформацией дисперсионных зависимостей и вертикальной структуры волновых полей. Численные расчеты показывают, что модельные представления гидрологических характеристик качественно верно описывают основные особенности дисперсионных поверхностей. В то же время, для корректного описания амплитудных зависимостей ВГВ в океане с фоновыми сдвиговыми необходимо использовать численные методы. В частности, численные расчеты для реальных гидрологических параметров показали, что относительно коротко-волновые пакеты ВГВ могут концентрироваться на глуби-

нах, где имеются экстремумы функции, зависящей от компонент волнового вектора и вектора сдвиговых течений.

Поэтому для исследования ВГВ в реальном океане необходимо сочетание, как точных численных методов исследования волновых полей, так и различных асимптотических подходов, позволяющих исследовать основные качественные особенности возбуждаемых волн. Аналитические приближения дают возможность решать более сложные задачи волновой динамики стратифицированных сред. Построенные асимптотики дисперсионных соотношений в дальнейшем позволяют исследовать более реалистичную задачу изучения динамики ВГВ в океане медленноменяющимися и нестационарными параметрами. В этом случае решение можно представить в виде суммы волновых пакетов, фазовая структура которых определяется аналитическими свойствами соответствующих дисперсионных зависимостей. Конкретный выбор фазовой функции (модельных интегралов) полностью определяется аналитическими свойствами дисперсионных соотношений, зависящих от реальной гидрологии океана. Аналитические выражения дисперсионных кривых могут использоваться, в частности, для качественной интерпретации наблюдаемых волновых явлений в океане. Также полученные аналитические результаты могут быть использованы для разработки дистанционных методов обнаружения ВГВ методами радиолокации.

#### **БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ**

Работа выполнена по гранту РФФИ № 20-01-00111А.

#### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Динамика негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах. - М.: Наука, 2010. 470 с.
2. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Волны в стратифицированных средах. - М.: Наука, 2015. 735 с.
3. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Теория волновых движений неоднородных сред. - Киров: Международный центр научно-исследовательских проектов, 2017. 580 с.
4. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Новые задачи математической теории поверхностных волновых возмущений. - Киров: Международный центр научно-исследовательских проектов, 2017. 318 с.
5. Булатов В.В., Владимиров Ю.В. A general approach to ocean wave dynamics research: modelling, asymptotics, measurements. - М.: «ОНТО-ПРИНТ», 2019. 587 с.
6. Morozov E. G. Oceanic internal tides. Observations, analysis and modeling. - Berlin: Springer, 2018, 317 p.
7. Velarde M. G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V. (Eds.). The ocean in motion. Springer Oceanography. - Berlin: Springer International Publishing AG, 2018. 625 p.
8. Булатов В.В. Новые задачи математического моделирования волновой динамики стратифицированных сред. - М.: «ОНТО-ПРИНТ», 2021. 277 с.



#### **ОБРАТНОВОЛНОВОЙ РАДИОИМПУЛЬС**

В.М. Бырдин

Институт Машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва

[V.M.Byrdin@mail.ru](mailto:V.M.Byrdin@mail.ru)



## ОБ ИМПУЛЬСНОЙ И ОБРАТНО-ВОЛНОВОЙ ТЕМАТИКЕ.

В течение полутора-двух веков, начиная с классических работ *У. Р. Гамильтона* и *Дж. С. Рассела* и до нашего времени, выходят статьи, в том или ином свете раскрывающие проблему волновых импульсов, солитонов, нестационарных колебаний и волн и переходных процессов [1–8]. Изучается динамика их профиля, скоростей движения, спектров и энергии, предвестников и тела, хвоста и головных фронтов. В электротехнике переходным процессам уделяется значительное внимание с начала 20-го века (с электрификации не только ... «всей страны», СССР, а и всего передового мира), затем «рывок» радиотехники цепей и сигналов. Отсюда развитость преобразований Лапласа и Фурье. Напротив, волновые процессы в большей мере, если не в целом, остаются теорией монохроматических волн, см., например, [9–11 и др.]. И основная причина здесь, очевидно, в удовлетворительном соотношении гармонического анализа и экспериментальных результатов, а также в громоздкости аналитических расчётов и нефизичности точных численных. Вместе с тем в актуальных приложениях всё же строятся и точные, и асимптотические решения. Например, для фемто-секундных лазеров, где длительность импульсов доведена до 1-го, двух колебаний (всего несколько фемтосекунд,  $\phi c - 10^{-15} c$ ), и для «сверхсильных» излучений, вошедших уже в учебники [12, с. 605].

Для современных же волноводов и структур, во-первых, крайне сложны, трансцендентны, уже задачи о гармонических процессах. А введение ещё и нестационарности делает общую задачу, как правило, на порядок сложнее. Тем не менее, за столетие уже наработан специальный арсенал теории нестационарных процессов и волн – это анзац по Лапласу и Фурье, стационарной фазы, перевала и др. асимптотические методы. В этом докладе впервые представлен ряд положений об обратноволновых узкополосных радиоимпульсах, полученных мною ранее и новых [13–15], причём в анзаце асимптотики на базе методов перевала, стационарной фазы и малого параметра. Напомним, *радиоимпульс в механике и электродинамике* – это импульс, цуг высокочастотных колебаний конечной длительности (например, ниже на рис. 2).

Обратные волны – новое, возродившееся с 2000-х гг [14–17 и мн. др.], фундаментальное, многопрофильное направление современной теории волн и технологий. Фундаментальная междисциплинарная концепция обратных волн базируется на их свойстве *адирекции*, т.е. на противоположности фазовой и групповой скоростей. Концепция включает разделы: 1) обратноволновую (**ОВ**-) феноменологию, систему эффектов, явлений и свойств, 2) модифицированные и новые положения теории волн (по ср. с теорией обычных, *прямых* волн) и 3) ОВ-технологии. Феноменология группируется в 4-ёх классах: дифракционные, кинематические, нелинейные и динамические (вкл. акустоэлектронику). На предыдущей конференции, 2021 [15], я делал доклад об ОВ-концепции в механике и электродинамике. Основной вклад в ОВ-теорию внесла советская и российская наука, начиная с работ *Л. И. Мандельштама*, *В. Е. Пафомова*, *В. Г. Веселаго*, 1940/60-х гг., и многих современных коллег, *Д. П. Коузова*, *Э. Г. Локка*, *В. В. Фисанова* и других. Напротив, в технологиях лидирует более финансируемый Запад.

## ОВ-РАДИОИМПУЛЬС, АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ АНЗАЦ

Для волноведущих структур с наиболее типичной извилистой дисперсией обратноволновых мод ([14,15]) мною установлены следующие свойства ОВ-импульса.

**1) Трёхволновой цуг – триплет.** Обратноволновой пакет на частоте перегиба  $\omega_m$  волнового числа  $k_n(\omega)$  и максимума групповой скорости  $U(\omega)$ ,

$$k_n \sim k_m - U_m^{-1} (\omega - \omega_m) - b(\omega - \omega_m)^3 + O^4, \quad (1)$$

обладает сингулярной фазой (Эйри) и головным, например, плоским фронтом:

$$a \sim a_0 x^{-1/3} B(\beta) \cos(k_m x + \omega_m t), \quad \beta = (x/U_m - t)/(3bx)^{1/3}, \quad a_0 = A(\omega_m)/(3b)^{1/3}, \quad A(\omega) = S_n F, \quad (2)$$

$S_n$  – собственная функция,  $F$  – спектральная плотность источника,  $B$  – квазифункция Эйри  $Ai$ , повёрнута осциллирующим участком внутрь цуга.

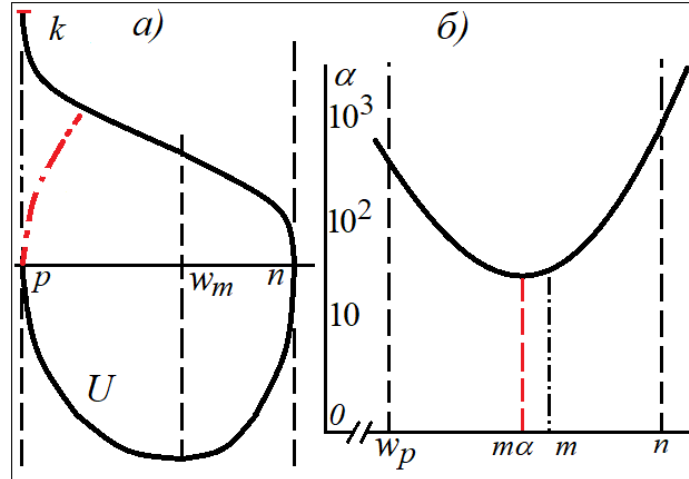


Рис. 1. Типичные дисперсионные кривые ОВ-моды. а) волновое число  $k$  и групповая скорость  $U$  и б) коэффициент затухания  $\alpha$ . (Логарифмич. шкала по  $\alpha$ ; минимум затухания немного раньше перегиба  $\omega_{m\alpha} < \omega_m$ ;  $\omega \equiv \omega$  – частота)

Биволновая модуляция средней и задней частей цуга, по методу стационарной фазы – в соответствии с двумя корнями ур-я  $U(\omega_{PK}) = x/t$ ,  $k = 1, 2$ ,  $\omega_P \neq \omega_m$ . Модуляция амплитуд, фаз и частот ограничена частотным диапазоном ОВ-моды и обусловлена дисперсией  $k_n(\omega)$  и входным спектром  $F$ . Обе волны заполняют пространство от источника, где остаются их хвосты с  $U(\omega_{KP}) \approx 0$ , и до передних фронтов, бегущих со скоростями  $\uparrow U_m$ . Амплитуды хвостов спадают до нуля, а передние возрастают асимптотически, переходя в головной фронт. В целом биволновые «усы» триплета затухают с течением времени и с расстоянием, что связано с их дисперсионным расплыванием и диссипацией. На частотах, близких к критическим  $\omega_n$  и  $\omega_b$ , диссипативное затухание существенно растёт – рис. 1б.

**2) Доминирование головного фронта.** Из трёхволновой ОВ-группы передний цуг, максимальной скорости  $U_m$ , фазы перегиба  $\omega_m$  и минимума затухания  $\alpha_{m\alpha}$ , является преобладающим, а затем, на бесконечности, и единственным, по асимптотике  $1 + O(x^{-1/6})$ . Предвестник не возможен ввиду полу-петли  $U(\omega)$ . Т.о., в результате эволюции триплета, его дисперсионного и диссипативного затухания, цуг в дальней зоне *вырождается* в весьма узкополосный ОВ-импульс частоты  $\omega_m$ , в головной ОВ-цуг – рис. 2.

**3) Типичный узкополосный ОВ-радиоимпульс дальней зоны.** Изложенное позволяет в целом полагать, что обратноволновой импульс в дальней зоне будет устойчивой формы, крайне узкого спектра вокруг сингулярной частоты  $\omega_m$ , ограниченного профиля – «слона» [4]. Его гладкая огибающая с резким передним фронтом, без предвестника, и с небольшим хвостом, заполнена ВЧ-синусоидой – рис. 2, ниже. И этот же эскиз, именно эскиз, а не числен. график, предложен мною в 2007г, на юбилей В. В. Шевченко, в качестве эмблемы ОВ-физики, механики и электродинамики [14,15 и др.].

**О низкочастотных ОВ-импульсах.** Представленные результаты относятся к узкополосным ОВ (рис. 1а). Второй же тип ОВ – *нулевые*, с нуля частот, *низкочастотные* (НЧ) обратные волны, относительно широкополосные и ограниченные сверху. Эти ОВ-моды обладают принципиально иной кинематикой [14,16]. Их дисперсионные кривые  $k(\omega)$  без точки-частоты перегиба (нет таких примеров [14–17]), а на нулевой частоте – точки пересечения и по  $k(\omega)$ , и по  $U(\omega)$  (см. мой след. доклад [18]). Так что и в целом нулевые, НЧ ОВ-импульсы это существенно иная аналитика и физика.

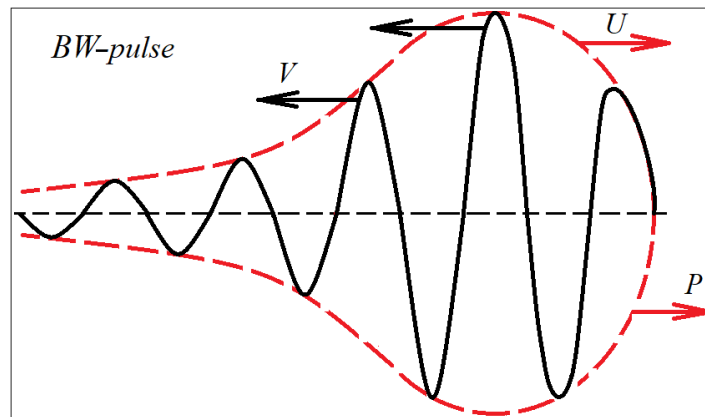


Рис. 2. Эскиз ОБ-импульса в дальней зоне, с выпуклым головным фронтом и размытым затухающим хвостом. ( $V$ ,  $U$  – фазовая и групповая скорости,  $P$  – поток мощности)

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харкевич А.А. Неустановившиеся волновые явления. М.-Л.: ГТИ, 1950. 202 с.
2. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. Л.: Судостр., 1972. 376 с.
3. Graff K.F. Wave motion in elastic solid. Oxford: Clar. Press, 1975. 550 p.
4. Вайнштейн Л.А. Распространение импульсов// УФН. 1976. Т. 118. № 2. С. 339–367.
5. Левин М.Л. "Как свет побеждает тьму" – У.Р. Гамильтон и понятие групповой скорости// УФН. 1978. № 3. С. 565–567.
6. Захаров С.Д., Крюков А.С. Возбуждение резонансов объектом, движущимся по поверхности водоёма. Препринт № 18. М.: ФИАН, 2006. 32 с.
7. Bukhman N.S. On the Propagation of a Short Light Pulse in a Medium with a Lorentz Contour of the Spectral Gain Line // Radiophys. Quantum Electron. 2021. V. 63. N. 12.
8. Шагапов В.Ш., Галиакбарова Э.В., Хакимова З.Р. Эволюция акустических импульсов в поврежденных подземных трубопроводах// Ученые зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2021. Т. 163, кн. 1. С. 48–58.
9. Волны; Физика // Физическая энцикл. Под ред. А.М. Прохорова; в 5 тт. М.: БСЭ, 1988, 1995. Т. 1. С. 315–328. Т. 5. С. 311.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 тт.: тома 2–8, 10; Теория поля; Гидродинамика; Электродинамика...; и др. – М.: ФМЛ, 2001 и др. гг.
11. Чашечкин Ю.Д., Кистович А.В. Классификация трёхмерных периодических движений в жидкости// Докл. РАН. 2004. Т. 395. № 1. С. 55–58.
12. Ахманов С.А., Никитин С.Ю. Физическая оптика. 2 изд. М.: МГУ–Наука, 2004. 656с
13. Бырдин В.М. Обратные акустич. волны ... // «Акустика неоднородных сред». Труды Семинара АКИН, 2001. М.: ГЕОС, 2002. С. 112–116, 121.
14. Бырдин В.М. Обратные волны: столетие первой работы, истоки и развитие ОБ-механики и электродин./Обзор// Радиотех. и эл. 2005. Т. 50. № 12. С. 1413–1438.
15. Бырдин В.М. Об ОБ-концепции в общей теории волн, в механике и электродинамике // «Волны и вихри в сложных средах». Сб. М., 2021. С. 44-49.
16. Обратные волны/ Сессия ОФН РАН. Вашковский А.В., Веселаго В.Г., Локк Э.Г. Силин Р.А. и др.; М., ФИАН, янв. 2006// УФН. 2006. Т. 176. № 5. С. 557–565.
17. The 16th International Congress on Artificial Materials for Novel Wave Phenomena – Metamaterials'2022. Sept. Italy.
18. Бырдин В.М. Трансцендентные плоские осевые спирали и циклические шлемовидные кривые на базе синусоиды, с петлями, пиками и крестами// «Волны и вихри в сложных средах»: Данная, 13-ая междунар. конф.–школа. М., ИПМех РАН, 2022.

# МЕТОД РАЗДВОЕНИЯ-ФАКТОРИЗАЦИИ И ГОЛОМОРФНАЯ КВАДРАТУРА НЕОПРЕДЕЛЁННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

В.М. Бырдин

Институт Машиностроения им. А.А. Благонравова РАН, Москва

[V\\_M\\_Byrdin@mail.ru](mailto:V_M_Byrdin@mail.ru)

## ВВЕДЕНИЕ.

Исходным будет уравнение с 2 неизвестными функциями  $f_j$

$$f_1(x) + a(x)f_2(x) = b(x) \quad (1)$$

и заданными  $a$  и  $b$ . Подобные неопределённые функциональные линейные уравнения (НФУ) называют *неопределёнными* (indefinite), а системы таких, но главным образом, алгебраических уравнений – *недо-определёнными* (underdetermined), с 3,4,5,... –  $n$ , несколькими неизвестными. Неким образом это различие, *не-* и *недо-* определённые, сохранилось и в руководствах, и в современных статьях, как и разноречивой терминологии.

В данной работе изучены неопределённые линейные уравнения и их системы с двумя, тремя, ... и  $n$  неизвестными функциями

$$\{f_{1K} + a_{2K}f_{2K} + \dots + a_{nK}f_{nK} = b_K\}^M, \quad n > m. \quad (2)$$

( $a_{JK}$  – прямоугольная матрица; теория матриц мною не затрагивается). А также и нелинейные НФУ и системы. Тривиально, что в общем случае их решения представляются бесконечными множествами спаренных (в (1)), строенных и т.д.,  $n$ -связанных произвольных функций (в (2)). На базе же моего метода, раздвоения-факторизации (2014 [1]) для одного широкого класса таких уравнений и их систем выделяется единственное решение в виде функций  $f_K$ , голоморфных в смежных, верхней и нижней ( $\pm$ ), полуплоскостях. Сначала решается НФУ-ие (1), а на его основе – обобщение на 3 и нескольких неизвестных одного уравнения или системы. Результаты по (1) актуальны в краевых задачах теории волн, а по (2) ещё без приложений.

Вообще, в различных областях математики известен ряд методов факторизации, в теории чисел, вероятностей и графов, в математической физике и в др. разделах. Я исходил из развития метода факторизации *Винера-Хопфа-Фока (ВХФ; [2,3 и др.]*) в теории дифракции волн [4] и вышел на оригинальное обобщение. Термин факторизация, от лат. factor – делающий, *производящий*, означает разложение на элементы, чаще, на множители, в данном случае и по Н. Винеру и Е. Хопфу, 1931г [2,5] – на два множителя или слагаемых. Поэтому в названии моего метода *Раздвоения* приставку «факторизации» можно опускать.

Также известен ряд других областей с неопределёнными уравнениями и недоопределёнными системами. Неопределённые линейные уравнения, в основном диофантовы и алгебраические ([6] и мн. др.), вкл. и уравнение Пьера Ферма, и одну из проблем Гильберта.

## 2. Неопределённые функциональные линейные уравнения с 2 неизвестными.

Данный п. 2 подробно изложен в моей статье [1] – здесь только тезисно.

**Теорема 1** (о широком классе НФУ). Пусть в (1) заданные  $a(z)$  и  $b(z)$  голоморфны на  $x$ -оси,  $z = x + iy$ , кроме возможно счётного множества полюсов, а для  $a(z)$  и нулей. И пусть частное  $b/a$  ограничено на бесконечности как  $x^{-D}$ ,  $D > 0$ . Тогда найдётся голоморфная, в  $z$ -полуплоскости, функция  $g = g_+$  или  $g_-(z)$ , такая, что уравнение  $gf_1 + gaf_2 = bg$  факторизуется методом раздвоения и получит единственное решение в разнорегулярных функциях – класс решений.

В отличие от метода ВХФ, требующего две асимптотики,  $a \rightarrow 1$  и  $b \rightarrow 0$ , на  $\infty$ -ти, у меня только одна  $b/a \rightarrow 0$  – в чём существенное расширение класса квадратуры. И у меня не требуется привязка нулей и полюсов  $a$  и  $b$  к  $x$ -оси.

**Лемма 1.** НФУ  $gf_1 + gaf_2 = bg$  теоремы 1 решается методом раздвоения-факторизации единственным образом в классе разно-регулярных функций.

*Пример 1.* Демонстрируем метод; берём:

$$f_1(x) + a(x)f_2(x) = b(x), \quad a = (x - x_0) \exp ix, \quad b = \sin x. \quad (3)$$

Положим  $z_0 = x_0 + iy_0$ ,  $y_0 > 0$ . Тогда множитель  $g_- = 1/(z - z_0)$  факторизует (3). Т.о. разно-регулярное однозначное:

$$f_1 \equiv f_- = \sin z + (\exp iz_0 - \exp iz)/2, \quad f_2 \equiv f_+ = (1 - \exp i(z_0 - z))/2(z - z_0).$$

*Замечания:* 1. В более общем случае, комплексных переменных, схема метода та же. Создание полосы регулярности вокруг оси  $x$  также производится смещением нулей и полюсов функций  $a(z)$  и  $b(z)$  с вещественной оси.

2. В случае многозначных аналитических функций зачастую достаточно замены переменной степенной функцией, как «всё регуляризуется». Однако, например, в крайних задачах матем. физики с физическим полупространством возникает радикал  $\sqrt{(k^2 - k_0^2)}$ , для которого удачной замены не найдено, а интегралы по берегам разрывов трудно берутся.

**3. Квадратура неопределённых функциональных линейных и нелинейных уравнений с 3-я, 4, ... и  $n$  неизвестными функциями и их систем.** Какова идея по ср. с обычным НФУ, с двумя неизвестными? Возьмём с тремя:

$$f_1(x) + a_2(x)f_2(x) + a_3(x)f_3(x) = b(x). \quad (4)$$

Переходя через промежуточную неизвестную функцию

$$f_{23} = f_2 + a_3 f_3 / a_2, \quad (5)$$

решаем новое НФУ  $f_1 + a_2 f_{23} = b$ . Возвратившись в (5), находим голоморфные в разных полуплоскостях  $f_2$  и  $f_3$ . Причём разно-регулярность  $f_1$  и  $f_{23}$  относительно разно-регулярности  $f_2$  и  $f_3$  не принципиальна, т.к. важно решение на оси  $x$  для  $\{f_k(x)\}^3$ .

Если 4-е неизвестных, то будет две промежуточных:  $f_{23}$  и  $f_{34}$ . И т.д., до  $n$  неизвестных и  $n-2$  промежуточных неизвестных функций.

Переход от системы нескольких линейных НФУ с 3 или 4, 5, ... к одному линейному уравнению, с тем же числом неизвестных, тривиален – отсюда обобщение на системы НФУ.

В случае *нелинейных уравнений и систем*, делая замену нелинейных членов промежуточными функциями, решаем, как и выше, для трёх, 4-ёх и т.д. неизвестных и для двух, трёх и многих уравнений. Проблем с раздвоением и разнорегулярностью не предвидится.

**4. Несколько трактовок.** Геометрической интерпретацией общего решения (1), открытого бесконечного множества произвольных функций, является трёхмерная поверхность  $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ , описываемая исходным уравнением:

$$x_1 + a(x_3)x_2 - b(x_3) = 0; \quad \text{здесь } x_k = f_k, \quad k = 1, 2.$$

Тогда произвольность, бесконечное множество искоемых  $f_k$  наглядно трактуется бесконечностью двух осей,  $|x_k| < \infty$ , или замкнутыми множествами – при ограниченной поверхности  $\Psi$ . Кроме того, в этой связи, к исходной проблеме неопределённых уравнений может быть привлечён аппарат геометрии. Так, единственным разно-регулярным решениям  $f_{\pm}$  будут соответствовать четырёхмерные поверхности шестимерного пространства комплексных  $(z_1, z_2, z_3)$ ,  $z_j = x_j + i y_j$ , являющиеся регулярными поверхностями в смежных  $z$ -полуплоскостях.

Отметим, что в большинстве прикладных задач формулируются дополнительные условия (*краевые*, например) или специальные, *фундаментальные принципы* (в частности, принципы излучения, сохранения энергии), достаточные для корректной постановки и единственного решения физической задачи в целом. Так что решение получается корректным, имеющим физический смысл, и вполне верифицируемым экспериментально. Имеется также параллель с решениями других неоднородных уравнений, в

частности, линейных дифференциальных уравнений и с краевыми задачами, где единственное корректное решение выделяется из общего математического.

Возможно также применить мой метод раздвоения к решению дифференциальных уравнений, двумя неизвестными членами которого выступают функция и её производная, любого порядка  $l$ . Разнорегулярными их можно сделать только для решения уравнения, а затем перейти на вещественную ось. Остаётся, однако, открытой проблема взятия интеграла от  $f_2 = \partial^l f / \partial x^l$  и выбора одной из двух функций, причём  $f_2$  будет с  $l-1$  константами интегрирования.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** *Некоторые новые понятия.* Предложены понятия и термины: функция, полином и константа раздвоения; факторизация в сумму и в произведение и разнорегулярные функции. Проведение аналогии с методом разделения переменных полезно методически. Полагаю, эти новшества способствуют развитию метода.

*Новыми результатами*, автор считает следующие.

1) В отличие от метода ВХФ, требующего в уравнении (1) две асимптотики на  $\infty$ -ти,  $a \rightarrow 1$  и  $b \rightarrow 0$ , по нашей теореме 1 – только одна  $b/a \rightarrow 0$ . И не требуется привязка нулей и полюсов  $a$  и  $b$  к  $x$ -оси. Что даёт существенное расширение класса неопределённых функциональных линейных уравнений, решаемых методом раздвоения единственным образом в классе разнорегулярных функций.

2) Обобщение метода на уравнение с тремя, 4-мя, ... и  $n$  неизвестными функциями, а также на системы таких уравнений и на нелинейные уравнения и их системы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бырдин В.М. «Одно уравнение – два неизвестных»: недоопределённые функциональные уравнения и метод факторизации-раздвоения// Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2016. № 3 (317). С. 40-46.  
*То же.* // «Наследственная механика деформирования и разрушения твердых тел – научное наследие Ю.Н. Работнова». 100-летию со дня рождения/ Программа конф. М., ИМАШ РАН, 24-26 февр. 2014 г. М., 2014. 14 с. Электронная версия. С. 11. [http://imash.ru/netcat\\_files/File/Pro\\_unp.pdf](http://imash.ru/netcat_files/File/Pro_unp.pdf) дата обр. 1.10.2022.
2. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа/ Пер. с англ. – М.: ИИЛ, 1962. 280 с.
3. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. – М.: Сов. радио, 1970. 518 с.
4. Бырдин В.М. Дифракция нормальных волн в пластине, погруженной в жидкость: модель уровнемера, модификация метода факторизации и волноводные квазирезонансы // Известия РАН. Механика твердого тела. 2017. № 3. С. 83-99.
5. Wiener-Hopf method. Encyclopedia of Mathematics. [http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Wiener-Hopf\\_method&oldid=49216](http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Wiener-Hopf_method&oldid=49216) (Последняя ред. 6.6.2020) дата обр. 10.10.2022.
6. Чанга М.Е. Диофантовы уравнения: уравнения Пелля.– М.: МПГУ, 2



## ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ПЛОСКИЕ ОСЕВЫЕ СПИРАЛИ И ЦИКЛИЧЕСКИЕ ШЛЕМОВИДНЫЕ КРИВЫЕ НА БАЗЕ СИНУСОИДЫ, С ПЕТЛЯМИ, ПИКАМИ И КРЕСТАМИ

В.М. Бырдин, А.К. Пузакина

Институт Машиностроения им. А.А. Благоврадова РАН, Москва

[V\\_M\\_Byrdin@mail.ru](mailto:V_M_Byrdin@mail.ru)



## ВВЕДЕНИЕ.

В работе получено несколько новых кривых на базе синусоиды. В отл. от элементарной, хотя трансцендентной синусоиды, в целом трансцендентные функции и кривые представляют собой извечную проблему для прикладной и чистой, классической и современной математики, оправдывая в общем своё определение – *недоступные* познанию, лат. В докладе предложен новый тип плоских спиралей, *осевые спирали*. Это трансцендентные, сингулярно богатые спирали, порождённые синусоидой, в отл. от известных синусоидальных спиралей. Осевые – в отл. от, как правило, «точечных», завитых вокруг точки. И сингулярно богатые – включают ряд особенностей: дуги с вершинами двукратного ветвления, кресты, т.е. само-пересечения и -прикосновения, петли и пики (*пики* – мой термин, или точки возврата 1-го рода или каспы – cusps). Такого типа спирали получены нами как простой анзац аппроксимации петель, извилин (на перегибах), крестов и пик сложных кривых (вкл. суперпозицию), трансцендентных, численных и экспериментальных и, в частности, законов дисперсии, дисперсионных кривых обратноволновых и волноводных процессов. Обратные волны – это наиболее сильно диспергирующие волны, обладающие «отрицательной» (направленной к излучателю) фазовой скоростью и целым рядом фундаментальных замечательных явлений и свойств; это современное креативное направление многопрофильной теории волн и технологий.

В современной геометрии собраны целые реестры всевозможных, в основном алгебраических плоских, а также пространственных кривых. Справочники и трактаты, каталоги и указатели, и бесчисленные сайты, см., например, [1, 2]. В частности, плоские алгебраические вещественные кривые высокой степени анализируются в рамках 16-й проблемы Гильберта [3–6]. Так что полученные нами результаты пополняют трансцендентную тематику.

## НОВЫЕ ТИПЫ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ СПИРАЛЕЙ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ КРИВЫХ.

Исходная кривая:  $y_u = a \sin bx_u$ ,  $a, b \in \mathbf{R}$ . Поворот координат на  $\theta$  (а также возможный снос на  $y_0, x_0$  – рис. 1а) даёт для новой  $y(x)$  и её обратной, далеко нетривиальной производной:

$$y(x) = (x_0 + x_u)s + (a \sin bx_u - y_{u0})c, \quad x = A + x_u c - sa \sin bx_u, \quad s = \sin \theta, \quad c = \cos \theta, \\ f(x) = 1/y'(x) = (1 + abt \cos bx_u)/(t - ab \cos bx_u), \quad A(\theta) = sy_0 - cx_0, \quad t = \tan \theta.$$

Напоминая трохойду, полученная функция  $f(x)$ , а также  $y(x)$  – параметрические или, с другой стороны, неявные и обратные функции. Для  $x_u(x)$  очевидна многозначность типа арксинуса:  $k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

Из набора кривых  $f(x)$  графо–аналитически определяем пять новых периодических кривых, в т. ч. три типа спиралей и шлемовидную кривую.

*Разрывная* ( $\pm\infty$  – 2-го рода) периодическая кривая, при малых докритических углах,  $\theta < \theta_{kp1} = \arctan(1/ab)$ , ещё не спираль;  $\theta_{kp1} = 45^\circ$  при  $a = b = 1$ . Отчасти подобна секансу – не приведена на рис., не столь интересна.

*Шлемоида* – шлемовидная кривая. При  $\theta = \theta_{kp1}$  шлемоида  $f(x)$  подобна циклоиде. Это периодическая серия «шлемов», опёртых на ось  $x$ , но с вершинами до бесконечности, рис. 1с. Здесь точки возврата 1-го рода (при  $bx_u = \pi + 2k\pi$ ) или *пики* (наш термин, или каспы [7; Википедия, правки дек. 2018]) – это вырождение петли в остриё.

*Петлистая спираль*. Для  $\theta \in (\theta_{kp1}; \theta_{kp2})$ ,  $\theta_{kp2} = \arctan(3\pi/2ab)$ , или  $45^\circ < \theta < 78^\circ$  при единичных  $a$  и  $b$ , спиральная кривая на рис. 1а, подобна удлинённой циклоиде–трохойде.



**Бинарная спираль.** При критическом угле  $\theta_{кр2}(a, b)$ , в частности  $\theta_{кр2}(1, 1) = 78,02^\circ$  – спираль бинарная, с точками самоприкосновения и пересечения, рис. 1б.

**Сгущённая спираль.** При повороте,  $\theta_{кр2} < \theta < 90^\circ$ , спираль сгущается по сравнению с бинарной.

**Квазиэллипс.** При  $90^\circ$  – любопытное вырождение спирали в квазиэллипс с полуосями  $a$  и  $1/ab$ .

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Геометрия плоских кривых.** Получены четыре новых трансцендентных кривых – три вида осевых спиралей и шлемовидная кривая, а также интересный аналитический  $f(x)$  дубль простого эллипса. Для сравнения отметим, что классическая синусоидальная спираль ( $\rho^n = a^n \cos(n\varphi)$  – Маклорен Колин, 1718 г.) включает в себя как частные случаи, при различных  $n$ , несколько классических кривых. Это лемниската Бернулли, кубика Чирнгауза (или Лопиталья), логарифмическая спираль Декарта, обычные гипербола и парабола и др. кривые.

**Обратноволновая физика** – новое, последних 2-3 десятилетий, весьма перспективное, фундаментальное направление в теории волн и технологий, в ряде отраслей механики и электродинамики. См. [8–10, 12] и мн. др. Идея обратной производной от извилистой кривой получена нами (2012 г. [12]) при расчёте дисперсионных кривых обратной волны, групповой скорости  $U(v)$  и волнового числа  $\sigma(v)$ , в виде петли и извилины (отрицательного наклона, рис. 2):  $U = dv/d\sigma$ ,  $v$  – частота. Здесь же возникают и пики (Шульга Н. А., 2003 [8]), и др. сингулы кривых. А далее обобщение – анзац не только дисперсии волн, но и вообще произвольно сложных кривых (вкл. суперпозицию), трансцендентных, специальных, численных и экспериментальных. (Анзац – формулы, асимптотика, приближение, анализ, см. в лит. [12]).

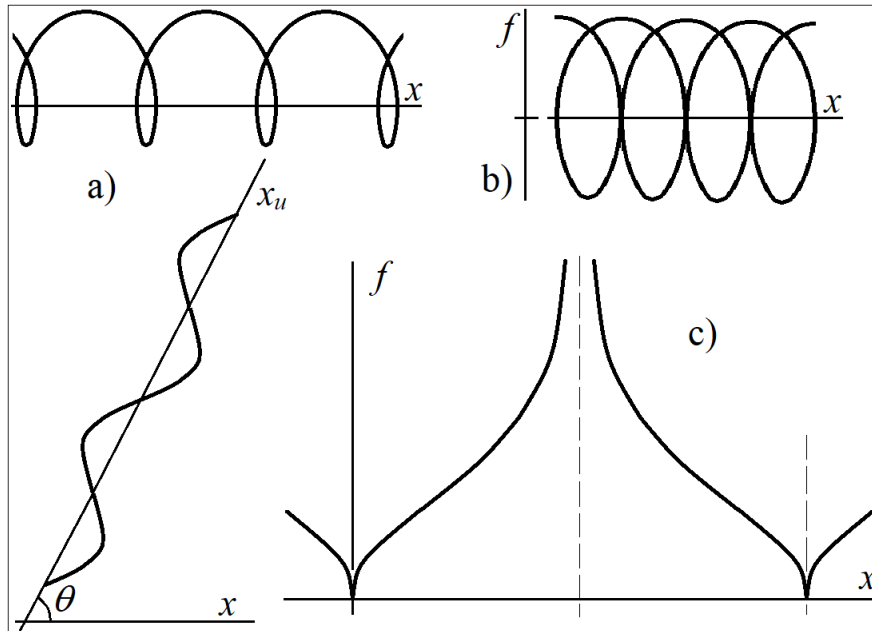


Рис. 1. Два вида спирали на базе поворнутой синусоиды: а) с петлями (вкл. кресты), при поворотах  $\theta_{кр1} < \theta < \theta_{кр2}$  и б) с точками самоприкосновения (2-ой крест), при  $\theta = \theta_{кр2}$ . в) Шлемовидная кривая, при  $\theta = \theta_{кр1}$ .

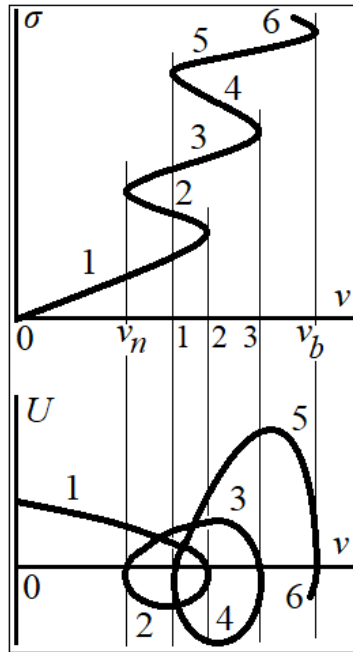


Рис. 2. Дисперсионная кривая волнового числа  $\sigma(v)$  в пять изгибов (по мотивам [11, с. 53]) и петлистая спираль групповой скорости  $U(v)$ , с 4-мя крестами, для 5 мод, вкл. две обратноволновые, [12].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шикин Е.В., Франк-Каменецкий М.М. Кривые на плоскости и в пространстве. Справочник с прилож. дискеты «Плоские кривые». М.: ФАЗИС, 1997. 336 с.
2. Lawrence J.D. A catalog of special plane curves. N. Y.: Dover Publ., 1972. 229 p., 89 ill.
3. Борисов И.М. О применении метода кусочного конструирования Виро к классификации распадающихся алгебраических кривых степени 8 // Труды Математич. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 62 // Материалы Международ. конф. "Лобачевские чтения". Казань: Изд. КФУ, 2022. 128 с. Сс. 20-22. 35-38. 103-105.
4. Горская В.А. О классификации М-распадающихся кривых степени 7 // Там же [3].
5. Пучкова Н.Д. Классификация кривых степени 8, распадающихся в объединение двух М-кривых степени 4, содержащее конфигур. Змея без свободного конца // Там же [3].
6. Виро О.Я. Плоские вещественные алгебраические кривые: построения с контролируемой топологией // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 5. С. 1-73.
7. *Encyclopedia of Mathematic*: in 13 vol./ 10 vol. translated from Russian; 3 additional vol. 1997-2002; European Mathematical Society. – Kluwer Academic Publishers/ Springer, 1987-2002. Additions and changes in the electronic version [https://encyclopediaofmath.org/wiki/Main\\_Page](https://encyclopediaofmath.org/wiki/Main_Page) Дата обращ. 12.10.2022.
8. Бырдин В.М. Обратные волны: столетие первой работы, истоки и развитие обратноволновой механики и электродинамики (обзор) // Радиотехника и электроника. 2005. Т. 50. № 12. С. 1413-1438.
9. Обратные волны/ Сессия ОФН РАН. Вашковский А.В., Веселаго В.Г., Локк Э.Г. Си-лин Р.А. и др.; М., ФИАН, янв. 2006 // УФН. 2006. Т. 176. № 5. С. 557-565.
10. *The 16th International Congress on Artificial Materials for Novel Wave Phenomena – Metamaterials'2022*. Sept. Italy.
11. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн: Уч. пос.– М.: ФМЛ, 1984. 432 с.
12. Бырдин В.М. Об обратноволновой концепции в общей теории волн, в механике и электродинамике // Волны и вихри в сложных средах: 12-ая Междун. конф.-школа. ИПМех РАН. М., дек. 2021 г.– М.: ИСПО-принт, 2021. С. 44-49.

## ЛАБОРАТОРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПЕНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОВЕРХНОСТНОГО ВОЛНЕНИЯ

*М.И. Вдовин<sup>1</sup>, Д.А. Сергеев<sup>1</sup>, Ю.И. Троицкая<sup>1</sup>, А.А. Кандауров<sup>1</sup>*

*<sup>1</sup> Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук», Нижний Новгород  
[arfirius@yandex.ru](mailto:arfirius@yandex.ru)*

В последние годы различные натурные и лабораторные исследования [1-4] показали существование эффекта насыщения коэффициента аэродинамического сопротивления водной поверхности при ураганных ветрах. Одним из возможных объяснений низкого аэродинамического сопротивления водной поверхности при сильном ветре может быть влияние поверхностной пены, которая изменяет аэродинамические характеристики водной поверхности и влияет на ветро-волновое взаимодействие, на процессы обмена импульсом, теплом и влагой в турбулентном атмосферном пограничном слое. На основе данных, полученных в ходе аэрофото-съемки [5], было определено, что при сильном ветре лишь малая часть морской поверхности покрыта белыми шапками, состоящими из плотных пятен пены, образовавшихся в результате обрушения волн. Например, при скорости ветра около 50 м/с участки с плотной пенными шапками покрывают менее 5% поверхности. Однако, при той же скорости ветра поверхность почти полностью покрывается полосами менее плотной пены, которые вытянуты в направлении ветра [5]. Также было обнаружено, что коэффициент сопротивления начинает выходить на насыщение начиная со скорости 25 м/с, совпадающей с моментом начала образования пенных полос на поверхности. Более того, при скорости ветра примерно 40 м/с, когда пенные полосы сливаются друг с другом, коэффициент сопротивления начинает уменьшаться.

Для исследования влияния пены на поверхности на характеристики волнения был проведен лабораторный эксперимент на база высокоскоростного ветро-волнового канала ИПФ РАН. Для получения пены на поверхности был сконструирован подводный пеногенератор. Его подводная рабочая часть состоит из двух параллельно расположенных трубок диаметром 1 см и длиной 35 см, по всей длине которых насверлены в один ряд отверстия диаметром 1 мм и шагом 7 мм. Обе трубки с одной стороны заглушены, с другой – в одну подается сжатый воздух под давлением 1,5 атм, а во вторую пенообразующая жидкость, в роли которой использовался раствор лаурилсульфата натрия (SLS), подаваемый под давлением столба жидкости высотой 1,5 м. Сверху трубки обернуты мелкоячеистым поролоном. Рабочая часть располагалась под водой (5 мм между верхней границей поролона и невозмущенным уровнем воды) в 1,2 м от начала канала перпендикулярно боковым стенкам. В результате на поверхности воды образовывалась мелкодисперсная пена, которая уносилась ветровым потоком. В ходе эксперимента уровень раствора SLS и давление сжатого воздуха поддерживались постоянными, что обеспечивало постоянную скорость образования пены.

Таким образом, были проведены измерения характеристик поверхностного волнения при 6 значениях расхода воздуха в канале и двух режимах пеногенерации: с работающим пеногенератором и без него. Измерения проводились при помощи антенны из трех струнных волнографов. Полученные

записи волнения обрабатывались при помощи алгоритма FDM (Fourier Directional Method). Подробно процесс измерения и обработки описан, например, в работе [4]. Полученные для разных режимов изотропные спектры по частоте и волновому числу приведены на (Рис.1а-г). Показано, что наличие пены на поверхности сильно изменяет спектры поверхностных волн. Самым ярким эффектом является подавление эффекта снижения пиковой частоты  $\omega_p$  и волнового числа  $k_p$  с увеличением скорости ветра.

Присутствие пены на поверхности приводит к слабому уменьшению значимой высоты волнения (Рис.2а). Однако, в комбинации с со снижением пикового волнового числа, это приводит к сильному уменьшению среднеквадратичных уклонов волн (MSS) (Рис.2б). Пена на поверхности фактически приводит к подавлению коротковолновой части волнения. Следовательно, можно ожидать уменьшение нелинейности поля поверхностных волн и уменьшению сопротивления формы волнения в присутствии пены на поверхности.

На основе этих результатов можно утверждать, что покрытие поверхности пеной играет важную роль в вопросе о поверхностном сопротивлении при сильных ветрах и нуждается в более детальном исследовании.

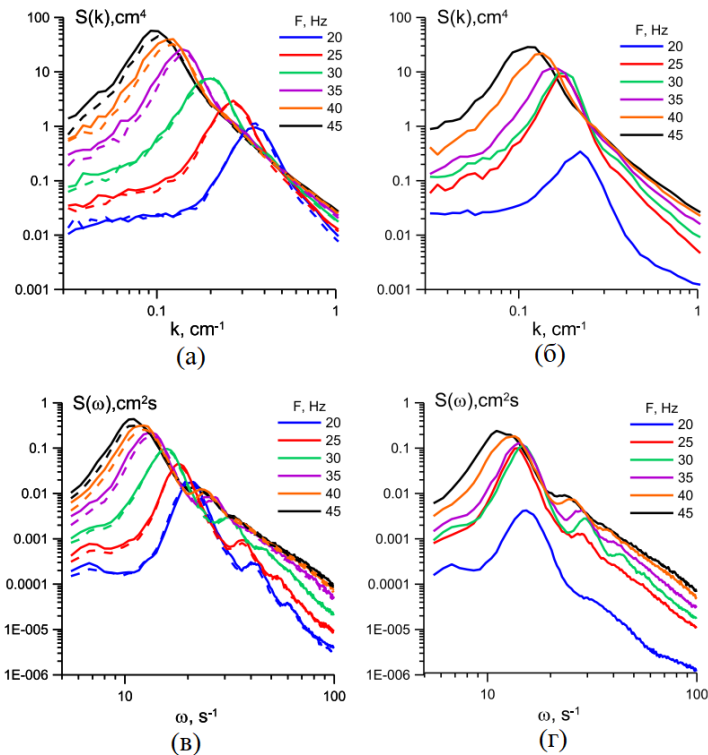


Рис. 1 Изотропные спектры по частоте и волновому числу, полученные для разных режимов: (а) и (в) – чистая вода (сплошная линия) и пеногенерация без SLS (пунктирная линия) – для оценки влияния работы пеногенератора на волнение; (б) и (г) – пеногенерация с подачей раствора SLS. Линии разного цвета отвечают разным скоростным режимам ветрового потока в канале (разным частотам работы нагнетающего вентилятора).

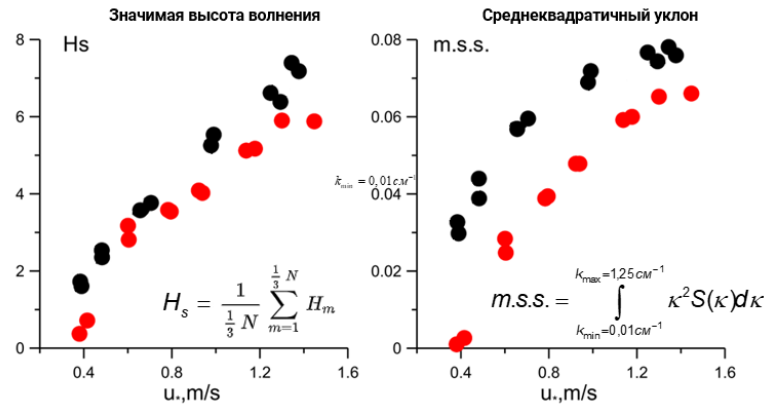


Рис. 2 Зависимости значимой высоты волны от скорости трения и среднеквадратичного уклона для разных режимов: красные точки – с генерацией искусственной пены, черные точки – чистая вода.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 22-77-10094 (проведение экспериментов) и гранта президента МК-5503.2021.1.5 (обработка данных). Результаты получены с использованием оборудования Уникальной научной установки «Комплекс крупномасштабных геофизических стендов» ИПФ РАН (<http://www.ckp-rf.ru/usu/77738/>).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Powell M. D. Final Report “Drag Coefficient Distribution and Wind Speed Dependence in Tropical Cyclones” Principal Investigator: Mark D Powell NOAA/AOML, 2005-2007
2. Jarosz E., Mitchell D. A., Wang D.W., Teague W.J. Bottom-up determination of air-sea momentum exchange under a major tropical cyclone. Science, 2007, v 315, p. 1707-1709, DOI: 10.1126/science.1136466.
3. Takagaki, N., S.Komori, N.Suzuki, K.Iwano, T.Kuramoto, S.Shimada, R.Kurose, and K.Takahashi. Strong correlation between the drag coefficient and the shape of the wind sea spectrum over a broad range of wind speeds. Geophys. Res. Lett., 2012, 39, L23604, <https://doi.org/10.1029/2012GL053988>
4. Troitskaya, Yu. I., D.Sergeev, A. A.Kandaurov, G. A.Baidakov, M. A.Vdovin, and V. I.Kazakov. Laboratory and theoretical modeling of air-sea momentum transfer under severe wind conditions. J. Geophys. Res., 2012, 117, C00J21, <https://doi.org/10.1029/2011JC007778>
5. Holthuijsen, L. H., M. D. Powell, and J. D. Pietrzak. Wind and waves in extreme hurricanes. J. Geophys. Res., 2012, 117, C09003, <https://doi.org/10.1029/2012JC007983>



## УПРАВЛЕНИЕ ВИХРЯМИ В НАГРЕТОМ ТИГЛЕ С ПОМОЩЬЮ ВРАЩЕНИЯ ДИСКА

Н.А. Вerezуб, А.И. Простомолотов

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

[aprosto@inbox.ru](mailto:aprosto@inbox.ru)

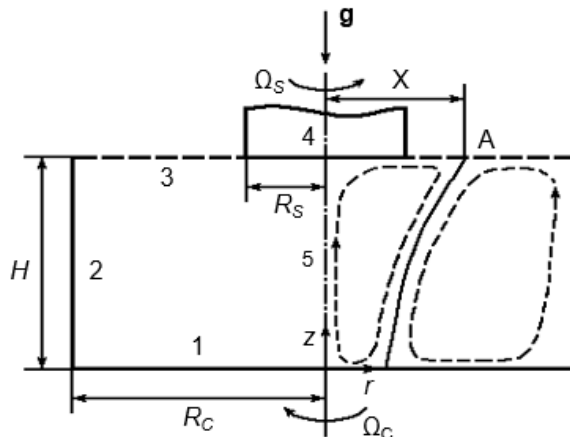
## ВВЕДЕНИЕ.

В работах [1], [2] экспериментально показано, что структурное совершенство растущих из расплава кристаллов в значительной степени зависит от формы фронта кристаллизации (ФК) и является наилучшим в случае его плоской формы. Установлено, что на форму ФК влияет структура течения расплава в тигле, вызванная тепловой конвекцией и вращением кристалла (вынужденная конвекция).

В технологической практике получили распространение критериальные оценки соотношения подъемных и центробежных сил в тигле. Они определяются отношением числа Грасгофа, характеризующего интенсивность тепловой конвекции, к квадрату числа Рейнольдса, характеризующего интенсивность вынужденного движения при вращении кристалла:  $\gamma = Gr/Re^2$ . При  $\gamma > 1$  преобладает тепловая конвекция, при  $\gamma < 1$  – вынужденная конвекция. Однако этих оценок недостаточно, так как не учитываются другие существенные факторы, такие как распределение энерговыделения на стенках тигля, изменение уровня расплава за счет вытягивания кристалла и др. Неудовлетворительная точность упомянутых качественных оценок обуславливает поиски других подходов, которые основываются на более адекватных моделях.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Численно решались уравнения Навье-Стокса в приближении Буссинеска совместно с уравнением переноса тепла. Математическая модель (Рис. 1) учитывает основные механизмы конвективного движения: вращение кристалла радиуса  $R_s$  и тигля радиуса  $R_c$  со скоростями  $\Omega_s$  и  $\Omega_c$ , соответственно, и гравитационную тепловую конвекцию. Показано положение  $A$  – «точки встречи» потоков тепловой и вынужденной конвекций на поверхности расплава.



**Рис. 1.** Схема МЧ-модели для расчета гидродинамики и теплообмена в расплаве:  
1 – дно, 2 – боковая стенка тигля, 3 – свободная поверхность расплава, 4 – ФК, 5 – ось,  
A – «точка встречи» потоков тепловой и вынужденной конвекций, X – ее положение.

Исследование факторов, влияющих на форму ФК, выполнено для процессов выращивания монокристаллов алюминий-иттриевого граната – АИГ, свойства расплава которого приведены в Таблице. При совместном действии тепловой конвекции и вращения кристалла наряду с циркуляцией от вращения кристалла вблизи боковой стенки тигля возникает подъемно-опускное движение, обусловленное действием тепловой конвекции.

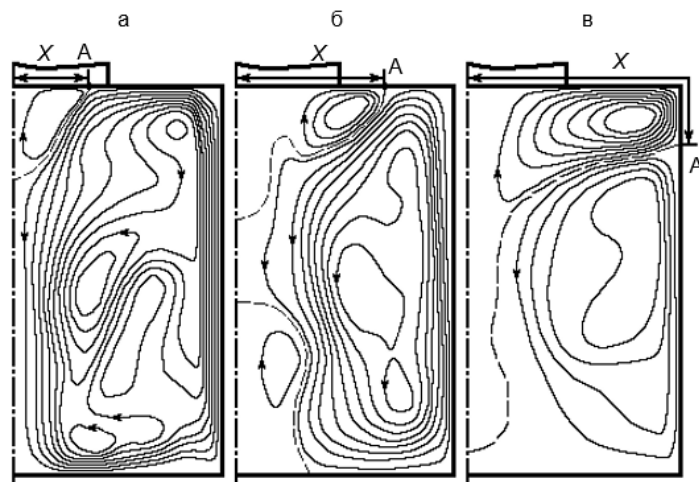
**Таблица.** Теплофизические свойства расплава АИГ.

| $T_m$ [K] | $\rho$ [г/см <sup>3</sup> ] | $\lambda$ [Вт/(см×K)] | $\chi$ [см <sup>2</sup> /с] | $\nu$ [см <sup>2</sup> /с] | $\beta$ [K <sup>-1</sup> ] | $\varepsilon$ |
|-----------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------|
| 2223      | 3.654                       | 0.01                  | $3 \times 10^{-3}$          | $5 \times 10^{-3}$         | $5 \times 10^{-4}$         | 0.3           |

Тепловая конвекция оттесняет встречную циркуляцию в подкристальную область, изменяя ее пространственную ориентацию. При этом нагретая область локализована вблизи боковой стенки тигля. Наиболее значительное изменение окружной компоненты скорости происходит вблизи вращающегося кристалла. В данном случае при  $R_s = 12.5$  мм,  $R_c = 25.0$  мм,  $H_c = 45$  мм,  $\Delta T_{\max} = 22.4$  числа Грасгофа и Био были фиксированными:  $Gr = 9 \times 10^5$ ,  $Bi = 6.1$ , число Прандтля  $Pr = 1.7$ . Структуры течения расплава в тигле при  $Re_s = 839, 1310, 1640$  показаны на Рис.2.

На Рис. 3 приведены графики зависимости положения «А – точки встречи» потоков от  $\gamma$  для различных уровней расплава, соответствующих начальной, промежуточной и конечной стадиям вытягивания кристалла (кривые 1 – 3):  $H_c = 45, 22.5, 15$  мм.

Анализ зависимости  $X(\gamma)$  показывает, что диапазоны изменения числа  $Re_s$  соответствуют трем характерным интервалам изменения положения "точки встречи" конвективных потоков:



**Рис. 2.** Структуры вихрей при смешанной конвекции для различных чисел Рейнольдса  $Re_s$ : (а) 839, (б) 1310, (в) 1640.

I – плавное перемещение точки А под кристаллом:  $0.70 \leq X \leq 1.00$  при  $0.10 \leq \gamma \leq 0.90$ ;

II – резкое изменение положения точки А на свободной поверхности и боковой стенке тигля при небольшой вариации  $\Omega_s$ :  $1.00 < X < 2.40$  при  $-0.45 < \gamma < 0.10$ ;

III – плавное изменение положения А на боковой стенке:  $2.40 \leq X \leq 2.50$  при  $-1.10 \leq \gamma \leq -0.45$ .

Для сравнения приводятся расчетные данные других авторов: 4 – [2], 5 – [3] и 6 ÷ 10 – эксперимент [4]. Сравнение кривой 6 с результатами данной работы для АИГ-кристалла показывает, что область резкого изменения положения «точки встречи» сдвинута со свободной поверхности расплава на боковую стенку тигля и в режиме II процесс носит более неустойчивый характер. При изменении условий нагрева тигля характер зависимости  $X(\gamma)$  в целом сохраняется, однако область резкого изменения положения точки А сдвинута в сторону меньших значений  $\gamma$  (кривая 5:  $\gamma = -0.55$ ).

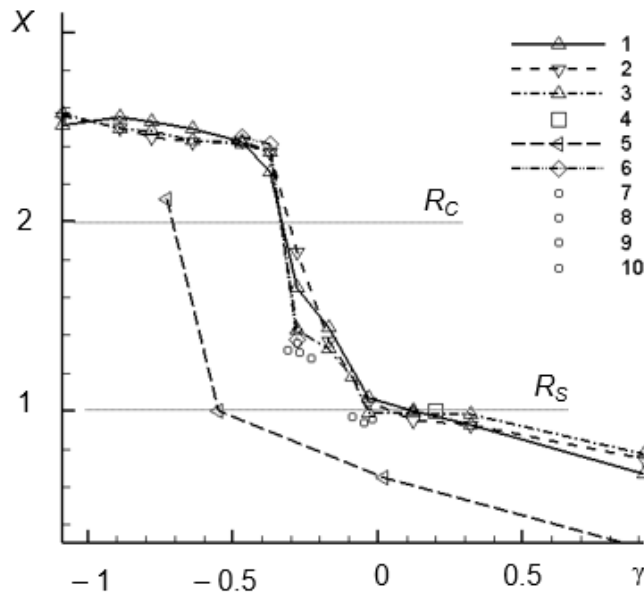
Резкое изменение положения точки А при малых изменениях технологических параметров является важной закономерностью, на основе которой можно объяснить трудности стабильного выращивания монокристаллов. Признаком положения  $X$  «точки встречи» в конкретном месте является скачок теплового потока. Его диагностика может обеспечить обратную связь при изменении скорости вращения кристалла во время про-



цесса выращивания. Например, уменьшение мощности нагрева в конце процесса должно коррелировать с уменьшением скорости вращения кристалла  $\Omega_S$  для сохранения  $\gamma$  в пределах режима III.

Для управления положением «точки встречи» потоков с помощью скорости вращения кристалла предлагается следующая формула:

$$\Omega_S = \frac{\left[ \frac{60}{2\pi} (g\beta_T)^{\frac{1}{2}} H^{\frac{3}{2}} \right]}{\left[ R_S^2 \left( \frac{\Delta T}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \right]} \left[ \text{об/мин} \right].$$



**Рис. 3.** Результаты расчетов положения  $X$  в зависимости от  $\gamma$  при  $R_S = 12.5$  мм,  $R_C = 25$  мм,  $Gr = 9 \times 10^5$ ,  $Pr = 1.7$ ,  $Bi = 6.1$  и различных уровнях расплава  $H_C$ : (1) 45, (2) 22.5, (3) 15 мм; (4) – данные расчетов [2]; (5) – [3]; (6–10) – эксперимент [4].

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена по теме госзадания ИПМех РАН № АААА-А20-120011690136-2.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brandle C.D. Flow transitions in Czochralski oxide melts // J. Crystal Growth. 1982. V. 57. P. 65–70.
2. Carruthers J.R. Flow transitions and interface shapes in Czochralski growth of oxide crystals // J. Crystal Growth. 1976. V. 36. P. 212–214.
3. Kopetsch H. Numerical simulation of the interface inversion in Czochralski growth of oxide crystals // J. Crystal Growth. 1982. V. 102. P. 505–528.
4. Казимиров В.Н., Князев С.Н., Полежаев В.И. и др. Исследование тепловой и вынужденной конвекции в расплаве при выращивании монокристаллов ГГГ методом Чохральского // Теплофиз. процессы при кристаллизации веществ и материалов. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1987. С. 3



## РАЗВИТИЕ МАЛЫХ ТРЁХМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДВУМЕРНОГО ДВАЖДЫ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ С ПРОКАЧКОЙ

*И.И.Вертгейм<sup>1</sup>, Р.В. Сагитов<sup>2</sup>, А.Н Шарифулин<sup>3</sup>*

<sup>1</sup> *Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь*

<sup>2</sup> *Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь*

<sup>3</sup> *Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь*

[wertg@icmm.ru](mailto:wertg@icmm.ru)

В работе представлен линейный анализ устойчивости известного двумерного течения, порожденного силой, периодической по двум ортогональным координатам, при наличии прокачки в этой же плоскости [1], к трехмерным возмущениям. Эти течения являются двумерными обобщениями известного пространственно-периодического течения Колмогорова, предложенного им в 1959 году, как модель каскадного переноса энергии в турбулентном потоке.

Далее будет рассматриваться семейство течений с вынуждающей силой вида  $\vec{F}(x, y) = (\lambda_1 \sin(y), \lambda_2 \sin(x))$ , и заданными значениями расходов жидкости в  $x$ - и  $y$ -направлениях, характеризующимся безразмерными параметрами  $Re_x$  и  $Re_y$ .

Ранее для этого течения было получено точное решение, при определённых параметрах двухвихревое с образованием вихрей за счет взаимодействия пространственно-периодической силы и прокачки в двух направлениях (далее ZPK96) [1]. Это решение демонстрирует при увеличении интенсивности воздействия необычные динамические свойства, связанные со структурными изменениями в точном решении: особые спектральные свойства при анализе лагранжевой динамики жидких частиц (фрактальный спектр мощности и ослабление корреляций скорости) [1].

В работе [2] показано, что возмущения с периодичностью в квадратной ячейке, как у основного течения, в широком интервале параметров не нарушают его устойчивости даже при достаточно больших значениях амплитуды вынуждающей силы. Неустойчивость, колебательная или монотонная в зависимости от параметров, проявляется лишь для возмущений в вытянутых прямоугольных ячейках периодичности.

В случае трёхмерных не зависящих от вертикальной координаты возмущений, для горизонтальных компонент возмущения скорости получим ту же спектральную задачу, что и для двумерных возмущений течения ZPK96, для которых показана устойчивость основного решения в квадратной ячейке  $l_x = l_y = 2\pi$  и неустойчивость для вытянутых ячеек периодичности.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольной ячейке горизонтального слоя с условиями периодичности по координатам  $x$  и  $y$  (2D тор), вызванное постоянной по времени дважды-периодической по пространству силой  $\vec{F}(x, y) = (\lambda_1 \sin(y), \lambda_2 \sin(x))$ . Предполагается также однородная прокачка с постоянными компонентами скорости  $(U_x, U_y, 0)$ .

В общем случае допускается, что течение под действием этих факторов может быть трёхмерным и иметь три компоненты скорости, зависящие от двух координат, как и вынуждающая сила и прокачка. Далее эти координаты  $x, y$  будем называть горизонтальными, а третью координату  $z$  - вертикальной. Мы ограничимся анализом устойчивости основного состояния, зависящего от горизонтальных координат, к трёхмерным возмущениям.

Рассматриваемое течение является решением полной системы уравнений Навье-

Стокса для  $\vec{V}(x, y)$  и удовлетворяет условиям периодичности и задания расходов жидкости в перпендикулярных направлениях. После обезразмеривания эти уравнения и условия записываются следующим образом:

$$\partial_t \vec{V} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\nabla p + \Delta \vec{V} + \vec{F}; \operatorname{div} \vec{V} = 0; 0 \leq x \leq l_x, 0 \leq y \leq l_y; \quad (1)$$

$$\vec{V}(x + l_x, y) = \vec{V}(x, y + l_y) = \vec{V}(x, y); I_x = \int_0^{l_x} dx \int_0^{l_y} V_x dy = l_x \cdot \operatorname{Re}_x; I_y = \int_0^{l_y} dy \int_0^{l_x} V_y dx = l_y \cdot \operatorname{Re}_y.$$

Для основного состояния горизонтальные компоненты полной скорости  $\vec{V}'(x, y) = \{V'_x(x, y), V'_y(x, y), V'_z(x, y)\}$  состоят из постоянной, обусловленной прокачкой, и двояко-периодической частей:  $V'_x = \operatorname{Re}_x + v'_x$ ;  $V'_y = \operatorname{Re}_y + v'_y$  а вертикальная компонента  $V'_z(x, y)$  отсутствует. Пространственно-периодические компоненты рассматриваемого поля скорости основного решения запишем в виде:

$$v_{0x} = \operatorname{Re}_x - \frac{\lambda_1 \cos\left(y + \arctan \frac{1}{\operatorname{Re}_y}\right)}{\sqrt{1 + \operatorname{Re}_y^2}} = \operatorname{Re}_x - \frac{\lambda_1}{2} \left( \frac{e^{iy}}{\operatorname{Re}_y - i} + \frac{e^{-iy}}{\operatorname{Re}_y + i} \right), \quad (2)$$

$$v_{0y} = \operatorname{Re}_y - \frac{\lambda_2 \cos\left(x + \arctan \frac{1}{\operatorname{Re}_x}\right)}{\sqrt{1 + \operatorname{Re}_x^2}} = \operatorname{Re}_y - \frac{\lambda_2}{2} \left( \frac{e^{ix}}{\operatorname{Re}_x - i} + \frac{e^{-ix}}{\operatorname{Re}_x + i} \right)$$

Поскольку основное решение (2) не зависит от вертикальной координаты  $z$ , его малые возмущения скорости и давления можно представить в виде  $\delta \vec{V}(x, y, z) = \vec{v}(x, y) \exp(\sigma t + ikz)$ ;  $\delta p(x, y, z) = p(x, y) \exp(\sigma t + ikz)$ , где  $k = 2\pi/l_z$  – волновое число возмущения в направлении  $z$ . Подставив возмущения в виде Фурье-разложения

$$v_x = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \left( X_{m,n} \cdot e^{\frac{imx}{l'_x} + \frac{iny}{l'_y} + ikz} + X_{m,n}^* \cdot e^{\frac{imx}{l'_x} + \frac{iny}{l'_y} - ikz} \right), v_y = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N \left( Y_{m,n} \cdot e^{\frac{imx}{l'_x} + \frac{iny}{l'_y} + ikz} + Y_{m,n}^* \cdot e^{\frac{imx}{l'_x} + \frac{iny}{l'_y} - ikz} \right), \quad (3)$$

где  $l'_x = \frac{l_x}{2\pi}$ ;  $l'_y = \frac{l_y}{2\pi}$ , исключая давление и приведя подобные, получим спектральную задачу для амплитуд трёхмерных возмущений вида

$$\left\{ \sigma + \frac{im}{l'_x} \operatorname{Re}_x + \frac{in}{l'_y} \operatorname{Re}_y + \frac{m^2}{l_x'^2} + \frac{n^2}{l_y'^2} + k^2 \right\} \left\{ \left( \frac{m^2}{l_x'^2} + k^2 \right) X_{m,n} + \frac{mn}{l'_x l'_y} Y_{m,n} \right\} +$$

$$- \frac{\lambda_1}{2} \left\{ \frac{m}{l'_x} \left( \frac{m^2}{l_x'^2} + k^2 \right) \left( \frac{i}{\operatorname{Re}_y - i} X_{m,n-l'_y} + \frac{i}{\operatorname{Re}_y + i} X_{m,n+l'_y} \right) + \frac{i}{\operatorname{Re}_y - i} \left( \frac{m^2 n - l'_y}{l_x'^2 l'_y} + k^2 \right) Y_{m,n-l'_y} + \frac{i}{\operatorname{Re}_y + i} \left( \frac{m^2 n + l'_y}{l_x'^2 l'_y} - k^2 \right) Y_{m,n+l'_y} \right\} -$$

$$- \frac{\lambda_2}{2} \left\{ \frac{n}{l'_y} \left( \frac{m - l'_x}{l'_x} \frac{m}{l'_x} + k^2 \right) X_{m-l'_x,n} + \frac{i}{\operatorname{Re}_x + i} \left( \frac{m + l'_x}{l'_x} \frac{m}{l'_x} + k^2 \right) X_{m+l'_x,n} + \frac{n}{l'_y} \left( \frac{i}{\operatorname{Re}_x - i} \frac{m}{l'_x} Y_{m-l'_x,n} + \frac{i}{\operatorname{Re}_x + i} \frac{m}{l'_x} Y_{m+l'_x,n} \right) \right\} = 0, \quad (4)$$

### УСТОЙЧИВОСТЬ К ТРЁХМЕРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ.

Далее рассматривается случай  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  (основное течение ZPK96 [1]). Если в (4) положить  $k=0$  (длинноволновые по вертикальной координате возмущения), для горизонтальных компонент возмущения скорости получим ту же спектральную задачу, что и для двумерных возмущений течения ZPK96 [2], для которых показана устойчивость основного решения (2) в квадратной ячейке  $l_x = l_y = 2\pi$  и неустойчивость для вытянутых ячеек периодичности [2]. При конечных значениях  $k$  из (4) вытекает возможность неустойчивости и в квадратной ячейке, и изменение типов и областей устойчивости в пространстве параметров для вытянутых ячеек.

В расчётах инкрементов возмущений в зависимости от амплитуды силы  $\lambda$  подтверждается, что учёт пространственных возмущений в длинноволновом пределе не приводит к изменению характера устойчивости основного течения: трёхмерные возмущения не являются наиболее опасными.

Удалось найти моды трёхмерных возмущений, опасных для базисного решения в квадратной ячейке с длинами сторон, равными периоду вынуждающей силы (рис. 1).

### ВЫВОДЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ.

Проанализирован ряд вариантов трёхмерных возмущений основного двоякопериодического течения с прокачкой. Поскольку для длинноволновых по вертикальной координате возмущений ( $k=0$ ), для горизонтальных компонент возмущения скорости получим ту же спектральную задачу, что и для двумерных возмущений течения ZPK96 для которых показана устойчивость основного решения в квадратной ячейке  $l_x = l_y = 2\pi$  и неустойчивость для вытянутых ячеек периодичности, эти же свойства сохраняются и для длинноволновых трёхмерных возмущений. При конечных значениях  $k$  из расчётов вытекает возможность неустойчивости и в квадратной ячейке, и изменение типов и областей устойчивости в пространстве параметров для вытянутых ячеек.

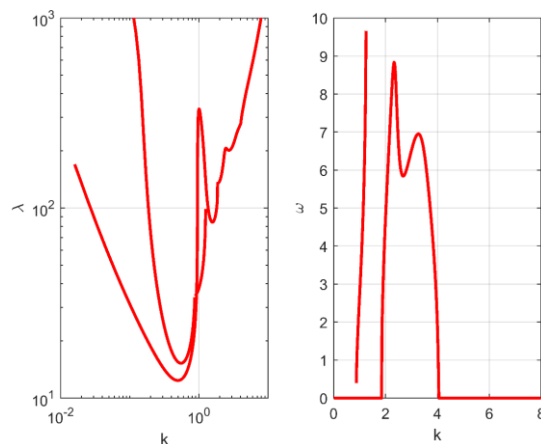


Рис. 1. Зависимость порога неустойчивости (а) и критической частоты (б) 3D возмущений решения ZPK96 от волнового числа по вертикали ( $l_x = l_y = 2\pi$ ,  $Re_x=0$ ,  $Re_y=1$ ).

В дальнейшем на основе аналитических и численных методов предполагается определить границы различных структурных типов нелинейного трёхмерного решения, его устойчивости, выявить области параметров, где трёхмерные возмущения более опасны, исследовать вторичные нелинейные стационарные и колебательные режимы, а также характеристики лагранжевой динамики частиц.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках совместного российско-германского проекта 20-51-12010 ННИО\_а.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zaks M., Pikovsky A., Kurths J. Steady viscous flow with fractal power spectrum //Phys. Rev. Lett., 1996. V.77. P. 4338-4341.
2. Вертгейм И.И., Закс М.А., Сагитов Р.В., Шарифулин А.Н. Неустойчивости, бифуркации и нелинейная динамика в двумерных обобщениях течения Колмогорова // Изв. РАН. МЖГ. 2022. № 4. С. 11-25.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ СИНТЕЗА БИОАКТИВНЫХ ПОКРЫТИЙ ЭЛЕКТРОФОРЕТИЧЕСКИМ ОСАЖДЕНИЕМ

*В.Р. Веснин<sup>1</sup>, А.С. Скрябин<sup>1</sup>, П.А. Цыганков<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва*

<sup>2</sup>*Университет Индустриаль де Сантандер, Колумбия*

[vesnin.volodya@gmail.com](mailto:vesnin.volodya@gmail.com)

В настоящее время актуальной проблемой является повышение биосовместимости различных медицинских имплантов путем осаждения разного рода органических и неорганических материалов [1]. Один из способов стимуляции остеоинтеграции является покрытие имплантов кальций-фосфатными и оксидными слоями [2].

В данном исследовании изучались процессы создания биоактивных покрытий методом электрофорезного осаждения гидроксиапатита (ГАп) на металлические мембраны и углеродные импланты. Электрофорез – это метод образования коллоидов, при котором заряженные коллоидные частицы из стабильной суспензии осаждаются на противоположно заряженную подложку с помощью приложения постоянного электрического поля [3]. Физико-химические свойства импланта влияют на биологическую реакцию в организме. Электрофоретическое осаждение позволяет получать толстый и пористый слой покрытия с минимальными изменениями химического и фазового состава. Последующая термическая обработка может влиять на состав, кристалличность, средний размер кристаллитов и др. параметры [4]. Высокая степень контроля над морфологией покрытия может быть достигнута за счет регулирования условий осаждения, а также размера и формы керамического порошка. С увеличением времени осаждения и напряжения толщина слоя увеличивается. Принципиальным недостатком покрытий, полученных методом электрофореза, является недостаточная адгезионная прочность [5]. Последующий нагрев импланта с покрытием до температур плавления ГАп позволяет уплотнить структуру.

В качестве исходных подложек были использованы стандартные титановые мембраны (ООО «Эндокарбон», г. Пенза), из которых нарезались пластины с площадью 1 см<sup>2</sup>; углеродные наноструктурные импланты УНИ (ООО «НТМ+», г. Всеволожск). Исходным сырьем для нанесения Са-Р покрытий являлся коммерческий кальцийдефицитный нестехиометрический ГАп (99.0 %) с дисперсностью частиц не выше 50 мкм производства ООО «Битека» (г. Одинцово, Россия), в котором в структуре присутствовал ион моногидрофосфата [HPO<sub>4</sub>]<sup>2-</sup>.

Разработаны методики нанесения биокерамик на титановые мембраны: как однослойные покрытия на основе микродугового оксидирования (МДО) или электрофореза (Са-Р), так и бислойные покрытия Са-Р/TiO<sub>2</sub> путём последовательной обработки МДО и электрофорезом. МДО проводилось в среде фосфатного электролита в течение 5 мин при напряжении ≈380 В. Электрофорезное нанесение проводилось в электролите на основе изопропилового спирта с содержанием ГАп ≈10 г/л при постоянном напряжении 300 В и плотности тока ≈160-250 мкА/см<sup>2</sup> в течение ≈35 с (см. рис. 1). Часть образцов отжигали при 700 °С в течение 2,5 часов. Такая операция является особенностью метода, т.к. позволяет управлять кристалличностью покрытий, а, следовательно, и биологическим ответом в организме. Мембраны с покрытием замачивали в 1% альгинате натрия с последующей сушкой при температуре окружающей среды.

Электрофоретическое осаждение ГАп на УНИ производилось в течение ≈20 с при напряжении источника 630 В. Плотность тока составляла ≈190-240 мкА/см<sup>2</sup> (см. рис. 1). Полученные образцы с покрытиями промывались в дистиллированной воде и потом отжигались при 400 °С в течение 3 часов.

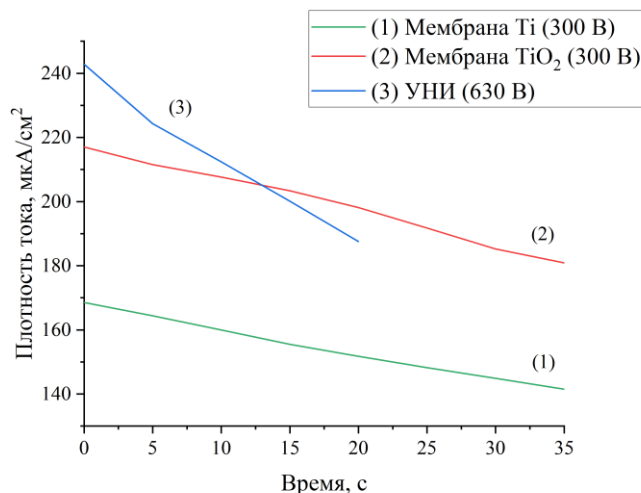


Рис. 1. График зависимости плотности тока от времени осаждения ГАп на титановую мембрану без (1) и с (2) оксидным покрытием  $\text{TiO}_2$ , а также на УНИ (3).

Был проведен комплексный рентгенофазовый анализ полученных покрытий для получения информации о фазовом составе, кристалличности и размерах кристаллитов. Рентгеновские спектры, показанные на рис.2, были получены с помощью дифрактометра ДРОН-3М ( $\text{CuK}\alpha$ -излучение, диапазон углов  $2\theta$  20–60°, шаг по углу 0,02°). Интерпретация полученных спектров выполнена с использованием открытой базы данных Crystallography Open Database. Обнаружены все основные пики гексагонального ГАп (COD ID № 9003552). Других фосфатов, которые могут быть продуктами разложения ГАп при осаждении и термической дообработке, не обнаружено. Гало в диапазоне  $2\theta \approx 27\text{--}38^\circ$  свидетельствовало о наличии аморфных фосфатов в исследованных покрытиях.

Установлено, что спектры РФА исходных ГАп аналогичны спектрам нанесенных неотожженных покрытий, а термообработка повлияла на их параметры. Это проявлялось в уменьшении интенсивности аморфного гало и усилении рефлекса  $d_{300}$  для отоженных образцов. Кристалличность исходного ГАп и нанесенного покрытия составляла около  $C_r \approx 29,9\text{--}35,8\%$ . После отжига значения  $C_r$  увеличились до  $C_r \approx 40,5\text{--}50,0\%$ . Размер кристаллов мало зависел от термической обработки в пределах точности РФА и для всех исследованных образцов составлял около  $D_{002} \approx 16,5\text{--}22,5$  нм. Об этом свидетельствовали небольшие зарегистрированные различия в значениях  $\beta_{002}$ .

Морфологию покрытий визуализировали с помощью Quattro SEM (Thermo Fisher Scientific; энергия 5–10 кВ, увеличение  $\times 400\text{--}3500$ ). СЭМ-изображения подготовленных образцов сколов представлены на рис. 3. Толщина покрытия  $\text{TiO}_2$  на мембранах составляет  $\approx 13\text{--}20$  мкм. Осажденные оксидные пленки имели сложную поверхность. Обнаружены поры микронного размера ( $\approx 1\text{--}5$  мкм) в титановой мембране. В случае отоженного двухслойного покрытия ГАп/ $\text{TiO}_2$  толщина слоя Са-Р составляла примерно  $\approx 150\text{--}200$  мкм. Выявлено множество протяженных и глубоких трещин. Верхний слой состоял из наночастиц исходного сырья с альгинатным связующим. Как правило, осажденные бислои покрывают мембраны достаточно равномерно. Для отоженных однослойных покрытий Са-Р обнаружено частичное отслоение ГАп. Покрытия также имели рыхлую и пористую структуру. Влияние термической обработки на верхнюю поверхность не обнаружено. Наличие промежуточного оксидного слоя приводит к уменьшению растрескивания и отслаиванию верхней пленки Са-Р. Поверхность Са-Р также содержала внешние поры ( $\approx 1\text{--}5$  мкм).



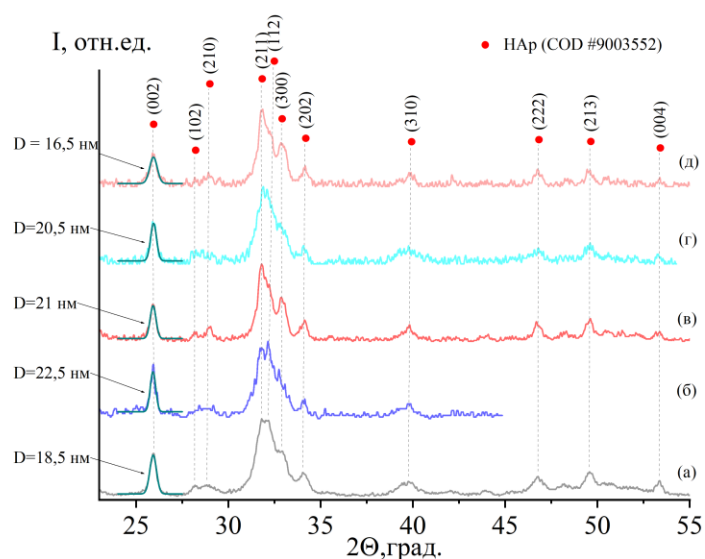


Рис. 2. Спектры РФА исходного ГАп (а), пленки Са-Р без (б) и с (в) термообработкой при 700 °С, пленки Са-Р/ТiO<sub>2</sub> без (г) и с (д) термообработкой при 700 °С.

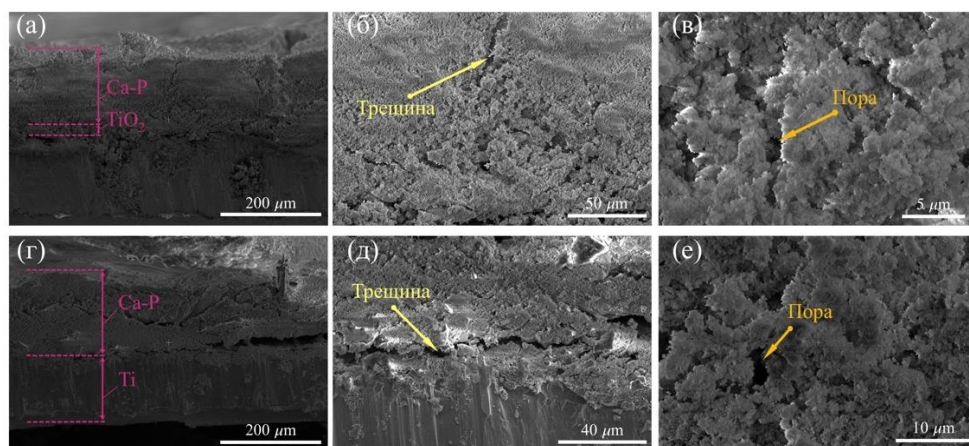


Рис. 3. СЭМ-изображения образцов СаР/ТiO<sub>2</sub> и СаР при малом (а, г), среднем (б, д) и большом увеличении (в, е)

В результате выполненных исследований показано, что предложенная технология электрофоретического осаждения и последующей обработки подходит для создания слоев биоактивных кальций-фосфатов на поверхностях титановых мембран и углеродных имплантов.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда. Номер гранта 20-79-10190.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Priyadarshini B., et al. Bioactive coating as a surface modification technique for biocompatible metallic implants: a review //Journal of Asian Ceramic Societies. 2019. Vol. 7. №. 4. P. 397-406.
2. Gil J. et al. Mineralization of titanium surfaces: Biomimetic implants //Materials. 2021. Vol. 14. №. 11. P. 2879.
3. Sarkar P., De D., Rho H. Synthesis and microstructural manipulation of ceramics by electrophoretic deposition //Journal of Materials Science. 2004. Vol. 39. №. 3. P. 819-823.



4. Demnati I. et al. Plasma-sprayed apatite coatings: review of physical-chemical characteristics and their biological consequences //Journal of Medical and Biological Engineering. 2014. Vol. 34. №. 1. P. 1-7.
5. Xiao X. F., Liu R. F. Effect of suspension stability on electrophoretic deposition of hydroxyapatite coatings //Materials Letters. 2006. Vol. 60. №. 21-22. P



## ЗАКОНЫ ПОДОБИЯ ДЛЯ СКОРОСТИ И ТЕМПЕРАТУРЫ В СВЕРХЗВУКОВОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

*И.И. Вигдорович, А.И. Агеев, Т.А. Манаенкова*

*НИИ Механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва*

*Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва*

[vigdorovich.igor@gmail.com](mailto:vigdorovich.igor@gmail.com)

Как известно, описание турбулентных течений в рамках усредненных уравнений Навье-Стокса (уравнений Рейнольдса) сталкивается с фундаментальной проблемой, связанной с поиском дополнительных условий для замыкания задачи. Практическому решению этой проблемы посвящена современная теория моделей турбулентности. Однако в силу полуэмпирического характера теории ее результаты являются нестрогими и приближенными.

В докладе предложен другой подход к проблеме замыкания, который может быть применен к относительно узкому классу канонических течений, но зато свободен от частных гипотез и основан только на первых принципах. Согласно идее, впервые высказанной в [1], если течение в целом зависит от конечного числа постоянных параметров, турбулентное касательное напряжение и турбулентный поток тепла могут быть представлены в виде функций от градиентов усредненной скорости и температуры. Вместе с уравнениями Рейнольдса и энергии эти функциональные связи дают поставленную краевую задачу для полей усредненной скорости и температуры, которая после специальной замены переменных решается методом сращиваемых асимптотических разложений при больших значениях логарифма числа Рейнольдса. В результате для целого ряда несжимаемых пристенных течений получены законы подобия и расчетные соотношения для основных гидро- и термодинамических величин, а также выводы о качественных особенностях и асимптотической структуре течения (например, [2-6]).

В докладе этот подход распространен на сверхзвуковой турбулентный пограничный слой на пластине при нулевом продольном градиенте давления. Исследованы законы подобия для основных гидродинамических и тепловых величин. Для течения несжимаемой жидкости такие законы подобия надежно установлены. К ним относятся закон стенки Прандтля, законы дефекта скорости и трения Кармана и аналогичные соотношения для температуры и теплового потока на стенке. В промежуточной пристеночной области пограничного слоя профили скорости и температуры удовлетворяют известному логарифмическому закону. Обобщение закона стенки для профиля скорости на случай турбулентного течения сжимаемого газа принадлежит Ван Дристу [7]. В своем анализе, однако, он, как и его последователи, просто использовал формулу пути смешения Прандтля. Поэтому этот результат нельзя считать в такой же степени обоснованным как соотношения для несжимаемой жидкости, которые, фактически, получены из первых принципов. Более того, известно, что формула Ван Дриста заметно хуже

согласуется с экспериментальными данными, чем ее аналог для несжимаемого течения. Расхождения особенно существенны при наличии теплопередачи на стенке.

Цель настоящей работы – объяснить причину рассогласования формулы Ван Дриста с результатами измерений и вывести новые законы подобия для скорости и температуры, которые являются точными асимптотическими решениями уравнений Рейнольдса для сжимаемого газа. Уравнения Рейнольдса решаются методом сращиваемых асимптотических разложений для различных характерных областей течения, в число которых входят: вязкий подслой, логарифмический подслой и внешняя область пограничного слоя. Малый параметр теории – число Маха, вычисленное по динамической скорости и энтальпии газа на стенке. Рассматриваются все возможные случаи теплопередачи на обтекаемой поверхности – охлаждаемая, теплоизолированная и нагреваемая стенка.

Показано, что в вязком подслое пограничного слоя сжимаемого газа безразмерный профиль скорости такой же, как для несжимаемой жидкости, а профиль температуры – суперпозиция известного профиля для несжимаемой жидкости при нулевом кинетическом нагреве и профиля температуры, соответствующего частному случаю теплоизолированной пластины, когда кинетический нагрев не равен нулю.

Решение задачи в логарифмическом подслое и асимптотическое сращивание с решением для вязкого подслоя дают связь между температурой и скоростью (интеграл Крокко) и законы стенки для скорости и температуры. Главный член асимптотики для профиля скорости соответствует известной формуле Ван Дриста [7]. Однако полученное решение содержит дополнительные слагаемые порядка единицы, что объясняет расхождение формулы Ван Дриста с экспериментальными данными. Аналогичную структуру имеет закон стенки для температуры, который для сжимаемого течения сформулирован впервые. Кроме постоянной Кармана и турбулентного числа Прандтля в логарифмической области, известных для течения несжимаемой жидкости, полученные соотношения содержат три новые универсальные константы, которые не зависят от молекулярных свойств и отношения теплоемкостей газа. Сращивание решений для логарифмического подслоя и внешней области дает законы трения и теплообмена, выражения для коэффициентов восстановления и аналогии Рейнольдса, законы дефекта скорости и температуры для внешней области пограничного слоя.

#### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 22-21-00315).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вигдорovich И.И. Законы подобия для распределения скорости и температуры в пристеночной области турбулентного пограничного слоя со вдувом и отсосом// Докл. Академии наук. 2003. Т. 392. № 3. С. 340-345.
2. Вигдорovich И.И. Тепловой турбулентный пограничный слой на проницаемой пластине// ЖЭТФ. 2007. Т. 131. Вып. 6. С. 1115-1133.
3. Vigdorovich I., Oberlack M. Analytical study of turbulent Poiseuille flow with wall transpiration// Phys. Fluids. 2008. V. 20. No. 5. P. 055102-1-055102-9.
4. Вигдорovich И.И. Автомодельный турбулентный пограничный слой с градиентом давления. Закон дефекта скорости// ЖЭТФ. 2013. Т. 144. Вып. 2(8). С. 413-427.
5. Вигдорovich И.И. Автомодельный турбулентный пограничный слой с градиентом давления. Четыре режима течения// ЖЭТФ. 2014. Т. 146. вып. 5(11). С. 1062-1089.
6. Vigdorovich I.I. A law of the wall for turbulent boundary layers with suction: Stevenson's formula revisited// Phys. Fluids. 2016. V. 28. No. 8. P. 085102-1-7.
7. Van Driest E.R. Turbulent boundary layer in compressible fluids// J. Aeronaut. Sci. V. 18. 1951. P. 145-160.

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФРАГМЕНТАЦИИ СТРУИ МЕТОДОМ VOF

Г.Ю.Волков<sup>1</sup>, В.И.Мелихов<sup>2</sup>, О.И. Мелихов<sup>2</sup>, С.Е. Якуш<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Ордена Ленина Научно-исследовательский и конструкторский институт  
энерготехники имени Н.А. Доллежалея, Москва

<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва

<sup>3</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

[gogirik92@gmail.com](mailto:gogirik92@gmail.com)

### ВВЕДЕНИЕ.

При развитии аварий на атомных электростанциях в некоторых случаях возможно образование смеси высокотемпературного расплава с водой, что может привести к паровому взрыву, создающему угрозу целостности конструкций реакторной установки и защитной оболочки [1, 2]. Образование такой смеси происходит при струйном вливании расплава в воду или, наоборот, при струйном вливании воды в расплав. В обоих случаях происходит фрагментация струи и последующее перемешивание образующихся фрагментов с несущей средой. Первый вариант может иметь место при тяжелых авариях с плавлением материалов реактора с водяным теплоносителем (ВВЭР, PWR). Вторым вариантом может реализоваться при разрыве теплообменной трубки парогенератора реактора со свинцовым теплоносителем типа БРЕСТ, когда высокоскоростная струя воды, находящейся под давлением порядка 20 МПа, будет истекать в объем парогенератора, заполненный жидким свинцом при давлении порядка 1 МПа.

Характеристики образующейся дисперсной смеси, в первую очередь её дисперсный состав, будут в значительной степени определять возможность парового взрыва этой смеси и его энергетический потенциал; поэтому анализу фрагментации струи в условиях, характерных для аварий на АЭС, уделяется значительное внимание. Обзор экспериментальных и теоретических работ по данной тематике содержится в [2].

Фрагментация струи расплава представляет собой сложный гидродинамический процесс, в ходе которого возникающие по поверхности раздела возмущения быстро растут, их форма эволюционирует, в результате с поверхности струи срываются фрагменты, движущиеся в несущей среде. На эту гидродинамику накладываются процессы теплообмена между струей и окружающей жидкостью, которые приводят к кипению относительно холодной воды на поверхности горячего расплава, образованию паровой пленки и отдельных пузырьков пара вблизи струи. Суперпозиция гидродинамических и тепловых процессов затрудняет применение аналитических средств исследования и диктует необходимость экспериментальных методов исследования и численного моделирования.

В настоящей работе выполнено численное исследование методом VOF [3] фрагментации струи жидкости при её проникновении в пространство, занимаемое другой жидкостью. Был использован программный код OpenFOAM с открытым исходным кодом [4]. Рассмотрены случаи проникновения струи расплава в объем, занимаемый водой, и струи воды в объем, занимаемый расплавленным свинцом.

### ОПИСАНИЕ МЕТОДА VOF.

Метод VOF (Volume of Fluid) позволяет моделировать течение двух и более несмешивающихся жидкостей в разнообразных гидродинамических ситуациях. Отличительной особенностью метода является введение пространственных распределений объемных долей каждой жидкости (фазы)  $\alpha_i$  и единого поля скорости  $\mathbf{U}$  для всех фаз.

При переходе через межфазную поверхность, разделяющую несмешивающиеся жидкости, объемные доли фаз меняются скачком от нуля до единицы и наоборот. При численной реализации метода межфазные поверхности моделируются слоем конечной толщины (порядка нескольких ячеек), в котором объемные доли плавно меняются от нуля до единицы. Это позволяет рассматривать объемные доли как непрерывные функции и применять для их расчета соответствующие численные методы.

В методе VOF совокупность несмешивающихся жидкостей заменяется на одну эффективную жидкость с переменными свойствами, зависящими как от физических свойств, так и объемных долей фаз. Свойства эффективной жидкости (плотность, вязкость и т.д.) определяются суммированием соответствующих свойств всех фаз с весами, равными объемным долям фаз. Для объемных долей фаз решаются уравнения переноса при помощи специальных численных методов, не допускающих размытие межфазных границ.

#### **ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ.**

Была исследована задача о проникновении вертикальной струи расплава в бассейн с водой. В качестве граничных условий на боковых границах и дне бассейна задавались условия прилипания и нулевые производные по нормали объемной доли жидкости. Верхняя граница расчетной области рассматривалась как открытая, с фиксированным статическим давлением, при этом в случае возникновения обратного тока предполагалось, что в область поступает жидкость, первоначально заполняющая бассейн. На участке верхней границы, соответствующем втекающей струе, объемная доля расплава полагалась равной единице, скорость поддерживалась постоянной как во времени, так и по поперечной координате. Учитывалась сила тяжести.

Во второй задаче рассматривалось проникновение водяной струи в расплав свинца. Сила тяжести не учитывалась. Боковые (относительно направления струи) границы расчетной области полагались открытыми, то есть на них задавались условия свободного вытекания потока и фиксированного давления. Противоположная граница расчетной области, к которой двигалась струя, считалась непроницаемой стенкой, на ней ставились условия прилипания. Истечение струи воды осуществлялось через щель в непроницаемой поверхности.

Для каждой задачи использовалась плоская постановка, что позволяет моделировать асимметричные течения и крупные вихри, возникающие из-за развития неустойчивости, даже при симметричных начальных и граничных условиях. Тепловые процессы и фазовые переходы не рассматривались. Расплав и вода моделировались несжимаемыми вязкими жидкостями.

#### **РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ.**

Были выполнены расчеты проникновения струи расплава металла Вуда в сосуд с водой. Использовались те же физические и геометрические параметры, что и в работе [5], где моделирование распада струи при проникновении в бассейн с водой выполнялось коммерческим кодом ANSYS Fluent. Расчетная область имела высоту 0.5 м и ширину 0.075 м, ширина струи на входе в область составляла 0.005 м, её скорость - 16 м/с. Расчеты проводились на сетках с квадратными ячейками со сторонами 0.5, 0.25 и 0.125 мм. На рисунке 1 показана вычисленная форма струи в момент времени 11 мс. Результаты, представленные на рисунке 1, получены на сетке 0.5 мм (слева), 0.25 мм (второе изображение слева), 0.125 мм (третье изображение слева). Изображение справа получено расчетом кодом ANSYS Fluent [5] на адаптивной сетке, в которой минимальная длина ячейки была равно 0.125 мм.

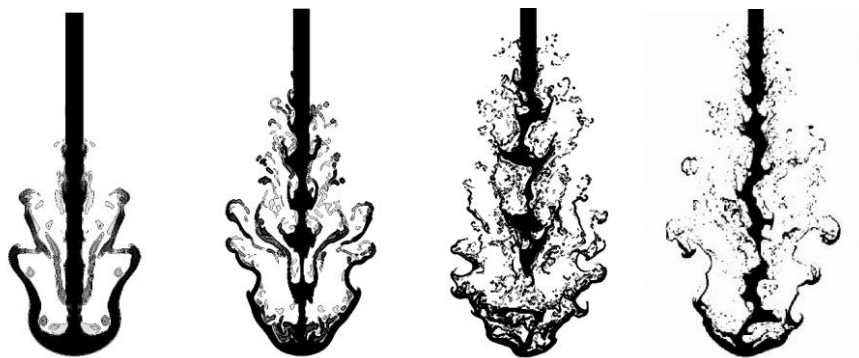


Рис. 1. Форма струи расплава в момент 11 мс

Расчеты второй задачи проводились в области длиной 1 м и шириной 0.6 м, ширина струи воды составляла 12 мм, скорость струи равнялась 20 м/с. Расчеты выполнены на сетке с ячейками  $0.5 \times 0.5$  мм. Пример расчета представлен на рисунке 2.

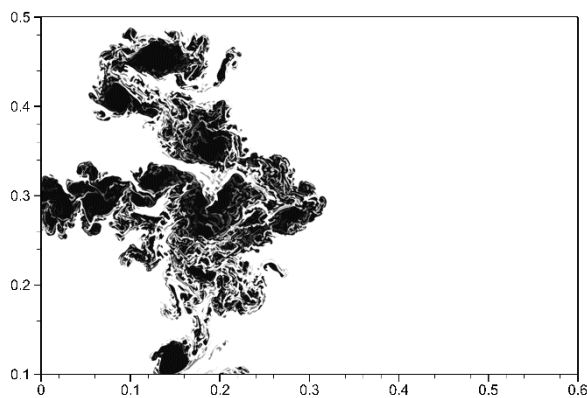


Рис. 2. Форма струи воды в момент 150 мс

Из рисунков 1 и 2 следует, что в обоих случаях происходит интенсивная фрагментация струи, что обусловлено, прежде всего, высокой скоростью струи в каждом случае. Сопоставление с расчетом кодом ANSYS Fluent показало неплохое соответствие расчетов по разным кодам, учитывая стохастичность исследуемого процесса. Средний размер образующихся фрагментов расплава (в первой задаче) равнялся 1.2 мм, а средний размер фрагментов воды (вторая задача) был 4.5 мм.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** Проведенное численное исследование продемонстрировало возможности метода VOF моделировать процесс фрагментации струи жидкости при её проникновении в объем, занимаемый другой жидкостью. Выполненный анализ фрагментации струи расплава в воде и фрагментации струи воды в расплаве показал, что в обоих рассмотренных случаях, важных с практической точки зрения, возможно образование двухфазной смеси, которая способна произвести паровой взрыв.

#### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках проекта № 21-19-00709.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мелихов В.И., Мелихов О.И., Якуш С.Е. Термическое взаимодействие высокотемпературных расплавов с жидкостями // Теплофизика высоких температур. 2022. Т. 60. Вып. 2. С. 280-318.

2. Мелихов В.И., Мелихов О.И. Якуш С.Е. Гидродинамика и теплофизика паровых взрывов. М.: Издательство ИПМех РАН. 2020. С. 276.
3. Hirt C.W., Nichols B.D. Volume of Fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // Journal of Computational Physics. 1981. V. 39. P. 201–225.
4. OpenFOAM: The open source CFD toolbox. URL: <https://www.openfoam.com/>.
5. Thakre S., Manickam L., Ma W. A numerical simulation of jet breakup in melt coolant interactions // Ann. Nucl. Energy. 2015. V. 80. P. 467–475.



## МОДЕЛИРОВАНИЕ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ ПРИ ОБТЕКАНИИ МАЛОЙ НЕРОВНОСТИ

Р.К. Гайдуков, В. Г. Данилов, А. В. Фонарева

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,  
Москва

[roma1990@gmail.com](mailto:roma1990@gmail.com)

Мы рассматриваем задачу обтекания вязкой несжимаемой жидкостью ледяной поверхности с малой локализованной в точке  $x_0$  неровностью (например, горбик или ямка) при достаточно больших значениях числа Рейнольдса  $Re$  в отсутствие силы тяжести. Целью работы является исследование фазового перехода (лед-вода).

Будем считать, что граница раздела фаз  $y_s$  имеет следующий вид:

$$y_s = \varepsilon^{4/3} h(t, (x - x_0) / \varepsilon), \quad (1)$$

где  $\varepsilon = Re^{-1/2}$  – малый параметр,  $h(t, \xi)$  – некоторая быстроубывающая по  $\xi = (x - x_0) / \varepsilon$  функция, описывающая форму неровности, которая меняется во времени в силу фазового перехода (процессов плавления-кристаллизации), см. рис. 1. Предполагается, что набегающий поток плоскопараллельный со скоростью  $(u_\infty, 0)$ , а точка  $x_0$  удалена на от края на столько, что перед неровностью сформировался пограничный слой Прандтля (т.е. скорость  $\mathbf{u}_B$  в пограничном слое описывается функцией Блазиуса).

Отметим, что выбранные в (1) геометрические масштабы (амплитуда  $O(\varepsilon^{4/3})$  и ширина неровности  $O(\varepsilon)$ ) порождают двухпалубную структуру пограничного слоя [1], [2], состоящую из классического пограничного слоя Прандтля и тонкого погранслоя внутри него, см. области II и I на рис.1, соответственно.

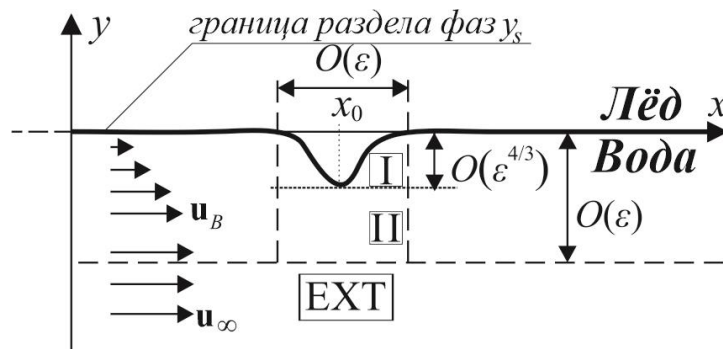


Рис. 1. Геометрия задачи и двухпалубная структура пограничного слоя.

Многопалубные (трех- и двухпалубные) структуры пограничного слоя в задачах обтекания малых неровностей известны довольно давно, начиная с работ В. Я. Нейланда, К. Стюартсона, Ф. Т. Смита, и исследованы во множестве работ известных ученых, в том числе исследовался теплоперенос в задаче обтекания газом пластины с плоскими локальными нагреваемыми зонами для трехпалубной модели. Однако, задача о фазовом переходе в рамках многопалубных структур не исследовалась.

С гидродинамической стороны, рассматриваемая задача представляет собой нестационарную задачу обтекания неровности с изменяемой во времени формой. В данной работе нас интересует течение в области около поверхности (тонком пограничном слое I, см. рис. 1). Асимптотический анализ уравнений Навье-Стокса (см. [2]) показал, что течение в этой области описывается начально-краевой задачей для системы уравнений Прандтля с самоиндуцированным давлением

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t} + u^* \left( \frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right) + v^* \frac{\partial u^*}{\partial \theta} = - \frac{\partial p^*}{\partial \xi} \Big|_{\tau=0} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} + \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial u^*}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v^*}{\partial \theta} + \frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} = 0, \quad (2) \\ u^* \Big|_{t=0} = U_0(\xi, \theta), \quad u^* \Big|_{\theta=0} = v^* \Big|_{\theta=0} = 0, \quad u^* \Big|_{\xi \rightarrow \pm \infty} = f''(0), \quad v^* \Big|_{\xi \rightarrow \pm \infty} = 0, \\ \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \Big|_{\theta \rightarrow -\infty} = f''(0), \quad \frac{\partial p^*}{\partial \xi} \Big|_{\tau=0} = f''(0)v^* \Big|_{\theta \rightarrow -\infty}, \end{aligned}$$

где  $u^* = u^*(t, \xi, \theta)$  и  $v^* = v^*(t, \xi, \theta)$  – горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости,  $f(\gamma)$  – функция Блазиуса;  $U_0$  – некоторая гладкая функция;  $\theta = (y - y_s) / \varepsilon^{4/3}$  – вертикальная погранслоинная переменная (мы выбираем ее так, что обтекаемая поверхность (1)  $y = y_s$  становится плоской,  $\xi = (x - x_0) / \varepsilon$  – горизонтальная переменная.

Аналогичный асимптотический анализ уравнения теплопроводности приводит к следующим задачам, описывающим в области I распределение температуры  $T_l = T_l(t, \xi, \theta)$  в жидкости и  $T_s = T_s(t, \xi, \bar{\theta})$  во льду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_l}{\partial t} + u^* \left( \frac{\partial T_l}{\partial \xi} - \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial T_l}{\partial \theta} \right) + v^* \frac{\partial T_l}{\partial \theta} = k_l \frac{\partial^2 T_l}{\partial \theta^2} + \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial T_l}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial T_s}{\partial t} = k_s \frac{1}{x_0 u_\infty} \frac{\partial^2 T_s}{\partial \bar{\theta}^2}, \quad (3) \\ T_l \Big|_{\xi \rightarrow \pm \infty} = T_l \Big|_{\theta \rightarrow -\infty} = T_l \Big|_{t=0} = T_\infty, \quad T_l \Big|_{\theta=0} = T_s \Big|_{\bar{\theta}=h} = T_w, \quad T_s \Big|_{\xi \rightarrow \pm \infty} = T_s \Big|_{\bar{\theta} \rightarrow \infty} = T_s \Big|_{t=0} = T_{ice}, \end{aligned}$$

где  $k_i = \lambda_i / (\rho_i c_i \mu)$ ,  $i = s, l$ ,  $\lambda_i, \rho_i$  и  $c_i$  – коэффициент теплопроводности, плотность и удельная теплоемкость жидкости ( $i = l$ ) и льда ( $i = s$ ),  $\mu$  – кинематическая вязкость жидкости,  $T_\infty = const$  – безразмерная температура набегающего потока,  $T_{ice} = const$  – температура льда, а  $T_w = 0$  – безразмерная температура плавления,  $\bar{\theta} = \theta + h$ . Безразмерная температура определяется как  $T = (\hat{T} - \hat{T}_m) c_l / l$ , где переменные с крышкой – размерные,  $\hat{T}_m$  – температура плавления,  $l$  – скрытая теплота плавления.

Для описания динамики границы фаз  $\bar{\theta} = h(t, \xi)$  задачи (3) необходимо дополнить условием Стефана, которое в силу «одномерности (3)» имеет вид:

$$\left[ \frac{\lambda_i}{\rho_i} \frac{\partial T_i}{\partial \theta} \right]_{\bar{\theta}=h(t, \xi)} = x_0 u_\infty c_l v_\theta, \quad (4)$$

где  $[f_i]_{\bar{\theta}=h} = f_s \Big|_{\bar{\theta}=h} - f_l \Big|_{\bar{\theta}=h}$ ,  $v_\theta$  – скорость точки на свободной границе в направлении оси  $\theta$ , а также задачу (3), (4) необходимо дополнить условием Гиббса-Томсона

$$T \Big|_{\bar{\theta}=h(t, \xi)} = -\alpha v_n - \beta K, \quad (5)$$



где  $\alpha = c_l u_\infty / (ml)$ ,  $\beta = \sigma \hat{T}_m c_l / (\rho_l l^2 x_0)$ ,  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к границе раздела фаз, направленная из твердой фазы в жидкую;  $v_n$  – нормальная скорость свободной границы;  $m$  – кинетический коэффициент роста;  $\sigma$  – поверхностное натяжение;  $K$  – средняя кривизна свободной поверхности. Заметим, что условие (5) ставится на криволинейной границе раздела фаз независимо от (4).

Однако, задача Стефана-Гиббса-Томсона (3)-(5) сложна в вычислительном плане – требуется применение различных ресурсоемких численных методов для точного определения положения свободной границы. Существует другой подход, основанный на введении функции порядка  $\varphi(t, \xi, \bar{\theta}, \delta)$  такой, что

$$\varphi(t, \xi, \bar{\theta}, \delta) = \begin{cases} -1, & \bar{\theta} > h(t, \xi), \\ +1, & \bar{\theta} < h(t, \xi), \end{cases} \quad (6)$$

т.е. твердой фазе соответствует значение  $-1$ , а жидкой –  $+1$ , а  $\delta$  – параметр регуляризации. Функция порядка  $\varphi$  и температура  $\tilde{T}$  определяются из системы фазового поля

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + A \left[ u^* \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \xi} + v^* \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{\theta}} \right] = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \left( \tilde{k} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{\theta}} \right) - \frac{1}{2} \beta \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (7)$$

$$\delta^2 \alpha \beta \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \delta^2 \beta^2 \Delta_{\xi, \bar{\theta}} \varphi + (\varphi - \varphi^3) + \delta(1 - \varphi^2) \tilde{T} \sqrt{2}, \quad (8)$$

с граничными условиями  $\partial \varphi / \partial \mathbf{n} \big|_{\partial \Omega} = 0$ ,  $\tilde{T} \big|_{\partial \Omega_l, \{\bar{\theta}=h\}} = T_\infty$ ,  $\tilde{T} \big|_{\partial \Omega_l, \{\bar{\theta}=h\}} = T_{ice}$ , где  $\Omega_s$  – область, занятая твердой фазой,  $\Omega_l$  – жидкой, и  $\Omega = \Omega_s \cup \Omega_l$ , и некоторыми гладкими начальными данными,  $A=0$ ,  $\tilde{k}=k_s$  в  $\Omega_s$  и  $A=1$ ,  $\tilde{k}=k_l$  в  $\Omega_l$ . При  $\delta \rightarrow +0$  система уравнений (8), (9) с краевыми условиями переходит в сформулированную выше задачу Стефана-Гиббса-Томсона (3)-(5), см. [3].

Заметим, что в силу краевых условий в (2) слагаемые в (7), содержащие квадратные скобки, непрерывны при  $\bar{\theta} = 0$ , так что сингулярности при  $\delta \rightarrow +0$  содержатся (и компенсируются) в (7) только в правой части. Слагаемые уравнения Алена-Кана (8) при  $\delta \rightarrow +0$  сосредоточены в окрестности свободной границы и равенство нулю суммы слагаемых в уравнении Алена-Кана означает с  $O(\delta)$  равенство (5), см. [3]. Система (7), (8) легко численно решается во всей области, а граница раздела фаз есть просто линия нулевого уровня функции  $\varphi$  (с точностью до параметра регуляризации  $\delta$ ), см. рис. 2.

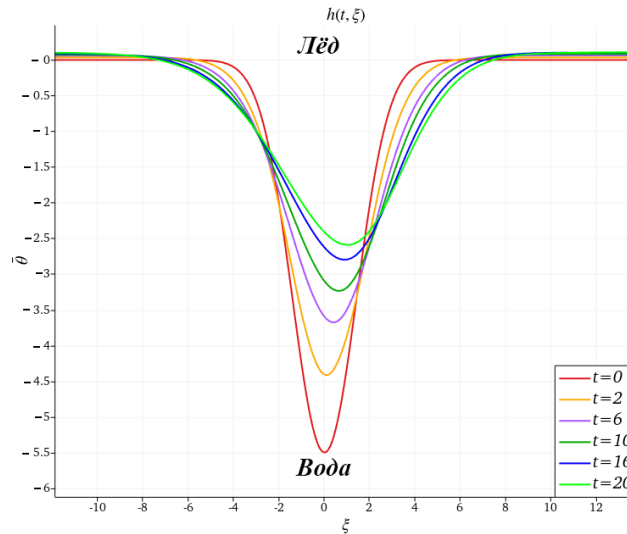


Рис. 2. Динамика границы раздела фаз  $h(t, \xi)$

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00186, <https://rscf.ru/project/22-21-00186/>.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гайдуков Р. К. Обтекание вязкой жидкостью динамически изменяющейся во времени поверхности с малыми неровностями // Волны и вихри в сложных средах: 12-ая межд. конф. – школа молодых ученых. М: ООО «ИСПО-принт», 2021. С. 64-67.
2. Gaydukov R.K. Double-deck structure in the fluid flow problem over plate with small irregularities of time-dependent shape // Eur. J. Mech. - B. 2021. Vol. 89. P. 401-410.
3. Danilov V. G., Omel'yanov G. A., Radkevich E. V. Hugoniot-type conditions and weak solutions to the phase-field system // Eur. J. Appl. Math., 10:55–77, 1999.



## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАКРУЧЕННЫХ ТРЕХМЕРНЫХ ПРИСТЕННЫХ ЛАМИНАРНЫХ И ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУЙ

*А.М.Гайфуллин, А.С.Щеглов*

*Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского,  
Жуковский*

[gaifullin@tsagi.ru](mailto:gaifullin@tsagi.ru), [shcheglov@phystech.edu](mailto:shcheglov@phystech.edu)

Хорошо известны автомодельные решения для затопленных плоских ламинарных струй, образующихся при истечении несжимаемой жидкости из бесконечно тонкой щели параллельно твердой поверхности в пространство, заполненное той же жидкостью.

Вместе с тем на практике больший интерес представляют трехмерные струи, образующиеся при истечении жидкости из источника конечного размера. Они находят свое применение в таких приложениях, как охлаждение пленок, контроль пограничного слоя, интенсификация испарения. Трехмерные ламинарные пристенные струи практически не исследовались экспериментально. В то же время численное моделирование показывает, что течение в трехмерной пристенной струе приближается к своему автомодельному состоянию при достаточно большом удалении по продольной координате от источника струи [1]. В связи с тем, что сохраняющаяся величина, определяющая автомодельное решение данной задачи, не установлена, данное решение можно отнести к автомодельным решениям второго рода согласно терминологии [2].

Что касается закрученных ламинарных пристенных струй, то представляет интерес ответ на вопрос: является ли течение автомодельным при достаточно большом значении продольной координаты? Если да, зависит ли показатель автомодельности от параметра закрученности струи? Посредством численного моделирования авторы данной работы попытались ответить на поставленные вопросы [3].

Следует отметить, что ламинарные струи наблюдаются либо в искусственных условиях, либо представляют собой ламинарный участок турбулентной струи. В силу неустойчивости течение в струе турбулизуется. Экспериментальному исследованию турбулентных незакрученных трехмерных пристенных струй посвящено множество работ, которые свидетельствуют о достижении автомодельного решения для осредненных профилей скорости  $\langle u \rangle, \langle v \rangle, \langle w \rangle$  в достаточно широком диапазоне Re. Замечено также,

что скорость роста струи в поперечном направлении  $dz_{1/2}/dx$  заметно превосходит скорость роста в вертикальном направлении  $dy_{1/2}/dx$  [4].

В то же время закрученные турбулентные трехмерные пристенные струи исследованы слабо. Согласно экспериментальному исследованию [5] наличие закрученности приводит к более быстрому затуханию продольной скорости вдоль продольной координаты в отличие от незакрученной струи. Закрученность практически не влияет на ширину струи в вертикальном направлении  $y_{1/2}$ , но увеличивает ширину  $z_{1/2}$  в поперечном. Характер распространения закрученной пристенной струи исследовался авторами данной работы более детально с помощью моделирования методом LES.

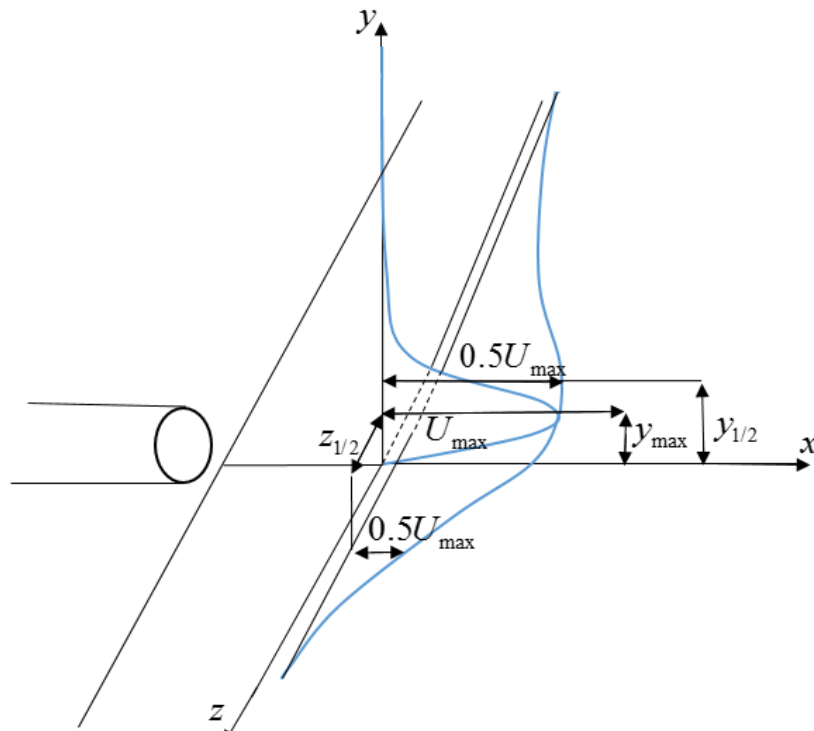


Рис. 1. Система координат задачи

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бут И.И., Гайфуллин А.М., Жвик В.В. Дальнее поле трехмерной пристенной ламинарной струи // Изв. РАН МЖГ. 2021. № 6. С. 51-61.
2. Баренблатт Г.И. Автомодельные явления – анализ размерностей и скейлинг. Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект». 2009. 216 С
3. Gaifullin, A.M., Shcheglov, A.S. Self-similarity of a wall jet with swirl. Lobachevskii J Math 43, 1098-1103 (2022)
4. Hongguang sun and Dan Ewing, Effect of initial and boundary conditions on development of three-dimensional wall jets, 40<sup>th</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, 2002.
5. B. S. Pani & N. Rajaratnam: Swirling Circular Turbulent Wall Jets, Journal of Hydraulic Research, 14:2, 145-154, 1976

## РЕЖИМЫ И СТРУКТУРА ТЕЧЕНИЯ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН УПЛОТНЕНИЯ С ПЛОСКОЙ СТЕНКОЙ В ГАЗОКАПЕЛЬНОМ ПОТОКЕ

*И.В. Голубкина, А.Н. Осипцов*  
 НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва  
[giv-mm@mail.ru](mailto:giv-mm@mail.ru)

Исследуются стационарные течения газокapельного потока с учетом фазовых переходов в области регулярного взаимодействия волн уплотнения с плоской стенкой (Рис. 1). При этом падающие и отраженные волны могут иметь качественно различную структуру: это могут быть волны с полной или частичной дисперсией, с полным или частичным испарением капель внутри волны.

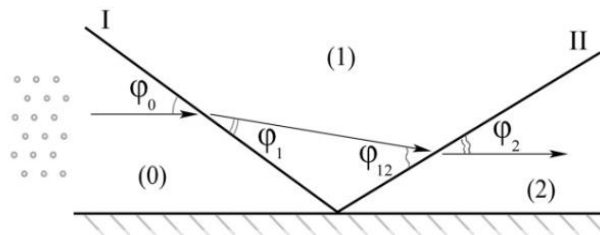


Рис. 1. Схема течения в области регулярного отражения плоской волны уплотнения от стенки

Различные типы волн и структура течения в случае одиночных волн уплотнения в газокapельных средах исследовались экспериментально и теоретически (см., например, [1-3]); в [4] представлена классификация и условия возникновения прямых волн с полной/частичной дисперсией с полным/частичным испарением капель в волне. В настоящей работе исследуются границы существования волновых конфигураций, возникающих при регулярном отражении косой волны от стенки, с различным сочетанием всех возможных типов падающих и отраженных волн, а также представлены результаты численного расчета полей параметров в таких течениях.

Анализ существования проводится на масштабе, много большем ширины зон неравновесного течения, когда внутренняя структура волн уплотнения не существенна. Для вычисления связи параметров равновесного потока перед и за волной используются обобщенные соотношения Рэнкина-Гюгонио для косых скачков уплотнения:

$$\begin{aligned} [(1 + \alpha)\rho V_n] &= 0, & [V_\tau] &= 0 \\ [(1 + \alpha)\rho V_n^2 + p] &= 0 \\ \left[ \frac{V_n^2}{2} + c_p T - \frac{\alpha}{1 + \alpha} H \right] &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь квадратные скобки обозначают разность выражений в скобках до и после волны;  $\rho$ ,  $V$ ,  $p$ ,  $T$  – плотность, скорость, давление, температура газовой фазы,  $H$  – скрытая теплота фазовых переходов, индексы  $n$  и  $\tau$  используются для нормальной и тангенциальной к волне составляющих скорости. Уравнения (1) получены в предположении, что испарение происходит равновесно, и все избыточное тепло со стороны газовой фазы расходуется на испарение капель, откуда следует, что температура жидкости внутри капель постоянна.

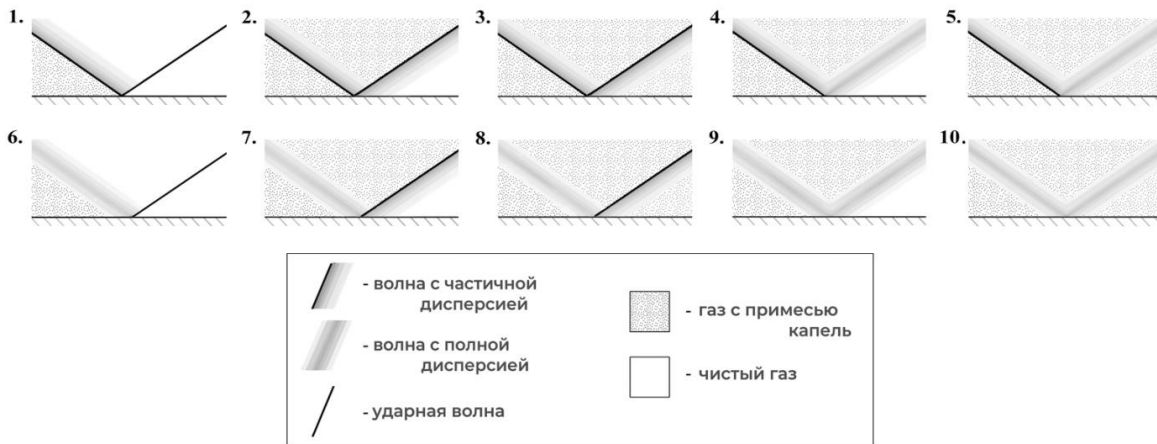


Рис. 2. Возможные режимы регулярного взаимодействия волны уплотнения с плоской стенкой

К соотношениям (1) необходимо добавить уравнение состояния несущей фазы  $p = \rho RT$ , а также одно из условий: а)  $[T] = 0$ , если капли внутри волны не испаряются полностью, б)  $\alpha_2 = 0$  в обратном случае. С использованием обобщенных соотношений Рэнкина-Гюгонио (1) с дополнительным условием а) или б) для приходящей и отраженной волны и геометрического условия  $\varphi_0 - \varphi_1 = \varphi_{12} - \varphi_2$  были получены системы нелинейных алгебраических уравнений, связывающих параметры потока во всех областях течения. Таким образом, параметры газа и капель в областях (1) и (2) (согласно рис. 1) были рассчитаны в предположении, что, проходя волну уплотнения, капли могут испаряться частично или полностью. Из параметрических расчетов были получены десять различных типов регулярного отражения косой волны сжатия от плоской стенки. Все возможные режимы течения представлены схематично на рис. 2. Найдены диапазоны определяющих параметров, соответствующие каждому из них. На рис. 3 приведены области существования всех десяти режимов в плоскости параметров  $Mn_0$  (число Маха приходящей волны),  $\alpha_0$  (массовая концентрация капель в области (0)) для некоторых значений угла падения скачка уплотнения.

Реализовано численное моделирование структуры течения на основе двухскоростной двухтемпературной модели взаимопроникающих континуумов с фазовыми переходами [5]. Полная система уравнений и подробное описание алгоритма решения и используемых численных методов представлены в статье [4].

Распределение температуры газа, показанное на рис. 4 для набора параметров  $M_{n0} = 0.98$ ,  $\alpha_0 = 5\%$ ,  $\varphi_0 = 30^\circ$ ,  $Pr = 0.72$ ,  $\gamma = 1.4$ , соответствует режиму 10, в котором приходящая и отраженная волны являются волнами с полной дисперсией и неполным испарением капель.

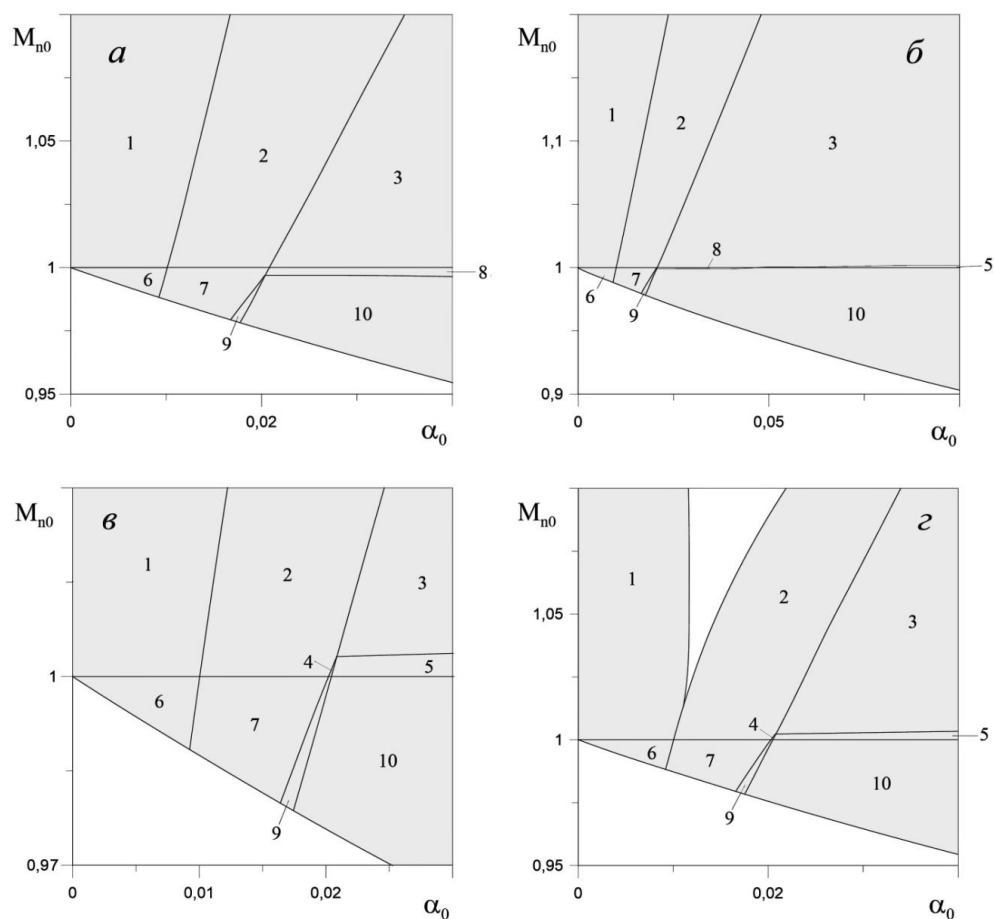


Рис. 3. Области существования режимов 1-10 (по классификации на рис. 2) для углов  $\varphi_0 = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$  (а-г)

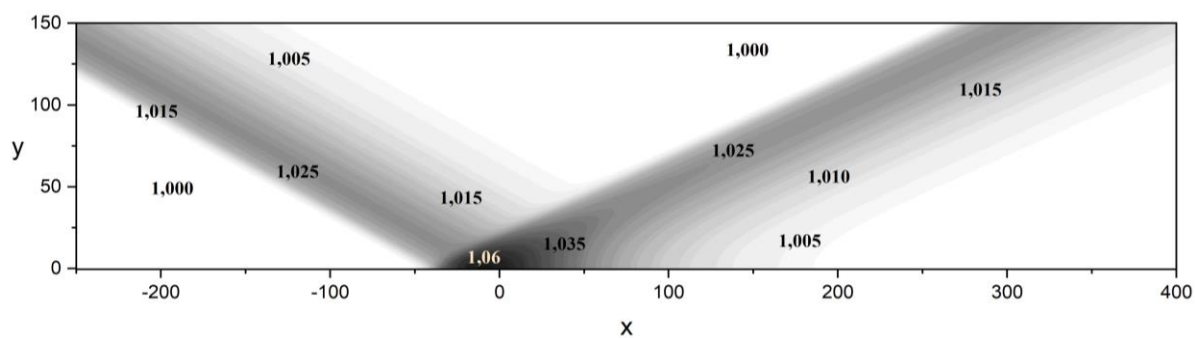


Рис. 4. Распределение безразмерной температуры газа при отражении волны с полной дисперсией от плоской стенки

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена за счет средств гранта Российского Научного Фонда (проект №19-19-00234).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аманбаев Т.Р., Ивандаев А.И.* Влияние фазовых превращений на структуру ударных волн в паракапельной смеси // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. мех. 1988. № 3. С. 81–85.
2. *Young J.B., Guha A.* Normal shock-wave structure in two-phase vapor-droplet flow // J. Fluid Mech. 1991. V. 228. P. 243-274.
3. *Goossens H.W.J., Cleijne J.W., Smolders H.J., Van Dongen M.E.H.* Shock wave induced evaporation of water droplets in a gas-droplet mixture // Exp. Fluids. 1988. V. 6. P. 561–568.
4. *Голубкина И.В., Осипцов А.Н.* Волны уплотнения с частичной и полной дисперсией в газок капельной среде с фазовыми переходами // Изв. РАН, МЖГ. 2022. №3, С. 44-55.
5. *Marble F.* Dynamics of dusty gases // Annu. Rev. Fluid Mech. 1970. V. 2. P. 397-446.



## ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОСАДКИ ВОЗВРАЩАЕМЫХ МОДУЛЕЙ РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ

*Гончаров Д.А.<sup>1</sup>, Пожалостин А.А.<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва*

[goncharov@bmstu.ru](mailto:goncharov@bmstu.ru), [a.pozhalostin@bmstu.ru](mailto:a.pozhalostin@bmstu.ru)

Задача о возвращаемых модулях ракет-носителей имеет длительную историю. Поначалу рассматривались различные варианты неуправляемой посадки, в основном с применением парашютных схем (Space Shuttle, возвращаемые боковые блоки РН «Энергия»), однако, такой вариант, даже в случае посадки на воду или применения тормозных твердотопливных двигателей, если речь идет не об усиленных капсулах спускаемых аппаратов, может приводить к существенным деформациям тонкостенных конструкций отработанных ступеней ракет-носителей. Собственно, именно такие результаты и были получены при анализе отработанных твердотопливных ускорителей многоразовой транспортной системы Space Shuttle, устойчивого многократного применения этих ускорителей достичь не удалось.

В этой связи естественным образом возникает задача об управляемой посадке отработанных ступеней ракет-носителей, и, как мы видим, в этой части в последние годы наблюдается значительный прогресс. Можно так же прогнозировать развитие этой технологии и создание посадочных модулей для пилотируемых полетов на поверхности небесных тел солнечной системы. Вместе с тем, если речь идет об управляемой посадке отработанной ступени или многоразового транспортного космического корабля, нельзя не отметить ряд специфических задач, возникающих при рассмотрении этой проблемы. Прежде всего стоит отметить задачу об устойчивости аппарата, заполненного жидким топливом при совершении посадки. Возникает задача об устойчивости аппарата при действии ударных нагрузок, распределенных по рабочей поверхности посадочного устройства. Существует проблема устойчивости управляемого полета при посадке, а кроме того, определения инерционных характеристик аппарата с жидким топливом на пассивном участке траектории. В рамках настоящего доклада рассматривается постановка ряда указанных задач и некоторые решения.





## ОБ ИСТОЧНИКЕ ЭНЕРГИИ, ИДУЩЕЙ НА ИЗЛУЧЕНИЕ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ КАПЛЕЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН

*А. И. Григорьев<sup>1</sup>, Н. Ю. Колбнева<sup>2</sup>, С. О. Ширяева<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Институт проблем механики им. А.Ю. Иилинского РАН, Москва*

<sup>2</sup>*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль*  
[grigori@mail.ru](mailto:grigori@mail.ru), [kolbneva-nata@yandex.ru](mailto:kolbneva-nata@yandex.ru), [shir@uniyar.ac.ru](mailto:shir@uniyar.ac.ru)

Как показано в [1-3] осциллирующая облачная капля или капля дождя, несущая собственный или индуцированный внешним электростатическим полем электрический заряд способна излучать электромагнитные волны. Вне зависимости от наличия заряда на капле, она при осцилляциях в сжимаемой среде способна генерировать и акустические волны [4-5], в том числе и в диапазоне слышимых человеческим ухом звуков. Математическая теория этих явлений разработана детально, но кое-какие лакуны остались. Так не понятен источник энергии, идущей на генерацию акустических и электромагнитных волн, ведь большая часть исследований проведена на простейшей модели идеальной несжимаемой жидкости [1-5]. При излучении капель электромагнитных или акустических волн энергия, запасенная в ней, уменьшается. Очевидной энергией, подходящей для таких процессов, является тепловая. В самом деле, при излучении электромагнитных волн ускоренно движущимися зарядами они замедляются. То же самое происходит и с излучением акустических волн: приводя в движение окружающие каплю частицы среды (например, молекулы газа) осциллирующая капля передает им механическую энергию движения, и при этом замедляется скорость движения молекул жидкости в приповерхностном слое капли. Скорость движения молекул той либо иной среды есть мера ее температуры. Другими словами при излучении электромагнитных или акустических волн осциллирующей каплей ее температура снижается. Восполнение количества тепла, запасенного в капле возможно за счет теплообмена со средой. В состоянии равновесия тепловая энергия, получаемая каплей от среды, должна равняться энергии, теряемой ею с акустическим и электромагнитным излучениями.

Расчеты показывают, что интенсивность акустического излучения от уединенной капли на много порядков (более чем на десять порядков, в зависимости от радиуса) превышает интенсивность электромагнитного излучения от капли тех же размеров. В связи с этим в следующих ниже оценках будем ориентироваться именно на интенсивность акустического излучения, которая составляет величину :  $10^{-15}$  эрг/с .

Возьмем для оценки каплю радиусом  $R = 30 \text{ мкм} = 0.003 \text{ см}$  и оценим величину тепловой энергии, поступающей из окружающей среды на каплю. Согласно закону Фурье количество тепловой энергии проходящей через элементарную площадку  $ds$  за интервал времени  $dt$  на каплю определится выражением [6]:

$$dq = -\frac{\lambda dT}{dn} ds dt , \quad (1)$$

где  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности среды,  $n$  - внешняя нормаль к невозмущенной поверхности капли,  $T$  - температура среды. Полное количество тепла поступающего на каплю в единицу времени запишется в виде:

$$Q = -4\pi R^2 \lambda \frac{dT}{dn} . \quad (2)$$

В стационарных условиях величина  $Q$  должна равняться интенсивности расходования энергии на излучение, т.е.  $Q$  должно быть  $Q: 10^{-15}$  эрг/с. Для оценки примем:

$$\frac{dT}{dn} \approx \frac{\Delta T}{\Delta n}, \quad (3)$$

и из (2) с учетом (3) найдем разницу температур капли и среды, при которой приток тепла из среды скомпенсирует потери энергии капли на излучение:

$$\Delta T: \frac{10^{-15} \Delta n}{4\pi R^2 \lambda}. \quad (4)$$

Величину  $\Delta n$  (расстояния по нормали) примем из общефизических соображений как длину свободного пробега молекулы в воздухе  $\Delta n: 10^{-5}$  см (пренебрегая длиной свободного пробега молекулы в воде). Тогда, принимая  $\lambda: 10^3$  эрг/см·сек·град [7], найдем:  $\Delta T: 10^{-18}$  град. Иначе говоря, даже столь малый перепад температур между средой и каплей обеспечит необходимый для поддержания непрерывного электромагнитного и акустического излучения поток тепловой энергии на каплю.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598-П «Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью», <https://rscf.ru/project/19-19-00598/>).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калечиц В.И., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П. О возможном механизме радиоизлучения конвективных облаков//ДАН СССР. 1982. Т.262. №6. С.1344-1347.
2. Богатов Н.А. Электромагнитное поле, генерируемое капиллярными колебаниями капель // Сборник тезисов докладов VI Международной конференции "Солнечно-земные связи и физика предвестников землетрясений". Петропавловск-Камчатский, ДВО РАН, 2013. С. 10–11.
3. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Колбнева Н.Ю. Электромагнитное излучение капли, осциллирующей в грозовом облаке. Москва – Берлин: Изд. Директ-Медиа, 2021. 220 с.
4. Григорьев А.И., Гаилов А.Р. О некоторых особенностях акустического излучения капли, связанного с ее нелинейными осцилляциями // ЖТФ. 2003. Т.73. №10. С. 23-28.
5. Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О. Об акустическом излучении слабо заряженных капель, осциллирующих во внешнем однородном электростатическом поле // Изв. РАН. Серия МЖГ. 2022. №5.
6. Карташов Э.М. Аналитические методы в теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 1979. 415 с.
7. Кикоин А.К., Кикоин И.К. Молекулярная физика. 1976. М.: Наука, 480 с.
8. Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М. Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. М.: Наука, 1969. 400 с.



# РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕКТРОДИСПЕРГИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТОНКСА-ФРЕНКЕЛЯ

А. И. Григорьев<sup>1</sup>, С. О. Ширяева<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Иилинского РАН, Москва

<sup>2</sup>Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль  
[grigorai@mail.ru](mailto:grigorai@mail.ru), [shir@uniyar.ac.ru](mailto:shir@uniyar.ac.ru)

Неустойчивость однородно заряженной полоской поверхности идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости по отношению к индуцированному в ней перпендикулярным к поверхности однородным электростатическим полем заряду, широко известна как неустойчивость Тонкса-Френкеля. Но физические параметры эмиттированных капелек до сих пор не рассматривались.

Будем рассматривать задачу о качественном расчете параметров капельки, эмиттируемой на нелинейной стадии развития неустойчивости, когда поверхность имеет вид плоскости с выпуклостью в виде полусферы (для простоты) с радиусом, равным капиллярной постоянной. Такой выбор определяется тем, что реализацию неустойчивости Тонкса-Френкеля можно разделить на две стадии: 1) образовании на плоской поверхности системы выступов (конусов Тейлора); 2) эмиссия конусом Тейлора заряженных капелек.

Пусть в указанной системе конус Тейлора выбросил одну каплю, имеющую сфероидальную форму с эксцентриситетом  $e$ . Форма капли принимается сфероидальной потому, что всё происходит во внешнем квазиродном электростатическом поле [1]. Будем считать, что количество теплоты в системе  $Q$  при этом не изменилось, не изменились также её общий объём  $V$  и температура  $T$ . Выпишем в размерном виде выражение для изменения свободной энергии системы, произошедшее при этом, по аналогии с тем, как это делалось в [2]:

$$\Delta F(r, q) = 4\pi\sigma r^2 A(e) + \frac{q^2}{2r} B(e) - \frac{q^2}{2} \left( \frac{1}{2h} + \frac{8Rhr}{3(h^2 - R^2)^2} \right) - qhE \left( 1 - \frac{R^3}{h^3} \right) + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 g \zeta, \quad (1)$$

$$A(e) = \frac{1}{2} \left[ (1 - e^2)^{1/3} + \frac{1}{e} (1 - e^2)^{-1/6} \arcsin(e) \right], \quad B(e) = \frac{1}{2} (1 - e^2)^{1/3} \arctg(e).$$

В (1)  $h$  – расстояние от центра полусферы (конуса Тейлора), с вершины которой идёт эмиссия капелек, до центра капли;  $r$ ,  $q$  и  $e$  – радиус, заряд и эксцентриситет эмиттированной капли;  $E_0$  – напряженность внешнего поля;  $R$  – радиус полусферы, изображающей эмиттирующий выступ (конус Тейлора);  $\zeta$  – размерное расстояние между вершиной эмиттирующего выступа и центром эмиттированной капли в момент ее отрыва. Множитель  $8/3$  в третьем слагаемом в скобках, в (1), появился из-за идеализированного учёта положений индуцированных внешним электростатическим полем зарядов противоположных знаков в сферической капле, образующих диполь.

В выражении (1) первое слагаемое определяет изменение свободной энергии сил поверхностного натяжения в связи появлением капли, второе – собственную электростатическую энергию эмиттированной капли, третье определяет электростатическую энергию поляризационного взаимодействия эмиттированной капли с поверхностью жидкости, четвертое – энергию эмиттированной капли во внешнем электростатическом поле; пятое изменение потенциальной энергии капли в поле сил тяжести.

Обезразмерим (1), принимая:

$$X \equiv \frac{r}{R}, \quad Y \equiv \frac{q}{ER^2}, \quad w_* \equiv \frac{E^2 R}{4\pi\sigma}, \quad h_* \equiv \frac{h}{R}, \quad D(h_*) \equiv h_* - \frac{1}{h_*^2}, \quad C(h_*) \equiv \left( \frac{1}{2h_*} + \frac{8h_* X}{3(h_*^2 - 1)^2} \right).$$

В безразмерном виде получим:

$$\Delta F(r, q) = X^2 A(e) + \frac{Y^2 w_*}{2X} B(e) - \frac{Y^2 w_*}{2} \left( \frac{1}{2h_*} + \frac{8h_* X}{3(h_*^2 - 1)^2} \right) - Y w_* \left( h_* - \frac{1}{h_*^2} \right) + \frac{1}{3} X^3 \frac{R\zeta}{\alpha^2},$$

$$\Delta F(X, Y) = X^2 A(e) + \frac{Y^2 w_*}{2X} B(e) - \frac{Y^2 w_*}{2} C(h_*) - Y w_* D(h_*) + \frac{1}{3} X^3 \frac{R\zeta}{\alpha^2},$$

Параметр  $w_*$  характеризует устойчивость полусферической вершины эмиттирующего выступа в поле  $E_0$ .

В силу принципа наименьшей скорости рассеяния энергии в неравновесных процессах Онзагера [3] потребуем, чтобы  $\Delta F$  было минимальным по радиусу и заряду эмиттированной капельки, то есть, чтобы выполнялись условия:

$$\frac{\partial(\Delta F)}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial(\Delta F)}{\partial Y} = 0,$$

или

$$XA(e) - \frac{Y^2 w_*}{4X^2} B(e) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{Y}{X} B(e) - Y C(h_*) - D(h_*) = 0. \quad (3)$$

Отрыв капли произойдет, когда сила взаимодействия заряда капли с индуцированным зарядом и внешним электрическим полем превысит силу поверхностного натяжения  $2\pi r_* \sigma$ , удерживающую каплю ( $r_*$  – радиус перетяжки, связывающий эмиссионную вершину выступа и каплю).

Введем параметр  $\gamma = r_*/b$  где  $b$  – меньшая полуось сфероидальной капли. Приравняв силу электрического отталкивания, действующую на каплю, лапласовской силе, связывающей каплю с выступом, получим уравнение для определения  $h_*$ :

$$2\pi r_* \sigma = qE \left( 1 + \frac{2R^3}{h_*^3} \right) - q^2 \left[ \frac{1}{4h_*^2} + \frac{4R^3 h_*^3}{(h_*^4 - R^4)^2} \right],$$

или в безразмерной форме

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{w_*}{(1-e^2)^{1/6}} \left\{ \frac{Y}{X} \left[ 1 + \frac{2}{h_*^3} \right] - \frac{Y^2}{X} \left[ \frac{1}{2h_*} + \frac{2+6h_*}{(h_*^4 - 1)^2} \right] \right\}. \quad (4)$$

Эксцентриситет  $e$  эмиттированной заряженной капли во внешнем электростатическом поле определяется выражением [1]:

$$e^2 \approx \frac{9w_k}{1-W_k}, \quad w_k = \frac{E^2 \left(1 + \frac{R^3}{h^3}\right)}{16\pi\sigma} r, \quad W_k = \frac{q^2}{16\pi\sigma r^3},$$

здесь  $w_k$  и  $W_k$  – параметры Тейлора и Рэлея для эмитированной капли.

Критерий электростатической неустойчивости заряженной капли во внешнем квазиоднородном электростатическом поле запишется в виде [1]:

$$\Xi \equiv \left(1 + 2.07 \cdot e^2\right) W_k + 4.64 \left(1 + 6.6 \cdot e^2\right) w_k + 3\sqrt{W_k w_k} \left(1 + 0.476 \cdot e^2\right) \geq 1. \quad (5)$$

Система (2)–(5) при  $E_0 = 83 \text{ CGSE}$ ,  $w_k \geq 0.052$  решалась методом последовательных приближений, и были получены следующие результаты:

$h^* = 1.53$ ,  $X = 0.0189$ ,  $Y = 0.205$ .

В проведенном качественном расчете использовалась модель идеально проводящей жидкости, заполняющей полупространство  $z \leq 0$  и безграничное в перпендикулярных направлениях. Образование на свободной поверхности жидкости эмиссионного выступа – конуса Тейлора и эмиссия им капли никак не повлияет ни на общую массу, ни на общий заряд системы. Другими словами, при эмиссии капли система не меняется. При эмиссии одной капли в окружающей среде ничего не изменится, кроме появления капли, которая двигаясь ускоренно в сильном внешнем электростатическом поле удалится достаточно далеко для того, чтобы её электрическое поле могло изменить электростатическую обстановку у вершины эмиттирующего выступа, с которого она оторвалась и следующая капля будет отрываться в идентичных условиях, и её размер и заряд не изменятся. Следовательно, в обсуждаемой модели эмиссии капель при реализации неустойчивости Тонкса-Френкеля параметры диспергирования жидкости не будут зависеть от порядкового номера капли, в отличие от распада сильно заряженной капли [3].

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598-П «Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью», <https://rscf.ru/project/19-19-00598/>).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И. Равновесная форма заряженной капли в электрическом и гравитационном полях // ЖТФ. 1989. Т.59. Вып.6. С.27-34.
2. Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O. The theoretical consideration of physical regularities of the electrostatic dispersion of liquids as aerosols // J. Aerosol Sci. 1994, **25**(6), 1079-1091.
3. Yang Ch.T., Song Ch.S. Encyclopedia of fluid Mechanics. V.1. Flow Phenomena and Measurement. Houston; London; Paris; Tokyo: Gulf Publishing Company, 1986. P.353-399.



## ВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА И АКУСТИКА ПАРОГАЗОЖИДКОСТНЫХ СРЕД

Д.А. Губайдуллин

Институт механики и машиностроения Федерального исследовательского центра  
“Казанский научный центр Российской академии наук”, Казань

[gubaidullin@imm.knc.ru](mailto:gubaidullin@imm.knc.ru)

Представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований динамики линейных и нелинейных возмущений в газокапельных и пузырьковых смесях. Ранее ряд аспектов по данной тематике был изучен в [1-36].

Рассмотрены процессы распространения слабых волн в парогазовых полидисперсных (с произвольной функцией распределения включений по размерам) и дискретных многофазных парогазокапельных и пузырьковых (с оболочкой вокруг пузырька) средах, а также в смесях жидкости с частицами и пузырьками газа. Представлены математические модели, получены дисперсионные соотношения, изучены высоко- и низкочастотные асимптотики коэффициента затухания, обсуждаются области применимости развитых теорий. Наличие оболочки вокруг пузырька газа существенно влияет на дисперсию и диссипацию волн в пузырьковых жидкостях. Показано хорошее согласие представленных результатов с опубликованными экспериментальными данными других авторов.

Изучено распространение импульсных возмущений давления в жидкости, содержащей многослойную преграду. Проведен расчет искажения акустического сигнала при диагностике многослойного образца, содержащего слой жидкости с полидисперсными пузырьками. По итогам результатов расчетов отражения акустической волны от слоя конечной толщины, содержащей аэрозоль или пузырьковую жидкость, установлены соотношения между длиной волны и толщиной слоя, при которых коэффициент отражения принимает экстремальные значения. Получено хорошее согласие теоретических и экспериментальных данных.

Теоретически и экспериментально изучены нелинейные колебания аэрозолей и динамика частиц в трубах в ударно- и безударно волновом режимах. Установлена не-монотонная зависимость времени осаждения табачного дыма от степени заполнения закрытой трубы при резонансных частотах колебания поршня. Численно исследовано распространение ударных волн в газовзвесах и ударно-волновой разлет газовзвеси в двухкомпонентный газ. Изучено влияние сорта газа на динамику процесса. Проиллюстрировано хорошее согласие теории и опытных данных. Представлены результаты экспериментов по исследованию нелинейных колебаний и осаждению аэрозолей в кубическом резонаторе.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Исследование выполнено за счет гранта № 20-11-20070 Российского научного фонда.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Губайдуллин Д.А. Динамика двухфазных парогазокапельных сред. Изд-во Казанского математического общества, 1998. 153 с.
2. Gubaidullin D.A., Nigmatulin R. I. On theory of acoustic waves in polydispersed gas-vapor-droplet suspension // Intern. J. Multiphase Flow. 2000. V. 26. № 2. P. 207-228.

3. Губайдуллин Д.А. Сферические и цилиндрические волны малой амплитуды в полидисперсных туманах с фазовыми превращениями // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 5. С. 85-94.
4. Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А., Уткина Е.А. Акустические волны в двухфракционных смесях газа с паром, каплями и твердыми частицами разных материалов и размеров при наличии фазовых превращений // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2011. № 1. С. 83-89.
5. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.А. Распространение малых возмущений в полидисперсной парогазокапельной смеси с полидисперсными частицами при наличии фазовых превращений // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2012. №5. С.43-51.
6. Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А., Уткина Е.А. Влияние фазовых превращений на акустику смеси газа с паром, каплями и твердыми частицами // Теплофизика высоких температур, 2011. Т. 49. № 6. С. 942 - 947.
7. Губайдуллин Д.А., Терезулова Е.А., Губайдуллина Д.Д. Распространение акустических волн в многофракционных газовзвесьях // Теплофизика высоких температур. 2015. Т.53. №2.
8. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.А. Сферические и цилиндрические волны в парогазовых смесях с полидисперсными частицами и каплями // Теплофизика высоких температур. 2012. Т.50. №5. С.659-664.
9. Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А. Акустические возмущения в смеси жидкости с пузырьками пара и газа // Теплофизика высоких температур. 2010. Т. 48. № 2. С. 170-175.
10. Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А., Гафиятов Р.Н. Акустические волны в двухфракционных пузырьковых жидкостях с фазовыми превращениями // Теплофизика высоких температур. 2012. Т. 50. № 2. С. 269-273.
11. Нигматулин Р.И., Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Звуковые волны в двухфракционных полидисперсных пузырьковых жидкостях // Доклады Академии Наук. 2012. Т.447. №3. С. 284-287.
12. Нигматулин Р.И., Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Акустические волны разной геометрии в полидисперсных пузырьковых жидкостях. Теория и эксперимент // Доклады Академии наук, 2013. Т. 450. № 6. С. 665 - 669.
13. Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А., Гафиятов Р.Н. Распространение акустических волн в двухфракционных пузырьковых жидкостях с учетом фазовых превращений в каждой из фракций // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2013. № 3. С. 91-98.
14. Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А., Гафиятов Р.Н. Акустические волны в многофракционных пузырьковых жидкостях // Теплофизика высоких температур. 2015. Т. 53. №2.
15. Нигматулин Р.И., Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А. Динамика импульсных волн в пузырьковых жидкостях. Сравнение теории с экспериментом // Доклады Академии наук, 2014. Т. 456. № 6. С. 662 - 664.
16. Губайдуллин Д.А., Губайдуллина Д.Д., Федоров Ю.В. Акустические волны в жидкостях с полидисперсными пузырьками газа. Сравнение теории с экспериментом // Известия РАН. МЖГ, 2013. № 6. С. 81 - 90.
17. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Звуковые волны в двухфракционных полидисперсных пузырьковых средах // Прикладная математика и механика, 2013. Т.77. № 5. С. 743 - 753.



18. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Звуковые волны в жидкостях с полидисперсными парогазовыми и газовыми пузырьками // Известия РАН. МЖГ. 2015. №1.
19. Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Галиуллин Р.Г., Галиуллина Э.Р., Ткаченко Л.А. Экспериментальное исследование коагуляции аэрозоля в трубе вблизи субгармонического резонанса // Теплофизика высоких температур. 2004. Т.42. С.788-795.
20. Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А. Экспериментальное исследование коагуляции и осаждения аэрозоля в закрытой трубе в безударно-волновом режиме // Теплофизика высоких температур. 2012. Т.50. №4. С.603-605.
21. Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А. Экспериментальное исследование колебаний аэрозоля в трубах в безударно-волновом режиме вблизи резонанса // Доклады Академии наук. 2013. Т. 452. № 2. С. 161 - 164.
22. Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А. Резонансные колебания аэрозоля в трубе с диафрагмой в безударно-волновом режиме // Теплофизика высоких температур. 2014. Т.52. №6. С.921–926
23. Gubaidullin D.A., Ossipov P.P. Numerical investigation of particle drift in acoustic resonator with periodic shock wave // Applied Mathematics and Computation, 2013. V. 219. P. 4535 - 4544.
24. Губайдуллин Д.А., Никифоров А.А., Гафиятов Р.Н. Акустические волны в многофракционных пузырьковых жидкостях // Теплофизика высоких температур. 2015. Т.53. №2. С.250-255.
25. Нигматулин Р.И., Губайдуллин Д.А., Тукмаков Д.А. Ударно-волновой разлет газозввесей // Доклады Академии наук 2016. Т. 466. № 4. С. 418 - 421.
26. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Акустические волны в жидкости с твердыми частицами и пузырьками газа // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2018. \. № 2. С. 77-83.
27. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Особенности отражения акустических волн от границы или слоя двухфазной среды // Акустический журнал. 2018. Том 64. № 2. С. 162-173.
28. Gubaidullin, D.A., Ossipov, P.P., Abdyushev, A.A. Simulation of aerosol distribution in hyperbolic resonator // Appl. Math. Modelling. 2018. V.62. P.181-193.
29. Gubaidullin D.A., Zaripov R.G., Tkachenko L.A., Shaidullin L.R. Deposition of polydisperse gas suspensions with nonlinear resonance oscillations in a closed tube // J. Acoust. Soc. Am.. 2019. V.145. N.1. P.EL30-EL33.
30. Губайдуллин Д.А., Осипов П.П. Аэрогидродинамика твердой частицы. // М.: Физматлит, 2020. 176 с.
31. Gubaidullin D.A., Ossipov P.P., Abdyushev A.A. Simulation using the limiting velocity approach of acoustic streaming establishment and aerosol particle focusing in complex-shaped acoustofluidic devices // Appl. Math. Modelling, 2021. V. 92. P. 785 - 797.
32. Gubaidullin D.A., Fedorov Yu. V. Acoustics of a viscoelastic medium with encapsulated bubbles // J. of Hydrodynamics, 2021. 33 (1). P. 55-62.
33. Губайдуллин Д.А., Осипов П.П., Насыров Р.Р. Акустическое течение, индуцированное колебанием стенки плоского прямоугольного резонатора // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2022. Т. 57. № 1. С. 3 - 13.
34. Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А., Шайдуллин Л.Р. Экспериментальное исследование осаждения аэрозоля в закрытой трубе с изменяющимся сечением // Теплофизика высоких температур, 2022. Т. 60. № 1. С. 146 - 148.

35. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Акустика вязкоупругой жидкости с пузырьками газа, покрытыми вязкоупругой оболочкой // Инженерно-физический журнал, 2022. № 3. С. 802 - 810.
36. Губайдуллин Д.А., Панин К.А., Федоров Ю.В. Акустика жидкости с покрытыми оболочкой каплями при наличии фазовых переходов // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2022. № 4. С. 41 - 51.



## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН С МНОГОФАЗНЫМИ СМЕСЯМИ С ПОЛИДИСПЕРСНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ ПРИ УЧЕТЕ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ

Д.А. Губайдуллин, Р.Р. Зарипов

*Институт механики и машиностроения - обособленное структурное подразделение  
Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Федеральный исследова-  
тельский центр «Казанский научный центр Российской академии наук», Казань*  
[gubaidullin@imm.knc.ru](mailto:gubaidullin@imm.knc.ru), [rinat\\_zaripov@imm@mail.ru](mailto:rinat_zaripov@imm@mail.ru)

### ВВЕДЕНИЕ.

В настоящей работе исследуется взаимодействие акустических волн с многофазными смесями с учетом полидисперсного состава смеси и фазовых превращений. Рассмотрен наиболее общий случай, когда несущая фаза состоит из  $N + 1$  полидисперсных фракций, при этом одна фракция участвует в фазовых превращениях, а  $N$  фракций не участвуют. Каждая фракция смеси характеризуется своими размерами и материалами включений, а также имеет свою произвольную функцию распределения включений по размерам.

### ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

На основе теорий двухфазных сред, представленных в работах [1,2] получены линейаризованные уравнения сохранения массы, импульса и энергии, которые учитывают многофазность и полидисперсность смеси. Выведено дисперсионное соотношение, которое определяет динамику акустических волн в рассматриваемой среде [3]. На основе методике, представленной в работе [4] и выведенного дисперсионного соотношения получена математическая модель, определяющая отражение акустических волн от границы многофазной смеси с полидисперсными включениями [5].

### РЕЗУЛЬТАТЫ.

С помощью полученных соотношений проанализировано влияние количества фракций в смеси, размеров включений каждой фракции, массового содержания включений, функций распределения включений по размерам, а также фазовых превращений на взаимодействие акустических волн с многофазными полидисперсными смесями.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №20-11-20070).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч.1. 464 с.
2. Губайдуллин Д.А. Динамика двухфазных парогазокапельных сред. Казань: Изд-во Казанского математического общества, 1998. 153 с.

3. Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Р. Влияние фазовых переходов на распространение акустических волн в многофракционных газовзвесьях с полидисперсными включениями // ТВТ. 2021. Т. 59, № 1. С. 133–139.
4. Бреховских Л.М., Гордин О.А. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с/
5. Zaripov R.R. Acoustic Waves Interaction with the Boundary of a Multifractional Polydisperse Vapor–Gas–Drop Mixture / D.A. Gubaidullin, R.R. Zaripov // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. V. 42. P. 2140-2143.



## РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗА В ЗАКРЫТОЙ ТРУБЕ ПРИ НАЛИЧИИ НЕОДНОРОДНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

*Д.А. Губайдуллин, Л.А. Ткаченко, С.А. Фадеев, Л.Р. Шайдуллин*

*Институт механики и машиностроения – обособленное структурное подразделение*

*ФИЦ КазНЦ РАН, г. Казань*

[fadeev@imm.knc.ru](mailto:fadeev@imm.knc.ru)

Интерес к исследованию нелинейных колебаний сплошной среды связан с их широким распространением в различных областях науки и техники. Элементами двигателей и энергетических установок являются объемы, ограниченные твердыми стенками, в которых возникают явления, сопровождающиеся установившимися колебаниями скорости, давления и температуры газообразных продуктов сгорания. Колеблющийся поток способствует интенсификации различных процессов тепло- и массопереноса: увеличение теплонапряженности в рабочем объеме энергетических установок [1], интенсификация теплообмена между частицами и плазменной струей в процессе плазменного нанесения покрытий [2], изменение структуры тлеющего разряда [3]. Существует большой интерес к термоакустической перспективе тепловых двигателей и холодильников, которые зависят от сильных колебаний давления и скорости потока при наличии температурного градиента. Такие двигатели с внешним подводом тепла, где тепловая энергия преобразуется в акустическую, благодаря совершению термодинамического цикла, является одним из способов высокоэффективного извлечения энергии [4].

Исследования влияния поперечного градиента температуры в стоячей волне на вторичные течения в резонаторе, показало, что разница температур между верхней и нижней стенками деформирует симметричные вихри течения относительно осевой линии канала [5]. Градиент температуры, поддерживаемый стенкой резонатора, также сильно изменяет картину течения в силу инерционных эффектов [6]. В случае даже относительно слабых градиентов температуры со стенкой, наблюдается значительное искажение профиля течения и эффект градиента температуры намного сильнее, чем влияние инерции жидкости на поток [7]. В рамках аналитической теории в работе [8] рассмотрена структура вынужденных звуковых колебаний в присутствии неоднородности параметров газа. Получено поле скоростей с учетом неоднородного нагрева газа. Авторы [9] показали, что преимущественно сильная температурная неоднородность по всему радиусу трубки ответственна за возникновение акустических течений, влияющих на процессы переноса. Такие процессы характерны для акустических колебаний в плазме диффузного тлеющего разряда, зажигаемого в цилиндрической трубке, где при не большом энерговыделении газ имеет параболический радиальный профиль температуры [10].

Таким образом, в некоторых резонаторах существуют градиенты температуры, возникающие вследствие нелинейных волновых процессов (акустотермический эффект), химических реакций (горение) или протекания тока через ионизованный газ (газовый разряд). Рассмотрение резонансных колебаний газа в данных условиях является актуальной задачей, имеющей важное практическое значение. Результаты таких исследований могут быть использованы при проектировании термоакустических двигателей, дымоходов, камер сгорания, создании теплообменников, при охлаждении электронных компонентов, создании газовых лазеров, производстве высокоэффективных резонаторов для акустических компрессоров и развитии методов плазменного нанесения функциональных покрытий. В связи с этим требуется проведение более подробных исследований колебаний газа в закрытой трубе с источником тепла. В настоящей работе представлены результаты численных исследований колебаний газа в трубе вблизи резонанса с неоднородным температурным полем в двумерной постановке задачи.

### РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ.

Рассмотрены резонансные колебания газа в закрытой трубе, длиной  $L = 0.938$  м и радиусом  $R = 0.05$  м, на одном конце которой гармонически колеблется поршень. Газ в трубе нагревается во всем объеме за счет внутреннего источника тепла  $Q$ . Колебания газа в трубе описываются линеаризованной системой уравнений Навье-Стокса [11]. Температурная неоднородность в трубе учитывается с помощью стационарного уравнения энергии с источником тепла  $Q$  [12]. Предполагается, что вследствие малой амплитуды смещения поршня ( $l_0 = 0.1$  мм) колебания газа не влияют на стационарное температурное поле.

Расчет амплитудно-частотных характеристик колебаний давления газа на закрытом конце показал, что с увеличением  $Q$  и, соответственно, температуры газа наблюдается дисперсия резонансной частоты, то есть сдвиг в сторону повышения в сравнении с резонансной частотой, полученной из расчета в отсутствии источника тепла. Это характерно для рассматриваемого случая, так как резонансная частота пропорциональна скорости звука и, как следствие, корню температуры  $\omega \propto c_0 \propto \sqrt{T_0}$ . В отсутствии источника тепла резонансная частота составляет  $f = 182.5$  Гц. Так же наблюдается незначительный рост амплитуды колебаний давления газа с повышением температуры.

При возбуждении колебаний газа в трубе с неоднородным распределением температуры по радиусу профиль стоячей волны зависит от профиля температуры [8]. В связи с искривлением фазовых плоскостей скорость продольных колебаний газа приобретает поперечную компоненту [9]. По этой причине в ядре потока ( $R - 4.6\delta$ , где  $\delta = \sqrt{2\mu/\rho_0\omega}$  – толщина акустического пограничного слоя) наблюдается параболический радиальный профиль амплитуды колебаний осевой компоненты скорости  $u_z$ .

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** Исследованы колебания газа в закрытой трубе в неоднородном температурном поле вблизи резонансных частот возбуждения при различных источниках теплоты. В численных экспериментах с увеличением объемной плотности теплового потока наблюдается дисперсия резонансной частоты, обусловленная пропорциональностью резонансной частоты и скорости звука. При наличии источника тепла в трубе амплитуда колебаний осевой компоненты скорости газа приобретает параболический радиальный профиль. Результаты расчетов показывают, что при заданной амплитуде смещения поршня увеличение температуры ведет к росту интенсивности колебаний газа.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галиуллин Р.Г. Теория нелинейных колебаний в закрытой трубе с учетом термоакустических эффектов // Инженерно-физический журнал. 1983. Т.45. № 2.

- C.267 – 271.
2. *Lizunkov G.P., Shimanovich V.D., Burov I.S., Ii'yushchenko A.F.* Intensified plasma deposition with acoustic and electrical oscillations applied to the heterogeneous jet // *Journal of Engineering Physics*. 1984. V. 47. P. 1342 – 1345.
  3. *Фадеев С.А., Сайфутдинов А.И.* Управление параметрами тлеющего разряда низкого давления в аргоне с помощью акустических течений // *Физика плазмы*. – 2017. Т. 43. № 11. С. 919 – 928.
  4. *Swift G.W.* Thermoacoustics: A Unifying Perspective for Some Engines and Refrigerators. – New York: Springer, 2017. 326 p.
  5. *Nabavi M., Siddiqui K., Dargahi J.* Effects of transverse temperature gradient on acoustic and streaming velocity fields in a resonant cavity // *Applied Physics Letters*. 2008. V. 93. 051902.
  6. *Reyt I., Moreau S., Bailliet H. and Valière J.-C.* Experimental study of acoustic streaming in a high level standing wave guide: Influence of mean temperature and higher harmonics distribution // *AIP Conference Proceedings*. 2012. V. 1474. P. 83 – 86.
  7. *Cervenka M., Bednarik M.* Numerical study of the influence of the convective heat transport on acoustic streaming in a standing wave // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2018. V. 143. P. 727 – 734.
  8. *Завершинский И.П., Коган Е.Я.* Структуры газового разряда в акустическом поле // *Физика плазмы*. 1996. Т. 22. № 3. С. 281 – 288.
  9. *Hatsagortsyanyan K.Z., Galechyan G.A.* Acoustic discontraction of gas discharge // *Laser Physics*. 1994. V. 4. No 3. P. 502 – 506.
  10. *Райзер Ю.П.* Физика газового разряда / Ю. П. Райзер – М.: Наука, 1987. 592 с.
  11. *Shaidullin L., Fadeev S.* Acoustic gas oscillations in a cubic resonator with a throat under small perturbations // *Applied Acoustics*. 2022. V. 192. 108758.
  12. *Gubaidullin D.A., Tkachenko L.A., Fadeev S.A., Shaidullin L.R.* Resonance Oscillations of Gas in a Closed Tube in the Presence of a Heterogeneous Temperature Field // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2022. V. 43. No 5. P. 1110 – 1115.



## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦЕПОЧКИ ПЯТЕН С РАЗРЫВАМИ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

*В.А. Гущин, И.А. Смирнова*

*Институт автоматизации проектирования Российской академии наук (ИАП РАН),  
Москва*

[gushchin47@mail.ru](mailto:gushchin47@mail.ru)

### ВВЕДЕНИЕ.

Проведено математическое моделирование задачи о динамике цепочки пятен перемешанной жидкости в стратифицированной среде, расположенных горизонтально, на некотором расстоянии друг от друга. Пятна перемешанной жидкости – это следствие взаимодействия внутренних волн [1], которые при определенных условиях могут опрокидываться. Также пятна могут возникать за движущимся в стратифицированной среде подводным объектом, если рассматривать срез поперечного сечения следа. Блинообразные пятна простираются горизонтально на расстояния, значительно превышающие их вертикальные размеры [2-5]. Задача описывается уравнениями Навье-Стокса в приближении Буссинеска. В качестве расслаивающей составляющей выбирается соленость

для возможности в дальнейшем сравнивать с результатами лабораторных исследований. Задача представляет интерес с точки зрения теоретической гидродинамики стратифицированной жидкости, для экспериментальной оценки времени создания стационарного поля.

Задача численно моделируется Методом Расщепления для исследования течений Несжимаемой Жидкости (МЕРАНЖ) [6]. Конечно-разностная схема метода обладает вторым порядком аппроксимации по пространственным переменным, минимальной диссипацией и дисперсией, работоспособностью в широком диапазоне чисел Рейнольдса и Фруда и важным свойством монотонности. Выявлены критерии образования полосы. Получены результаты в виде полей возмущения солёности.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Рассмотрим плоскую нестационарную задачу о течении, которое возникает при коллапсе области А однородной жидкости под действием силы тяжести. Область А окружена устойчиво и непрерывно стратифицированной по плотности жидкостью (рис. 1). Плотность изменяется по линейному закону.

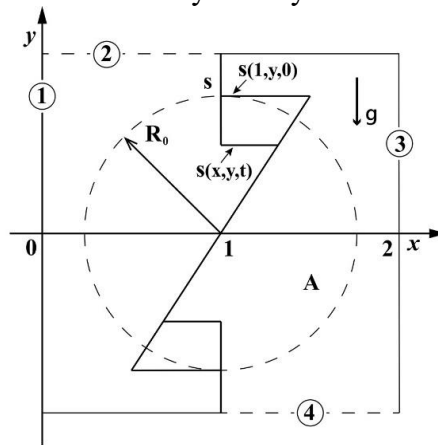


Рис. 1. Начальное  $s(1, y, 0)$  и установившееся  $s(x, y, t)$  поля возмущения солёности.

Тогда уравнения Навье-Стокса, начальные и граничные условия в безразмерных переменных в приближении Буссинеска принимают следующий вид (1), где  $Re = \rho_0 R_0^2 N / \mu$  – число Рейнольдса,  $Fr = R_0 N^2 / g$  – число Фруда,  $Sc = \mu / \rho_0 k_s$  – число Шмидта,  $k_s$  – коэффициент диффузии соли,  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости,  $C = \Lambda / R_0$  – отношение масштабов.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{Fr} s \frac{\mathbf{g}}{g}, \\
 \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s &= \frac{1}{Sc \cdot Re} \Delta s + \frac{v}{C}, \\
 \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\
 u = v = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad t = 0 \\
 \rho &= 1, \quad (x, y) \in \mathbf{A}, \quad t = 0 \\
 \rho &= 1 - \frac{y}{C} + s, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{A}, \quad t = 0 \\
 s &= \begin{cases} \frac{y}{C}, & (x, y) \in \mathbf{A} \\ 0, & (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{A} \end{cases}, \quad t = 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

Решение задачи будем искать в прямоугольной области  $\{x, y: 0 \leq x \leq X, -Y \leq y \leq Y\}$ , которая показана на рисунке 1. На левой и правой границах области (линии 1, 3, рис. 1) заданы условия периодичности течения. На верхней границе задано условие твердой

крышки (линия 2, рис. 1). На нижней границе области (линия 4, рис. 1) задано состояние покоя.

Схема расщепления Метода Расщепления для исследования течений Несжимаемой Жидкости (МЕРАНЖ) [6]

$$\frac{\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^n}{\tau} = -(\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v}^n + \frac{1}{Fr} s^n \frac{\mathbf{g}}{g}, \quad (2)$$

$$\tau \Delta p = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}, \quad (3)$$

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \tilde{\mathbf{v}}}{\tau} = -\nabla p, \quad (4)$$

$$\frac{s^{n+1} - s^n}{\tau} = -(\mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla) s^n + \frac{1}{Sc \cdot Re} \Delta s^n + \frac{v^{n+1}}{C}. \quad (5)$$

Предварительно по начальным данным рассчитывается возмущение солёности  $s^1$  (5). Схема состоит из четырех этапов на каждом временном шаге. На этапе I решаем уравнение (2) в предположении, что передача импульса осуществляется только за счет конвекции, диффузии и сил плавучести. На этапе II решаем уравнение Пуассона (3) в силу соленоидальности вектора скорости, где  $\tilde{\mathbf{v}}$  – рассчитанное на этапе I промежуточное поле скорости, решение уравнения (3) получаем методом верхней релаксации. На этапе III решаем уравнение (4) в предположении, что передача импульса происходит только за счет градиента давления. На этапе IV решаем уравнение (5) и вычисляем возмущение солёности  $s^{n+1}$  по найденному полю скорости  $\mathbf{v}^{n+1}$ .

### РЕЗУЛЬТАТЫ.

Проведено математическое моделирование динамики цепочки пятен в стратифицированной вязкой жидкости. Область расчета  $0 < x < 2$ ,  $-8 < y < 8$  покрыта прямоугольной расчетной сеткой размером  $100 \times 800$  с шагом  $h = 0.02$ . В начальный момент времени пятно имеет форму круга радиуса  $R_0 < 1$ . Пятна расположены в ряд вдоль горизонтальной оси на некотором расстоянии друг от друга. На левой границе  $x=0$  и правой границе  $x=2$  расчетной области ставятся условия периодичности. На верхней границе выполняются условия твердой крышки. На нижней границе среда находится в состоянии покоя. Заданы коэффициенты и параметры:  $\mu/\rho_0 = 0.01 \text{ см}^2/\text{с}$ ,  $k_s = 1.41 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{с}$ ,  $T_b = 2\pi \text{ с}$ ,  $\Lambda = 10 \text{ см}$ ,  $Sc = 709.2$ .

Результаты математического моделирования представлены на рисунках 2 изоклинами возмущения солёности. Выявлено четыре стадии динамики. Сначала пятно сплющивается и приобретает форму полосы с сужениями и утолщениями. На второй стадии полоса совершает колебательные движения. На третьей продолжительной стадии происходит затухание возмущения солёности, колебания затухают. На четвертой стадии полоса становится ровной, горизонтальной толщиной  $< \pi/2$ .

С увеличением значений чисел Ренольдса и Фруда уменьшается минимальный начальный радиус пятна, приводящий к установлению горизонтальной полосы. С уменьшением радиуса пятна и с увеличением значений чисел Ренольдса и Фруда окрестные возмущения усиливаются и область их распространения увеличивается. Для любого радиуса пятна ( $R_0 < 1$ ) возмущения сильнее в верхней части расчетной области, чем в нижней.



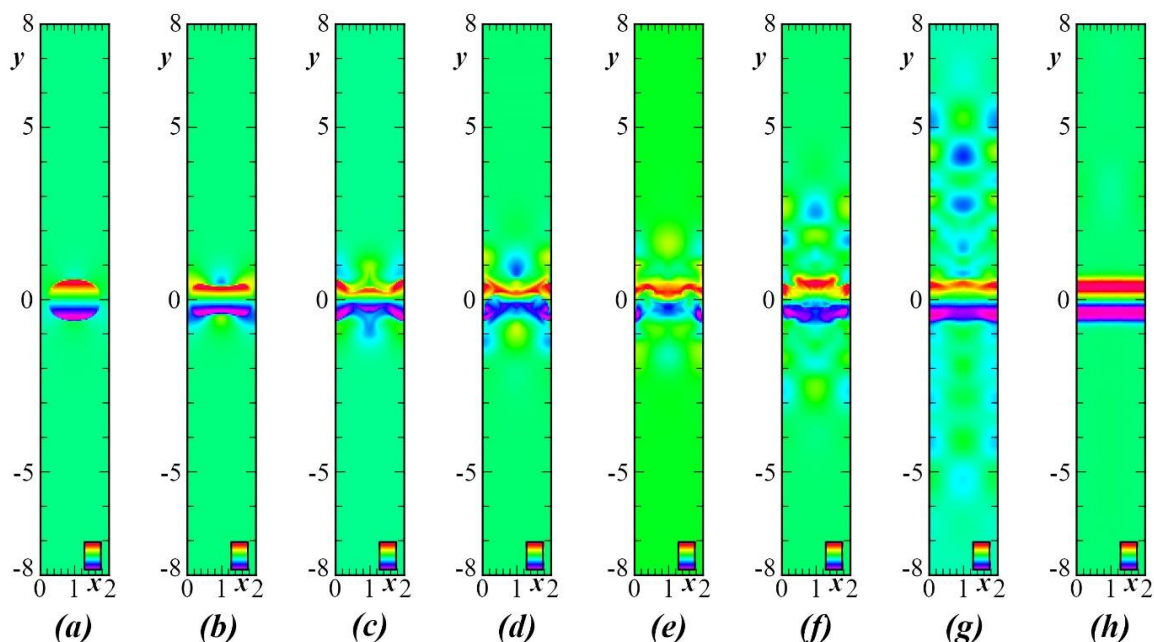


Рис.2. Изоклины возмущения солёности:  $R_0 = 0.7$ ,  $Re = 3162$ ,  $Fr = 1$ ,  $Sc = 709.2$ ,  
 $\mu/\rho_0 = 0.01 \text{ см}^2/\text{с}$ ,  $k_s = 1.41 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{с}$ , расчетная область  $2 \times 8$   
 (a -  $t=1$ , b -  $t=2$ , c -  $t=5$ , d -  $t=9$ , e -  $t=11$ , f -  $t=20$ , g -  $t=40$ , h -  $t=600$ )

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. О. М. Филлипс. Атмосферная турбулентность и распространение радиоволн. М.: Наука, 1967. С. 130–138.
2. К. Н. Федоров. Тонкая термохалинная структура вод океана. Л.: Гидрометеиздат, 1976, 184 с.
3. Дж. Тернер. Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977, 432 с.
4. Р. Скорер. Аэрогидродинамика окружающей среды. М.: Мир, 1980, 551 с.
5. А. С. Монин, Р. В. Озмидов. Океанская турбулентность. Л.: Гидрометеиздат, 1981, 320 с.
6. В. А. Гуцин Об одном семействе квазимоноотонных конечно-разностных схем второго порядка аппроксимации // Журнал Математическое моделирование, 2016, т. 2, № 2, с. 6-18.
7. В. А. Гуцин, И. А. Смирнова. Математическое моделирование динамики пятен в стратифицированной среде // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2020, т. 60, № 5, с. 900-916.



## О ВЛИЯНИИ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПРОЦЕССЫ СМЕШИВАЮЩЕГОСЯ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ МНОГОФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ В СЛОЖНЫХ СРЕДАХ

М.С. Демид, Д.Р. Закирова, Ф.С. Хисматуллина  
 РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина, г. Москва  
 ООО «ЛУКОЙЛ-Инжиниринг», Москва

[Demid.Maksim@gmail.com](mailto:Demid.Maksim@gmail.com), [Dinara.Zakirova@lukoil.com](mailto:Dinara.Zakirova@lukoil.com)  
[Farida.Khismatullina@lukoil.com](mailto:Farida.Khismatullina@lukoil.com)

В данной работе представлено формирование наиболее полной математической модели, описывающей процесс многофазной многокомпонентной неизоэнтальпической фильтрации флюидов в пористом насыщенном пласте при высокочастотном электромагнитном воздействии на него. Особое внимание уделено математическому моделированию термобарических условий неизоэнтальпического процесса, т.е. представлению PVT-модели.

### **ВВЕДЕНИЕ.**

Классическим направлением разработки месторождений высоковязких нефтей является применение различных вариантов закачки теплоносителя. Существенным недостатком таких методов являются большие теплотери при создании и подаче тепла к продуктивному интервалу. В России данная проблема усугубляется продолжительным холодным сезоном, в течении которого теплотери при таком способе воздействия кратно возрастают.

Альтернативным направлением может служить различный прогрев скважин с использованием электромагнитных источников тепла. Высокочастотное электромагнитное (ВЧ ЭМ) воздействие осуществляется путем спуска источника поля частотой от 1 МГц до 100 МГц, в результате действия, которого в пласте распространяются электромагнитные волны, ориентирующие полярные молекулы нефтяных систем вдоль направления силовых линий. Быстрая смена полярности поля приводит к переходу ориентационного движения в тепловое. Именно этот переход составляет суть в ВЧ ЭМ воздействия и определяет его преимущества. В первую очередь происходит глубинный прогрев пласта, нагрев осуществляется не в скважине и не на стенке скважины, а в самом пласте источником нагрева при этом являются полярные, как правило, самые тяжелые компоненты нефти, образующие сложные структуры и изменяющиеся при фильтрации [1, 2].

Эффективность данного метода подтвердилась результатами проведенных ранее экспериментальных исследований, имитирующих процесс закачки смешивающегося растворителя в модель пласта, первоначально насыщенного высоковязкой нефтью при различных воздействиях (тепловом, ВЧ ЭМ и отсутствии воздействия), и проведенных при одинаковых условиях (физические характеристики моделей, перепад давления, температура ВЧ и теплового прогрева) [3]. Несмотря на теоретические изыскания лабораторные эксперименты и полевые испытания в России, США и Канаде [4, 5], вопрос понимания поведения ВЧ ЭМ нагрева и его роли в увеличении добычи нефти остается открытым. При этом мало изученными являются вопросы особенностей термобарического (PVT) поведения нефти, влияние выпавших из нефти твердых отложений на фильтрационные процессы. Необходимо также отметить наличие различных подходов к самой формулировке системы уравнений для математического описания воздействия [6].

В данной работе представлена математическая модель течения высоковязких нефтей при воздействии ВЧ ЭМ полем, как при закачке растворителя, так и при добыче нефти. Здесь закон сохранения вещества для каждого компонента, в отличие от классических постановок [см. 2, 3, 6], записывается в терминах давления и молярной плотности компонента, откуда по PVT-соотношениям рассчитываются свойства фаз. Такой подход можно использовать при описании летучей нефти и композиционных систем, какой и является рассматриваемая система - она подразумевает переходы компонентов типа «твердое тело-жидкость», а также смешивающееся вытеснение.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ.

Для математического описания этого неизотермического процесса, по сути многофазной многокомпонентной неизотермической фильтрации флюидов в пористой среде, справедливы следующие фундаментальные законы и уравнения: закон сохранения вещества для каждого компонента (1), закон сохранения энергии (2), модель распределенных источников тепла при ВЧ ЭМ воздействии на диэлектрическую среду (3), начальные и граничные условия (4):

$$\int_V \frac{\partial(mN_c)}{\partial t} dV = \int_A \sum_f (-x_c^p \xi_p^d \vec{u}) \cdot \vec{n} dA + \int_A (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA + Q_s. \quad (1)$$

$$\int_V \frac{\partial(C_c T)}{\partial t} dV = - \int_A \lambda_c^t \nabla T \vec{n} dA + \int_A T_f C_p u_f^e dA + Q_s. \quad (2)$$

$$q^e(\vec{r}) = \frac{\omega^2 \varepsilon \mu N_0 \cdot t g(\delta)}{2\pi r_{wb} h} \frac{|H_0^2(\vec{r})|^2}{Re\{ik^* H_0^2(\vec{r}_{wb}) \cdot H_1^{2*}(\vec{r}_{wb})\}}. \quad (3)$$

$$\begin{aligned} P(r, 0) &= P_0; \quad T(r, 0) = T_0; \\ \frac{\partial P}{\partial r}(r_{max} \rightarrow \infty, t); \quad \lim_{r_b} \left( \sum_f x_c^p \xi_p^d A \frac{\partial P}{\partial r} \right) &= -N_{inj}; \\ \frac{\partial T}{\partial r}(r_{max} \rightarrow \infty, t); \quad \lim_{r_b} \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right) &= N_{inj} C_c T. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $m$  - пористость, д.е.,  $N_c$  - мольная концентрация, моль/м<sup>3</sup>;  $Q_s$  - количество вещества привнесенного извне, моль;  $x_c^p$  - доля компонента с в фазе p;  $\xi_p^d$  - мольная плотность фазы, моль/м<sup>3</sup>;  $\vec{u}$  - поток флюида, м<sup>3</sup>/с;  $\vec{v}$  - скорость изменения концентрации, моль/м<sup>3</sup>;  $A$  - площадь поверхности объема, м<sup>2</sup>;  $V$  - объем, м<sup>3</sup>;  $t$  - время, сек;  $\sum_f (-x_c^p \xi_p^d \vec{u})$  - суммарный поток компонента, распределенный по выделенным фазам, моль/м<sup>2</sup>,  $C_c = [C_r \rho_r (1 - m)] + \sum_{f=1}^p (x_c^p \xi_p^d m)$  - эффективная теплоёмкость Дж/м<sup>3</sup>/К;  $C_c$  - теплоемкость ячейки, Дж/м<sup>3</sup>/К;  $C_r$  - мольная теплоемкость горной породы, Дж/моль/К;  $\lambda_c^t = [\sum_{f=1}^p k_f (\lambda_{hf}^f \cdot \vec{n}) + k_r (\lambda_{hf}^r \cdot \vec{n})]$  - эффективная теплопроводность, Вт/м<sup>3</sup>/К;  $\rho_r$  - мольная плотность горной породы, моль/м<sup>3</sup>;  $k_f$  - коэффициент, характеризующий долю площади занимаемого флюидом в перпендикулярном направлении передачи тепла, д.е.;  $\lambda_{hf}^f$  - теплопроводность флюида, Вт/м<sup>3</sup>/К;  $\lambda_{hf}^r$  - теплопроводность горной породы, Вт/м<sup>3</sup>/К;  $u_f^e$  - количество вещества, переносящего энергию, моль;  $C_p$  - теплоемкость фазы, Дж/моль/К,  $H_v^{(m)}$  - функция Ханкеля;  $tg(\delta)$  - тангенс угла диэлектрических потерь;  $N_0$  - мощность излучателя, Вт;  $\omega$  - круговая частота, Гц;  $\varepsilon$  и  $\mu$  - относительная комплексная диэлектрическая и магнитная проницаемости среды;  $h$  - толщина пласта, м;  $r_{wb}$  - радиус скважины, м,  $T_{пл}$  - температура плавления, К;  $\Delta N_f$  - количество вещества, совершившего фазовый переход, моль;  $l_f$  - мольная удельная энергия фазового перехода, Дж/моль.

В рамках этой математической формулировки поставлена задача по вычислению свойств флюидов: вязкости и плотности, объемного коэффициента. На основе ретроспективного анализа развития подходов к моделированию PVT-свойств предлагается новый подход расчета вязкости и плотности флюида, в основу которого положен обоснованный способ объединения распространенных в использовании изотермических моделей.

### ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЁТЫ.

Для численного решения системы уравнений (1) – (4) была проведена дискретизация уравнений и линеаризация. Полученная система уравнений для каждой ячейки решается численно с использованием метода Ньютона. Был разработан вычислительный комплекс на языке программирования python с использованием библиотек numpy и scipy, где использовался модуль Interpolation, позволяющий моделировать различные

физико-геологические условия при комбинированном воздействии на пласт высокочастотным электромагнитным полем и растворителем. Проведены три серии численных экспериментов с различными сценариями добычи и закачки: «Нагнетание», «Добыча», «Предварительный прогрев скважины».

В результате решения указанной системы уравнений были получены пространственно-временные распределения температур, давления и концентраций компонент рассматриваемой системы. Рассматривались также случаи различных соотношений мощности излучателя ЭМ волн, температуры и расхода закачиваемого растворителя.

### РЕЗУЛЬТАТЫ.

В ходе анализа результатов расчета показана эффективность воздействия ВЧ ЭМП, которая определяется по количеству расплавленных твердых углеводородных компонентов, которые были получены при воздействии, что позволит извлечь тяжелые компоненты нефти на поверхность. Поскольку переход в жидкое состояние твердых компонент в первую очередь определяет температура, то именно увеличение прогретой зоны можно считать главным показателем эффективности ВЧ ЭМ воздействия. Дополнительным эффектом является увеличение проницаемости порового пространства, обусловленного увеличением поровых каналов.

Таким образом, в работе исследован процесс высокочастотного электромагнитного прогрева для различных режимов нагрева, обоснована возможность использования ВЧ ЭМ воздействия как метода интенсификации добычи нефти, на основе проведенных расчетов показано, что высокочастотное электромагнитное воздействие увеличивает равномерность прогрева при закачке растворителя, при этом равномерность зависит от объема закаченной жидкости, нежели от способа закачки. Предварительный прогрев с закачкой незначительно увеличивает технологические показатели по сравнению с обычной добычей в присутствии ВЧ ЭМ-поля. Также предложен оптимальный диапазон мощностей для воздействия, показана экономическая эффективность высокочастотного электромагнитного нагрева, как метода интенсификации при добыче тяжелой нефти. Результаты работы можно использовать для выбора способа и режима эксплуатации скважины.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нигматулин Р.И., Саяхов Ф.Л., Ковалева Л.А. Перекрестные явления переноса в дисперсных системах, взаимодействующих с высокочастотным электромагнитным полем // Доклады Академии наук. – 2001. – Т. 377, №3. – С.340-343.
2. Саяхов Ф.Л. Исследование термо- и гидродинамических процессов в многофазных средах в высокочастотном электромагнитном поле применительно к нефтедобыче: Дис. ... доктора физ.-мат. наук: 01.02.05, 05.15.06. – М., 1985. – 449 с.
3. Хисматуллина Ф.С. Исследование физико-химических эффектов в фильтрационных потоках углеводородных систем в высокочастотном электромагнитном поле: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Уфа, 1997. – 167 с.
4. Rassenfoss S. Seeking more oil, fewer emissions // Journal of Petroleum Technology. – 2012. – Vol.64, no.9. – Pp.34-38
5. Despande R., Wright B.N., Watt A. Techniques for Installing Effective Solvent Extraction Incorporating Electromagnetic Heating (“ESEIEH”) Completions // World Heavy Oil Conf. Edmonton, Alberta, Canada, 2015. Paper WHOC15-317.
6. Хисматуллина Ф.С., Ковалева Л.А., Насыров Н.М. Математическое моделирование высокочастотного электромагнитного воздействия на пласт в сочетании с закачкой растворителя. // НТЖ «Нефть. Газ. Новации» - 2018. - №4. – С. 36-41

# ТЕПЛООБМЕН ПРИ КРИЗИСЕ КИПЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЯХ НА ОСНОВЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

А.В. Дмитренко<sup>1,2</sup>, М.А. Колосова<sup>1</sup>, М.И. Колпаков<sup>1</sup>, С.А. Закутнов<sup>1</sup>, Д.А. Бойченко<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Российский университет транспорта «МИИТ», Москва

<sup>2</sup>Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва

[ammsv@yandex.ru](mailto:ammsv@yandex.ru), [AVDmitrenko@mephi.ru](mailto:AVDmitrenko@mephi.ru)

Представлены зависимости при кризисе кипения в турбулентных потоках на базе стохастической теории теплообмена. Моделирование учитывает влияния интенсивности турбулентности при кризисе кипения.

## ВВЕДЕНИЕ.

Несмотря на развитие методов RANS, LES, DNS [1], так же востребованы инженерные методики, на базе полуэмпирических зависимостей. В этой связи, результаты, полученные на основе стохастической теории турбулентности и теории эквивалентности мер [2-30] позволяют учесть интенсивность турбулентности при кризисе кипения.

## ПЕРЕНОСА ТЕПЛА ПРИ КРИЗИСЕ КИПЕНИЯ.

при движении в трубе, коэффициент теплоотдачи при кризисе кипения среды возможно записать как

$$\alpha_{ls} = \sqrt{\alpha_k^2 + \alpha_{cr.boil}^2}, \quad (1)$$

$\alpha_k$  - коэффициент теплоотдачи при течении однофазного потока в трубе.  $\alpha_{cr.boil}$  - коэффициент теплоотдачи при кризисе кипения. Величина  $\alpha_k$  для однофазной жидкости на турбулентном режиме определяется зависимостью

$$\alpha_k = \left( \frac{\lambda Nu_k}{d} \right), \quad (2)$$

$$Nu_k = 0.021 * (Pr_L)^{0.43} Re_d^{0.8} (Pr_L / Pr_w)^{0.25}, \quad (3)$$

где  $Nu, Pr, Re$ - числа Нуссельта, Прандтля и Рейнольдса, индексы  $L, W$ —относятся к ядру потока и на стенке,  $d$ -диаметр трубы,  $\lambda$ - теплопроводность. Для числа Нуссельта отклонение от экспериментальных данных составляет  $\pm 25\%$ . Что может быть объяснено параметрами турбулентности согласно зависимости

$$Nu_k = 0.2 \left[ \left( \frac{\sqrt{E_{st}} \rho}{U_0} \right) Re_d \right]^{(7/8)} [ (Pr)^{7/12} ] \quad (4)$$

В результате, расчет турбулентного теплообмена по формуле (4) дает возможность, учесть перенос тепла при кризисе кипения по формулам (1),(2),(5).

$$\alpha_{cr.boil} = \left( \frac{\lambda Nu_{cr.boil}}{d} \right) \quad (5)$$

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** Расчеты по формуле (4) согласно [2-30] показывают соответствие величин, полученных на основе стохастических уравнений, с величинами по эмпирической зависимости (3). Это дает перспективу изучения процессов переноса тепла при кризисе кипения в турбулентных потоках по формуле (1),(5), в частности, в энергооборудовании [31,32].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory*, 6th ed., New York: McGraw-Hill, 1968
2. *Dmitrenko A.V.* Equivalence of measures and stochastic equations for turbulent flows // *Dokl. Phys.* 2013.V.58 . № 6, P. 228–235
3. *Dmitrenko A.V.* Calculation of pressure pulsations for a turbulent heterogeneous medium // *Dokl. Phys.* 2007. V.52 . № 7. P.384–387.
4. *Dmitrenko A.V.* Some analytical results of the theory of equivalence measures and stochastic theory of turbulence for nonisothermal flows//*Adv. Studies Theor. Phys.* 2014.V. 8, №. 25, P. 1101–1111.
5. *Dmitrenko A. V.* Analytical estimation of velocity and temperature fields in a circular tube on the basis of stochastic equations and equivalence of measures//, *J. Eng. Phys. Thermophys.* 2015.V. 88, . №6, pp. 1569–1576.
6. *Dmitrenko A. V.* Determination of critical Reynolds numbers for nonisothermal flows with using stochastic theories of turbulence and equivalent measures//*Heat Transfer Res.* 2016. V. 47, №. 1. P. 338–399.
7. *Dmitrenko A. V.* An estimation of turbulent vector fields, spectral and correlation functions depending on initial turbulence based on stochastic equations. The Landau fractal equation// *Int. J. Fluid Mech. Res.* 2016. V. 43, №. 3,P.82–91.
8. *Dmitrenko A.V.* The theory of equivalence measures and stochastic theory of turbulence for nonisothermal flow on the flatplate// *Int. JFMR.* 2016. V. 43, №. 2, P. 182–187.
9. *Dmitrenko A. V.* Stochastic equations for continuum and determination of hydraulic drag coefficients for smooth flat plate and smooth round tube with taking into account intensity and scale of turbulent flow//*Continuum Mech. and Thermodyn.*V. 29, №1, P. 1–9.
10. *Dmitrenko A.V.* Analytical determination of the heat transfer coefficient for gas, liquid and liquid metal flows in the tube based on stochastic equations and equivalence of measures for continuum // *Contin.Mechan. Thermodyn.* 2017.V. 29.№ 6.P.1197-1206
11. *Dmitrenko A.V.* Estimation of the critical Rayleigh number as a function of an initial turbulence in the boundary layer of the vertical heated plate. // *Heat Transf. Res.* 2017.V.48. No. 13. P. 1195–1202.
12. *Dmitrenko A.V.* Determination of the Coefficients of Heat Transfer and Friction in Super critical-Pressure Nuclear Reactors with Account of the Intensity and Scale of Flow Turbulence on the Basis of the Theory of Stochastic Equations and Equivalence of Measures // *J.of Eng. Phys.and Thermophys.* 2017.V.90 .№6. P.1288-1294.
13. *Dmitrenko A.V.* 2013 *Regular Coupling between Deterministic (Laminar) and Random (Turbulent) Motions-Equivalence of Measures* *Scientific Discovery Diploma* No. 458 registration No. 583 of December 2
14. *Dmitrenko A.V.* Theory of Equivalent Measures and Sets with Repeating Denumerable Fractal Elements. Stochastic Thermodynamics and Turbulence. Determinacy–Randomness Correlator // *Galleya-Print: Moscow.* 2013.226p. [ in Russian]
15. *Dmitrenko A.V.* *Fundamentals of heat and mass transfer and hydrodynamics of single-phase and two-phase media. Critical integral statistical methods and direct numerical simulation.* // *Galleya print: Moscow.* 2008. 398p.
16. *Dmitrenko A.V.* Uncertainty relation in turbulent shear flow based on stochastic equations of the continuum and the equivalence of measures// *Continuum Mech. and Thermodyn.* 2019. DOI:10.1007/s00161-019-00784-0
17. *Dmitrenko A.V.* The estimation of the correlation dimension of the attractor in the boundary layer of earth's atmosphere // *Потоки и структуры -международная конференция владивосток, россия.* 2019 г. (ИПМех РАН) Сб.Трудов с.70-73

18. *Dmitrenko A.V.* The theoretical solution for the reynolds analogy based on the stochastic theory of turbulence // JP Journal of Heat and Mass Transfer. 2019. T. 18. № 2. С. 463-476, [http://dx.doi.org/ 10.17654/HM018020463](http://dx.doi.org/10.17654/HM018020463)
19. *Dmitrenko A.V.* Some aspects of the formation of the spectrum of atmospheric turbulence// JP Journal of Heat and Mass Transfer. 2020. T. 19. № 1. С. 201-208. [http://dx.doi.org/ 10.17654/HM019010201](http://dx.doi.org/10.17654/HM019010201)
20. *Dmitrenko A.V.* Formation of a Turbulence Spectrum in the Inertial Interval on the Basis of the Theory of Stochastic Equations and Equivalence of Measures// Journal of engineering physics and thermo-physics, 2020 Vol. 93, No. 1, January, 2020, pp122-127
21. *Dmitrenko A.V.* The correlation dimension of an attractor determined on the base of the theory of equivalence of measures and stochastic equations for continuum // Continuum Mechanics and Thermodynamics, V32,N.2, pp.63-74 DOI:10.1007/s00161-019-00784-0
22. *А.В. Дмитриненко* Современные аспекты стохастической теории гидродинамики// XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, 20-24 августа 2019. Сб.трудов, Т.2, с.339-341
23. *А.В. Дмитриненко, М.А. Колосова.* Определение гидравлических характеристик промышленных агрегатов на основе стохастической теории гидродинамики.// XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, 20-24 августа 2019 Сб.трудов, Т.2, с.342-343
24. *Dmitrenko A.V., Kolosova M.A.* The possibility of using low-potential heat based on the organic rankine cycle and determination of hydraulic characteristics of industrial units based on the theory of stochastic equations and equivalence of measures // JP Journal of Heat and Mass Transfer. 2020. V.21. № 1, pp. 11-18 [http://dx.doi.org/ 10.17654/HM02101020](http://dx.doi.org/10.17654/HM02101020)
25. *Dmitrenko, A.V.* Reynolds Analogy Based on the Theory of Stochastic Equations and Equivalence of Measures. *J Eng Phys Thermophy* 94, 186–193 (2021). <https://doi.org/10.1007/s10891-021-02296-8>
26. *Dmitrenko, A.V.* Theoretical solutions for spectral function of the turbulent medium based on the stochastic equations and equivalence of measures. *Continuum Mech. Thermodyn.* 33, 603–610 (2021). <https://doi.org/10.1007/s00161-020-00890-4>
27. *Dmitrenko, A.V.* Determination of Critical Reynolds Number for the Flow Near a Rotating Disk on the Basis of the Theory of Stochastic Equations and Equivalence of Measures. *Fluids* 2021, 6(1),5; <https://doi.org/10.3390/fluids6010005>
28. *Dmitrenko, A.V.* Analytical Estimates of Critical Taylor Number for Motion between Rotating Coaxial Cylinders Based on Theory of Stochastic Equations and Equivalence of Measures. *Fluids* 2021, 6, 306. <https://doi.org/10.3390/fluids6090306>
29. *A.V. Dmitrenko,* Prediction of laminar–turbulent transition on flat plate on the basis of stochastic theory of turbulence and equivalence of measures// Cont. Mech. and Thermodyn., 2022. <https://doi.org/10.1007/s00161-021-01078-0>
30. *Dmitrenko, A.V.* Theoretical calculation of laminar–turbulent transition in the round tube on the basis of stochastic theory of turbulence and equivalence of measures// Cont. Mech. and Thermodyn., 2022. <https://doi.org/10.1007/s00161-022-01125-4>
31. *Dmitrenko A. V., Kolosova M.A., Kolpakov M.A., Chernyshov V.N.* Calculation of Efficiency and Thermal-Hydraulic Characteristics of ORC Power Plant Based on Low-Potential Heat of Hot Water Supply Boiler Room // JP Journal of Heat and Mass Transfer. 2022. Vol. 26. P. 143–155. <http://dx.doi.org/10.17654/0973576322017>
32. *Дмитренко А.В., Колосова М.А.* Электроэнергетическая система на базе водогрейной котельной // Энергетик. 2022. С. 46–49.



# МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ СИСТЕМЫ КИПРСКИХ ВИХРЕЙ В РАМКАХ ТРЕХСЛОЙНОЙ МОДЕЛИ ОКЕАНА

*В.М.Егорова<sup>1</sup>, М.А.Соколовский<sup>2</sup>*

<sup>1,2</sup>*Институт водных проблем РАН, Москва, Россия*

<sup>2</sup>*Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва, Россия*

[vikchik96@yandex.ru](mailto:vikchik96@yandex.ru)<sup>1</sup>, [sokolovskiy@iwp.ru](mailto:sokolovskiy@iwp.ru)<sup>2</sup>

Представлено дополненное решение задачи генерации Кипрских вихрей над горой Эратосфен по сравнению с первыми теоретическими подходами [1]. Применение трехслойной квазигеострофической модели позволило объяснить причины изменчивости дипольной вихревой структуры южнее Кипра — устойчивого антициклонического Кипрского вихря и периодически появляющегося к северо-западу от него слабого циклона меньшего масштаба. Моделирование еще раз указало на топографическое происхождение вихрей и выявило, что появление циклона в северо-западной части этой системы зависит от ряда факторов, а именно: от изменчивой структуры набегающего фоновоего потока, а также от взаимодействия внешнего поля течений со свободными вихрями Средиземного моря.

## ВВЕДЕНИЕ.

Под системой Кипрских вихрей понимается генерируемая топографией квазистационарная дипольная вихревая структура, состоящая из антициклона (интенсивного Кипрского вихря со средним диаметром 100-120 км [2]) и периодически наблюдаемого к северо-западу от него циклона, оба расположенные в Левантийском бассейне южнее острова Кипр и центрального средиземноморского течения (далее, ММТ). Результаты экспедиционных круизов CYBO и CYCLOPS подтверждают наличие изменчивой дипольной системы вихрей в регионе [3].

К настоящему времени можно утверждать, что вихревая система Кипра обусловлена региональной топографией дна. В работе [1] аналитически и численно показано, что причиной возникновения дипольной вихревой структуры является воздействие на водный поток неосесимметричных топографических особенностей региона, а именно: массивной горы Эратосфена, плоская вершина которой находится на глубине около 700 м от поверхности моря, подножие же расположилось в глубокой впадине на отметке - 2700 м и смещено относительно центра впадины к юго-востоку [4].

Однако гидродинамические особенности системы требуют уточнения — неизвестны причины периодического исчезновения топографического циклона и его сильной изменчивости на фоне устойчивого антициклонического Кипрского вихря. Пояснения даются в работе в рамках трехслойной модели океана.

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** Мы будем представлять форму впадины и горы круговыми в плане, с максимальными усредненными диаметрами 150 и 100 км соответственно. По описанию батиметрии [4] выбраны параметры модели:  $\tilde{H} = 2000$  м,  $H = 1$ ,  $\tilde{h}_1 = 750$  м,  $h_1 = \tilde{h}_1 / \tilde{H} = 0.375$ ,  $\tilde{h}_2 = 2000$  м,  $h_2 = \tilde{h}_2 / \tilde{H} = 1$ ,  $L = 50$  км,  $\tilde{R}_1 = 50$  км,  $R_1 = \tilde{R}_1 / L = 1$ ,  $\tilde{R}_2 = 75$  км,  $R_2 = \tilde{R}_2 / L = 1.5$ , где  $H$  — глубина бассейна,  $\tilde{h}_{1,2}$  и  $\tilde{R}_{1,2}$  — высоты и радиусы впадины и горы соответственно,  $L$  — горизонтальный размер топографии; знак тильды относится к размерным топографическим параметрам.

Чтобы максимально точно воспроизвести модель топографии морского дна по форме, выбрано ступенчатое разбиение впадины и горы на  $k = 5$  коаксиальных цилин-

дров (по 5 для каждого) со средним шагом по радиальной координате 0.08 (= 4 км). Высоты цилиндров были подобраны с целью сохранения объема вымещения жидкости:  $\sigma_1 = -0.075$  (= 150 м),  $\sigma_2 = 0.2$  (= 400 м); координаты центра впадины — черная точка (0, 0), подводной горы Эратосфен — красная точка (0.35, -0.35) (рис. 1).

Модель трехслойной жидкости подразумевает одинаковую скорость фонового потока в каждом слое. Поверхностные скорости восточного потока не подходят, оказываются слишком большими и вихри не успевают сформироваться. Требуется обобщение. Из массива океанографических данных удалось получить распределение скоростей с глубиной. Осредненные по глубине скорости:  $\bar{U} = 0.7 \div 2.0$  см/с.

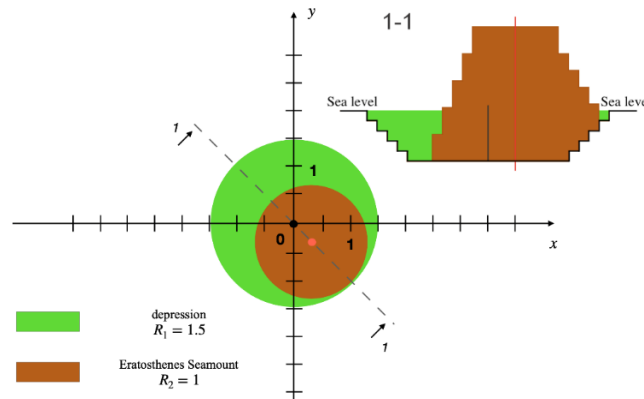


Рис. 1 Схематичное представление топографии «впадина-гора» (вид сверху), вертикальный разрез 1-1 показывает ступенчатую структуру морского дна и проходит через центры впадины и возвышенности (черная и красная прямые).

Таким образом, рассмотрена следующая задача: на подводное возмущение рельефа дна типа «впадина-гора», полностью локализованное в нижнем слое трехслойной жидкости  $H$ , в центре области на плоскости  $XY$  (ось  $X$  направлена вдоль параллели на восток,  $-8 \leq X \leq 8$ , ось  $Y$  направлена по меридиану на север,  $-8 \leq Y \leq 8$ ), набегают (а) меридионально-постоянный восточный поток  $\bar{U}$  ( $\bar{V} = 0$ ), (б) постоянный северо- или юго-восточный поток, (в) восточный поток, усиливающийся вдоль меридиана.

### ТРЕХСЛОЙНАЯ МОДЕЛЬ ОКЕАНА.

Основными параметрами трехслойной модели океана являются безразмерные толщины слоев  $D_1, D_2, D_3$ , с характерными для них постоянными плотностями  $\rho_1, \rho_2$  и  $\rho_3$  для устойчиво стратифицированной жидкости:  $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$ . Стратификации морских вод южнее острова Кипр задавалась посредством обработки в Ocean Data View (ODV) массива океанографических данных, включая значения аномалий плотности воды до глубин  $\tilde{D} = 700$  метров, с двух экспедиционных рейсов. По полученным профилям удалось выявить общие закономерности и подобрать входные данные трёхслойной модели, теоретическое обоснование которой дано в [5, 6].

В итоге, получился следующий набор данных:  $f = 0.8 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$  — параметр Кориолиса для широты  $34^\circ$ ,  $g = 9.8 \text{ м/с}^2$ ,  $D_1 = 0.0375$ ,  $D_2 = 0.1575$ ,  $D_3 = 0.8050$ , (причем,  $D_1 + D_2 + D_3 = D = 1$  — безразмерная толщина свободного бассейна),  $\rho_1 = 1027.90 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_2 = 1029.57 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_3 = 1031.39 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_0 = 1030.39 \text{ кг/м}^3$  — средняя плотность; скачки плотности:  $\Delta\rho_1 = 1.67 \text{ кг/м}^3$ ,  $\Delta\rho_2 = 1.82 \text{ кг/м}^3$ ;  $F_1 = 1.44$ ,  $F_2 = 1.32$  — коэффициенты стратификации  $F_n = \frac{\rho_0 (fL)^2}{(g\Delta\rho_n D)}$ , входящие в выражения для функции тока в слоях с номером  $j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) [7]:

$$\Psi_j(x, y) = \Psi_{0j} + \iint_{-\infty}^{+\infty} [\Pi_j G_1 + q_{j2}(s_{21}\Pi_1 + s_{22}\Pi_2 + s_{23}\Pi_3)\tilde{G}_1 + q_{j3}(s_{31}\Pi_1 + s_{32}\Pi_2 + s_{33}\Pi_3)\tilde{G}_2] dx_1 dy_1, \quad (1)$$

$$\text{где } \tilde{G}_1 = G_2 - G_1, \quad \tilde{G}_2 = G_3 - G_1 \text{ и } G_j(r) = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \ln r, & j = 1, \\ -K_0(\gamma_1 r), & j = 2, \\ -K_0(\gamma_2 r), & j = 3, \end{cases}$$

$r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$ ,  $(x, y)$  — координаты точки наблюдения,  $(x_1, y_1)$  — координаты точки интегрирования в (1),  $K_0$  — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка;  $\Pi_j$  — значения двумерных распределений потенциальной завихренности в слоях,  $q_{mn}$  и  $s_{mn}$  — элементы матриц  $3 \times 3$ :

$$Q = (\vec{q}^{(1)}, \vec{q}^{(2)}, \vec{q}^{(3)}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{D_3 \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} & -\frac{F_1}{D_1 \lambda_3} \\ 1 & \frac{D_3 \lambda_3 + F_2 / \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} & -\left(\frac{F_1}{D_1 \lambda_3} + 1\right) \\ 1 & \frac{D_3 \lambda_3 + F_2 / \lambda_2 + \lambda_2 + F_1 (D_1 + D_2) / D_1 D_2}{\lambda_3 - \lambda_2} & -\left(\frac{F_1}{D_1 \lambda_3} + 1 + \frac{D_2 (\lambda_3 + F_1 (D_1 + D_2) / D_1 D_2)}{F_2}\right) \end{pmatrix}$$

$$S = Q^{-1} = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & D_3 \\ -\frac{D_2 (\lambda_3 + F_1 (D_1 + D_2) / D_1 D_2)}{F_2} & \frac{D_2 (\lambda_3 + (F_1 (D_1 + D_2) + F_2 D_1) / D_1 D_2)}{F_2} & -1 \\ -\frac{\lambda_2 + F_1 (D_1 + D_2) / D_1 D_2}{\lambda_3 - \lambda_2} & \frac{\lambda_2 + (F_1 (D_1 + D_2) + F_2 D_1) / D_1 D_2}{\lambda_3 - \lambda_2} & -\frac{F_2}{(\lambda_3 - \lambda_2) D_2} \end{pmatrix},$$

где  $\lambda_1 = 0$ ;  $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{F_1}{D_1} + \frac{F_1 + F_2}{D_2} + \frac{F_2}{D_3} \mp \sqrt{\left( \frac{F_1}{D_1} + \frac{F_1 + F_2}{D_2} + \frac{F_2}{D_3} \right)^2 - 4 \frac{F_1 F_2}{D_1 D_2 D_3}} \right]$  — СЗ спектральной задачи  $Tq + \lambda q = 0$ , а столбцы матрицы  $Q$   $\vec{q}^{(1)}, \vec{q}^{(2)}, \vec{q}^{(3)}$  — ее СВ, причем  $\vec{q}^{(1)}$  отвечает баротропной моде,  $\gamma_{1,2} = \sqrt{-\lambda_{2,3}}$ ; матрица  $T$  определяет структуру линейного дифференциального оператора, связывающего трехмерные распределения потенциальной завихренности  $\vec{\Pi}$  и функции тока  $\vec{\Psi}$ :  $\vec{\Pi} = \nabla^2 \vec{\Psi} + T \vec{\Psi}$ ,

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_3 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -\frac{F_1}{D_1} & \frac{F_1}{D_1} & 0 \\ \frac{F_1}{D_2} & -\frac{F_1 + F_2}{D_2} & \frac{F_2}{D_2} \\ 0 & \frac{F_2}{D_3} & -\frac{F_2}{D_3} \end{pmatrix}.$$

Первое слагаемое  $\Psi_{0j}$  в (1) характеризует «внешнее» поле, определяемое как набегающим потоком, так и особенностями топографии; выражение для него:

$$\Psi_{0j} = -\vec{U} \cdot \vec{y} + \vec{V} \cdot \vec{x} - \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^5 \sigma_{ik} c_k^j, \quad (2)$$

где  $\sigma_k$  — высота цилиндра разбиения с номером  $k$  и радиусом  $R_k$  ( $> 0$  для возвышенности и  $< 0$  для впадины),  $K_1, I_1$  — модифицированные функции Бесселя и

$$c_k^j(\gamma_1, \gamma_2, r, R_k) = \begin{cases} \frac{r^2}{4} + \frac{q_{j2} s_{23}}{s_{13} \gamma_1^2} [1 - \gamma_1 K_1(\gamma_1 R_k) I_1(\gamma_1 r)] + \frac{q_{j3} s_{33}}{s_{13} \gamma_2^2} [1 - \gamma_2 K_1(\gamma_2 R_k) I_1(\gamma_2 r)], & r \leq R_k; \\ \frac{1 + \ln r^2}{2r} - \frac{q_{j2} s_{23}}{s_{13} \gamma_1} I_1(\gamma_1 R_k) K_0(\gamma_1 r) - \frac{q_{j3} s_{33}}{s_{13} \gamma_2} I_1(\gamma_2 R_k) K_0(\gamma_2 r). & r \geq R_k. \end{cases}$$

Численное моделирование задачи (1)-(2) проводилось методом контурной динамики (МКД), основанном на переходе к интегрированию на конечных носителях  $S_{ij}$

(полагая, что  $\Pi_j$  имеет кусочно-постоянные распределения) и, далее, с помощью теоремы Стокса к контурным интегралам. Теоретические основы МКД даны в работах [8-10].

### РЕЗУЛЬТАТЫ.

Кипрский вихрь сгенерировался над юго-восточной частью системы «впадина-гора» и проявлял себя как устойчивый вихрь во всех 3-ех слоях. Периодическое появление циклона в северо-западной части системы Кипрских вихрей зависело от нескольких влияющих факторов, таких как: (А) величина скорости набегающего восточного потока. Большие средние скорости ослабляли циклон (рис. 2). (Б) Направление входящего фонового потока. Северо-восточное направление средней скорости течения подавляло генерацию циклона (рис. 3). (В) Знак меридионального сдвига зональной скорости. Положительный меридиональный сдвиг способствовал ослаблению циклона (рис. 4А), его отсутствию в слоях. Отрицательный сдвиг инициировал усиление циклона и подавление антициклона (рис. 4В). (Г) Наличие свободных вихрей Средиземного моря, сносимых потоком в сторону Кипрских вихрей.

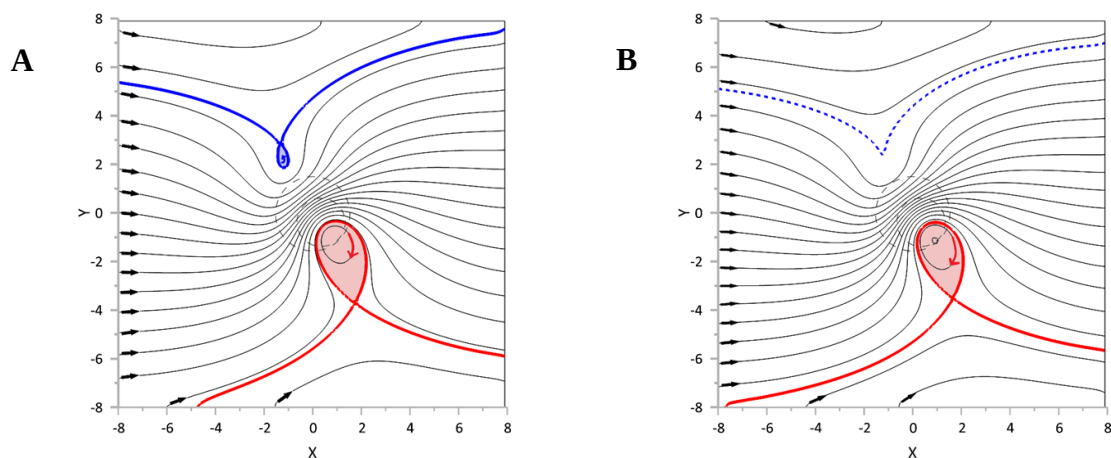


Рис.2 Линии тока внешнего поля (2) в верхнем слое при  $\bar{U} = 1 \text{ см/с}$  (А) и  $\bar{U} = 1.1 \text{ см/с}$  (В).

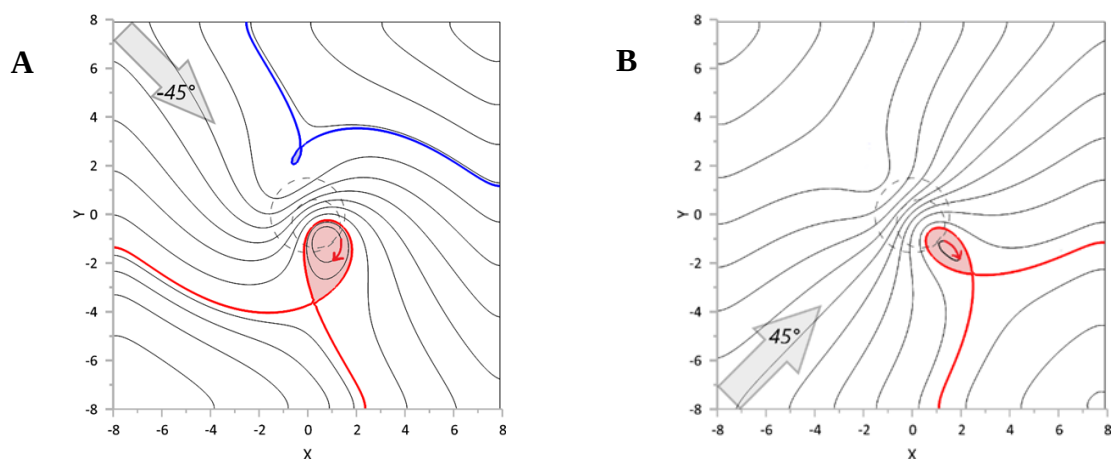


Рис.3 Аналогично Рис. 2 при  $\bar{U} = 0.9 \text{ см/с}$ ;  $\bar{V} = -0.9 \text{ см/с}$  (А) и  $\bar{V} = 0.9 \text{ см/с}$  (В).

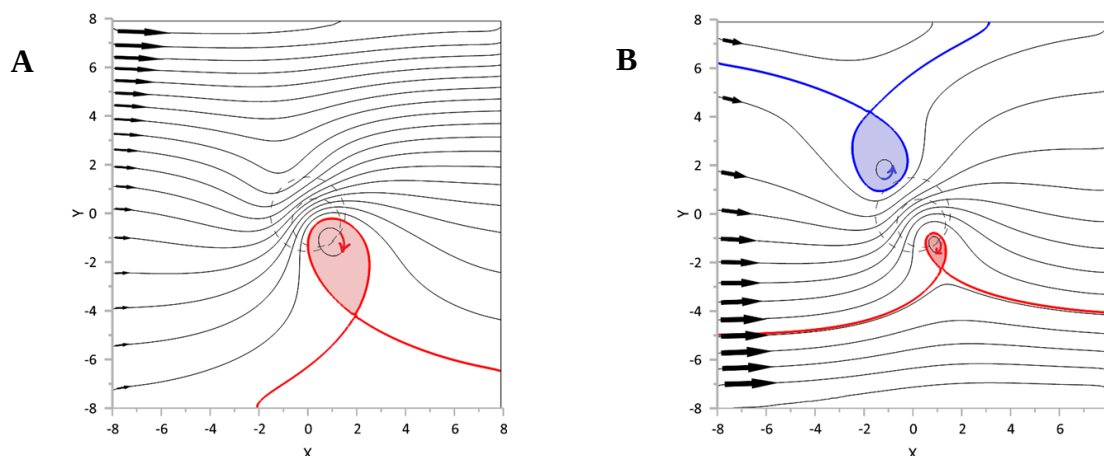


Рис.4 Линии тока в среднем слое при наличии положительного (А) и отрицательного (В) меридиональных сдвигов зональной скорости (усиление  $\bar{U}$  в 2.5 раза до 2 см/с).

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа ВМЕ и МАС шла по гос. программе № FMWZ-2022-0001 (№ гос. регистрации 122041100222-7), поддержана Российским научным фондом (проект РНФ № 22-27-00431), МАС поддержан Российским фондом фундаментальных исследований (проект РФФИ № 20-05-00083).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Egorova V.M., Zyryanov V.N., and Sokolovskiy M.A. The hydrodynamic theory of the Cyprus Eddy. *Ocean Dyn* 72(1). 2022. p. 1–20
2. Brenner S., Rozentraub Z., Bishop J., and Krom M. The mixed-layer/thermocline cycle of a persistent warm core eddy in the eastern Mediterranean. *Dyn Atmos Oceans* 15(3–5). 1991. p. 457–476
3. Zodiatis G., Drakopoulos P., Brenner S., and Groom S. Variability of the Cyprus warm core Eddy during the CYCLOPS project. *Deep-Sea Res* 52(2). 2005. p. 2897–2910
4. Sergi T. and François S. Seamounts. In *The Mediterranean Deep-sea Ecosystems: An Overview of Their Diversity, Structure, Functioning and Anthropogenic Impacts, with a Proposal for Their Conservation*. IUCN. ISBN 978-2-8317-0846-1. 2004. p. 32–34
5. Holmboe J. Instability of baroclinic three-layered models of the atmosphere. *Geophys Publ* 28. 1968. p. 1–27
6. Davey M.K. Baroclinic instability in a fluid with three layers. *J Atmos Sci* 34(8). 1977. p. 1224–1234
7. Соколовский М.А. Моделирование трехслойных вихревых движений в океане методом контурной динамики // *Известия АН СССР, Физика атмосферы и океана*. 1991. Т. 27. № 5. С. 550–562
8. Zabusky N.J., Hughes M.H., and Roberts K.V. Contour dynamics for Euler equations in two dimensions. *J Comput Phys* 30(1). 1979. p. 96–106
9. Козлов В.Ф. Метод контурной динамики в модельных задачах о топографическом циклогенезе в океане // *Известия АН СССР, Физика атмосферы и океана*. 1983. Т. 19. № 8. С. 845–854
10. Sokolovskiy M.A. and Verron J. *Dynamics of Vortex Structures in a Stratified Rotating Fluid*. Atmos and Oceanogr Sci Lib 47. Springer. Swidzerland. 2014. p. 382



## ЛАБОРАТОРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ И ЗАТУХАНИЯ БАРОКЛИННЫХ ВИХРЕЙ В ДВУХСЛОЙНОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ НАД ГЛАДКИМ И ШЕРОХОВАТЫМ ДНОМ

*Елкин Д.Н., Зацепин А.Г., Шварцман Д.Р.  
Институт океанологии им. П.П. Шишова РАН, Москва  
[dmelkin@mail.ru](mailto:dmelkin@mail.ru)*

Одной из важных структурных форм организации движения вод океана являются мезомасштабные бароклинные вихри [1]. Образование этих вихрей происходит под действием различных механизмов, включающих в себя влияние топографических и орографических неоднородностей на океанские течения, пространственно-неоднородное воздействие ветра, а также бароклинную неустойчивость стратифицированных по плотности течений, характеризующихся наличием вертикального градиента скорости.

Целью текущей работы является установление путем лабораторного моделирования закономерностей процесса неустойчивости и вязкого вырождения бароклинных вихрей открытого океана (т.е., без ядра инородных вод) в условиях гладкого и шероховатого дна. В качестве механизма создания вихрей использовался метод «внутреннего цилиндра». С помощью этого метода создавались циклонические и антициклонические вихри в двухслойно стратифицированной по солености водной среде в цилиндрическом бассейне, расположенном на вращающейся платформе.

Опыты проводились следующим образом. В раскрученную до твердотельного вращения двуслойно-стратифицированную по солености водную среду с помощью специально разработанного устройства автоматическим образом вертикально погружался полый цилиндр на глубину, превышающую толщину верхнего слоя. Верхний слой воды в цилиндре подкрашивался. Для создания циклона часть подкрашенной воды верхнего слоя откачивалась, а для создания антициклона дополнительное количество подкрашенной воды той же плотности добавлялось в верхний слой внутрь цилиндра. После того, как созданное этой процедурой возмущение водной среды затухало, цилиндр автоматическим образом быстро вынимался из воды и, вместе с устройством его перемещения, снимался с вращающейся платформы. Непосредственно перед поднятием цилиндра включались две видеокамеры, расположенные как над платформой, так и сбоку вблизи стенки бассейна. Они осуществляли запись процесса эволюции вихря в бассейне, визуализированной красителями. Для определения горизонтального распределения скорости течения, обусловленной вихрями, на поверхность воды помещались бумажные пелетки. Опыты продолжались до тех пор, пока вихри не вырождались либо из-за вязкого трения на дне и на боковой стенке бассейна, либо вследствие неустойчивости и распада первоначального вихря на вторичные вихревые структуры. При этом одни и те же опыты проводились над гладким и шероховатым дном.

Данные видеосъемки эволюции вихрей обрабатывались с помощью специальных компьютерных программ. Рассчитывалась орбитальная скорость вихря в верхнем слое, ее распределение в зависимости от расстояния от центра вихря. Идентифицировались том особенности его эволюции (инерционные колебания в процессе геострофического приспособления, бароклинная неустойчивость и распад вихря на вторичные вихревые структуры, или его постепенное вязкое вырождение). Определялись безразмерные параметры, такие как, числа Россби, Бюргера и Экмана.

Основные результаты работы заключаются в следующем.

Установлено, что в начале каждого опыта происходит процесс геострофического приспособления вихря, сопровождающийся радиальными колебаниями на удвоенной частоте вращения платформы. Эти колебания затухают на протяжении  $5-10T$ , где  $T$  – период вращения платформы (лабораторные сутки).

Для осесимметричных (устойчивых) циклонических вихрей на практике подтверждено экспоненциальное затухание орбитальной скорости вихря со временем. В случае антициклона обнаружен эффект эпизодического ускорения скорости вращения вихря в процессе его затухания, нуждающийся в теоретическом обосновании.

Влияние шероховатости дна на процесс затухания вихревых структур было слабо выраженным даже тогда, когда шероховатость существенно превышала масштаб Экмана. Из этого следует, что затухание вихря происходило в основном благодаря горизонтальному, а не вертикальному трению.

Установлено, что неустойчивость вихрей и их распад на вторичные вихревые структуры (см. рис.) происходит при значениях начального числа Бюргера ( $Bu_0$ ) существенно меньших единицы, как было показано ранее в опытах с фронтальными вихрями, содержащими воду другой плотности по сравнению с окружающей их водой [2, 3]. При этом циклоны являются менее устойчивыми по сравнению с антициклонами, а шероховатость дна увеличивает устойчивость вихрей.

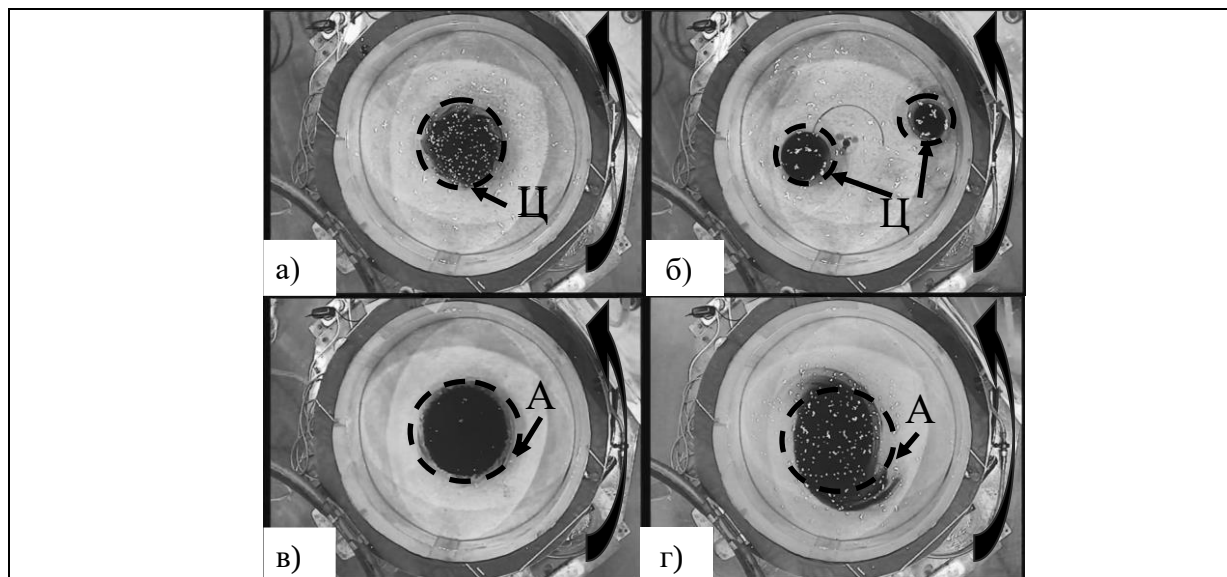


Рис. 1. Кадры, демонстрирующие неустойчивость первоначально осесимметричных вихрей при  $Bu_0 = 0.28$ : а) циклон на стадии формирования; б) распад циклона на два вторичных циклонических вихря через  $25T$ ; в) антициклон на стадии формирования; г) слабая неустойчивость антициклон через  $25T$ .  $T = 10$  с - период вращения платформы. Толстая стрелка – направление вращения платформы. Пунктиром обозначены вихри: буквой Ц – циклонические, буквой А – антициклонические.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена в рамках госбюджетной темы № FMWE-2021-0002, при финансовой поддержке гранта РНФ № 21-77-10052.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каменкович В.М., Кошляков М.Н., Монин А.С. Синоптические вихри в океане - Ленинград: Гидрометеиздат, 1975. - 264 с.
2. Saunders P.M. The Instability of a Baroclinic Vortex // J. Phys. Oceanogr. 3(1): 61–65



3. Зацепин А.Г., Костяной А.Г. Лабораторные исследования неустойчивости бароклинных вихрей и фронтов. - В сб.: Когерентные структуры и самоорганизация океанских движений. М.: Наука. 1992. С.163-176.



## ВОЛНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ УДАРЕ ЖЕСТКОГО ИНДЕНТОРА О ЛЁД

*В.П. Епифанов, С.А. Лычев*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

[lychevsa@mail.ru](mailto:lychevsa@mail.ru)

Динамические, в том числе ударные, воздействия на массивы льда, приводящие к его разрушению, необходимо учитывать при моделировании разнообразных техногенных процессов в холодных регионах. Ярким примером является моделирование процесса разрушения ледового поля носовой частью ледокола [1]. Методам теоретического моделирования и экспериментальной верификации используемых при этом математических моделей посвящена обширная литература. Вместе с тем, в виду сложной поликристаллической структуры льда и его реологии, вопрос о выборе адекватной модели неупругого деформирования и разрушения все еще остается открытым. В этой связи развитие методов математического моделирования и экспериментальной идентификации удара по ледовой преграде представляет актуальную на сегодняшний день проблему механики деформируемого твердого тела. В настоящей статье представлены результаты развития экспериментальной методики идентификации неупругих характеристик ледяной преграды, которая основана на анализе закона движения жесткого массивного шара во временном интервале ударного контакта.

Выбор реологической модели льда осложняется тем, что, во-первых, макроскопический образец льда представляет собой совокупность микроскопических кристаллов, газовых пор, включений, что придает ему свойства конструкции, во-вторых, физико-механические свойства составляющих его элементов существенно зависят от внешних условий, в частности, от температуры и давления, в-третьих, структура льда в значительной степени определяется историей его замораживания и существования в кристаллизованном виде, что придает ему свойства материала с памятью. Поэтому для анализа особенностей термомеханического отклика образцов льда на внешние воздействия целесообразно рассмотреть последовательность моделей, начиная с достаточно простых – упругих. Это удобно методологически и отвечает ретроспективному обзору развития представлений о механике льда.

Известно, что при малых деформациях лед  $Ih$  проявляет свойства линейно-упругого тела, причем кристаллографические оси в монокристалле соответствуют гексагональному типу анизотропии. В этом случае связь между напряжениями  $\sigma$  и малыми деформациями  $\varepsilon$  может быть записана в виде  $\sigma = E:\varepsilon$ , где  $E$  – тензор упругости, характеризующий в общем случае 21 константой. Однако макроскопические образцы могут проявлять свойства изотропного материала за счет осреднения ориентаций кристаллографических осей отдельных монокристаллов. Связь между макроскопическими модулями изотропной модели и модулями анизотропной упругости кристаллов (в предположении, что ориентация их кристаллографических осей подчиняется нормальному распределению) впервые теоретически была получена Фойгтом [2]. В этом случае

закон состояния характеризуются двумя упругими модулями: модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ :  $\sigma = 2\mu\epsilon + \lambda I \otimes I : \epsilon$ .

Несмотря на то, что линейно-упругое поведение льда при малых деформациях подтверждается экспериментально, идентификация упругих модулей оказывается далеко не такой простой задачей. Это может быть осуществлено различными методами, но наиболее часто используются квазистатические испытания и методы физической акустики. Первый метод предполагает квазистатическое нагружение образцов и непосредственную фиксацию диаграммы деформирования. Пионерские исследования квазистатических упругих свойств льда были выполнены в первой половине XX века (Weinberg, 1936, Dorsey, 1940, Hess, 1940). Однако измеренные значения модуля Юнга имели очень большой разброс – от 0.3 ГПа до 11 ГПа. В этой связи было поставлено под сомнение возможность измерения упругих свойств льда традиционными способами.

Прецизионный импульсно-фазовый метод позволяет измерять скорости продольных и поперечных волн, по которым, в предположении о линейно-упругом и изотропном характере распространения возмущений, определяются динамический модуль (близкий к модулю Юнга) и коэффициент Пуассона. Первые достоверные результаты зависимости упругих модулей от температуры были получены Boul и Sproule (1931). Чуть позже были установлены зависимости упругих модулей от плотности и пористости макроскопических свойств льда, в частности, Langleben предложил эмпирическую формулу  $E = 10 - 0.0351\nu$ , где  $\nu$  характеризует пористость, которая актуальна по сей день для поликристаллического льда при температурах, близких к фазовому переходу. Используя резонансный метод, Nakaya получил следующие зависимости для льда  $E = 10 - 0.0351\nu$  (ГПа) и снега  $E = C e^{-k(1/2-\rho)}$ . Вязкоупругие свойства в приближении линейной изотропной модели Максвелла  $\dot{\sigma} + \sigma/\tau = E:\dot{\epsilon}$  также могут быть идентифицированы резонансным методом, что впервые было выполнено Nakaya [3]. В частности, для пресноводного льда время релаксации  $\tau$  оказывается порядка 2 мс.

Механизм развития пластической деформации льда достаточно сложен и выбор феноменологического критерия пластичности существенно зависит от условий испытания. Известны успешные приложения критериев, приведенных в таблице ниже [4]

|                            |                                                                                                                                                                                                                                                   |
|----------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Критерий Фон-Мизеса        | $\sqrt{J_2} - k = 0$                                                                                                                                                                                                                              |
| Ортотропный критерий Хилла | $a_1(\sigma_y - \sigma_z)^2 + a_2(\sigma_z - \sigma_x)^2 + a_3(\sigma_x - \sigma_y)^2 + a_4\tau_{yz} + a_5\tau_{zx} + a_6\tau_{xy} - 1 = 0$                                                                                                       |
| Teardrop-shaped критерий   | $\sigma_1 - \sigma_3 - \tan\theta(1 + (\sigma_3 - C)/(C - T))^{1/2} = 0, \quad \theta = K\varepsilon'^q, \quad K = 70.7, \quad q = 0.23$                                                                                                          |
| n-type критерий            | $a_1[(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + a_3(\sigma_x - \sigma_y)^2 + a_4(\tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) + 2(a_1 + 2a_3)\tau_{xy}^2 + a_7(\sigma_x + \sigma_y) + a_9\sigma_z - 1 = 0$                                                |
| Smith's критерий           | $a_1(\sigma_y - \sigma_z)^2 + a_2(\sigma_z - \sigma_x)^2 + a_3(\sigma_x - \sigma_y)^2 + a_4(\tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) + a_6\tau_{xy}^2 + a_7\sigma_x + a_8\sigma_y + a_9\sigma_z + (a_{10}\sigma_x + a_{11}\sigma_y + a_{12}\sigma_z)^2 - 1 = 0$ |

На основе приведённых выше законов вязкоупругости и критериев пластичности разработана многопараметрическая осесимметричная конечноэлементная модель ударного взаимодействия абсолютно жесткого шара и ледяного слоя конечной толщины. Контакт полагается без проскальзывания, контактная зона определялась итерационно из условия геометрического согласования контактирующих поверхностей и динамического баланса контактных усилий. Результаты вычислительного моделирования сопоставляются с результатами эксперимента. Следует отметить существенное влияние волновых эффектов на распределение усилий в массиве льда и формирование области пластических деформаций, а также выделение двойной периодичности в пространственных и временных распределениях. Из сравнительного анализа вычислительных и экспериментальных результатов уточнены упругие модули, время релаксации и параметры критерия пластичности. Некоторые из результатов приведены на рисунках 1-6.

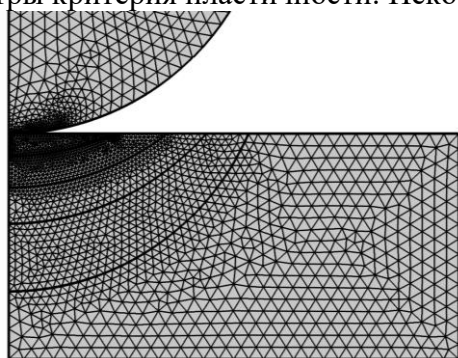


Рис. 1. Конечноэлементная модель контактного взаимодействия жесткого шара и ледяного слоя.

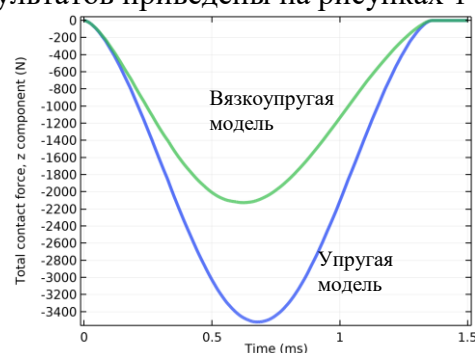


Рис. 2. Изменение во времени суммарного контактного усилия в рамках упругой и вязкоупругой модели слоя.

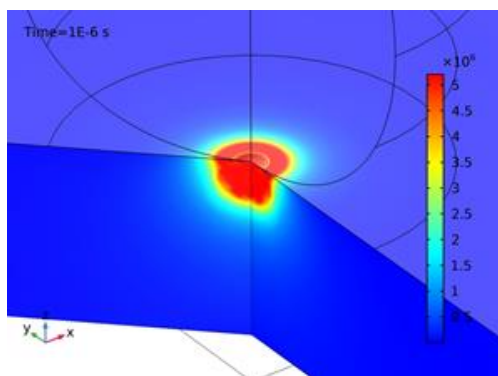


Рис. 3. Напряжения Мизеса в начальный момент соударения (0.1 мс) в рамках модели пластического слоя.

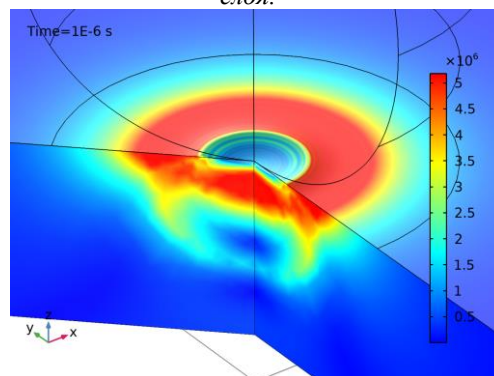


Рис. 4. Напряжения Мизеса в финале процесса соударения (1.5 мс) в рамках модели пластического слоя.



Рис. 5. Экспериментальная временная диаграмма ускорений центра масс шара при ударе. Окружность выделяет область сравнения с теоретической моделью.

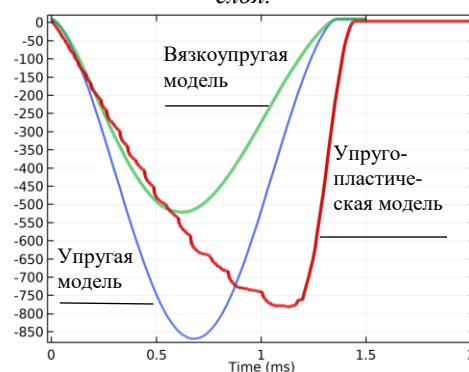


Рис. 6. Теоретические временные диаграммы ускорений центра масс шара при ударе в рамках упругой, вязкоупругой и упругопластической модели ледяного слоя.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 20-01-00649.

This work supported by RFBR (grant № 20-01-00649 “Numerical and experimental study of nonlinear wave phenomena in contact ice destruction”).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Y. Gao, Z. Hu, J. W. Ringsberg, J. Wang. An elastic–plastic ice material model for ship-iceberg collision simulations // Ocean Engineering. 2015. V. 102. P. 27-39. doi.org/10.1016/j.oceaneng.2015.04.047.
2. W. Voigt. Lehrbuch der Kristallphysik. 1828.
3. U. Nakaya. Visco-elastic Properties of Snow and Ice in Greenland Ice Cap. // Journal of the Faculty of Science, Ser. II, Vol. V, No.3, 1958.
4. W. Zhang, J. Li, L. Li, Q. Yang. A systematic literature survey of the yield or failure criteria used for ice material // Ocean Engineering 254 (2022) 111360.



## ЭВОЛЮЦИЯ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЩЕСТВА КАПЛИ В ПРИНИМАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

*Есина Е.В., Ильиных А.Ю.*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

[ilynykh@ipmnet.ru](mailto:ilynykh@ipmnet.ru)

Перенос вещества каплями играет важную роль в природных условиях в задачах сохранения плодородных почв, распространения бактерий и вирусов, вызывающих болезни растений, животных и человека, все более активно используется в современных промышленных технологиях в нефте-, био- и химической промышленности, что стимулирует развитие лабораторных и численных исследований. Проведенные опыты, которые ведутся с конца 19 века, позволили выделить два основных режима эволюции структуры течения. При сравнительно медленных скоростях падающей капли в принимающей жидкости формируется вихревое кольцо. При больших скоростях, когда образуется каверна и всплеск, вещество капли распределяется по деформированной поверхности принимающей жидкости в форме отдельных волокон. В данных опытах проведена визуализация картины течения методов подкраски с использованием пигмента али-зариновых чернил.

Размерными параметрами течения являются плотности (воздуха  $\rho_a$ , жидкостей капли  $\rho_d$  и принимающей  $\rho_t$ ), кинематические  $\nu_{a,d,t}$  и динамические  $\mu_{a,d,t}$  вязкости, коэффициенты поверхностного натяжения  $\sigma_d^a$ ,  $\sigma_t^a$ , коэффициенты диффузии вещества капли  $\kappa_t^d$  в принимающей жидкости, температуры ( $T_d = T_t = T_a$ ), условия опытов (диаметр  $D$  и скорость  $U$  капли в момент первичного контакта, высота свободного падения  $H$ , внешнее поле силы тяжести  $g$ ). Выделяются дополнительные параметры: масса капли  $M$ , площадь свободной поверхности  $S_d$ , импульс  $p$ , кинетическая  $E_k$  и доступная потенциальная поверхностная энергия  $E_\sigma$  падающей капли.

Отношения размерных параметров задачи задают наборы безразмерных комбинаций, включающие традиционные числа: Рейнольдса  $1450 < Re < 18000$ , Фруда  $2.8 < Fr < 450$ , Бонда  $Bo = 2.39$ , Онезорге  $Oh = 0.0018$ , Вебера  $6.7 < We < 1100$ .



Опыты выполнены методом высокоскоростной видеорегистрации на стенде ТБП, входящем в состав комплекса «УНУ ГФК ИПМех РАН». Типичные картины течения в каждом из режимов приведены на рис. 1. В интрузивном режиме при малых скоростях ( $U \approx 0.3$  м/с) падения капли в течении первых 12 мс сохраняются выпуклость объединенной поверхности капли-принимающая жидкость. Вещество втекающей капли образует в жидкости интрузивный вихрь, линейно погружающийся в жидкость (рис. 1 а-в), далее происходит продавливание поверхности и образование каверны [1].

По мере увеличения скорости и, соответственно, энергии капли перераспределение энергии и вещества капли существенно меняется: за переходным слоем с изрезанной кромкой (рис. 1, г) с задержкой менее 1 мс начинается быстрое формирование углубления с плоским на начальном этапе дном, которое затем трансформируется в полусферическое. Передние фронты начального переходного слоя и каверны стремительно выравниваются, вещество капли оказывается распределенным у поверхности каверны в форме линейчатых и сетчатых структур, в узлах которых образуются проникающие в жидкость вихревые элементы (рис. 1, д). По мере схлопывания каверны вихри вытягиваются в наклонные петли, динамика которых рассматривалась в [2] (рис. 1, е).

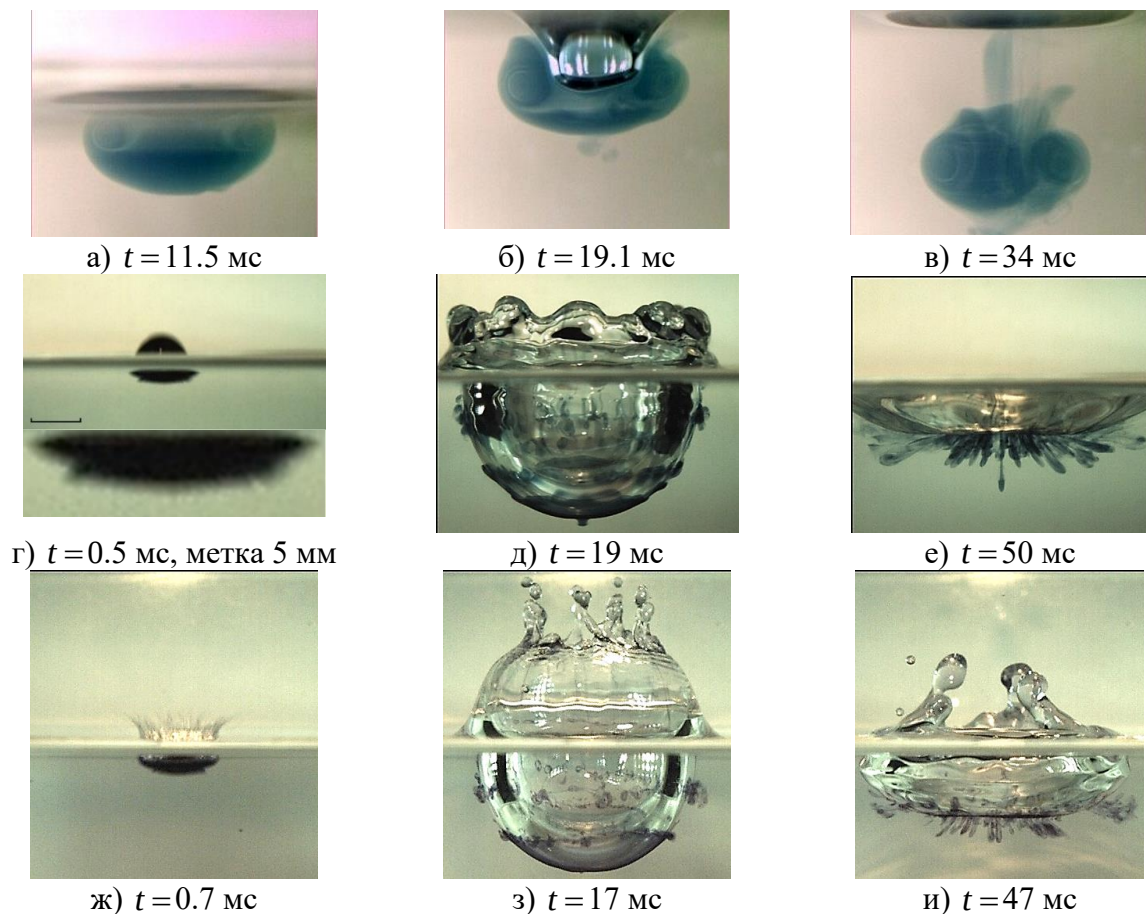


Рис. 1. Картины переноса вещества капли в разных режимах: а-в) формирование интрузии, при слиянии с водой капли раствора чернил (концентрация 1:1000), ширина кадра – 1 см ( $D = 0.42$  см,  $U = 0.34$  м/с,  $E_{\sigma} = 4$  мкДж,  $E_k = 2.24$  мкДж,  $Re = 1450$ ,  $Fr = 2.8$ ,  $Bo = 2.39$ ,  $Oh = 0.0018$ ,  $We = 6.7$ ); г-е) эволюция течения с волокистым промежуточным слоем в режиме всплеска (концентрация чернил 1:100,  $D = 0.43$  см,  $U = 3.1$  м/с,  $Re = 13300$ ,  $We = 570$ ,  $Fr = 228$ ,  $Bo = 2.5$ ,  $Oh = 0.0018$ ,  $E_k = 200$  мкДж,  $E_{\sigma} = 4.2$  мкДж), ж-и) кольцевые структуры импакта капли при больших скоростях падения

( $D=0.43\text{ см}$ ,  $U=5.2\text{ м/с}$ ,  $Re=22300$ ,  $We=1600$ ,  $Fr=640$ ,  $Bo=2.5$ ,  $Oh=0.0018$ ,  $E_k=562\text{ мкДж}$ ,

$$E_\sigma=4.2\text{ мкДж}, E_R=134, W_R=4.7\cdot 10^{-3}$$

Отмеченные особенности картины течения сохраняются и при большей скорости контакта капли (рис. 1, *ж-и*). Однако венец здесь тонкий, его кромка сильнее изрезана, с вершин коротких шипов выбрасывается большое число мелких брызг. На стенках каверны выражены окрашенные горизонтальные кольца [3]. Окрашенная жидкость собирается в отдельные пятна на стенках каверны, порождающие мелкие вихорьки (рис. 1, *з*). Центральная донная струйка здесь присутствует, но выражена слабее. Группы коротких наклонных петель формируются к началу схлопывания каверны. Более четкие волокна длиной  $3 < l_f < 3.5\text{ мм}$  и петли образуются к началу роста всплеска, когда стенки каверны покрыты вертикальными впадинами, разделенными острыми гребнями.

Геометрические параметры каверн в опытах, представленных на рис. 1, приведены на рис. 2. Картина течения зависит от отношения ДППЭ  $E_\sigma$  и кинетической энергии капли  $E_k$ . Для медленно падающей капли (рис. 2, а), когда  $E_\sigma > E_k$ , на начальном участке до метки II (*a* при  $t < 5.32\text{ мс}$ ), когда одновременно уничтожаются поверхности обеих жидкостей, капля быстро растекается, ее ширина аппроксимируется функцией  $w_i = 0.2t^2 + 5.3$  (кривая 1, участок *a*, заштрихован интервал скрытого положения каверны).

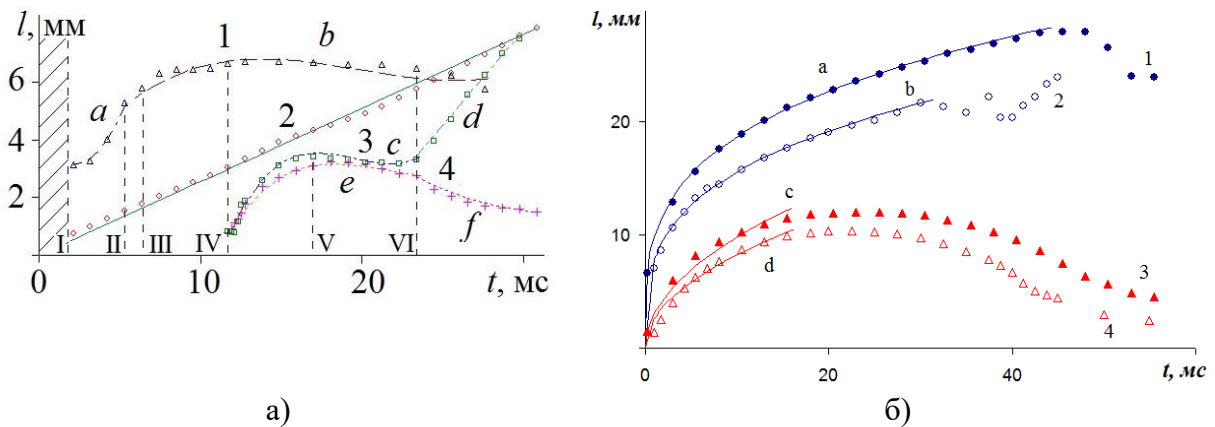


Рис. 2. Геометрия течения: а) режим импакта (кривые 1, 2 – диаметр и глубина погружения интрузии, 3, 4 – диаметр цилиндрической части и глубина каверны в интрузивном режиме; б) изменения ширины (1, 2) и глубины (3, 4) каверн импакта капли в режиме всплеска (кривые 1, 3 –  $U=5.2\text{ м/с}$ ; 2, 4 –  $U=3.1\text{ м/с}$ ; участки а–д – аппроксимации функциями вида  $l(t) = mt^n$ )

Скорость роста ширины интрузии уменьшается после погружения фронтальной части капли с  $2.13$  до  $0.44\text{ м/с}$  при  $t=6.2\text{ мс}$  (метка III). Формирование новой поверхности принимающей жидкости вызывает замедление роста ширины интрузии (кривая 1, участок *b*  $w_i = 0.00084t^3 - 0.05t^2 + 0.9t + 1.7$ ), которая достигает максимума при  $t=12\text{ мс}$  (метка IV, окончание слияния капли). Глубина интрузии на всем интервале наблюдения  $2 < t < 31\text{ мс}$  (кривая 2, Рис. 2, а) линейно растет  $h_i = 0.255t$ .

При слиянии быстро падающей капли наборы экспериментальных точек 1 – 4 на интервале  $\Delta t$  (рис. 2, б) аппроксимируются функциями *a, b, c, d* вида  $l(t) = mt^n$ , [ $l$ ]=мм, [ $t$ ]=мс. Немонотонные вариации размеров при  $t > 35\text{ мс}$  отражают влияние крупно-

масштабных осцилляций поверхности жидкости и капиллярных волн, как охватывающих венцы, так и сбегаящих с его кромки в каверну.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** Проведенные опыты показали, что в интрузивном режиме вещество капли образует компактный объем в толще принимающей жидкости. В импактном режиме вещество капли образует сложную дискретную (линейчатую и сетчатую) структуру на поверхности каверны и венца, которая непрерывно эволюционирует с образованием систем тонких волокон и петель. Волокнистые структуры распределения вещества сохраняются на всех этапах эволюции течения.

Опыты выполнены на стенде ТБП, входящем в состав комплекса «УНУ ГФК ИПМех РАН».

#### **БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ**

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598-П «Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью», <https://rscf.ru/project/19-19-00598/>).

#### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Чашечкин Ю. Д., Ильиных А. Ю. Задержка формирования каверны в интрузивном режиме слияния свободно падающей капли с принимающей жидкостью // ДАН. 2021. Т. 496, № 1. С. 45–50.
2. Чашечкин Ю. Д., Ильиных А. Ю. Формирование системы наклонных петель в течении импакта капли // Доклады РАН. 2021. Т. 499, № 1. С. 48–57.
3. Ильиных А. Ю. Тонкоструктурные компоненты всплеска капли // ПММ. 2019. Т. 83, №3. С. 413–427.



## **ВИХРЕВЫЕ СТРУКТУРЫ НЕУСТОЙЧИВЫХ ТЕЧЕНИЙ, ВЫЗВАННЫХ ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ ЖИДКОСТИ**

*Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова*

*Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва*

[jilenko@imec.msu.ru](mailto:jilenko@imec.msu.ru)

Течения с вращательными колебаниями наблюдаются во многих природных системах: так, хорошо известна неравномерная во времени, с отклонением  $\pm 0.5\%$  от средних значений, угловая скорость вращения поверхности Солнца [1]. Устойчивые нестационарные течения, вызванные вращательными колебаниями одной из границ относительно состояния покоя, могут использоваться при определении реологических свойств жидкостей [2]. В связи с этим необходима информация о зависимости положения границ устойчивости от амплитуды и частоты колебаний. В работах [2,3] показано, что в цилиндрическом течении Куэтта при низких частотах вращательных колебаний наблюдаются структуры, похожие на вихри Тейлора и занимающие всю толщину слоя. При высоких частотах в [2,3] наблюдались вихри Гертлера, занимающие только меньшую часть цилиндрического слоя, примыкающую к внутренней границе. При промежуточных частотах виды неустойчивости не исследовались.

Цель исследования - численное исследование видов неустойчивости, развивающихся при вращательных колебаниях жидкости в сферическом слое с относительной



толщиной  $\Delta = (r_2 - r_1)/r_1 = 0.19$ , где  $r_1$  и  $r_2$  - радиусы внутренней и внешней сфер. В таком сферическом слое при постоянной скорости вращения внутренней сферы и неподвижной внешней на пределе устойчивости наблюдаются вихри Тейлора [4]. Математическое моделирование данной задачи проводится на основе системы уравнений Навье-Стокса и неразрывности:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = U \times \text{rot} U - \text{grad} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} \right) - \nu \text{rot} \text{rot} U, \text{div} U = 0$$

где  $U$ ,  $p$ ,  $\nu$ ,  $\rho$  - скорость, давление, вязкость и плотность жидкости. При численном решении используется сферическая система координат с радиальным ( $r$ ), полярным ( $\theta$ ) и азимутальным ( $\varphi$ ) направлениями. В этой системе координат условия не протекания и прилипания на сферических границах имеют вид:

$$u_\varphi(r = r_k) = \Omega_k(t)r_k \sin \theta, \quad u_r(r = r_k) = 0, \quad u_\theta(r = r_k) = 0, \quad k = 1, 2$$

$u_\varphi$ ,  $u_r$ ,  $u_\theta$  - азимутальная, радиальная и полярная компоненты скорости,  $k = 1$  соответствует внутренней сфере,  $k = 2$  - внешней,  $\Omega_k$  - угловая скорость вращения. Скорость вращения внутренней сферы периодически изменяется  $\Omega_1(t) = A \sin(2\pi f t)$ ,  $A, f$  - амплитуда и частота модуляции, внешняя сфера неподвижна. Численное решение проводилось с использованием алгоритма [5], основанного на консервативной конечно-разностной схеме дискретизации уравнений Навье-Стокса по пространству и полунеявной схеме Рунге-Кутты 3-его порядка точности интегрирования по времени. Дискретизация по пространству проводилась с уменьшением размера ячеек вблизи границ и плоскости экватора, отношение максимального размера ячейки к минимальному изменялось от 2 до 5, общее количество узлов до  $4.6 \cdot 10^5$ . Расчеты проводились при размерных параметрах:  $\nu = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $r_1 = 0.126 \text{ м}$ ,  $r_2 = 0.15 \text{ м}$ ,  $f = 0.0682\text{--}4.363 \text{ Гц}$  [6], при этом толщина

динамического пограничного слоя  $\delta = \sqrt{\frac{\nu}{\pi f}} = (1.91\text{--}15.3) \cdot 10^{-3} \text{ м}$ , минимальный размер  $\delta$

соответствует 7 узлам расчетной сетки. Течение зависит от величин  $A$ ,  $f$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  и  $\nu$ . В качестве безразмерных параметров подобия выбраны относительная толщина слоя  $\Delta$ , длина волны  $L = \lambda / (r_2 - r_1)$ , где  $\lambda = 2\pi\delta$  [7], а также модифицированное число Рейнольдса [8]  $\text{Re} = (Ar_1^2\delta)/(\nu r_1)$ . Структура течений определялась по виду азимутальной компоненты завихренности  $\omega_\varphi$  в меридиональной плоскости течения:

$$\omega_\varphi = \frac{1}{rr'} \frac{\partial r u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r\theta'} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}$$

Установлено, что в случае длинных волн ( $1.66 \leq L \leq 4$ ) при потере устойчивости наблюдаются вихри Тейлора, занимающие всю ширину слоя, форма которых зависит от периода колебаний (рис.1, справа, квадратные символы). В случае коротких волн ( $L = 0.5$ ) вблизи экватора и внутренней сферы наблюдаются малые по размеру вихри Гертлера, вызванные неустойчивостью динамического пограничного слоя (рис.1, слева, круглый символ). Тороидальные структуры в случае коротких и длинных волн качественно соответствуют результатам экспериментов [2,3].

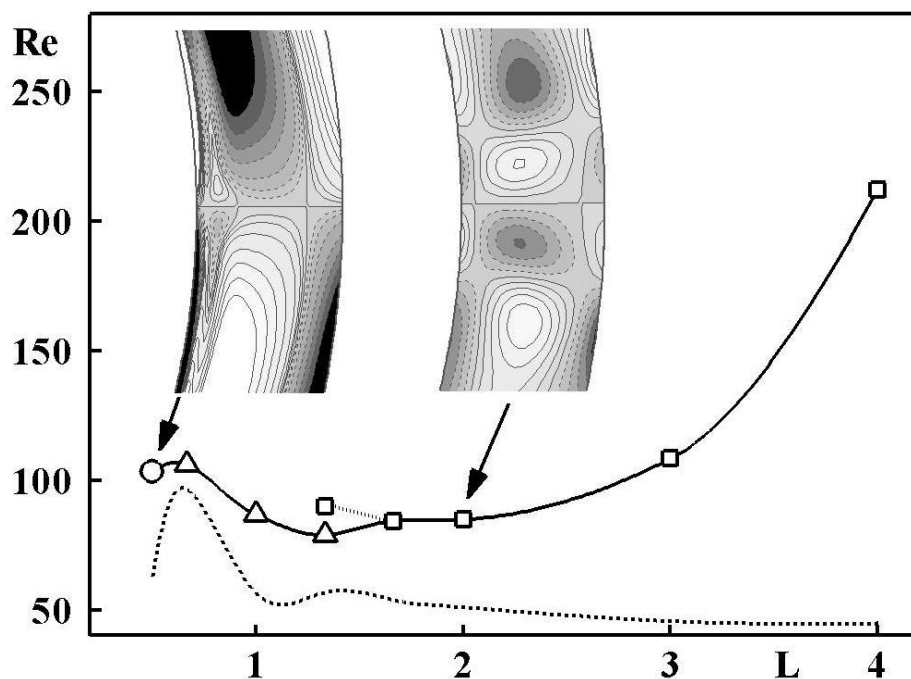


Рис. 1. Предел устойчивости (сплошная линия) и разность фаз колебаний азимутальной и меридиональной составляющих кинетической энергии течения (прерывистая линия). Показаны уровни  $\omega_\phi$  [ $s^{-1}$ ] ( $-10 < \omega_\phi < 10$ ): справа вихри Тейлора при  $L = 2$ ,  $Re = 84.7$ ,  $\Delta\omega_\phi = 2$ , слева вихри Гёртлера при  $L = 0.5$ ,  $Re = 105.9$ ,  $\Delta\omega_\phi = 0.5$ .

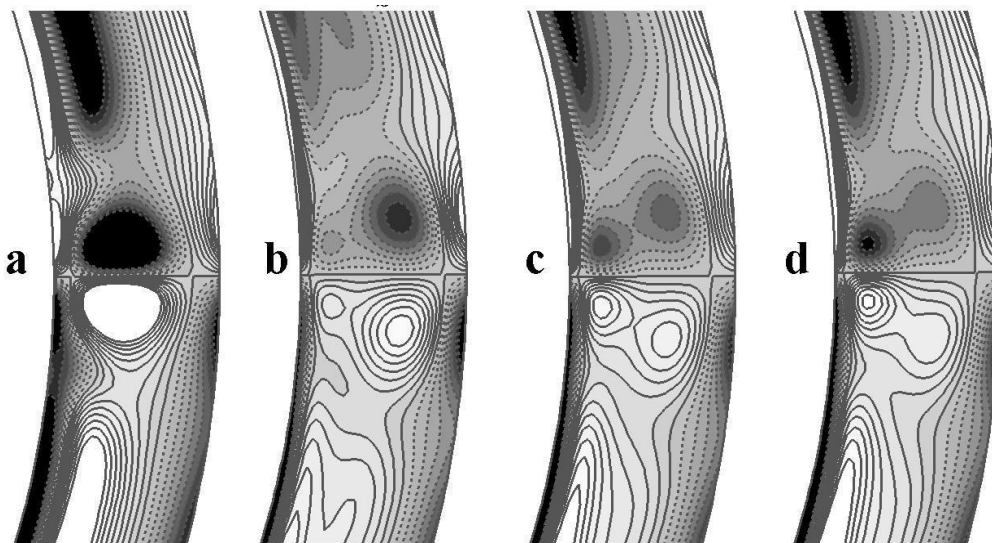


Рис. 2. Распределение уровней  $\omega_\phi$  [ $s^{-1}$ ] в меридиональной плоскости течения при  $L = 1.33$  и  $Re = 80.8$ ,  $-8 < \omega_\phi < 8$ ,  $\Delta\omega_\phi = 1$ , а –  $tf = 0, 0.5$ ; б –  $tf = 0.25, 0.75$ ; в –  $tf = 0.28, 0.78$ ; д –  $tf = 0.3, 0.8$ ,  $t$  – время от начала цикла колебаний.

В интервале промежуточных длин волн ( $0.67 \leq L \leq 1.33$ ,  $2.45 \geq f \geq 0.61$  Hz) обнаружен новый вид неустойчивости, не наблюдавшийся ранее в экспериментах (рис. 2, а также треугольные символы на рис. 1). Характерный масштаб вихрей при такой неустойчивости не превышает половины толщины слоя. Таким образом, при вращательных колебаниях внутренней сферы относительно состояния покоя наблюдаются три вида неустойчивости, и каждому виду соответствует свой диапазон изменения  $L$ . Границы диапазонов можно определить по положению максимумов на кривой, соответствующей пределу устойчивости (рис. 1, сплошная линия). Аналогичные максимумы

наблюдаются на кривой, соответствующей разности фаз между азимутальной  $E_\varphi$  и меридиональной  $E_\psi$  компонентами кинетической энергии течения (рис.1, прерывистая линия), где  $E_\varphi = \int u_\varphi^2$ ,  $E_\psi = \int (u_r^2 + u_\theta^2)$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Guerrero G., Smolarkiewicz P.K., Gouveia E.M., Kosovichev A.G., Mansour N.N. Understanding solar torsional oscillations from global dynamo model // The Astrophys. J. Lett.. 2016. 828:L3 (7pp).
2. Fardin M.A., Perge C., Casanellas L., Hollis T., Taberlet N., Ortin J., Lerouge S., Manneville S. Flow instabilities in large amplitude oscillator shear: a cautionary tale // Reol. Acta. 2014. v.53. Pp. 885-898.
3. Fardin M.A., Perge C., Taberlet N., Manneville S. Flow-induced structures versus flow instabilities // Phys. Rev. E. 2014. v.89. 011001.
4. Yavorskaya I. M., Belyaev Yu. N. Nonuniqueness and multiparametric study of transition to chaos in the spherical Couette flow // Eur. J. mech. B/fluids. 1991. v10. N2. Pp. 267-274.
5. Nikitin N. Finite-difference method for incompressible Navier-Stokes equations in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates // J. Comp. Phys. 2006. v.217. № 2. Pp. 759-781
6. Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э. Неустойчивость течения в сферическом слое пр вращательных колебаниях внутренней границы // Письма в ЖТФ. 2018. т.11. С.3-9.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука. ГРФМЛ. 2000. С. 733.
8. Hollerbach R., Wiener R.J., Sullivan I.S., Donnelly R.J., Barenghi C.F. The flow around a torsionally oscillating sphere // Phys. of fluids. 2002. v.14. N12. Pp. 4192-4205.



## ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЕКТРОВ АТМОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ЧИСЛЕННЫХ И ЛАБОРАТОРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ

Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова,  
Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва  
[jilenko@imec.msu.ru](mailto:jilenko@imec.msu.ru)

Для крупномасштабных течений в атмосфере Земли характерны вращение и сферическая геометрия. В данной работе рассматривается прямое численное моделирование турбулентности в сферическом течении Куэтта, представляющего собой изотермическое течение вязкой несжимаемой жидкости в зазоре между концентрически расположенными сферическими границами. Течение вызвано вращением этих границ вокруг общей оси. Цель исследования - качественная имитация некоторых свойств атмосферной турбулентности на примере турбулентных течений во вращающихся сферических слоях. Математическое моделирование данной задачи проводится на основе системы уравнений Навье-Стокса и неразрывности:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = U \times \text{rot} U - \text{grad} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} \right) - \nu \text{rot rot} U, \text{div} U = 0$$

где  $U$ ,  $p$ ,  $\nu$ ,  $\rho$  - скорость, давление, вязкость и плотность жидкости. При численном решении используется сферическая система координат с радиальным ( $r$ ), полярным ( $\theta$ ) и азимутальным ( $\varphi$ ) направлениями. В этой системе координат условия не протекания и прилипания на сферических границах имеют вид:

$$u_\varphi(r = r_k) = \Omega_k(t)r_k \sin\theta, \quad u_r(r = r_k) = 0, \quad u_\theta(r = r_k) = 0, \quad k = 1, 2$$

$u_\varphi$   $u_r$   $u_\theta$  - азимутальная, радиальная и полярная компоненты скорости,  $\kappa = 1$  соответствует внутренней сфере,  $\kappa = 2$  - внешней. Скорость вращения одной из сфер периодически изменяется:

$$\Omega_k(t) = \Omega_{k0} (1 + A_k \sin(2\pi f_k t + \Phi_k)),$$

здесь  $A_k$ ,  $f_k$  амплитуда и частота модуляции,  $\Omega_{k0}$  - средняя угловая скорость вращения, начальное значение фазы  $\Phi_k$  произвольно. Частоты модуляции  $f_1 = 0.01$  -  $0.1$  Hz,  $f_2 = 0.01$  -  $0.02$  Hz выбирались меньшими, чем средние величины частот вращения сфер ( $\Omega_{10}/2\pi = 0.59$  Hz,  $\Omega_{20}/2\pi = 0.32$  Hz). Численное решение проводилось с использованием алгоритма [1], основанного на консервативной конечно-разностной схеме дискретизации уравнений Навье-Стокса по пространству и полуявной схеме Рунге-Кутты 3-его порядка точности интегрирования по времени. Дискретизация по пространству проводилась на неравномерных по радиальному и меридиональному направлениям сетках, со сгущением вблизи границ и плоскости экватора, и общим количеством узлов  $5.76 \cdot 10^5$ . Чувствительность результатов к параметрам сетки рассматривалась во многих работах (например, в [2]). Получаемые в расчете турбулентные течения характеризовались видом спектра и направлением каскада передачи энергии, которое определяется знаком продольной структурной функции скорости третьего порядка [3]:  $D_{LLL} = \langle (u(l) - u(l'))^3 \rangle$ , где  $u$  - скорость в пространственно разнесенных точках  $l$  и  $l'$ , угловые скобки означают осреднение по ансамблю реализаций.  $D_{LLL} < 0$  соответствует прямому каскаду,  $D_{LLL} > 0$  - обратному. При вычислении  $D_{LLL}$  рассчитывалась зависимость азимутальной компоненты скорости от азимутального угла  $\varphi$  в течение 16 периодов вращения. При расчете уровня синхронизации (понимаемой как захват частоты и/или фазы) рассчитывались мгновенные величины разности частот  $df$  между  $\Omega_k(t)$  и  $u_\varphi$ . Величины мгновенной частоты и фазы определялись следующим образом:

$$\chi(t) = \partial(\Psi(t))/\partial t \quad \Psi(t) = \arctg(y(t)/x(t))$$

Здесь  $x(t)$  - сигнал скорости, а  $y(t)$  - ортогональное дополнение к  $x(t)$ , вычисляемое как преобразование Гильберта ряда  $x(t)$ . Уровень синхронизации определялся величиной среднеквадратичного отклонения разности частот  $rms(df)$ : чем меньше эта величина, тем выше уровень синхронизации. Также, с целью сравнения с результатами расчетов, в эксперименте проводились измерения азимутальной компоненты скорости течения лазерным доплеровским анемометром, условия эксперимента представлены в [4].

Все расчеты проводились при следующих граничных условиях:  $Re_1 = \Omega_{10} r_1^2 / \nu = 412.5$ ,  $Re_2 = \Omega_{20} r_2^2 / \nu = -900$ , знак - соответствует случаю встречного вращения сферических границ. При указанных числах Рейнольдса в отсутствие модуляции течение представляет собой бегущие азимутальные волны. При постоянной частоте модуляции с увеличением ее амплитуды исходное течение разрушается и формируется турбулентность.

В результате проведенных численных исследований установлено, что предпосылки формирования квазидвумерной турбулентности в течении создаются периодическим характером поведения азимутальной составляющей кинетической энергии течения. При уменьшении частоты периодической модуляции скорости вращения эта составляющая остается периодической, тогда как у меридиональной компоненты кинетической энергии течения наблюдается смена периодического поведения хаотическим. Спектры, характерные для "двумерной" турбулентности - с постоянным наклоном "-5/3" и обратным каскадом ( $D_{LLL} > 0$ ) на меньших частотах, и наклоном "-3" и прямым каскадом ( $D_{LLL} < 0$ ) на больших частотах [5] - обнаружены при модуляции скорости внутренней сферы (рис. 1).

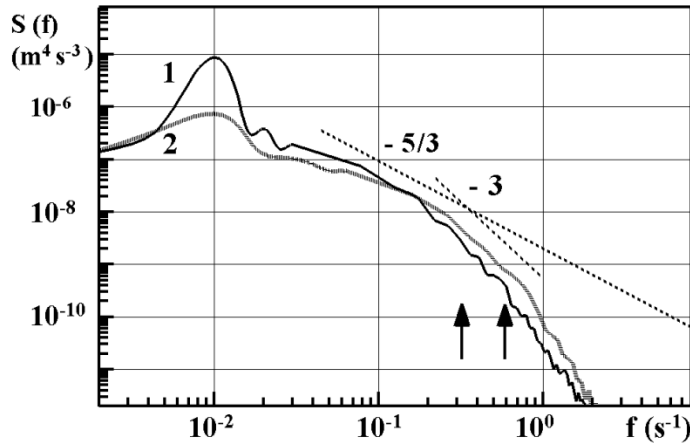


Рис.1 Спектры  $(u_\phi)^2$  в эксперименте (1) и в расчете (2) в случае модуляции скорости внутренней сферы,  $f_1 = 0.01 \text{ Hz}$ ,  $A = 0.163$ , левая вертикальная стрелка соответствует средней частоте вращения внешней сферы, правая стрелка - средней частоте вращения внутренней сферы. Спектры качественно соответствуют спектрам двумерной турбулентности.

В случае модуляции скорости внешней сферы в области индуцированной ею циркуляции наблюдаются спектры, качественный вид которых характерен для турбулентности в верхних слоях атмосферы - с постоянным наклоном "-3" на меньших частотах и "-5/3" на больших частотах [6]. Для обоих участков инерционного интервала  $D_{LLL} < 0$  [7]. Вблизи внутренней сферы вид спектра характерен для трехмерной турбулентности - остается участок с постоянным наклоном "-5/3" и  $D_{LLL} < 0$  (рис. 2).

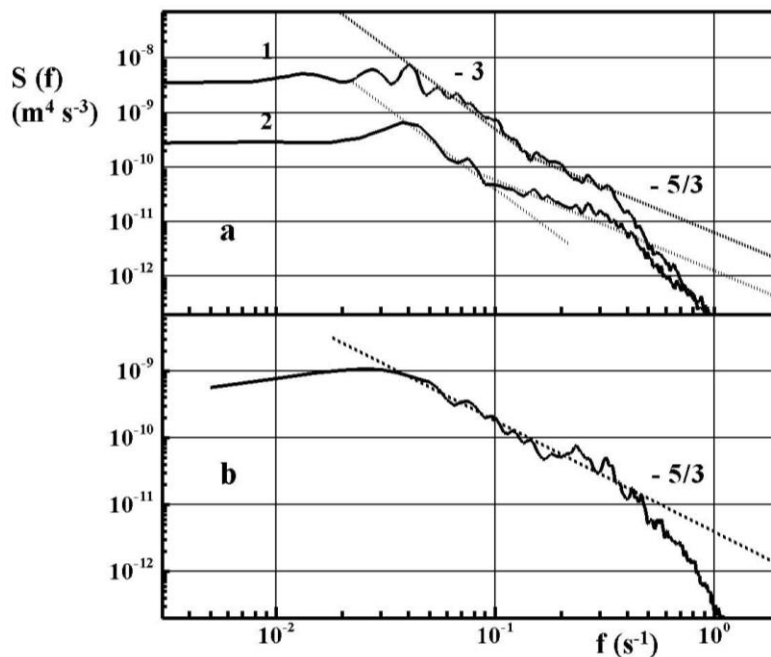


Рис. 2 Спектры  $(u_\phi)^2$  вблизи внешней сферы(а) и вблизи внутренней сферы(б), 1-эксперимент, 2-расчет, модуляция скорости внешней сферы,  $f_2 = 0.02 \text{ Hz}$ ,  $A = 0.2$ . Спектры (а) качественно соответствуют спектрам атмосферной турбулентности, спектры (б) качественно соответствуют спектрам трехмерной турбулентности.

Установлено, что во всех рассмотренных выше течениях уровень синхронизации между скоростью вращения границы и скоростью течения различен. Наименьшая синхронизация наблюдается там, где спектры подобны спектрам трехмерной турбулентно-

сти, наибольшая – там, где спектры подобны спектрам атмосферной турбулентности. Полученные результаты позволяют предположить, что вид спектров турбулентности в верхних слоях атмосферы вызван вынужденной синхронизацией, источником которой являются сезонные вариации притока солнечного тепла в атмосферу.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nikitin N. Finite-difference method for incompressible Navier-Stokes equations in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates // J. Comp. Phys. 2006. v.217. № 2. Pp. 759-781
2. Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э. Прямой расчет турбулентных течений с перемежаемостью, формирующихся в сферическом слое при модуляции скорости вращения внешней сферы // Письма в ЖТФ. 2013. т.39. №1. С. 62-70
3. Frisch U. Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov. - Cambridge. Cambridge University Press. 1995. 346 p.
4. Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э. Квазидвумерная и трехмерная турбулентность во вращающихся сферических слоях жидкости // Письма в ЖЭТФ. 2015. т.111. № 8. С.583-588
5. Данилов С.Д., Гурарий Д. Квазидвумерная турбулентность // УФН. 2000. № 9. С.921-968
6. Nastrom G.D., Gage K.S. A climatology of atmospheric wavenumber spectra of wind and temperature observed by commercial aircraft // J. Atmospheric Sci. 1985. V.42. № 9. Pp.950-960
7. Lindborg E. Can the atmospheric kinetic energy spectrum be explained by two-dimensional turbulence? // J. Fluid Mech. 1999. v. 388. Pp. 259-288.



### ЗАКОНОМЕРНОСТИ ТУРБУЛЕНТНОГО МАССООБМЕНА В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ И ЕЕ ТОНКОСТРУКТУРНОГО РАССЛОЕНИЯ

Зацепин А.Г., Герасимов В.В.

Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва

[zatsepin@ocean.ru](mailto:zatsepin@ocean.ru), [gerasimov.vv@ocean.ru](mailto:gerasimov.vv@ocean.ru)

Стратификация вод океанов и морей практически никогда не бывает "гладкой" и характеризуется наличием тонкой структуры (ТС), выражающейся в чередовании слоев и прослоек с различными значениями вертикальных градиентов характеристик (температуры, солёности, плотности и др.). К.Н. Федоров – первопроходец в исследовании ТС океана, представлял ее как своеобразный "почерк" перемешивания вод. Иногда этот почерк бывает каллиграфическим: при этом образуются регулярная ТС состоящая из последовательности квазиоднородных слоев, разделенных плотностными границами. Примеры таких структур содержатся в монографиях К.Н. Федорова.

Из общих соображений следует, что тип перемешивания не должен оказывать решающего влияния на конечный результат преобразования изначально гладкого пикноклина в ступенчатую структуру. Данные теоретического и лабораторного моделирования показывают, что однородное по вертикали турбулентное перемешивание при определенных условиях трансформирует непрерывную плотностную стратификацию к ступенчатому виду. Один из механизмов тонкого расслоения пикноклина при турбулентном перемешивании был предложен Филлипсом и Посментьером. Он заключается

в неустойчивости вертикального турбулентного обмена в стратифицированной жидкости. А именно, при сильной плотностной стратификации, локальное увеличение вертикального градиента плотности имеет тенденцию дальнейшего роста, так как вертикальный турбулентный поток массы в этой области уменьшается, а ниже и выше, в области уменьшения градиента - увеличивается. Такое поведение потока массы можно назвать «аномальным», поскольку при «нормальном» потоке массы он прямо пропорционален градиенту плотности и случайно возникшие в турбулентном течении локальные области увеличения градиента плотности должны «рассасываться». При аномальном вертикальном турбулентном потоке массы должны формироваться резкие плотностные ступеньки, а по соседству с ними - квазиоднородные слои.

Чтобы увязать между собой закономерности потока массы и вертикальной плотностной структуры среды следует разобраться с тем, что происходит с «единичной» плотностной границей раздела и турбулентным обменом при различном отношении потенциальной энергии стратификации и кинетической энергией турбулентности, определяемым числом Ричардсона.

В докладе представлены результаты работы [1], в которой методом лабораторного моделирования количественно исследуется турбулентный обмен через плотностную (соленостную) границу раздела между двумя квазиоднородными слоями, перемешиваемыми системой вертикальных стержней, синхронно колеблющихся по горизонтали и проходящих через оба слоя. Одновременно с этим, миниатюрным датчиком электропроводности измеряются профили солености в двуслойно-стратифицированной системе. Установлено, что при значениях числа Ричардсона,  $Ri > Ri^*$ , толщина границы раздела убывает или же, имеет квазипостоянное значение, а в противоположной ситуации, при  $Ri < Ri^*$  – увеличивается, а сама плотностная граница рассасывается, вплоть до смешения слоев. При  $Ri > Ri^*$  вертикальный поток массы является отрицательной степенной функцией градиента плотности (аномальный обмен), а при  $Ri < Ri^*$  - положительной (нормальный обмен), в соответствии с механизмом Филлипса – Посментьера.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена в рамках темы госзадания FMWE-2021-0002 и при поддержке гранта РФФИ №20-05-0496.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zatsepin, A.G.; Gerasimov, V.V.; Ostrovskii, A.G. Laboratory Study of Turbulent Mass Exchange in a Stratified Fluid // J. Mar. Sci. Eng. 2022, 10, 756. <https://doi.org/10.3390/jmse10060756>



### МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВСПЛЫВАЮЩЕГО ПУЗЫРЬКА

*А.Н. Зотова, А.А. Кандауров, Ю.И. Троицкая, Д.А. Сергеев*  
*Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород*  
[aniazotova@yandex.ru](mailto:aniazotova@yandex.ru)

Среди процессов, определяющих взаимодействие океана и атмосферы, важную роль играет поглощение пузырьков воздуха толщей воды, их всплытие и разрыв с попаданием капель воды в атмосферу. Одним из параметров, характеризующих эти процессы, является время жизни пузырька до его достижения поверхности воды и раз-



рыва. Мы предполагаем, что наличие в жидкости сдвигового течения, может повлиять на этот параметр, и поэтому конечной целью наших исследований будет именно моделирование всплывания пузырька газа в жидкости со сдвиговым течением. Но в данной работе речь пойдет о начальном этапе исследования – моделировании динамики пузырька в жидкости без течения для сравнения с экспериментом и результатами моделирования, приведенными в литературе.

Экспериментально динамика всплывающего пузырька была исследована в нашей группе. На рисунке 1 можно увидеть последовательность кадров съемки всплывающего пузырька для различных моментов времени, моменты времени выбраны из соображений наглядности демонстрации изменения формы пузырька. Численные исследования всплывающего в жидкости пузырька проводились, например, в работе [1] для различных параметров задачи. Результаты нашего численного моделирования в конце данной работы мы сравним с результатами нашего эксперимента и результатами работы [1].

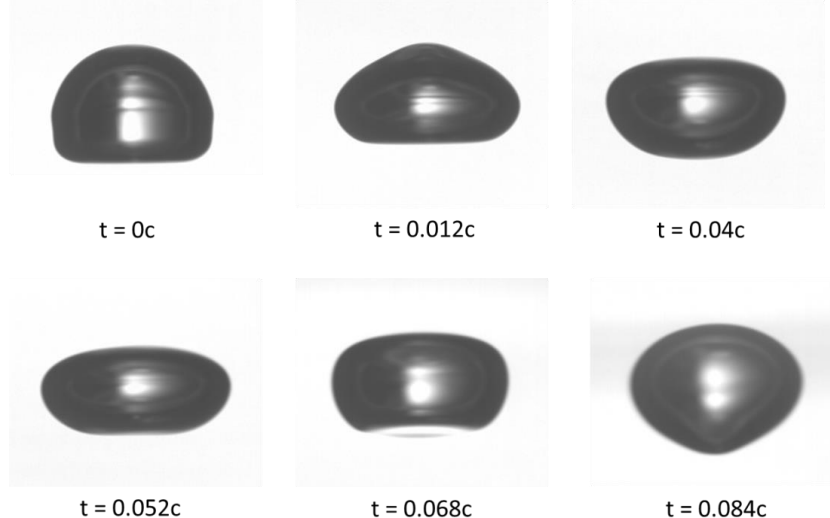


Рис. 1. Кадры высокоскоростной съемки всплывающего пузырька, полученные в предварительном эксперименте, с использованием оборудования УНУ ККГС.

С использованием прямого численного моделирования (в программном пакете Basilisk [2]) мы рассмотрели задачу следующей конфигурации (рис. 2): в верхней части области моделирования (линейный ее размер  $L_0 = 50$  мм) воздух, нижняя ее часть заполнена водой, толщина слоя воды - 40 мм. В начальный момент времени пузырек газа находится в жидкости на глубине  $h = 30$  мм, радиус пузырька  $r = 3$  мм. Параметры сред соответствуют воде и воздуху. Данная конфигурация соответствует конфигурации проведенного в нашей группе предварительного эксперимента (см. рис. 1).

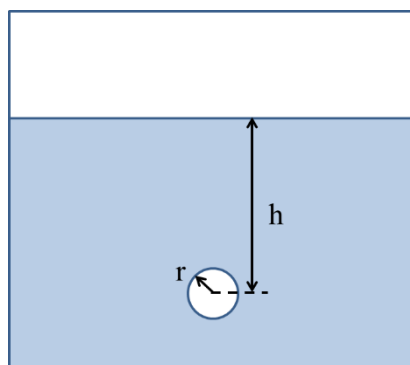


Рис. 2. Схема численного эксперимента: в начальный момент времени пузырек находится в жидкости на глубине  $h$ , радиус пузырька  $r$ .

В расчетах используется метод адаптивной сетки – размер ячейки дискретизации может варьироваться в разных областях домена в зависимости от заданных параметров.

Минимальный размер ячейки задается максимальным уровнем дискретизации – MAXLEVEL. Линейный размер ячейки, соответствующий максимальному уровню дискретизации может быть получен делением размера домена  $L_0$  на 2 в степени, равной значению MAXLEVEL. Максимальное значение параметра MAXLEVEL, использовавшееся в нашей работе на данный момент равно 11. Для взятого нами размера домена  $L_0 = 0.05$  м получим минимальный линейный размер ячейки  $\Delta l = 0,05/2^{11} = 2,4 \cdot 10^{-5}$  м.

В работе [1] отмечается, что динамика всплывающего пузырька может быть описана несколькими режимами, деление на которые определяется значениями безразмерных чисел Галилея и Эотвоса:  $Ga = \rho_w \sqrt{gRR}/\mu_w$  и  $Eo = \rho_0 g R^2 / \sigma$ . Параметры нашей задачи соответствуют следующим значениям этих чисел:  $Ga = 500$ ,  $Eo = 1,2$ , что соответствует IV режиму всплывания пузырька из работы [1].

Изменение формы пузырька в процессе всплывания, полученное нами в результате моделирования показано на рис. 3. Видно, что сначала изменения формы пузырька больше похожи на отклонения от эллиптической формы, но с некоторого момента времени пузырек уже далек от эллиптической формы, и в итоге у пузырька образуется резко выдающийся “хвост” (на рис. 3 –  $t = 0.128c$ ). Примечательно, что такое причудливое изменение формы пузырька находится в хорошем соответствии с результатами, полученными в работе [1] (см. рис. 8 в [1]). Загвоздка состоит в том, что хоть в нашем эксперименте начальная форма пузырька далека от сферической (см. рис. 1), и в связи с этим точного совпадения формы пузырька с результатом моделирования во времени мы не ожидали, но таких кардинальных изменений формы пузырька как в ходе численного моделирования мы не наблюдали эксперименте (рис. 1). На данный момент мы не нашли ответа на вопрос, в чем причина таких отличий результата нашего моделирования, совпадающего с результатом работы [1], от результата эксперимента. У нас есть предположение, что на результаты численного моделирования могло повлиять недостаточное разрешение сетки, поэтому в данный момент мы проводим расчеты с более высоким разрешением.

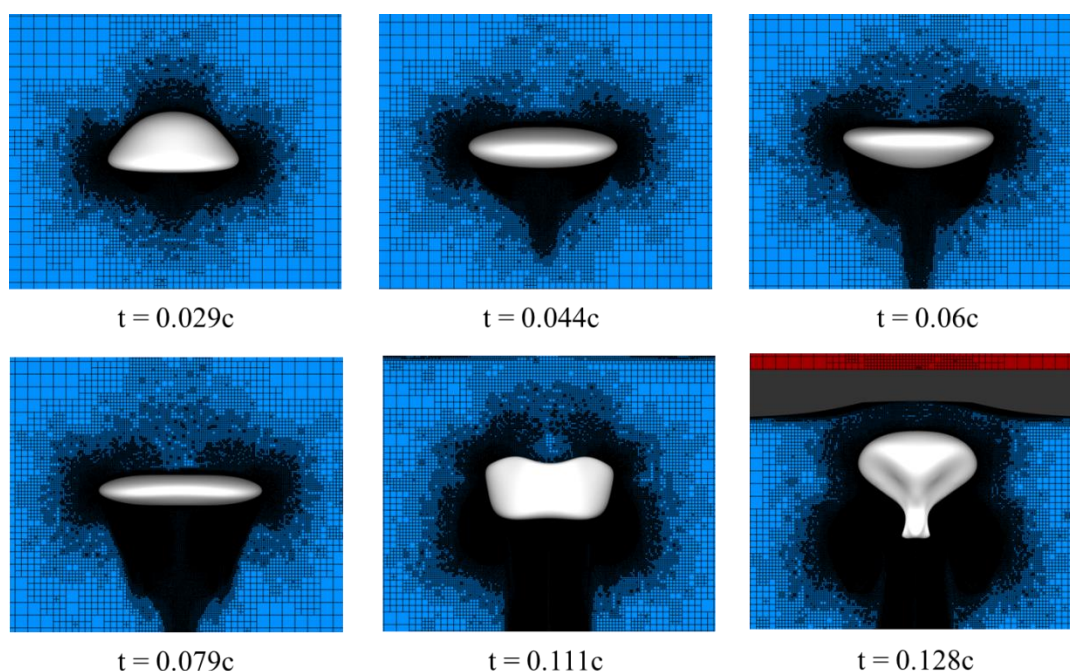


Рис. 3. Результат моделирования: форма пузырька в различные моменты в процессе всплывания.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа по прямому численному моделированию поддержана проектом РНФ № 19-17-00209, экспериментальная часть исследования поддержана проектом РФФИ № 21-55-52005, результаты получены с использованием оборудования Уникальной научной установки «Комплекс крупномасштабных геофизических стендов» ИПФ РАН.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tripathi, M. K., Sahu, K. C., Govindarajan, R. Dynamics of an initially spherical bubble rising in quiescent liquid // Nature communications. 2015. V. 6. № 1. P. 1-9.
2. Popinet, S. The Basilisk code: <http://basilisk.fr>.



## ВИХРЕОБРАЗОВАНИЕ И ЭМИССИЯ ЖИДКОМЕТАЛЛИЧЕСКИХ КАПЕЛЬ ПРИ ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ИНДУКЦИОННОМ НАГРЕВЕ МЕТАЛЛОВ

Ю.П. Ивочкин<sup>1</sup>, С.М. Юдин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Объединенный институт высоких температур РАН, Москва

<sup>2</sup>НИИУ Московский энергетический институт, Москва

[vortex@iht.mpei.ac.ru](mailto:vortex@iht.mpei.ac.ru)

## ВВЕДЕНИЕ.

В наших экспериментах по изучению закономерностей маломасштабных паровых взрывов [1] образцы - стальные шарики размером 10 мм подвергались левитационной плавке в поле высокочастотного индуктора, а затем контактировали с охладителем (дистиллированная вода). В ходе проведения серии подобных экспериментов, мы столкнулись с физическим эффектом, который заключается в интенсивной эмиссии мелких ярко светящихся капель из расплавленного образца в окружающее воздушное пространство еще до контакта с жидкостью (рис. 1).

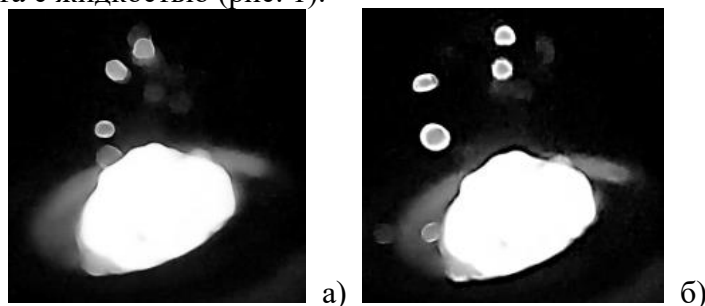


Рис 1. Фотографии вылета вторичных капель из расплавленного исследуемого образца. Временной интервал между кадрами 8 мс.

Литературы, в которой описывался бы механизм наблюдаемого явления, обнаружено не было. Поэтому были проведены дополнительные эксперименты и предложено возможное объяснение механизма наблюдаемого явления.

Результаты рентгеноструктурного анализа, проведенного с целью установления состава как капель разброса, так и самого остывшего образца, выявили наличие таких фаз, как  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ,  $\text{FeO}$ ,  $\text{Fe}_2\text{O}_3 \cdot \text{H}_2\text{O}$ . Осмотр внутренней структуры шариков показал, что все образцы пустотелые (рис.2 а), а на их поверхности имеются дырочные деформации (рис.2 б), из которых, предположительно, и происходит разлет расплава в окружающую воздушную среду.

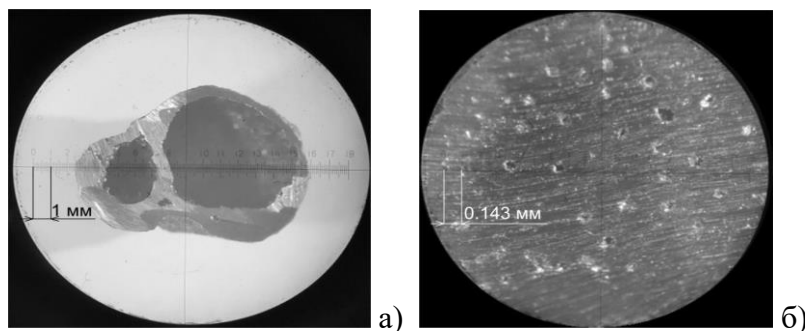


Рис. 2. Фотографии вертикального осевого (а) и горизонтального приповерхностного срезов (б) остывшей капли.

### КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБРАЗОВАНИЯ КАПЕЛЬНОЙ ЭМИССИИ.

Полученные из эксперимента данные позволили предположить следующую качественную модель протекания эмиссии жидкометаллических капель. В процессе нагрева металлических заготовок на поверхности образца начинает образовываться и в дальнейшем расти тонкая, непроводящая, слаботеплопроводная оксидная корка. Из-за скин-эффекта (частота тока электропитания индуктора 60 кГц) максимальная температура внутри образца может на несколько десятков градусов превышать температуру поверхности. Вследствие указанных причин нагрев образца до температуры плавления и дальнейший перегрев жидкой фазы происходит в условиях ограниченного объема, созданного оксидной коркой. Ввиду разных значений коэффициентов теплового расширения металла и окисла, а также из-за движения расплава внутри непроводящей оксидной оболочки на последнюю действует избыточное давление, что приводит к образованию трещин и каналов, через которые и происходит разлет капель в окружающее пространство (рис.3а).

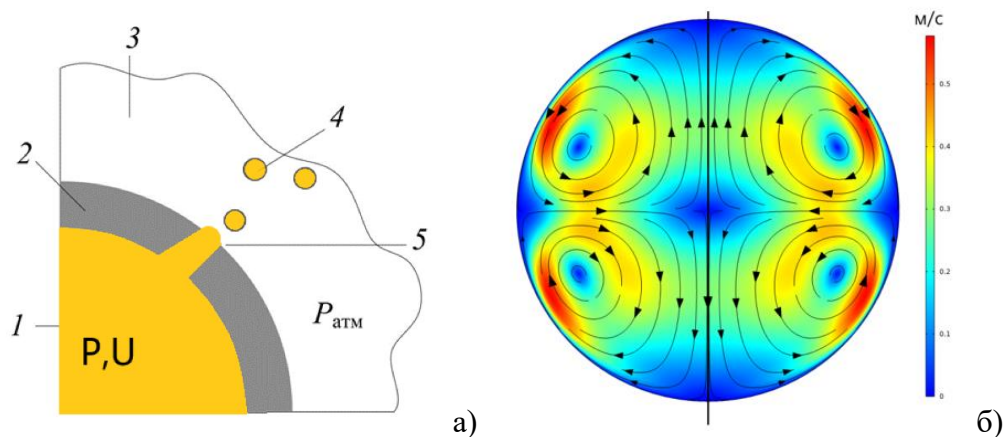


Рис. 3 а). Предполагаемая схема вылета разлета расплава: 1 – расплав, 2 – оксидная оболочка, 3 – атмосфера, 4 – капля, 5 – трещина (дефект) в оболочке. б) Типичный вид поля скорости

### ВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ И КОЛЕБАНИЯ ОБРАЗЦА .

С помощью скоростной видеосъемки удалось зафиксировать вихревое движение и интенсивные колебания на поверхности нагреваемых образцов (рис.4).

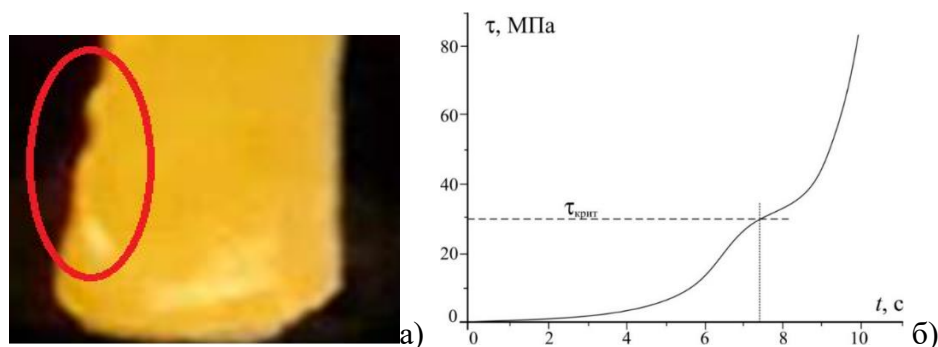


Рис.4 а) Волны на поверхности медного образца, расплавленного с помощью индукционного нагрева; б) График зависимости максимального напряжения в слое окисла от времени при нагреве образца из стали 3Х15.

Результаты проведенного численного моделирования свидетельствуют об электровихревом движении расплава внутри объема, ограниченного оксидной коркой. (рис.3б) Это обусловлено наличием электромагнитной силы, действующей на проводящую жидкость со стороны магнитного поля индуктора. Данное обстоятельство приводит к выравниванию температуры по всему объему, а само наличие упорядоченного движения в образце - к дополнительному давлению со стороны расплава на окисную стенку. Следует заметить, что в ходе эксперимента удалось определить начальную скорость разлета жидких капель и сопоставить их с расчетными значениями. Имеет место качественное совпадение результатов.

#### МЕХАНИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ.

Важной задачей проведенного исследования являлось определение механических напряжений, возникающих в толщине окисной корки. Располагая данной информацией, можно оценивать возможность начала фрагментации в целом, а также оценивать время ее начала. Подобные исследования были выполнены. Сопоставление результатов экспериментов и численный расчет показало удовлетворительное соответствие значений времени начала фрагментации (рис.4б). Небольшое расхождение обусловлено тем фактом, что помимо структуры FeO по поверхности образца образуются дополнительно Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> и Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub>, критические значения напряжений которых больше соответствующих значений FeO. Поэтому процесс фрагментации начинается не на 7 секунде, а на 11.

**ВЫВОДЫ.** В работе представлены и интерпретируются опытные данные по исследованию физического эффекта, связанного с интенсивной эмиссией капель с жидкометаллической поверхности при плавлении стальных шариков и цилиндров в кольцевом индукторе. Рассмотрен возможный механизм наблюдаемого явления, основанный на увеличении давления в объеме расплава, ограниченного твердой оксидной коркой. Установлен вихревой характер движения металла внутри замкнутого объема, приводящий к выравниванию температуры и дополнительному давлению на стенку. Полученные результаты могут быть использованы для уточнения численных кодов протекания техногенных аварий на АЭС и представляют интерес для разработчиков перспективного бестигельного способа плавления титана.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vinogradov D.A., Ivochkin Yu.P., Kubrikov K.G., Sinkevich O.A., Teplyakov I.O. Study of the features of behaviour of overheated liquid-metal drops in gas media, water and electromagnetic field of the inductor // Journal of Physics: Conf. Series 1359 (2019) 012037



## ФОРМИРОВАНИЕ КАВЕРН И ПУЗЫРЕЙ ПОГРУЖАЮЩИМСЯ В ЖИДКОСТЬ ВСПЛЕСКОМ

А. Ю. Ильиных

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

[ilynykh@ipmnet.ru](mailto:ilynykh@ipmnet.ru)

Образование воздушных полостей и пузырей в результате импакта капли (совокупности процессов, сопровождающих ее столкновение с принимающей жидкостью) в ряде технологических и технических процессов имеет как основополагающее значение, так и может являться побочным продуктом. При импакте важную роль играют процессы перераспределения массы и энергии капель.

Карта режимов течения определяется параметрами задачи (энергетикой капли, физическими и термодинамическими параметрами сред) [1]. Импакт капли включает ряд компонентов: сравнительно медленных базовых (венец, каверна, всплеск, каскады вихревых колец), и быстрых мелкомасштабных (пелена мелких струек и брызг, капиллярные волны, лигаменты), а также генерацию звуковых пакетов как в воздухе, так и в принимающей среде в широком временном диапазоне.

В акустическом сигнале выделяются первичный высокочастотный импульс и запаздывающие низкочастотные пакеты, излучаемые осциллирующими газовыми пузырьками. Особый интерес представляет определение условий и поиск механизмов их формирования [2]. В качестве источника газовых полостей рассматривается схлопывание [3] или быстрое заполнение [4] первой и последующей каверн сложной формы с образованием и разрывом крупных осциллирующих пузырей. На размеры, форму и частоту образования газовых полостей влияют осцилляции падающей капли и деформированной поверхности принимающей жидкости [3]. Первичный газовый пузырь образуется уже в пятне контакта капли с принимающей жидкостью.

Механизмы переноса включают вихри, волны и связывающие их лигаменты, а в систему уравнений входят уравнения переноса массы, импульса и энергии. Состояние вещества для поверхностного и приповерхностного слоев и толщи жидкости выражает потенциал Гиббса [5]. Формирование быстрых тонких компонентов течений, участвующих в механизмах переноса, обусловлено быстрой конверсией доступной потенциальной поверхностной энергии (ДППЭ) в другие формы. Поверхностная энергия равномерно распределена в тонком шаровом слое толщиной порядка размера молекулярного кластера  $\delta_\sigma \approx 10^{-6}$  см. При контакте сливающихся жидкостей за время  $\Delta t_\sigma = \delta_\sigma / U \sim 10^{-8}$  с происходит высвобождение энергии, и в выражении для потенциала Гиббса  $dg_s = -sdT + VdP + \sigma dS_b + \mu_n dN_n$  исчезают дополнительные члены  $\sigma dS_b$  и  $\mu_n dN_n$  [6].

Целью настоящей работы является экспериментальное исследование механизмов формирования последовательностей каверн и воздушных газовых полостей в результате импакта. Эволюция картины импакта капли в принимающей жидкости исследована методами высокоскоростной видеорегистрации с учетом собственных масштабов задачи в широком диапазоне параметров. Опыты выполнены на стенде ТБП, входящем в состав комплекса «УСУ ГФК ИПМех РАН».

В число размерных параметров задачи входят условия эксперимента (диаметр  $D = 0.3 \div 0.5$  см и высота  $h = 1 \div 200$  см падения капли (скорость в момент контакта  $U = 0.34 \div 4.3$  м/с)), ускорение свободного падения  $g$  и физические свойства

взаимодействующих сред: плотности  $\rho_{d,t,e}$ , кинематические  $\nu_{d,t,e}$  и динамические  $\eta_{d,t,e}$  вязкости, коэффициенты поверхностного натяжения  $\sigma_d^a$ ,  $\sigma_t^a$  и их отношения, где индекс d соответствует капле, t – принимающей жидкости, e – среде, в которой происходит взаимодействие (воздух). В работе оценивались кинетические  $E_d = MU^2 / 2$  и поверхностные  $E_\sigma = \sigma S_d$  энергии капель. Отношение кинетической и потенциальной энергии определяет режим: интрузивный для  $E_k < E_\sigma$  и режим всплеска при  $E_k > E_\sigma$ .

В экспериментах использовались водные растворы ализариновых чернил, поваренной соли, пищевой соды. Отношения размерных параметров задачи задают наборы безразмерных комбинаций, включающие традиционные числа: Рейнольдса  $1450 < Re < 18000$ , Фруда  $2.8 < Fr < 450$ , Бонда  $Bo = 2.39$ , Онезорге  $Oh = 0.0018$ , Вебера  $6.7 < We < 1100$ .

В интрузивном режиме погружение массы капли происходит в два этапа. На первом этапе формированию каверны предшествует образование интрузивного вихря в области слияния жидкостей, а затем с задержкой  $\sim 10$  мс начинает формироваться каверна (рис. 1, а). Остаток капли на дне каверны отделяется от дна перешейком и трансформируется в струю, которая на втором этапе погружения протыкает дно каверны с образованием новой полости. Быстрая локальная передача энергии на дне каверны искажает фронт интрузии, образуется вторичный вихорек (рис. 2, б).

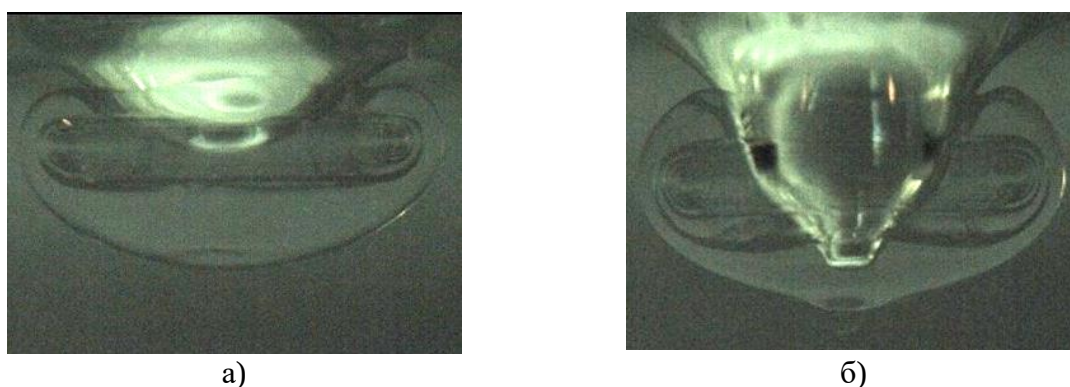


Рис. 1. Этапы формирования сложной каверны в интрузивном режиме импакта капли: а) первичная каверна от погружения исходной капли, б) погружение остатка капли на дне каверны с выбросом вихря на дне интрузии (погружение капли водного раствора соды в воду, вид сбоку)

Режим всплеска характеризуется перераспределением вещества капли по поверхности каверны и венца. Возмущенный слой, содержащий вещество капли, формируется в области контакта жидкостей в форме тонких струй до образования каверны (по аналогии с интрузивным вихрем), однако его высота стремительно уменьшается по мере погружения каверны, и слой трансформируется в систему вихревых структур в толще принимающей жидкости у дна каверны. Вещество капли растекается дискретно по стенкам каверны и проникает в толщу принимающей жидкости вихревыми оголовками (рис. 2, а). Центральная струя, образованная далее захлопыванием каверны, распадается на последовательность вторичных капель и вытянутую струйку (рис. 2, б), которая затем отделяется от поверхности принимающей жидкости. За отрывом струи следует ее частичное сжатие и формирование вторичной каверны в принимающей жидкости, в которую погружается струя.



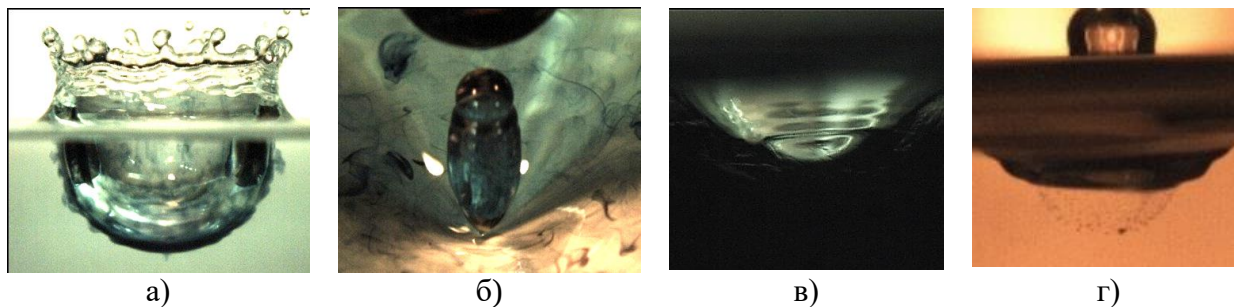


Рис. 2. Режим всплеска: а) распределение вещества капли по поверхности каверны, б) отделение струйки, в) быстрое заполнение вторичной каверны погружающейся струйкой с образованием облака мелких пузырей (г).

Погружение струи и мгновенное заполнение полости каверны обуславливает формирование в принимающей жидкости облака газовых пузырей в широком диапазоне размеров (рис. 2, г). Третья каверна образуется при погружении вершины всплеска. Четвертую и последующие каверны формируют возвращающиеся капли, ранее вылетевшие с вершины всплеска [7].

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** Генерация быстрых компонентов импакта капли обусловлена процессами конверсии ДППЭ в другие формы (флуктуации давления и температуры, движение новых компонентов с образованием новых поверхностей) в зоне слияния. Дальнейшая эволюция тонких течений включает формирование венца и каверны с дискретным распределением вещества, выброс брызг, генерацию коротких капиллярных волн на вновь образованных компонентах течений и наборов газовых пузырей в области схлопывания последовательности каверн.

#### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690131-7).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ray B., Biswas G., Sharma A. Oblique drop impact on deep and shallow liquid // Commun. Comput. Phys. 2012. V. 11(4). P. 1386-1396
2. Чашечкин Ю.Д., Прохоров В.Е. Тонкая структура акустических сигналов, вызванных падением капли на водную поверхность // Доклады АН. 2015. Т. 463. № 5. С. 538–542.
3. Чашечкин Ю.Д. Пакеты капиллярных и акустических волн импакта капли // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2021. № 1(94). С. 73–92.
4. Gillot G., Derec C., Genevaux J.-M., Simon L., Benyahia L. “A new insight on a mechanism of airborne and underwater sound of a drop impacting a liquid surface” // Phys. Fluids. 2020. V. 32, 062004.
5. Chashechkin Yu.D. Conventional partial and new complete solutions of the fundamental equations of fluid mechanics in the problem of periodic internal waves with accompanying ligaments generation // Mathematics. 2021. V. 9. No. 586.
6. Чашечкин Ю.Д. Пакеты капиллярных и акустических волн импакта капли // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2021. № 1(94). С. 73–92.
7. Чашечкин Ю. Д., Ильиных А. Ю. Эволюция формы последовательных каверн импакта свободно падающей капли // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2022. Т. 502. С. 36–44.

## БЫСТРЫЙ ПЕРЕНОС ВЕЩЕСТВА ПАДАЮЩЕЙ КАПЛИ В ТОЛЩУ ЖИДКОСТИ

А. Ю. Ильиных

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

[ilynykh@ipmnet.ru](mailto:ilynykh@ipmnet.ru)

Интерес к задаче переноса вещества капли при импакте (совокупности процессов, происходящих при столкновении и слиянии капли со слоем жидкости) обусловлен как фундаментальностью задачи, так и широким распространением импакта капли в ряде технологических, технических и природных процессов, где ключевую роль играют процессы перераспределения массы и энергии капель при столкновении со слоем жидкости: в химической, нефтехимической и биохимической промышленности, в охлаждающих системах (космические холодильники), системах пожаротушения и профилактики возгораний [1], печати, разделении и перемешивании веществ. Большое внимание уделяется анализу механизмов эрозии, капельного обмена минеральными и органическими веществами, биоматериалами (вирусами, микробами) между атмосферой и гидросферой [2].

Импакт капли имеет несколько режимов (интрузивный, переходный, режим всплеска), которые определяются энергетикой капли, физическими и термодинамическими параметрами сред и включают набор различных структурных компонентов: сравнительно медленных базовых (венец, каверна, всплеск, каскады вихревых колец), и быстрых мелкомасштабных (пелена мелких струек и брызг, капиллярные волны, лигаменты). Механизмы переноса, предмет актуальных теоретических и экспериментальных исследований, включают вихри, волны и связывающие их лигаменты. В задаче рассматриваются макроскопические механизмы переноса энергии течением со скоростью  $u$  и волнами с групповой скоростью  $c_g$ , а также микроскопический атомно-молекулярный перенос (медленный диссипативно-диффузионный, и быстрый, обусловленный уничтожением свободных поверхностей контактирующих жидкостей и конверсии доступной потенциальной поверхностной энергии (ДППЭ) в другие формы [3]).

Целью настоящей работы является экспериментальное исследование механизмов быстрого массопереноса вещества капли в принимающую жидкость в зоне слияния и взаимоуничтожения свободных поверхностей контактирующих сред. Эволюция картины переноса вещества капли в принимающую жидкость исследована методом высокоскоростной видеорегистрации с учетом собственных масштабов задачи в широком диапазоне параметров.

В число размерных параметров задачи входят условия эксперимента (диаметр  $D = 0.42 \div 0.45$  см и высота  $h = 1 \div 200$  см падения капли (скорость в момент контакта  $U = 0.34 \div 4.3$  м/с)), ускорение свободного падения  $g$  и физические свойства взаимодействующих сред: плотности  $\rho_{d,t,e}$  кинематические  $\nu_{d,t,e}$  и динамические  $\eta_{d,t,e}$  вязкости, коэффициенты поверхностного натяжения  $\sigma_d^a$ ,  $\sigma_t^a$  и их отношения, где индекс  $d$  соответствует капле,  $t$  – принимающей жидкости,  $e$  – среде, в которой происходит взаимодействие (воздух).

Отношения размерных параметров задачи задают наборы безразмерных комбинаций, включающие традиционные числа: Рейнольдса  $1450 < Re < 18000$ , Фруда  $2.8 < Fr < 450$ , Бонда  $Bo = 2.39$ , Онезорге  $Oh = 0.0018$ , Вебера  $6.7 < We < 1100$ .

В работе оценивались кинетические  $E_k = MU^2/2$  и поверхностные  $E_\sigma = \sigma S_d$  энергии капль. Температуры жидкостей и среды считаются равными  $T_d = T_t = T_e$ . Отношение кинетической и потенциальной энергии определяет режим течения (набор структурных компонентов): интрузивный для  $E_k < E_\sigma$ , режим всплеска при  $E_k > E_\sigma$  и переходный  $E_k \approx E_\sigma$ .

Система уравнений задачи включает уравнения переноса массы, импульса и энергии, а также потенциал Гиббса с дополнительными членами для поверхностного и приповерхностного слоев [4]. Поверхностная энергия равномерно распределена в тонком шаровом слое толщиной порядка размера молекулярного кластера  $\delta_\sigma \approx 10^{-6}$  см. За время  $\Delta t_\sigma = \delta_\sigma / U \sim 10^{-8}$  с в выражении для потенциала Гиббса  $dg_s = -sdT + VdP + \sigma dS_b + \mu_n dN_n$  исчезают дополнительные члены  $\sigma dS_b$  и  $\mu_n dN_n$ .

Опыты выполнены на стенде ТБП, входящем в состав комплекса «УНУ ГФК ИПМех РАН». Капли, водных растворов ализариновых чернил, поваренной соли или пищевой соды падали в стеклянный бассейн, заполненный частично дегазированной водопроводной водой. Различия коэффициентов преломления контактирующих сред обеспечивают визуализацию контактных границ при прямом освещении течений.

Для интрузивного режима характерно формирование в принимающей жидкости сплошного объема капельной жидкости в форме вихря (интрузии), линейно погружающегося в принимающую жидкость (рис. 1а, б). Каверна образуется с некоторой задержкой (более 10 мс) [5].

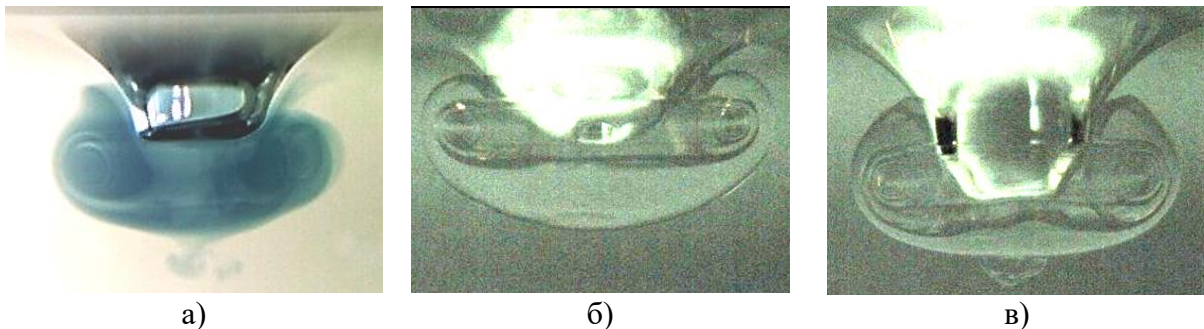


Рис. 1. Погружение капли в режиме интрузии: а) водного раствора чернил (скорость капли  $U = 0.34$  м/с,  $E_\sigma = 4$  мкДж,  $E_k = 2.24$  мкДж,  $Re = 1450$ ,  $Fr = 2.8$ ,  $We = 6.7$ ,  $Bo = 2.5$ ,  $Oh = 0.0018$ ), б, в) концентрированного водного раствора соды при формировании первичной каверны и перколяции ее дна погружающейся струей – остатком первичной капли.

Слияние капли сопровождается формированием у дна каверны столбика жидкости - быстрого стримера (остаток стримера на дне каверны на рис. 1, б), который затем протыкает дно каверны с образованием более острого углубления (перколяция) и приводит к формированию дополнительного более быстрого вихря у нижнего края интрузии.

В режиме всплеска при уничтожении контактных поверхностей происходит вторжение капельной жидкости в принимающую посредством системы тонких волокон (пальцев), опережающих формирование первичной каверны с плоским дном на начальном этапе погружения (рис. 2, а).

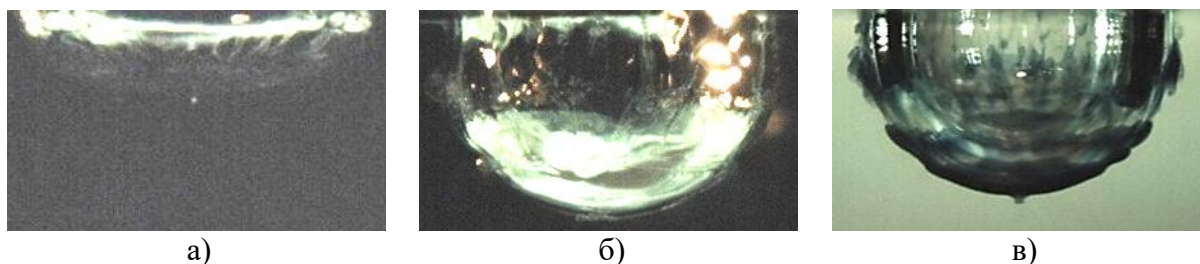


Рис. 2. Погружение капли в режиме всплеска: а) формирование переходного слоя; б) выравнивание переходного слоя с поверхностью каверны (капля концентрированного водного раствора соды погружается в воду), в) картина распределения вещества капли по поверхности каверны при подкрашивании капли ализариновыми чернилами. Условия опытов:  $D = 0.43 \text{ см}$ ,  $U = 3.1 \text{ м/с}$ ,  $E_k = 200 \text{ мкДж}$ ,  $E_\sigma = 4.2 \text{ мкДж}$ ,

$$\text{Re} = 13300, \text{We} = 570, \text{Fr} = 228, \text{Bo} = 2.5, \text{Oh} = 0.0018$$

По мере продвижения каверны в принимающую среду толщина переходного слоя уменьшается, его фронт выравнивается с поверхностью каверны, формируя около нее ярусы вихревых структур (рис. 2, б), которые далее при схлопывании каверны трансформируются в петли [6]. Для смешивающихся жидкостей характерно дискретное распределение вещества капли: лигаменты формируют вертикальные полосы на поверхности венца и сетчатую структуру с трех-, четырех- и пятиугольными ячейками на поверхности каверны (рис. 2, в).

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** Проникновение вещества капли в слой принимающей жидкости при уничтожении свободных поверхностей происходит в форме сложной структуры опережающей трансформацию поверхности: интрузивного вихря при  $E_\sigma > E_k$  или набора проникающих тонких структур  $E_k > E_\sigma$  с большой площадью поверхности, эффективно реализующих перемешивание вещества.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598-П «Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью», <https://rscf.ru/project/19-19-00598/>).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lan M., Wang X., Zhu P., Chen P. Experimental Study on the Dynamic Process of a Water Drop with Additives Impact upon Hot Liquid Fuel Surfaces // Energy Procedia. 2015. V. 66. P. 173 – 176
2. Bhagat R.B., Wykes M. S. D., Dalziel S. B., Linden1 P. F. Effects of ventilation on the indoor spread of COVID-19 // J. Fluid Mech. (2020), vol. 903, F1.
3. Чашечкин Ю.Д. Пакеты капиллярных и акустических волн импакта капли // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2021. № 1(94). С. 73–92.
4. Chashechkin Yu.D. Conventional partial and new complete solutions of the fundamental equations of fluid mechanics in the problem of periodic internal waves with accompanying ligaments generation // Mathematics. 2021. V. 9. No. 586.
5. Чашечкин Ю. Д., Ильиных А. Ю. Задержка формирования каверны в интрузивном режиме слияния свободно падающей капли с принимающей жидкостью // ДАН. 2021. Т. 496, № 1. С. 45–50.
6. Чашечкин Ю. Д., Ильиных А. Ю. Формирование системы наклонных петель в течении импакта капли // Доклады РАН. 2021. Т. 499, № 1. С. 48–57.



## ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТОЯЧИХ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ПРЯМОУГОЛЬНОМ СОСУДЕ

В.А. Калинин

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

[kalin@ipmnet.ru](mailto:kalin@ipmnet.ru)

В [1] представлены результаты экспериментального исследования влияния плавающей тонкой упругой пластины из пенополиэтилена на процесс регуляризации разрушающихся стоячих гравитационных поверхностных волн Фарадея на свободной поверхности воды в прямоугольном сосуде. Показано, что стоячие изгибно-гравитационные волны в исследуемой гидроупругой системе (плавающая пластина – вода) определяются толщиной пластины: при малой толщине превалирует гравитационная волна, при больших – волна изгибная. Хотя в [1] и выявлена критическая толщина пластины, при которой волны отсутствуют, какие-либо оценки частоты гидроупругих колебаний не проводились.

Ниже представлены результаты экспериментов по исследованию частотных характеристик стоячих изгибно-гравитационных волн. Полученные в эксперименте оценки собственных частот сравниваются с величинами, рассчитанными по известным дисперсионным зависимостям. Опыты продолжают цикл исследований [1–4] автора по выявлению возможных механизмов регуляризации разрушающихся гравитационных волн на свободной поверхности жидкости ограниченного объема.

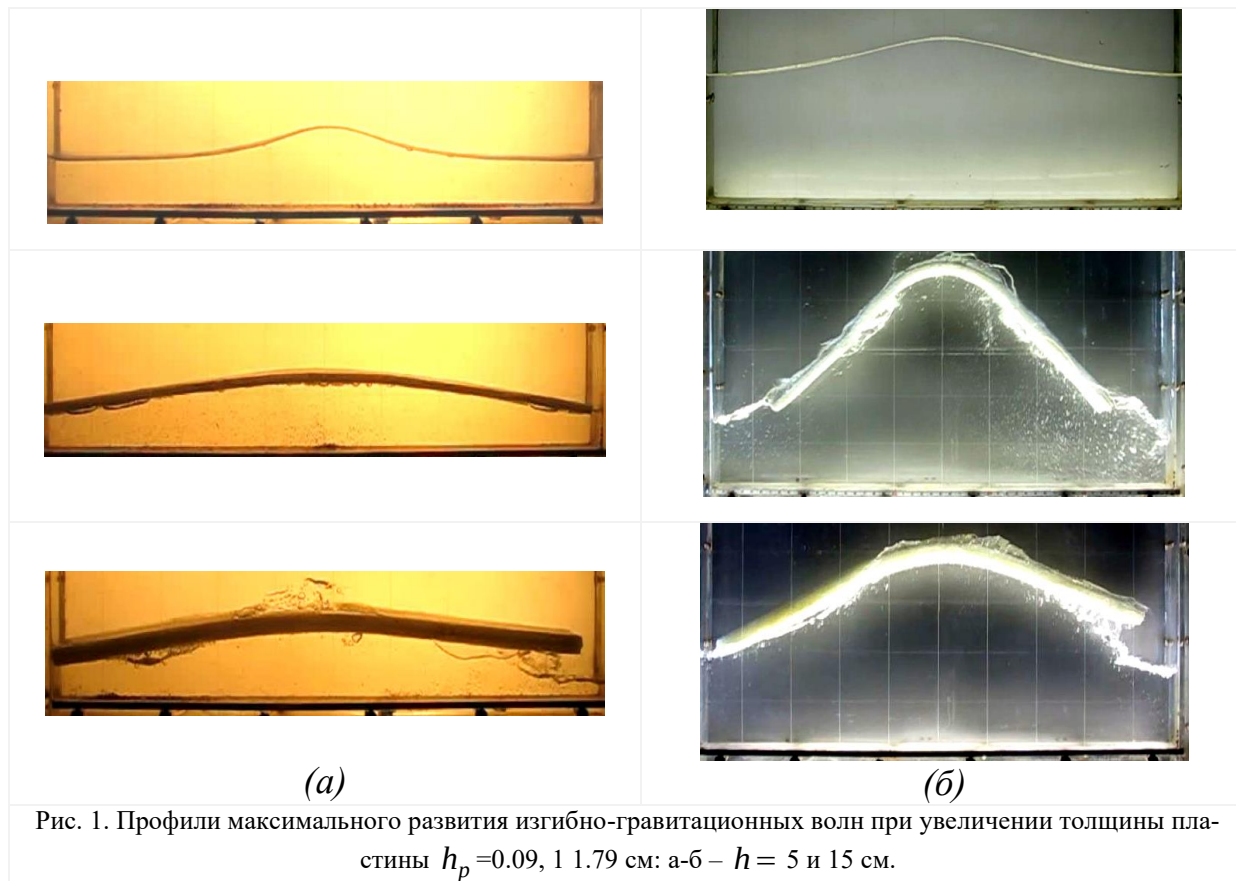
Влияние плавающей пластины на колебания жидкости исследовалось для второй моды ( $n = 2$ ) стоячих гравитационных волн на свободной поверхности воды в прямоугольном сосуде длиной  $L = 50$  см и шириной  $W = 4$  см. В экспериментах использовались пластины из пенополиэтилена плотностью  $\rho_p = 2.5 - 3 \cdot 10^{-2}$  г/см<sup>3</sup>; модуль упругости материала  $E \approx 2.6 \cdot 10^6$  дин/см<sup>2</sup> (0.26 МПа). Пластины имели длину 49.5 см и ширину 3.5 см; их толщина  $h_p$  изменялась от 0.1 до 2 см. Проведены две серии экспериментов, для которых глубина воды составляла  $h = 15$  и 5 см; при длине второй моды гравитационной волны  $\lambda = 50$  см отношение вертикального масштаба задачи к горизонтальному составляло  $h/\lambda = 0.3$  и 0.1.

В опытах собственная частота гравитационных / изгибно-гравитационных волн определялась следующим образом. На одной из резонансных частот  $\Omega$  колебаний сосуда возбуждалась вторая волновая мода. Затем вибростенд выключался, и после полной остановки сосуда (время порядка периода волны) проводилась видеосъемка процесса затухания волновых движений воды / гидроупругой системы. Поскольку частота волн существенно превосходит коэффициент затухания, то предполагалось, что процесс затухания волн происходит с собственной частотой. Это позволило по материалам видеосъемки затухающих волн оценить собственную частоту с точностью 5-10%; измерялась частота волны, высота которых не превосходили 3-4 см.

Эксперименты показали, что увеличение толщины  $h_p$  пластины существенно сказывается как на форме профилей стоячих изгибно-гравитационных волн, так и на собственной частоте колебаний гидроупругой системы.

На рис. 1 для двух глубин жидкости приведены профили волн максимального развития для различных значений  $h_p$ . Анализ волновых профилей показал, что при толщине пластины не более 0.6 см колебания системы пластина – вода определяются волнами гравитационными. При дальнейшем увеличении толщины пластины начинают преобладать ее упругие свойства; какие-либо признаки стоячей гравитационной волны

(асимметрия профиля, заострение гребня и т.п.) отсутствуют. Толщина пластины такова, что мелкомасштабные возмущения при прохождении системы невозмущенного горизонтального уровня не наблюдаются. При увеличении толщины пластины из пенополиэтилена до значения  $h_p = 2$  см возбудить изгибно-гравитационные волны не удалось.



На рис. 2 приведены экспериментальные зависимости собственной частоты стоячей изгибно-гравитационной волны от толщины плавающей пластины. Видно, что с ростом  $h_p$  частота  $\omega$  увеличивается, причем нижняя граница диапазона изменения толщины определяется значением  $h_p = 0$  (гравитационные волны), а верхняя граница – критической толщиной, при которой не происходит каких-либо волновых движений гидроупругой системы.

Интерпретация полученных экспериментальных результатов проводится в рамках линейной теории гидроупругости [5–7].

В одномодовом приближении частота  $\omega$  изгибно-гравитационных волн связана с волновым числом  $k = n\pi / L$  следующим образом

$$\omega^2 = \frac{E k^5 h_p^3 + 12g k(1 - \nu^2)\rho_w}{12(1 - \nu^2)(k h_p \rho_p + \rho_w \text{th} kh)}$$

где для настоящего эксперимента  $n = 2$ ;  $L = 50$  см;  $k = 0.126$  см<sup>-1</sup>; коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ ; ускорение силы тяжести  $g = 981.7$  см/с<sup>2</sup>;  $E = 2.6 \cdot 10^6$  дин/см<sup>2</sup>.

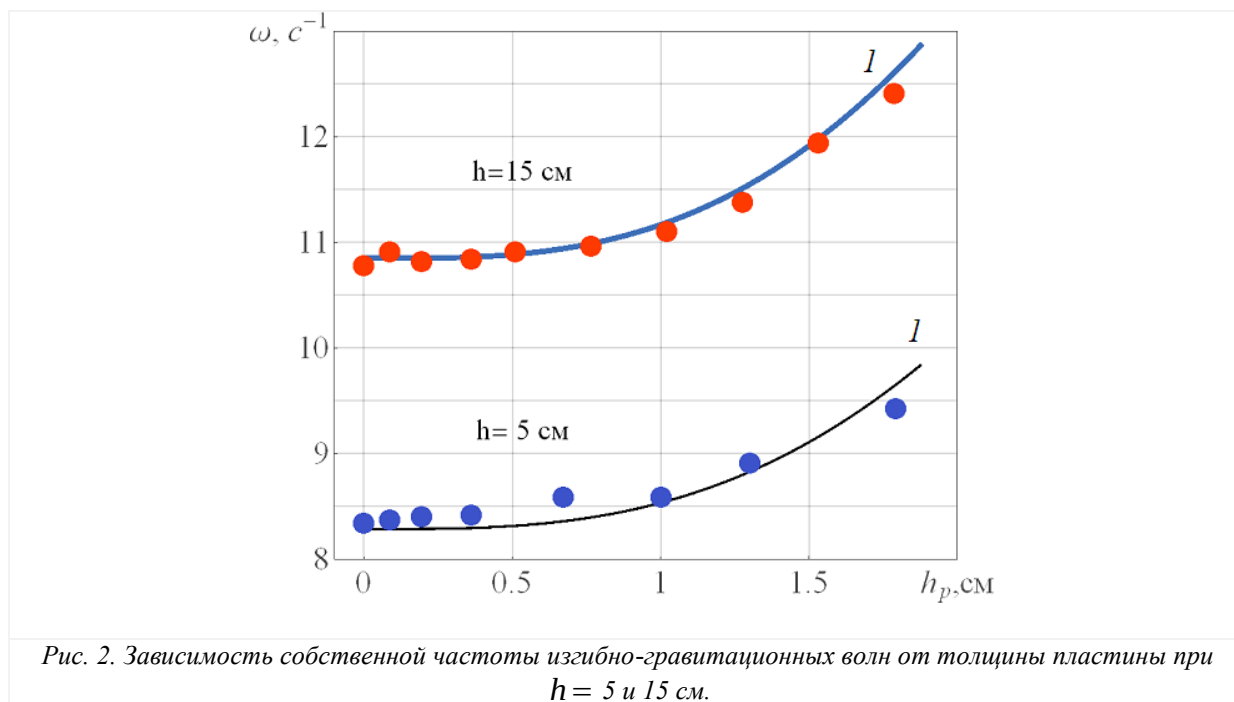


График зависимости частоты  $\omega(h_p)$  волн от толщины  $h_p$  пластины представлен на рис. 2 (кривые 1). При  $h_p = 0$  имеем чисто гравитационные волны, частота которых равна  $\omega_0 = \sqrt{gkh} = 8.29$  и  $10.85$   $\text{с}^{-1}$ . При увеличении толщины пластины до значения  $h_p \leq 0.51$  см собственная частота изгибно-гравитационных практически совпадает с  $\omega_0$ . При дальнейшем увеличении  $h_p$  наблюдается быстрый рост частоты  $\omega$ , которая при  $h_p = 1.79$  см составляет  $\omega = 9.62$  и  $12.59$   $\text{с}^{-1}$ .

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена по теме государственного задания № АААА-А20-120011690131-7.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калиниченко В.А. Эксперименты по подавлению интенсивных колебаний жидкости плавающей пластиной // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 6. С. 74–83.
2. Базилевский А.В., Калиниченко В.А., Рожков А.Н. Вязкая регуляризация разрушающихся волн Фарадея. Письма в ЖЭТФ. 2018. №107 (11). С. 716 – 721.
3. Калиниченко В.А. Регуляризация гравитационных баротропных волн в двухслойной жидкости. Изв. РАН. МЖГ. 2019. №6. С. 1–13.
4. Калиниченко В.А.,. Подавление интенсивных колебаний жидкости слоем плавающих частиц. Изв. РАН. МЖГ. 2020. №6. С. 85–97.
5. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 215 с.
6. Robin G.D.Q. Wave propagation through fields of pack ice // Philos. Trans. R. Soc. A:1963. V. 255. No. 1057. P. 313–339.
7. Букатов А.Е. Волны в море с плавающим ледяным покровом. Севастополь: ФГБУН МГИ, 2017. 360 с.





## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДЕФОРМАЦИИ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ЭЛЕКТРОВИХРЕВОЕ ТЕЧЕНИЕ В ПОЛУСФЕРИЧЕСКОМ ОБЪЕМЕ

С. В. Киселева<sup>1,2</sup>, И.О. Тепляков<sup>2</sup>, Ю.П.Ивочкин<sup>2</sup>, Е.А. Михайлов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. Ломоносова, г. Москва,

<sup>2</sup>Объединенный институт высоких температур РАН, г. Москва,

[sofiyakiselyova.work@gmail.com](mailto:sofiyakiselyova.work@gmail.com), [igor.teplyakov@mail.ru](mailto:igor.teplyakov@mail.ru)

### ВВЕДЕНИЕ.

В настоящее время, в мире ведется активный поиск альтернативных источников энергии для решения проблемы изменения климата. В качестве решения данного вопроса компания «General Fusion» [1] предлагает создание термоядерных электростанций, так как энергия термоядерного синтеза имеет меньший углеродный след, чем другие источники энергии. «General Fusion» предлагает следующую конструкцию термоядерного реактора. Жидкий металл, являющийся теплоносителем, помещается во вращающийся цилиндр, при достижении достаточной скорости вращения жидкий металл отбрасывается на стенку и в центр (по оси цилиндра) вводится дейтерий-тритиевая плазма. Далее, при помощи механических ударников металл сжимается. Предполагается, что в центре камеры будут получены сжатие и температура, достаточные для возникновения термоядерной реакции. В этом подходе разгон металла осуществляется механическим способом. Мы предполагаем, что с помощью ЭВТ [2] можно создать жидкометаллическую стенку электромагнитным способом, которую можно будет использовать в подобной конструкции. Возможность создания жидкометаллической стенки в системе с электровихревым течением была показана экспериментально в ОИВТ РАН (рис. 1).



Рис. 1. Возникновение каверны вокруг электрода при электромагнитном вращении жидкого металла.

### МОДЕЛИРОВАНИЕ.

Жидкий металл налит в проводящую полусферу, в экспериментах лаборатории используется сплав индий-галлий-олово, который находится в жидком состоянии при комнатной температуре. Полусферический электрод («малый электрод») с радиусом  $R_1$  опускается в металл и затем через жидкий металл пропускается постоянный электриче-

ский ток  $I_0$  от малого электрода к большому полусферическому электроду с радиусом  $R_2$  (рис. 2а).

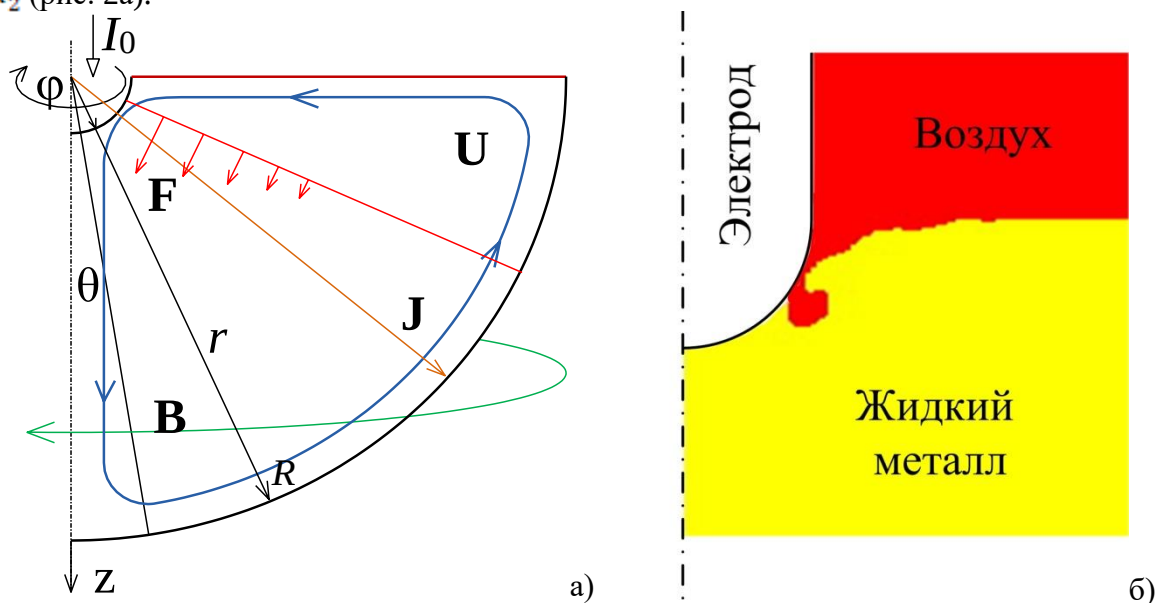


Рис. 2. а) Схема электровихревого течения в полусфере; б) распределение фаз при токе 400 А и внешнем магнитном поле  $1e-3$  Тл через время  $t = 0.76$  с.

При прохождении электрического тока через жидкий металл в присутствии внешнего вертикального магнитного поля (МП) работают два механизма, вызывающие деформацию поверхности. Во-первых, это т.н. «пинч-эффект», проявляющийся в отжимании жидкости от электрода электромагнитной силой направленной к оси [3], во-вторых – искривление формы поверхности из-за вращения, вызванного действием азимутальной силы.

Поля скорости и форма поверхности в работе определялись численно. Плотность тока проводимости, распространяющегося от малого электрода к большому, находится из уравнения:

$$\mathbf{J} = -\sigma \text{grad}(\varphi),$$

где  $\sigma$  – удельная проводимость металла,  $\varphi$  – электрический потенциал, определяемый уравнением Лапласа. Граничное условие для потенциала: на малом электроде  $\varphi = 0,00185$  В, а на большом электроде  $\varphi = 0$  В, что соответствует току  $I_0 = 400$  А.

МП, создаваемое током, можно найти, решив уравнение Максвелла:

$$\text{rot}(\mathbf{B}_{\text{ЭВТ}}) = \mu_0 \mathbf{J},$$

где  $\mu_0$  – магнитная постоянная.

Так как полусфера помещается во внешнее вертикальное магнитное поле  $\mathbf{B}_{\text{ВН}}$ , то полное значение индукции МП имеет вид:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{ЭВТ}} + \mathbf{B}_{\text{ВН}},$$

Суммарная плотность тока:

$$\mathbf{J}_{\text{sum}} = \sigma(-\text{grad}(\varphi) + \mathbf{U} \times \mathbf{B}),$$

где  $\mathbf{U}$  – вектор скорости жидкого металла.

Тогда конечное выражение для объемной вихревой силы примет вид:

$$\mathbf{F} = \mathbf{J}_{sum} \times \mathbf{B}.$$

Под действием электромагнитной силы поверхность металла деформируется, что приводит к изменению плотности тока, индукции магнитного поля и гидродинамической картины. Из-за данного эффекта задача пересчитывалась на каждом десятом шаге по времени по следующей схеме: решалось уравнение для потенциала, находилась плотность тока, вычислялось магнитное поле, решались уравнения Навье-Стокса и уравнения для доли фазы, а затем все сначала.

Уравнение Навье-Стокса в размерном виде принимает вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{U} + \frac{\mathbf{F}}{\rho}.$$

Уравнение неразрывности:

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0.$$

Для определения формы поверхности использовался метод «объема жидкости в ячейке» (VOF-модель), уравнение Навье-Стокса решалось методом контрольного объёма.

### РЕЗУЛЬТАТЫ.

Получены зависимости осевой и азимутальной скоростей от времени, а также распределение фаз (форма поверхности) (рис. 2б). Ток и магнитное поле достигали своего максимума в течение одной секунды.

На рис. 3 приведены зависимости осевой скорости от времени в задаче с деформацией и без. Из рисунка видно, что деформация поверхности приводит к уменьшению площади соприкосновения электрода с жидким металлом, что вызывает более быстрый рост скорости по сравнению с недеформированной поверхностью.

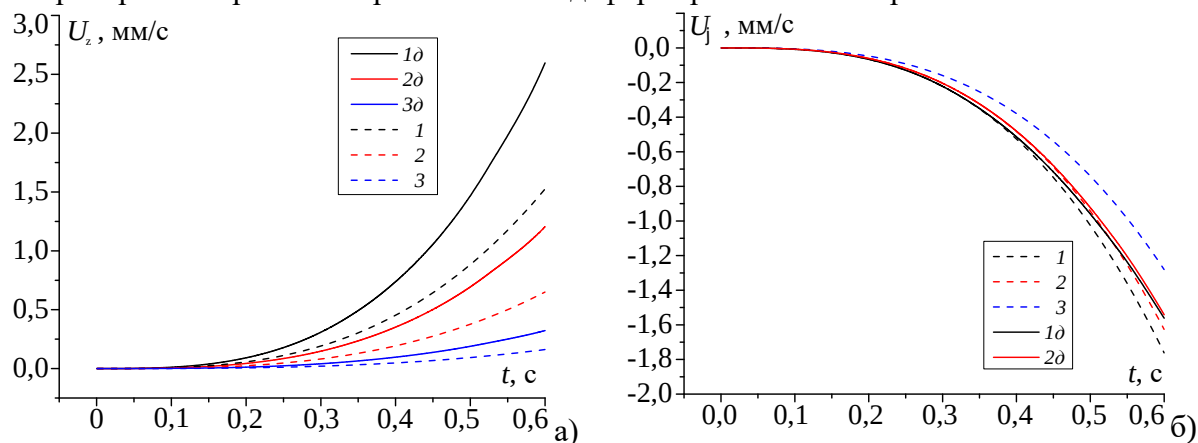


Рис. 3. Зависимость осевой скорости  $U_z$  (а) и азимутальной  $U_\phi$  (б) от времени для разных точек вдоль оси  $z$  соответственно: 1 –  $z = 0,02$  м; 2 –  $0,03$ ; 3 –  $0,5$  и при  $r = 0,02$  м 1 –  $z = 0,001$  м; 2 –  $0,005$ ; 3 –  $0,01$ .  
Индекс «д» – задача с деформацией поверхности, без индекса – без деформации.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Компания “General Fusion” [Электронный ресурс]. URL: <https://generalfusion.com/fusion-technology/benefits-of-fusion/>.
2. В.В. Бояревич, Я.Ж. Фрейнберг, Е.И. Шиловых [и др.] под ред. Э.В.Щербина. Электровихревые течения. Рига: Зинатне. 1985. с. 315.

3. Kharicha, A.; Teplyakov, I.; Ivochkin, Yu., Wu M.; Ludwig, A.; Guseva, A. Experimental and numerical analysis of free surface deformation in an electrically driven flow. Experimental Thermal and Fluid Science. 2015, 62, 192–201.



## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОНТАКТНОЙ ГРАНИЦЫ ЖИДКОСТЬ-ГАЗ В РАМКАХ СЕТЕВОЙ МОДЕЛИ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

*Кожурина П.И., Горкунов С.В., Долуденко А.Н.*  
*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*  
[polinakozhurina2020@gmail.com](mailto:polinakozhurina2020@gmail.com)

Рассматривается горизонтальный слой пористой среды, показанный на рис. 1. Снизу низкопроницаемый слой примыкает к высокопроницаемому слою (пропластку), давление в котором постоянно. В низкопроницаемом слое (область  $\Omega_f$ ) находится жидкость, а область  $\Omega_g$  заполнена газом с постоянным давлением, которое выше чем в пропластке. Области  $\Omega_g$  и  $\Omega_f$  разделены кривой  $S(x, t)$ , описывающей положение контактной границы жидкость-газ.

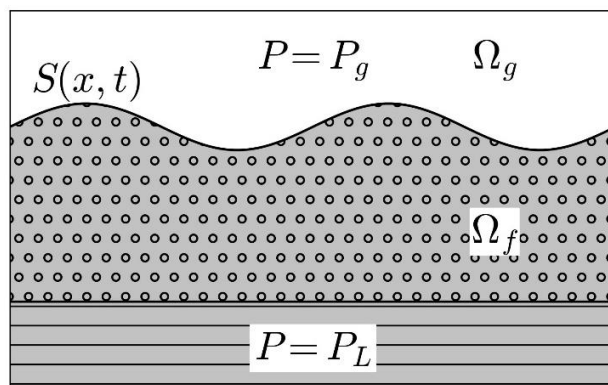


Рис. 1. Схема течения.

В области  $\Omega_f$  справедливо уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости и, предполагается, что выполняется закон Дарси

$$\operatorname{div} v_\omega = 0, \quad v_\omega = -\frac{k}{m\mu_\omega} [\operatorname{grad}(P)],$$

где  $v_\omega$  — скорость фильтрации,  $m$  — пористость,  $k$  — проницаемость,  $\mu_\omega$  — вязкость жидкости.

В случае постоянных коэффициентов пористости, проницаемости и вязкости жидкости давление в области  $\Omega_f$  удовлетворяет уравнению Лапласа. Основные уравнения и граничные условия задачи запишем как

$$\begin{aligned} (x, z) \in \Omega_f: \quad & \Delta P = 0, \\ z = 0: \quad & P = P_L, \end{aligned}$$

$$z = s(x, t): \quad P = P_g,$$

$$V_n = -\frac{k}{m\mu\omega} [\text{grad}(P)]_n.$$

$V_n$  — нормальная составляющая локальной скорости контактной поверхности.

Положение границы раздела жидкость-газ задается в виде

$$S(x, 0) = 1 + A \cos(Kx)$$

Анализ устойчивости фронта фазового перехода проводится в рамках континуальной и сетевой модели [1, 2] пористой среды. Сетевая модель, показанная на рис. 2, описывает пористую среду в виде системы пересекающихся капилляров, которые имеют равную длину и соединяются в узлах. Течение жидкости определяется давлением в узлах и свойствами капилляров.

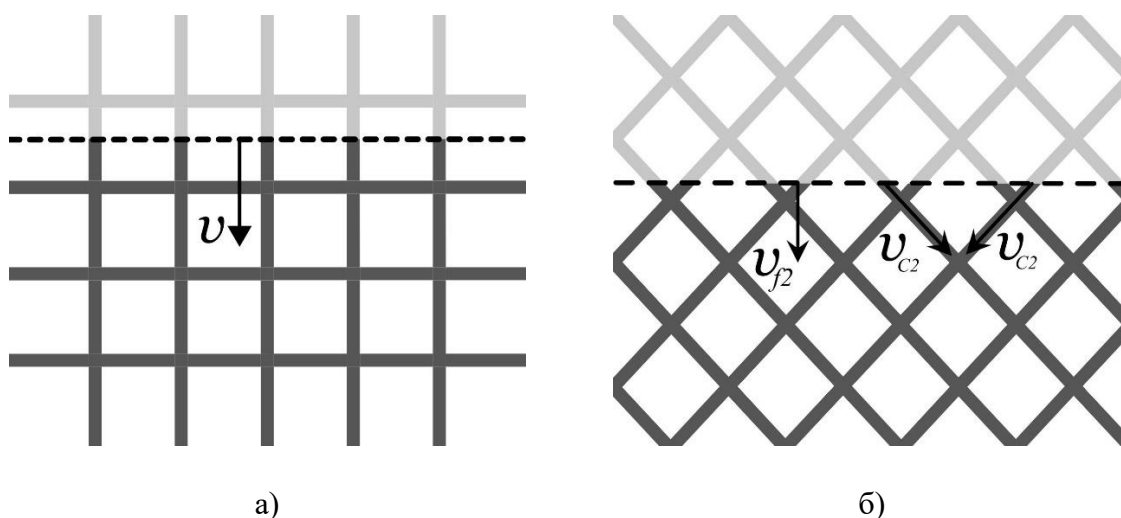


Рис. 2. Схематичное представление а) сетевой модели, б) сетевой модели, повернутой 45 градусов. Прерывистой линией показано положение поверхности жидкость-газ.

Обозначим через  $U_d$  скорость роста амплитуды в нижней точке границы раздела (см. рис.1). Полученные значения  $U_d$  в зависимости от длины волны при фиксированной амплитуде  $A$  показаны на рис.3. Расчеты в рамках континуальной модели выполнены с помощью численно-аналитического метода для расчета фильтрационного течения с поверхностью раздела жидкость-газ [3]. Метод позволяет детально и надежно рассчитывать эволюцию многосвязной границы водонасыщенной области в пористой среде [4-6].

Из рис. 3 видно, что для всех рассмотренных моделей скорость роста возмущений неограниченно увеличивается с уменьшением длины волны при постоянной амплитуде. Континуальная модель предсказывает большую скорость движения межфазовой поверхности, чем сетевая. При этом сетевая модель обнаруживает сильную анизотропию в зависимости от ориентации при расчете скорости межфазовых поверхностей в капиллярах. В общем случае вытеснение жидкости из капилляров происходит не полностью, жидкость остается в части капилляров даже в предположении о том, что неустойчивость не развивается.

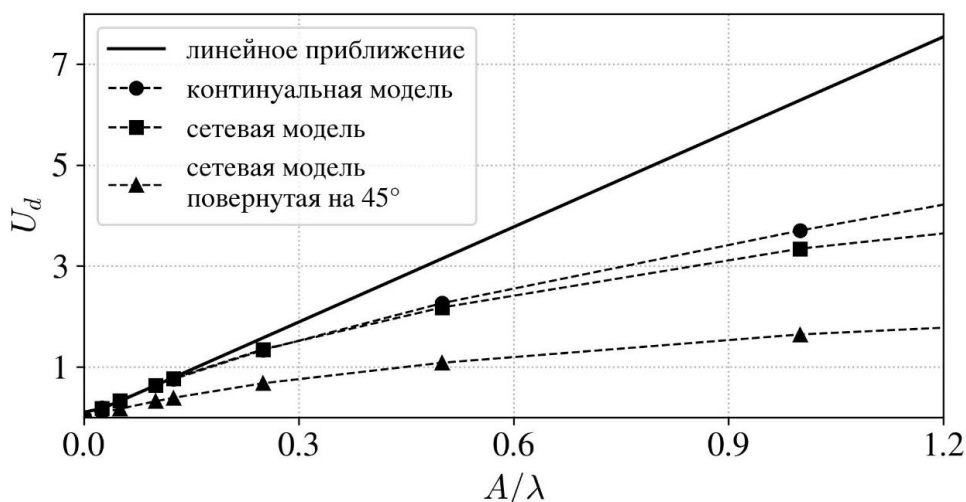


Рис. 3. Зависимость скорости роста амплитуды от длины волны

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 21-11-00126.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sorbie K.S., Clifford P.J., W Jones E. R.* The rheology of pseudoplastic fluids in porous media using network modeling // *Journal of Colloid and Interface Science*. 1989. Т. 130. № 2. P.508 – 534.
2. *Li J., McDougall S.R., Sorbie K.S.* Dynamic pore-scale network model (pnm) of water imbibition in porous media // *Advances in Water Resources*. 2017. Т. 107. P. 191 – 211.
3. *Shargatov V.A.* Dynamics and stability of air bubbles in a porous medium // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2018. Т. 58. № 7. P.1172 – 1187.
4. *Shargatov V.A., Il'ichev A.T., Tsyarkin G.G.* Dynamics and stability of moving fronts of water evaporation in a porous medium // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2015. Т. 83. P. 552 – 561.
5. *Gorkunov S. V., Il'ichev A. T., Shargatov V. A.* Critical evolution of finite perturbations of a water evaporation surface in porous media // *Fluid Dynamics*. 2020. Т. 55. № 2. P. 204 – 212.
6. *Gubin S. A., Krivosheev A. V., Shargatov V. A.* Existence of a steady-state water evaporation front in a horizontally extended low-permeability region // *Fluid Dynamics*. 2015. Т. 50. № 2. P. 240 – 249.

— ◆ ◆ ◆ —

## АКУСТИЧЕСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ НЕЛИНЕЙНО ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ НЕЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Н.Ю. Колбнева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль  
Ярославская государственная сельскохозяйственная академия, Ярославль  
kolbneva-nata@yandex.ru



Исследование звукового излучения от капли, осциллирующей в материальной среде во внешнем электростатическом поле, представляет интерес для широкого спектра академических проблем и практических приложений: от особенностей распространения акустических волн от объектов искусственного и естественного происхождения (облака, туманы, ливневый дождь) до проблем акустической левитации капель в современных технологиях получения высокочистых веществ.

В модели идеальной несжимаемой жидкости энергия капиллярных осцилляций капли в соответствие с законом сохранения энергии теряется на излучение акустических и электромагнитных (при наличии ускоренно движущихся зарядов) волн [1, 2].

Наиболее интенсивным звуковым излучением, генерируемым линейными осцилляциями капли, является излучение, связанное со второй (основной) колебательной модой [3]. Однако возбуждение центрально-симметричной (нулевой) и трансляционной (первой) мод возможно лишь во втором порядке малости по безразмерной амплитуде осцилляций  $\varepsilon$  [4].

В настоящей работе в аналитических асимптотических расчетах второго порядка малости по  $\varepsilon$  проведено исследование монопольного и дипольного акустических излучений незаряженной капли, совершающей нелинейные осцилляции конечной амплитуды в материальной среде во внешнем электростатическом поле.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Рассматривается неподвижная уединенная капля радиуса  $R$  идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости плотностью  $\rho_1$ , коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ , находящаяся во внешнем однородном электростатическом поле напряженностью  $\vec{E}_0$ . Внешняя среда принимается идеальной сжимаемой с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_{ex}$  и плотностью  $\rho_2$ , в которой звук распространяется со скоростью  $v$ .

Рассмотрение задачи проводится в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$ , начало которой помещено в центр масс капли. В виду теплового движения молекул жидкости на поверхности капли создается капиллярное волновое движение малой амплитуды  $|\xi|$ , которое приводит к искажению  $\xi(\theta, t)$  равновесной поверхности капли.

Уравнение возмущенной поверхности капли  $r(\theta, t)$  в любой момент имеет вид:

$$r(\theta, t) = R + \xi(\theta, t).$$

Равновесная форма капли  $r(\theta)$  в линейном по квадрату эксцентриситета  $e^2$  приближении описывается вытянутым сфероидом, ориентированным осью симметрии в направлении  $\vec{E}_0$ :

$$r(\theta) = R \left( 1 + \frac{1}{3} e^2 P_2(\mu) \right), \quad e^2 = \frac{9 \varepsilon_{ex} E_0^2 R}{16 \pi \sigma},$$

$\mu = \cos \theta$ ,  $P_n(\mu)$  – осесимметричный полином Лежандра  $n$ -ого порядка.

В задаче имеются два малых параметра:  $\varepsilon = |\xi|/R$  и  $e^2$ , величины которых находятся в соотношении  $\varepsilon \sim e$ .

Волновые движения в капле и в окружающей среде являются потенциальными с потенциалами скоростей  $\psi_m(r, \theta, t)$ :  $\vec{V}_m(r, \theta, t) = \nabla \psi_m(r, \theta, t)$ , где  $\vec{V}_m(r, \theta, t)$  – поле скоростей внутри ( $m=1$ ) и вне капли ( $m=2$ ) [5].

Математическая модель задачи имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \Delta\psi_1(r, \theta, t) = 0, \quad \Delta\Phi(r, \theta, t) = 0, \quad \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_2(r, \theta, t)}{\partial t^2} - \Delta\psi_2(r, \theta, t) = 0, \\
& r \rightarrow 0: \quad \psi_1(r, \theta, t) \rightarrow 0, \\
& r \rightarrow \infty: \quad \frac{\partial \psi_2(r, \theta, t)}{\partial r} + ik\psi_2(r, \theta, t) = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad k = \frac{\omega_n}{v}, \quad \Phi(r, \theta, t) \rightarrow -E_0 r \mu, \quad \vec{E} = -\nabla\Phi(r, \theta, t), \\
& r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \quad \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi_m(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_m(r, \theta, t)}{\partial \theta} \left( \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} \right), \\
& P_1(r, \theta, t) - P_2(r, \theta, t) + P_E(r, \theta, t) - P_\sigma(r, \theta, t) = 0, \quad \Phi(r, \theta, t) = \Phi_s(t), \\
& P_1 = P_{01} - \rho_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho_1 (\nabla \psi_1)^2, \quad P_2 = P_{02} - \rho_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho_2 (\nabla \psi_2)^2 + \frac{\rho_2}{2v^2} \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \right)^2, \\
& P_E = \frac{\varepsilon_{ex} (\nabla \Phi)^2}{8\pi}, \quad P_\sigma = \sigma \operatorname{div} \vec{n}(r, \theta, t).
\end{aligned}$$

Введены дополнительные интегральные условия:

$$\begin{aligned}
& \int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad \int_V \vec{r} r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0, \quad V = [0 \leq r \leq r(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi], \\
& \frac{1}{4\pi} \oint_S (\vec{n}, \nabla \Phi) dS = 0, \quad S = [r = r(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi].
\end{aligned}$$

и начальные условия:

$$t = 0: \quad \xi(\theta) = R \left( \xi_0 P_0(\mu) + \xi_1 P_1(\mu) + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} h_j P_j(\mu) \right), \quad \frac{\partial \xi(\theta)}{\partial t} = 0, \quad \sum_{j \in \Xi} h_j = 1.$$

Здесь  $\vec{n}$  – внешний вектор нормали к свободной поверхности капли,  $\Phi$  – электрический потенциал,  $\Phi_s(t)$  – постоянное значение поверхностного потенциала,  $\Xi$  – множество значений номеров изначально возбужденных колебательных мод,  $h_j$  – константа, учитывающая парциальный вклад  $j$ -й колебательной моды в начальное искажение капли,  $\xi_0$  и  $\xi_1$  – константы, имеющие смысл амплитуд нулевой и первой мод.

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ.

Решение сформулированной задачи отыскивается в рамках теории возмущений [6] с точностью до слагаемых второго порядка малости по  $\varepsilon$ . При использовании метода многих масштабов в неизвестных функциях  $\xi(\theta, t)$ ,  $\psi_m(r, \theta, t)$ ,  $\Phi(r, \theta, t)$  зависимость от времени  $t$  определяется его масштабами:  $T_0 = \varepsilon^0 t$ ,  $T_1 = \varepsilon^1 t$ , а производные по времени вычисляются по правилу:  $\frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^0 \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon^1 \frac{\partial}{\partial T_1} + O(\varepsilon^2)$ .

Учтем экспоненциальную зависимость от времени  $\psi_m(r, \theta, t) \sim \exp(i\omega_n t)$ . Подставляя в сформулированную систему уравнений искомые функции и собирая слагаемые различных порядков малости по  $\varepsilon$ , выделяются задачи для нахождения последовательных поправок к неизвестным функциям. Из динамических граничных условий первого и второго порядков по  $\varepsilon$  получены эволюционные уравнения, решения которых с учетом начальных условий дают выражения для амплитудных коэффициентов в возмущении поверхности капли.

Показано, что наличие в спектре капиллярных осцилляций второго порядка амплитуды нулевой моды, соответствующей радиальным пульсациям капли, превращает ее в источник звуковых волн монопольного типа, а наличие амплитуды первой моды, соответствующей поступательному движению, – дипольного типа. При условии  $\lambda \gg R$  ( $\lambda$  – длина излучаемой акустической волны) из известных выражений [5, 7] в асимптотических расчетах второго порядка малости по  $\varepsilon$  найдены аналитические выражения интенсивностей монопольного  $I_0$  и дипольного излучений  $I_1$ :

$$I_0 = \frac{2\pi\rho_2 R^6 \varepsilon^4}{\nu} \sum_{j \in \Xi} \frac{h_j^4 \omega_j^4}{(2j+1)^2},$$

$$I_1 = \frac{3\pi\rho_2 R^4 \nu^2 \varepsilon^4}{2\nu^3} \sum_{j \in \Xi} \left( \frac{9jh_{j-1}h_j}{2(2j-1)(2j+1)} \right)^2 \left( (\omega_j + \omega_{j-1})^4 + (\omega_j - \omega_{j-1})^4 \right),$$

где  $\nu$  – кинематическая вязкость внешней среды.

Проведена оценка фонового акустического излучения от различных жидко-капельных образований естественного происхождения.

**РЕЗУЛЬТАТЫ.** Показано, что монопольная компонента акустического излучения дождевых капель, осциллирующих в диапазоне слышимых звуковых волн, на 6-9 порядков величины интенсивнее дипольной компоненты. Интенсивное монопольное акустическое излучение превышает электромагнитное излучение более, чем на 20 порядков величины [3].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калечиц В.И., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П. О возможном механизме радиоизлучения конвективных облаков // ДАН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1344-1347.
2. Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О. Об акустическом излучении слабо заряженных капель, осциллирующих во внешнем однородном электростатическом поле // Известия РАН. Серия МЖГ. 2022. №5. С. 80-93.
3. Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О. Излучение электромагнитных волн сфероидальной заряженной каплей, осциллирующей в однородном электростатическом поле // Известия РАН. Серия МЖГ. 2016. №3. С. 158-168.
4. Ширяева С.О. Нелинейные осцилляции заряженной капли при начальном возбуждении соседних мод // ЖТФ. 2002. Т.72. Вып.4. С.15-19.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
6. Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
7. Лепендин Л.Ф. Акустика. М.: Высшая школа, 1978. 448 с.



#### СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ОБТЕКАНИИ ТОЧЕЧНОГО ПРЕПЯТСТВИЯ

Е.В. Колесниченко <sup>1,2</sup>, К.А. Хохрякова <sup>1</sup>, М.С. Краков <sup>3</sup>

<sup>1</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

<sup>2</sup>Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь

<sup>3</sup>Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

[bca@icmm.ru](mailto:bca@icmm.ru), [mskrakov@gmail.com](mailto:mskrakov@gmail.com)

[kolesnichenkoev@gmail.com](mailto:kolesnichenkoev@gmail.com)

## ВВЕДЕНИЕ.

Целью работы являлось экспериментальное исследование зависимости угла раствора волн, возникающих при обтекании точечного препятствия на поверхности магнитной и немагнитной жидкостей в зависимости от приложенного однородного магнитного поля и от вязкости жидкости. В природе стационарные волны за препятствием наблюдаются в океанах при движении штормов и ураганов, атмосфере [1] и на поверхности воды за движущимися объектами [2], например случай корабельных волн на поверхности воды [3]. Анализ стационарных волн основан на дисперсионном уравнении гравитационно-капиллярных волн на поверхности жидкости [4]. Причиной образования стационарных волн на поверхности жидкости за движущимся препятствием является зависимость фазовой и групповой скорости распространения волн от длины волны. Для магнитных жидкостей дополнительным управляющим параметром для подобных структур на поверхности будет являться напряженности магнитного поля.

## МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА.

На горизонтальную площадку (рис.1) в центре катушек Гельмгольца устанавливалась стеклянная кювета диаметром  $D = 123,5$  мм. Подачей на катушки постоянного напряжения создавалось магнитное поле с однородностью не менее 95% в центральной части кюветы.

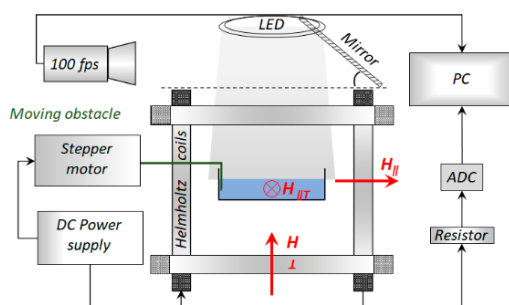


Рис.1. Схема экспериментальной установки

Толщина слоя магнитной жидкости  $h = 15$  мм. Движущаяся платформа жестко связана с немагнитной направляющей, к концу которой крепился горизонтальный медный стержень, который можно считать точечным препятствием. Диапазон напряжения изменялся от 8 до 12 В, что позволяло варьировать скорость в пределах от 137 мм/с до 229 мм/с.

Использовалась магнитная жидкость в виде коллоида магнетита в керосине, стабилизированного олеиновой кислотой ( $\rho = 1.4$  г/см<sup>3</sup>,  $\sigma = 24.3$  мН/м,  $M_s = 50$  кА/м,  $\chi_0 = 5.2$ ). Опыты выполнены при температуре  $(25 \pm 1)^\circ\text{C}$ .

Кадры обрабатывались в программе Comef 4.3. Измерение углов раствора волнового фронта в зависимости от величины и ориентации приложенного магнитного поля для каждого кадра осуществлялось по нескольким вспомогательным линиям (рис. 2). Итоговое значение угла осреднялось по набору данных, дисперсия которых определяла погрешность измерения углов. В поле кадра углы наклона волнового конуса справа и слева относительно препятствия (рис. 4) несколько отличались, что связано с небольшими углами отклонениями оптической системы от вертикали.



Рис.2. Схема определения углов наклона волновых валов.

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА.

Для волн в вертикальном магнитном поле использовался диапазон докритических величин напряженностей (рис.3а.) Видно, что для всех значений скорости угол раствора стационарных волн с ростом напряженности магнитного поля уменьшается.

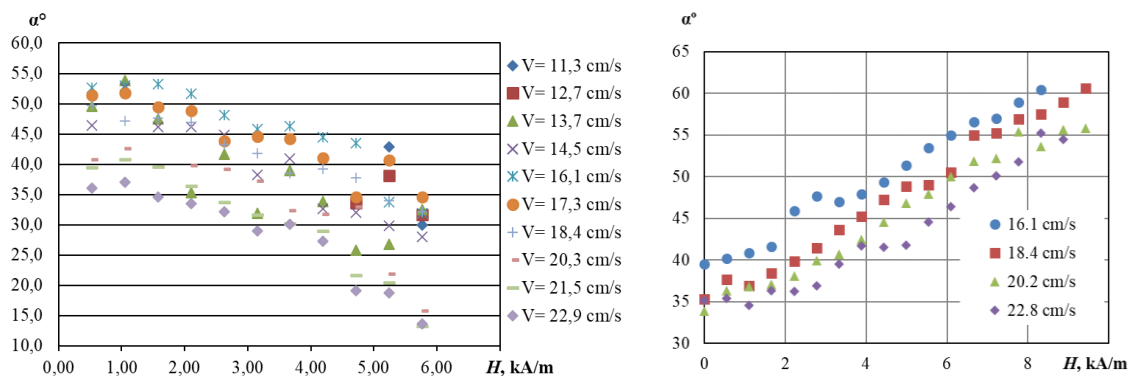


Рис.3. Зависимость угла раствора волн от величины напряженности магнитного поля а) вертикального б) перпендикулярного вектору скорости.

Магнитное поле, параллельное вектору скорости движения препятствия, сначала расширяет угол раствора стационарных волн, а затем, достигнув критического значения, подавляет их (рис. 4).

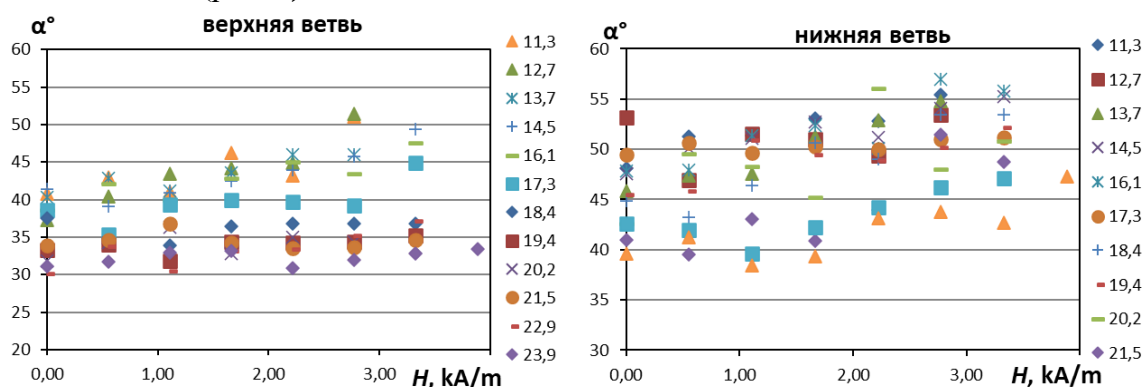


Рис. 4. Зависимость угла раствора волн от напряженности магнитного поля, параллельного вектору скорости

Горизонтальное магнитное поле, направленное поперек направления движения препятствия, заметно увеличивает угол конуса волн (рис. 3б).

В дальнейшем предполагается провести исследования угла раствора стационарных волн для магнитных жидкостей разных вязкостей. Для понимания динамики зависимости угла раствора от вязкости были проведены исследования для смеси вода-

глицерин. На рисунке 5 показана зависимость угла раствора волн от вязкости, выраженной через процентное содержание глицерина в воде для разных скоростей движения препятствия. Видно, что чем выше содержание воды в смеси и, меньше вязкость, тем больше угол раствора волн.

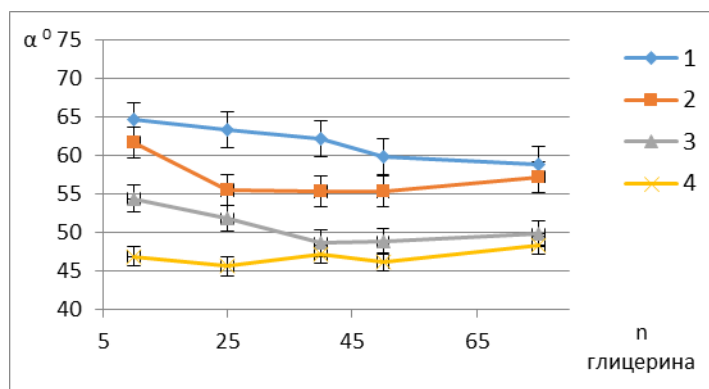


Рис. 5. Зависимость угла раствора волн от концентрации глицерина в растворе вода-глицерин для разных скоростей, см/с: 1) 16,1 ; 2) 18,4 ; 3) 20,2 ; 4) 22,9.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** Экспериментальные исследования позволяют сделать следующие выводы о задаче обтекания жидкостью точечного препятствия. С ростом напряженности в вертикальном магнитном поле угол раствора стационарных волн уменьшается, а их амплитуда увеличивается. Горизонтальное магнитное поле, параллельное скорости препятствия, расширяет угол раствора стационарных волн, а при достижении определенного значения напряженности полностью волны на поверхности магнитной жидкости подавляются полностью. Горизонтальное магнитное поле, перпендикулярное скорости препятствия, также увеличивает угол раствора стационарных волн, но не влияет на их амплитуду.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Svirkunov, P.N.; Kalashnik, M.V. Phase patterns of dispersive waves from moving localized sources. Physics-Uspekhi 2014, 57.
2. Kelvin, L. Deep sea ship waves. Proc. R. Soc. Edinb. 1906, 25, 1060–1084.
3. Thomson, W. XLII. On stationary waves in flowing water. Part I. Philos. Mag. Ser. 1886, 22, 353–357.
4. J.R. Wilton M.A. D.Sc. (1915) LXXII. On ripples, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 29:173, 688 - 700, DOI: 10.1080/14786440508635350.
5. Cowley, M. D. The interfacial stability of a ferromagnetic fluid / M. D. Cowley and R. E. Rosensweig // J. Fluid Mech. – 1967. – Vol. 30. – P. 671.
6. Berkovskii, B. M., Bashtovoi, V. G., & Krakov, M. S. (1980). Stationary waves at the surface of a magnetizable liquid in a stream impinging on a point barrier. Magnitnaia Gidrodinamika, 15(3), 28-32.
7. Browaeys, J., Bacri, J. C., Perzynski, R., & Shliomis, M. I. (2001). Capillary-gravity wave resistance in ordinary and magnetic fluids. EPL (Europhysics Letters), 53(2), 209.



# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ И ФИЛЬТРАЦИОННЫХ СВОЙСТВ ИСКУССТВЕННЫХ ВОЛОКНИСТЫХ ПОРИСТЫХ СРЕД С ВНУТРЕННИМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ И НИЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ

*Н.В. Колчанов, А.С. Сидоров*

*Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь  
[kolchanovn@gmail.com](mailto:kolchanovn@gmail.com), [sidorovaliksandr@mail.ru](mailto:sidorovaliksandr@mail.ru)*

В работе рассматривается задача отвода тепла за счет конвекции в сложных системах, состоящих из нескольких горизонтальных слоев: газ – пористая среда, насыщенная газом. В теоретических расчетах для такой системы получена бимодальная нейтральная кривая [1]. Это означает, что в одном случае конвективное течение возникает в виде локальных валов в свободном от пористой среды слое, а в другом – в виде крупномасштабных валов, захватывающих оба слоя. Подбирая параметры системы отношение толщин слоев, отношение их теплопроводностей и др., можно повышать эффективность отвода тепла из системы. Для этих целей проведено экспериментальное моделирование тепловыделяющей волокнистой пористой среды с низкой теплопроводностью и определены ее свойства. Исследуемые образцы пористой среды сделаны путём вплетения тепловыделяющих волокон в фотополимерный каркас. Для анализа мощности тепловыделения и определения эффективной теплопроводности разработана и собрана экспериментальная установка. По температуре в центре пористого слоя определена мощность тепловыделения во всём объёме пористого образца. Проведено сравнение расчетной мощности с потребляемой от источника питания электрической мощности. Получены значения эффективной доли тепловыделяющей части, скорректированной за счет тепловыделения фотополимерным каркасом. Экспериментально определена проницаемость волокнистых пористых сред конвективным методом и построена зависимость проницаемости от пористости.

## ЭКСПЕРИМЕНТ.

Создание волокнистой тепловыделяющей пористой среды состоит из изготовления тепловыделяющего волокна; разработки и печати на 3D принтере фотополимерного каркаса, вплетения волокон в фотополимерный каркас и их соединения в электрическую цепь. Свойства трех пористых образцов представлены в – таблице. Толщина  $h_{pm}$  образцов была значительно меньше двух других одинаковых продольных размеров равных 101 мм. Пористость  $m$  получившихся образцов определялась через объёмные доли каркаса  $\phi_0$  и тепловыделяющих волокон  $\phi_s$  по формуле:

$$m = 1 - \phi_0 - \phi_s.$$

*Таблица. Толщина, диаметр тепловыделяющего волокна, объёмные доли каркаса и волокна*

| Образец | $h_{pm}$ , мм | Диаметр<br>волокна,<br>мм | Число<br>волокон | $\phi_0$ | $\phi_s$ | $m$  |
|---------|---------------|---------------------------|------------------|----------|----------|------|
| 1       | 12.9          | 0.83                      | 288              | 0.119    | 0.116    | 0.77 |
| 2       | 12.9          | 0.80                      | 235              | 0.089    | 0.088    | 0.82 |
| 3       | 12.8          | 0.09                      | 523              | 0.119    | 0.003    | 0.88 |

Для анализа мощности тепловыделения, определения эффективной теплопроводности и проницаемости  $K$  разработана и собрана экспериментальная установка – рис. 1. Она состоит из стального основания 1, тефлоновой пластины 2, двух медных квадрат-

ных пластин 3 толщиной 8 мм и стороной 160 мм. К пластинам припаяны медные трубки, по которым прокачивается термостатирующая жидкость от термостатов KRIO-VT-01. Между медными пластинами снизу-вверх располагаются следующие слои: слой из органического стекла 4 толщиной  $h_{plex} = 4.3$  мм; слой из дюралюминия 5 с толщиной 5.5-5.8 мм; пористый слой 6, ограниченный боковыми гранями из PLA пластика 7. Слой с образцом приклеивался к верхней теплообменной пластине и дюралюминиевому слою герметиком, а область контакта слоя из органического стекла с соседними элементами заполнялась термопастой КПТ-8. Для измерения температуры использовались медь-константановые дифференциальные термопары 8. Три термопары измеряли перепады температур на слое органического стекла, слое с образцом и боковой ограничивающей образец границе из PLA пластика. Еще одна термопара вместе с ртутным термометром измеряла абсолютную температуру в центральной области тепловыделяющего волокнистого пористого образца. Тепловыделение в волокнах возникало, когда по цепи образца пускался электрический ток от источника питания GPR-11H30D.

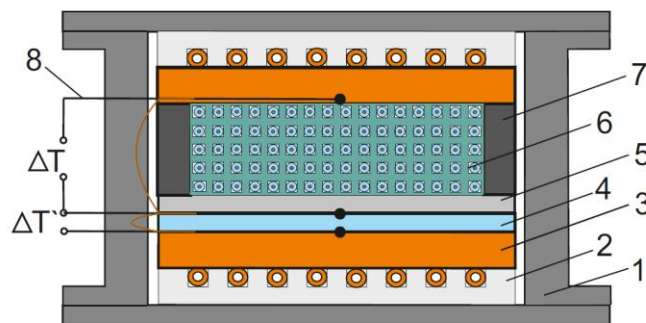


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: 1 – стальное основание, 2 – тефлоновая пластина, 3 – медная пластина теплообменника с трубками для прокачки жидкости от термостата, 4 – пластина из оргстекла, 5 – дюралюминиевая пластина, 6 – пористая среда, 7 – боковая рамка из PLA, 8 – термопары.

## РЕЗУЛЬТАТЫ.

Согласно теоретическим расчётам однородное тепловыделение в пористом слое в отсутствие конвекции приводит к установлению равновесного параболического профиля температуры по вертикали с максимумом  $T_m$  в середине пористого слоя. Мощность тепловыделения  $Q$  во всём объёме можно рассчитать по формуле

$$Q = \frac{8\kappa_{pm}(T_m - T_0)}{h_{pm}^2},$$

где  $\kappa_{pm}$  – эффективная теплопроводность насыщенного воздухом пористого слоя,  $T_0$  – температура на верхней и нижней границах пористого слоя. Задавая мощность электрического тока на источнике питания, проводили измерение температуры  $T_m$  в центре пористого слоя для фиксированной температуры  $T_0$  на границах. По температуре  $T_m$  рассчитывалась мощность тепловыделения  $Q(T_m)$  на единицу всего объёма пористой среды. Получены линейные графики зависимости мощности тепловыделения  $Q(T_m)$  от электрической мощности  $Q_s$  на единицу объёма тепловыделяющих волокон – рис. 2а. Сравнение значений рассчитанной  $Q(T_m)$  и задаваемой  $Q(U, I)$  источником питания мощности тепловыделения на единицу объёма пористой среды представлено на – рис. 2б. Это позволило нам оценить эффективную объёмную долю тепловыделяющей части  $\tilde{\phi}_s$  с учетом тепловыделения фотополимерного каркаса для каждого образца из таблицы: 0.187 (образец 1); 0.200 (образец 2) и 0.0035 (образец 3).

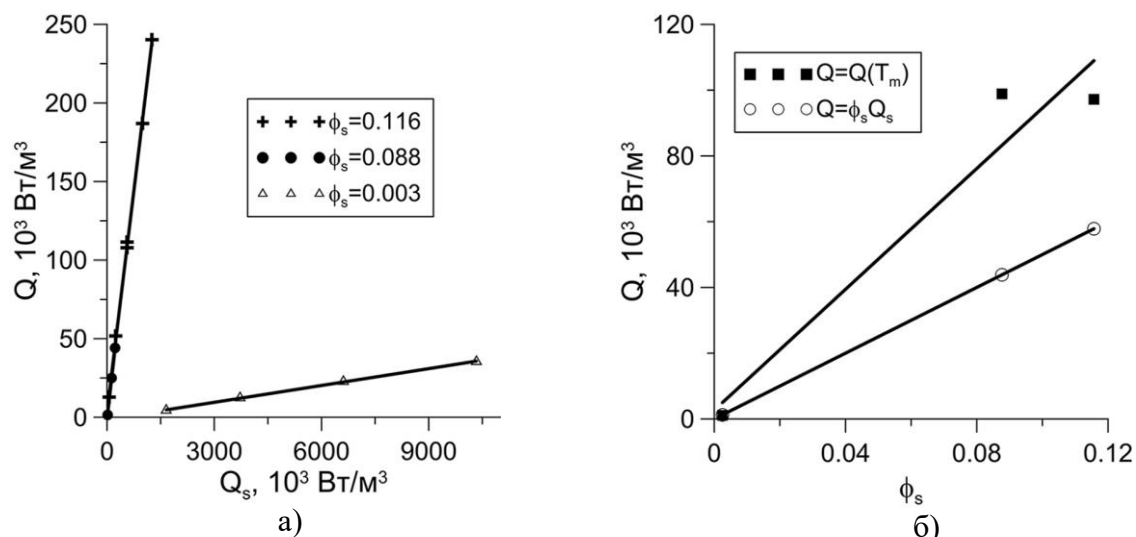


Рис. 2. Зависимость мощности тепловыделения  $Q(T_m)$  на единицу всего объема пористой среды (а) от электрической мощности тепловыделения  $Q_s$  на единицу объема тепловыделяющей части пористой среды и (б) от объемной доли тепловыделяющей твердой фазы при  $Q_s = 500 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^3$

По результатам конвективных экспериментов с каждым образцом были построены графики зависимости числа Нуссельта от перепада температуры на слое волокнистой пористой среды. Из графиков находилось критическое значение перепада температуры, при котором в полости возникали конвективные вихревые течения. Используя формулу для критического числа Рэлея-Дарси вычислялась проницаемость  $K$  пористого слоя. Зависимость проницаемости от объемной доли порового пространства представлена на – рис. 3.

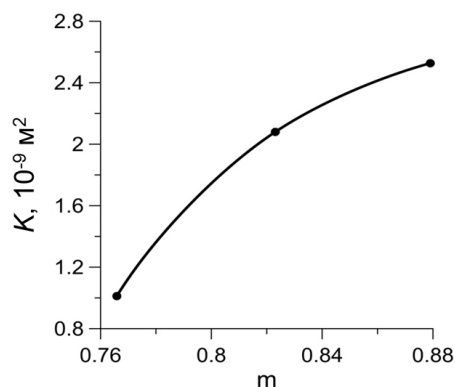


Рис. 3. Зависимость проницаемости от пористости для трех образцов с  $m = 0.77$ ,  $m = 0.82$  и  $m = 0.88$

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10045, <https://rscf.ru/project/21-71-10045/>.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kolchanova E., Kolchanov N. Onset of internal convection in superposed air-porous layer with heat source depending on solid volume fraction: influence of different modeling // Acta Mechanica. 2022. Vol. 233. P. 1769–1788

## СТРУКТУРЫ ВОЛН В ТЕЧЕНИЯХ, ВЫЗВАННЫХ ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ ЖИДКОСТИ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ЧАСТОТАМИ

*О.Э. Кривоносова, Д.Ю. Жиленко*  
 НИИ Механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва  
[olga@imec.msu.ru](mailto:olga@imec.msu.ru)

Рассматриваются волны, возникающие в сферическом слое, заполненном вязкой несжимаемой жидкостью, при модуляции скорости вращения внутренней границы слоя. В осесимметричном приближении рассчитывается поле скоростей течения, которое далее используется для построения волновых поверхностей. Волновые поверхности это поверхности равных фаз, которые здесь определяются из временных рядов азимутальной компоненты скорости течения с помощью преобразования Гильберта. Рассмотрены течения при нулевых средних скоростях вращения границ. При малых амплитудах модуляции обнаружены сферические волны. Исследовано взаимодействие волн при двухчастотной модуляции. Показана возможность усиления низкочастотной малоамплитудной составляющей.

### ВВЕДЕНИЕ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МГНОВЕННОЙ ФАЗЫ ПРОИЗВОЛЬНОГО СИГНАЛА.

Актуальность исследования структуры течения в сферических слоях, образующихся при модуляции скорости вращения одной или обеих его границ, обусловлена, кроме фундаментального значения для исследования колебаний в системе со многими степенями свободы, существованием геофизических и астрофизических объектов с неравномерным вращением.

Целью данного исследования является разработка и применение метода построения волновых поверхностей. Разработанный метод позволяет по полю скоростей течения построить волновые поверхности, и тем самым определить направление распространения и структуру волн.

Рассматриваются волны, вызванные колебаниями внутренней границы относительно состояния покоя, внешняя граница неподвижна. Поле скоростей находится из решения уравнений Навье-Стокса и неразрывности с условиями прилипания и непротекания на границах. Алгоритм решения разработан Никитиным Н.В. и подробно описан, например, в [1]. В соответствии с рассматриваемой геометрией используется сферическая система координат. Для определения фазы колебаний произвольного вещественного сигнала  $x(t)$  в [2] предлагается использовать понятие мгновенной фазы  $\Psi(t)$ :  $\Psi(t) = \arctg(y(t)/x(t))$ , где  $y(t)$  ортогональное дополнение к  $x(t)$ , которое вычисляется как преобразование Гильберта (ПГ) исходного сигнала. Определенная таким образом мгновенная фаза в случае простого периодического сигнала совпадает с традиционной величиной. Использование ПГ удобно из-за быстроты и простоты расчетов, которые базируются на быстром преобразовании Фурье.

### ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ.

В случае периодических колебаний границы с одной частотой  $\Omega(t) = a \sin(2\pi ft)$  разность фаз между фазой границы  $\Psi_s(t) = 2\pi ft$  и фазой течения в точке с координатам  $(r, \theta)$   $\Psi(t, r, \theta)$  не зависит от времени, а зависит только от положения точки  $\Delta\Psi = \Psi(r, \theta) = \Psi_s(t) - \Psi(t, r, \theta)$ .

При небольших колебаниях внутренней границы  $a = 1\text{с}^{-1}$  и  $f = 0.5\text{с}^{-1}$  течение остается ламинарным и затухает не достигая внешней границы. На рис. 1 представлены контуры азимутальной скорости  $u_\varphi$  при нулевом отклонении внутренней границы и контуры разности мгновенных фаз  $\Delta\Psi(r, \theta) = \Psi_s(t) - \Psi(t, r, \theta)$ ; и эти же величины в плос-

кости экватора в разные моменты времени или при разных фазах модуляции  $\Psi_s(t) = 2\pi ft = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$  в зависимости от безразмерного расстояния  $r_0 = (r-r_1) / (r_2-r_1)$  между сферами. При представлении результатов величины азимутальной скорости нормированы на величину  $ar_1$ . В то время как скорость быстро убывает при удалении от внутренней границы и можно говорить о затухающей бегущей волне, величина  $\Delta\Psi$  не зависит от времени и отслеживает структуру течения вплоть до внешней границы.

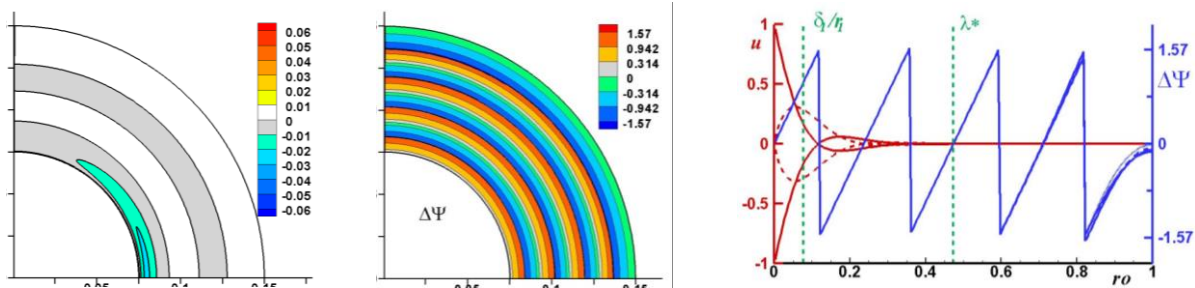


Рис. 1. Контуры  $u_\phi$  (слева) и  $\Delta\Psi$  (в центре) в меридиональной плоскости течения, зависимости  $u_\phi$  (красные кривые) и  $\Delta\Psi$  (синие кривые) от  $r_0$  (справа).

При увеличении амплитуды колебаний  $a = 5c^{-1}$  ( $\gamma_1 = 1.59$  и  $\delta_1 / r_1 = 7,510^{-2}$ ) контуры как  $u_\phi$  так и  $\Delta\Psi$  имеют более сложную структуру (рис. 2).

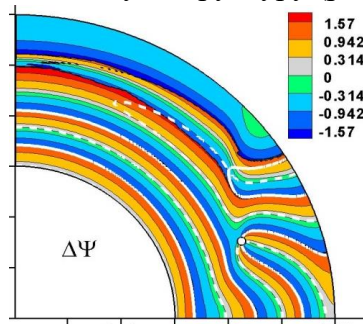


Рис. 2. Контуры  $u_\phi = 0$  в моменты нулевого (белый пунктир) и наибольшего (белые линии) отклонения внутренней сферы и контуры  $\Delta\Psi$  (в цвете) при  $a = 5c^{-1}$  и  $f = 0.5c^{-1}$ .

### ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ВОЛН.

В этом разделе исследуется процесс взаимодействия высокочастотной (индекс  $h$ ) и низкочастотной ( $l$ ) мод в устойчивом нестационарном течении, вызванном двухчастотными вращательными колебаниями внутренней сферы относительно состояния покоя  $\Omega(t) = a_l \sin(2\pi f_l t) + a_h \sin(2\pi f_h t)$ .

При малоамплитудных колебаниях обе моды ведут себя также как при соответствующих гармонических колебаниях (рис. 3), взаимодействие между модами отсутствует. В силу различия в величине декрементов затухания наблюдается разделение на зоны влияния: высокочастотная мода преобладает вблизи источника колебаний - вблизи внутренней сферы, низкочастотная - на удалении от источника колебаний - вблизи внешней сферы, линия раздела совпадает с линией равных амплитуд мод (рис. 3b). Отношения амплитуд и зависимости амплитуд от радиуса (рис. 3b,d) совпадают для рассматриваемых двухчастотных колебаний и для гармонических колебаний внутренней сферы на каждой из частот. Это показывает, что при двухчастотных малоамплитудных колебаниях моды не взаимодействуют.

С увеличением амплитуды высокочастотной моды деление сферического слоя на три области сохраняется. Первая прилегает к внутренней сфере, но теперь ее граница имеет выступ вблизи плоскости экватора (рис.4). Волновые поверхности только вблизи внутренней сферы представляют собой окружности. В этой области колебания во вре-



мени происходят с частотой близкой к  $f_h$ . Область, примыкающая к внешней сфере характеризуется не только колебаниями с частотой близкой к  $f_l$ , но и изменением направления распространения волн – от радиального к меридиональному.

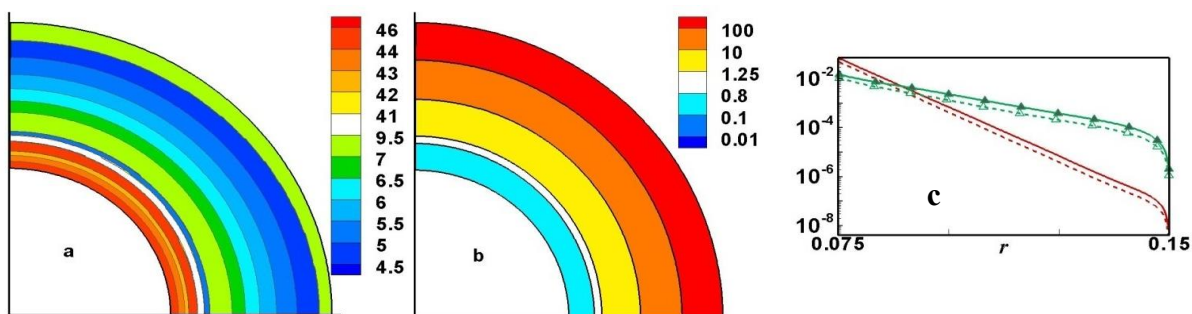


Рис. 3. Двухчастотные колебания внутренней сферы  $a_h = 1c^{-1}$ ,  $f_h = 0.5c^{-1}$ ,  $a_l = 0.2c^{-1}$ ,  $f_l = 0.07c^{-1}$  (a) - волновые поверхности, (b) - отношение амплитуд низкочастотной и высокочастотной мод  $F_l(r, \theta) / F_h(r, \theta)$ ; (c) - амплитуды мод в зависимости от радиуса  $F_h$  - красные,  $F_l$  - зеленые;  $\theta = \pi/2$  - сплошные и  $\theta = \pi/4$  пунктирные линии.

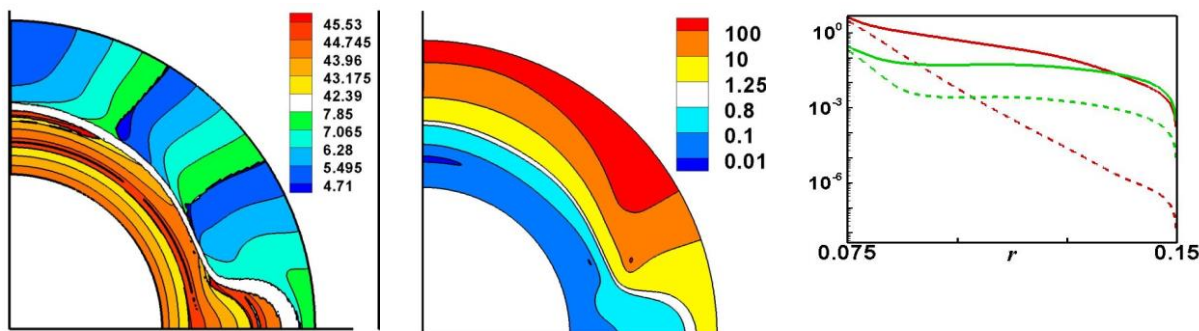


Рис. 4. Двухчастотные колебания внутренней сферы  $a_h = 5c^{-1}$ ,  $f_h = 0.5c^{-1}$ ,  $a_l = 0.2c^{-1}$ ,  $f_l = 0.07c^{-1}$  (слева) - волновые поверхности, (в центре) - отношения амплитуд  $F_l / F_h$ . (справа) - амплитуды мод в зависимости от радиуса  $F_h$  - красные,  $F_l$  - зеленые;  $\theta = \pi/2$  - сплошные линии и  $\theta = \pi/4$  пунктирные линии.

При рассмотренных не малоамплитудных двухчастотных колебаниях внутренней сферы наблюдается усиление низкочастотной моды и изменение направления ее распространения: от экватора к полюсу вдоль внешней сферы. Усиление низкочастотной моды в течении при увеличении амплитуды высокочастотной моды в сигнале скорости вращения можно рассматривать как передачу энергии от меньших масштабов к большим в процессе нелинейного взаимодействия мод. Передача энергии от меньших масштабов к большим напоминает процессы в квазидвумерной турбулентности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nikitin N. Finite-difference method for incompressible Navier-Stokes equations in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates //J. computat. phys. 2006. V. 217. №2. P. 759-781.
2. Анищенко В.С. и др. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. Москва Ижевск. 2003. С. 673.



## О СТРУКТУРЕ РАЗРЫВОВ В РЕШЕНИЯХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ. ВОЛНЫ В СТЕРЖНЯХ. ОСОБЫЕ РАЗРЫВЫ

*А.Г. Куликовский, А.П. Чугайнова*

*Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва*

[kulik@mi-ras.ru](mailto:kulik@mi-ras.ru)

Образование разрывов – “опрокидывание” волн – типичное поведение решений гиперболических систем уравнений. Если все условия на разрывах следуют из законов сохранения, то такой разрыв назовем ударной волной. Если для описания разрыва требуются дополнительные соотношения, которые следуют из рассмотрения структуры разрыва, то такие разрывы будем называть особыми. Хотя особые разрывы встречались ранее в различных моделях сплошных сред, они в основном относились к явлениям, связанным с химическими превращениями и наличием сильных колебаний в структуре разрывов. В предлагаемом докладе рассматривается модель, описывающая длинные нелинейные волны малой амплитуды, распространяющиеся по стержню. Изучаются продольно-крутильные волны в предположении, что деформации рассматриваются как линейные, а связь напряжений и деформаций нелинейна. Ранее в рамках этой модели изучены волны Римана и разрывы. В представляемой работе изучается структура разрывов. Структура разрывов описывается добавлением в уравнения движения вязких сил. Система уравнений является системой общего вида с простейшим описанием вязкой диссипации. Найдены условия существования особых разрывов. На примере предложенной модели показано, что особые разрывы влияют на множество допустимых разрывов и, как следствие, на строение решений физических задач.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКА НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 20-01-00071).



## ГЕОМЕТРИЯ ПОЛЯ ДАВЛЕНИЯ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПОГРУЖАЮЩИХСЯ ПЯТЕН КОНВЕКТИВНОЙ ПРИРОДЫ

*А.Е. Куприянова<sup>1,2</sup>, В.А. Гриценко<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград*

<sup>2</sup> *Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва*

[gritsenko-vl-al@mail.ru](mailto:gritsenko-vl-al@mail.ru), [kupriyanova\\_ae@mail.ru](mailto:kupriyanova_ae@mail.ru)

Проникновение холода с поверхности в глубину воды происходит известным образом [1]. На границе раздела вода-атмосфера в поверхностном слое воды формируется тонкий термический слой холодной воды. На нижней неустойчивой границе данного слоя по достижении его критического объема образуются термики холодной воды, которые погружаются и смешиваются с окружающей водой. Процесс охлаждения тонкого поверхностного слоя и его распространения в глубину рассматривался рядом исследователей [2-4] ещё во второй половине двадцатого века, но из-за недостаточной разре-

шимости приборных измерений в первых сантиметрах воды, высокой стоимости экспедиционных исследований и недостаточного пространственно-временного разрешения численных моделей изучение выхолаживания воды оказалось недостаточно полным.

В данной работе будут представлены результаты исследования процесса выхолаживания воды с поверхности моря при взаимодействии отдельных термиков между собой в процессе их погружения в толщу воды.

### **ЛАБОРАТОРНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ**

Эксперименты в лабораторных условиях проводились на специальной установке Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН (Атлантическое отделение, ЛФМ) – малом гидрлотке из витринного стекла с размерами  $80 \times 60 \times 12.5$  см. Термик холодной воды моделировался объемом подкрашенной соленой воды (пятно) с диапазоном избыточной плотности от  $10^{-4}$  до  $5 \cdot 10^{-5}$  г/см<sup>3</sup>. Процедура проведения экспериментов заключалась в последовательном запуске пятен через специальное устройство (типа «воронка»), расположенное на поверхности пресной воды в гидрлотке, а также съемке процесса на камеру Sony  $\alpha$ -58 (20 Мр).

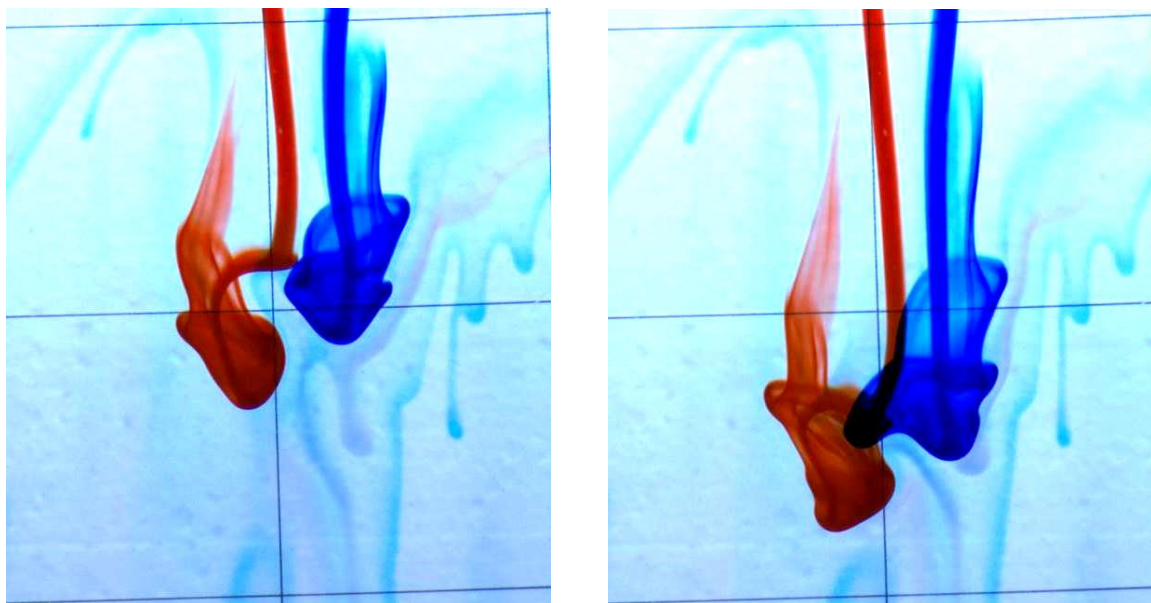
В ходе выполнения лабораторных экспериментов удалось получить типичные формы трансформации [1] отдельных пятен соленой воды, а также подразделить на несколько этапов взаимодействие двух пятен между собой в окружении пресной воды. В данной постановке происходил практически одновременный запуск пятен через специальное устройство с двумя выходными створами (диаметр отверстия  $\sim 5$  мм, расстояние между створами  $\sim 13$  мм). На рисунке 1 зафиксированы последовательные этапы взаимодействия погружающихся пятен разной подкраски, обычно наблюдаемые в гидрлотке. На начальном этапе (рис. 1а) происходит независимое погружение обоих пятен в нижележащую воду без контакта вод пятен друг с другом, но уже с заметным изменением геометрии формы «грибка» каждого пятна. Отмечаемое изменение возникает вследствие совместного влияния движения пятен на формирование общего поля давления, что отчетливо будет видно на графиках поля давления в численных экспериментах. На следующем этапе происходит активное взаимодействие (рис. 1б) вод обоих пятен между собой: знаки завихренности для правой части красного пятна и левой части синего пятна отличны и способствуют их контакту. Оказалось, что большая интенсивность завихренности в красном пятне, доминирующая над завихренностью синего пятна, приводит к сближению пятен и затягиванию вод синего пятна в воды красного (рис. 1б). Последующее погружение пятен происходит уже в объединенной форме.

Лабораторный эксперимент (рис.1) продемонстрировал этапы взаимодействия пятен при их формировании в приповерхностном слое воды вдали ( $\sim 13$  мм) друг от друга. Оказалось, что вихревой характер движения пятен при погружении пятен в пресной воде приводит к формированию общей структуры течений и способствует их контакту.

### **ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ.**

Модельные расчеты проводились на нелинейной двумерной модели динамики стратифицированной по плотности жидкости [5] в переменных завихренность - функция тока - избыточная плотность. Помимо традиционного набора уравнений в систему были добавлены два трассера нейтральной плавучести для «подкраски» объектов в модельном пространстве. Характерные масштабы:  $h_0=3$  см,  $\Delta\rho=5 \cdot 10^{-4}$  г/см<sup>3</sup>,  $u_0=2.7$  см/с.

В численном эксперименте происходил «запуск» двух объектов отрицательной плавучести с одинаковой избыточной плотностью, а размеры модельного пространства  $1001 \times 601$  узел. На рисунке 2 приведены распределения модельных полей, характеризующие последовательные фазы погружения и контакта между собой двух объемов с отрицательной плавучестью, качественно близких по начальному состоянию с пятнами соленой воды в лотке.



*Рис. 1. Серия последовательных снимков (2-3 секунды) отдельных подкрашенных объемов соленой воды в окружении пресной воды: фаза (а) начала взаимодействия двух объемов до непосредственного контакта их вод, фаза (б) активного взаимопроникновения объемов друг в друга с последующим объединенным погружением. Объемы пятен 2.5-3 мл, избыточная плотность  $10^{-4}$ , сетка на фоне  $40 \times 40$  мм.*

Левые графики рисунка (рис. 2 а, в) показывают общую картину распределения плотности воды и линии тока. Линии тока (рис. 2а, штриховые линии) свидетельствуют об уже начавшемся взаимодействии пятен между собой, хотя контакта их вод ещё нет. Фаза взаимопроникновения вод пятен друг в друга отражен на графике 2 в: воды следующего по времени формирования пятна затягиваются внутрь вод предыдущего пятна. Правые графики рисунка (рис. 2 б, г) поля давления показывают наличие локальных максимумов давлений внутри каждого пятна до и после контакта их вод. Кроме приведенных графиков при исследовании выхолаживания воды с поверхности были также рассчитаны поля завихренности, градиенты давления, модуль градиента плотности и другие расчетные поля, которые позволили более детально рассмотреть изучаемый процесс.

### **ОБСУЖДЕНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ.**

Подводя итог исследования можно сказать, что лабораторные эксперименты позволили на качественном уровне описать этапы процесса взаимодействия отдельных пятен, погружающихся в окружении пресной воды, а численные эксперименты детализировали результаты лабораторных экспериментов. Генерация завихренности бароклинической природы способствует образованию грибовидной формы у пятен соленой воды, а неодинаковость в погружении пятен породила неодинаковость вихревых полей, что приводит к их контакту.

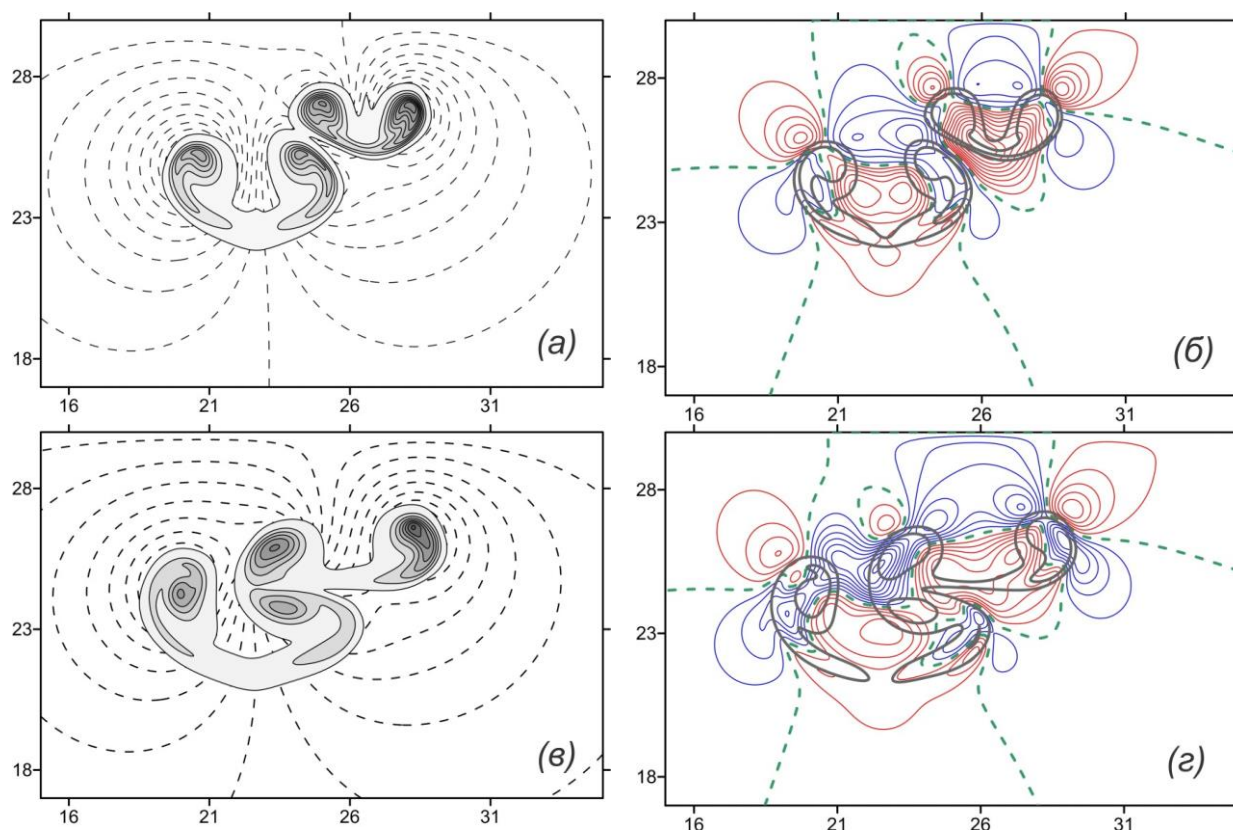


Рис. 2. Две последовательные фазы погружения объема отрицательной плавучести: (а) фаза погружения объемов в непосредственной близости друг от друга и (б) график плотности (толстая серая линия) и поля давления для данной фазы; (в) фаза начала взаимопроникновения объемов друг в друга и (г) график поля давления.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкости. М.: Мир, 1977. 431 с.
2. Федоров К.Н., Гинзбург А.И. Приповерхностный слой океана. Л: Гидрометеиздат, 1988. 303 с.
3. Гинзбург А.И., Федоров К.Н. Охлаждение воды с поверхности при свободной и вынужденной конвекции // Известия АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана. 1978. Т. 14. №1. С. 79–87.
4. Зацепин А.Г., Федоров К.Н., Воропаев С.Н., Павлов А.М. Экспериментальное исследование растекания перемешанного пятна в стратифицированной жидкости // Известия АН СССР. Сер. ФАО. 1978. Т. 14. № 2. С. 234–237.
5. Волкова А.А., Гриценко В.А. Особенности циркуляции, возникающей при погружении с поверхности конечного объема воды с отрицательной плавучестью // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2019. Т. 12. № 3. С. 26–35.



## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНИЦИИРОВАНИЯ ДЕТОНАЦИИ ПРИ ОТРАЖЕНИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТ ПРОФИЛИРОВАННОГО ТОРЦА КАНАЛА

*А.И. Лопато*

*Институт автоматизации проектирования РАН, Москва*

[lopato2008@mail.ru](mailto:lopato2008@mail.ru)

### **ВВЕДЕНИЕ.**

Процессы формирования и распространения детонационных волн представляют интерес в разных областях (см., например, ссылки в [1]), включая вопросы пожаро-взрывобезопасности в объектах и помещениях разного типа. К таким объектам можно отнести тоннели, штольни, а также бункеры и шахты, представляющие собой систему разветвленных путей. Условия для воспламенения газовых смесей и распространения волн горения и детонации зависят от многих факторов, включая геометрию конструкций, свойства материалов, внешние воздействия на систему. Другими словами, инициаторами детонации могут выступать разные объекты. Объектами инициирования могут выступать так называемые “горячие точки” – области газа повышенного давления и температуры. Воспламенение газовых смесей в горячих точках может приводить к воспламенению смеси, находящейся вблизи горячих точек. При определенных условиях происходит формирование детонационных волн, которые затем распространяются в пространстве.

Источником возникновения горячих точек могут служить элементы конструкций. Процесс инициирования смеси при отражении относительно слабой ударной волны от криволинейного торца канала рассматривался в работе [1]. В работе представлена зависимость времени воспламенения смеси от числа Маха набегающего на торец потока для разных конфигураций торцов. Кроме того, отмечены критические числа Маха, ниже которых инициирования детонации не происходит в рабочей камере ударной трубы. Целью работы является математическое моделирование инициирования смеси в канале с профилированным торцом.

### **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ.**

Математическая модель включает систему уравнений газовой динамики, дополненную кинетикой химических реакций. Рассматривается глобальная модель кинетики Аррениуса для модельной водородно-кислородной смеси с параметрами, величины которых отвечают температурам и давлениям из экспериментов. Параметры в покоящейся смеси перед фронтом ударной волны следующие. Давление 0.04 атм, температура 298 К.

Вычислительный алгоритм основан на принципе расщепления по физическим процессам – конвекции и химической кинетики. Дискретизация уравнений проводится с использованием метода конечных объемов. Расчетная область покрывается сеткой из треугольников. Построение сетки осуществляется с использованием алгоритма триангуляции Делоне. Расчет потоков через грани проводится с использованием схемы AUSM. Используется реконструкция сеточных функций с ограничителем minmod для повышения порядка аппроксимации по координате. Для повышения порядка по времени используется явный метод Рунге-Кутты второго порядка. На этапе расчета химической кинетики решается система обыкновенных дифференциальных уравнений для температуры и массовой доли реагента. Решение системы проводится с использованием неявного метода Рунге-Кутты с линеаризацией по Ньютону. Более подробно особенности вычислительного алгоритма представлены, например, в [3,4].



## РЕЗУЛЬТАТЫ.

Расчеты проводятся для конфигурации торца, состоящей из двух одинаковых эллиптических участков, которые разделяют плоские участки торца. Диаметры эллипса соответствуют размерам отражателей из экспериментов. Расчеты показывают, что времена инициирования при числах Маха из промежутка 2.4-2.6 коррелируют со значениями из экспериментов. При числе Маха 2.4 инициирования смеси не происходит за время расчета. Для числа Маха 2.5 наблюдается формирование горячих точек, волн горения и ударных волн.

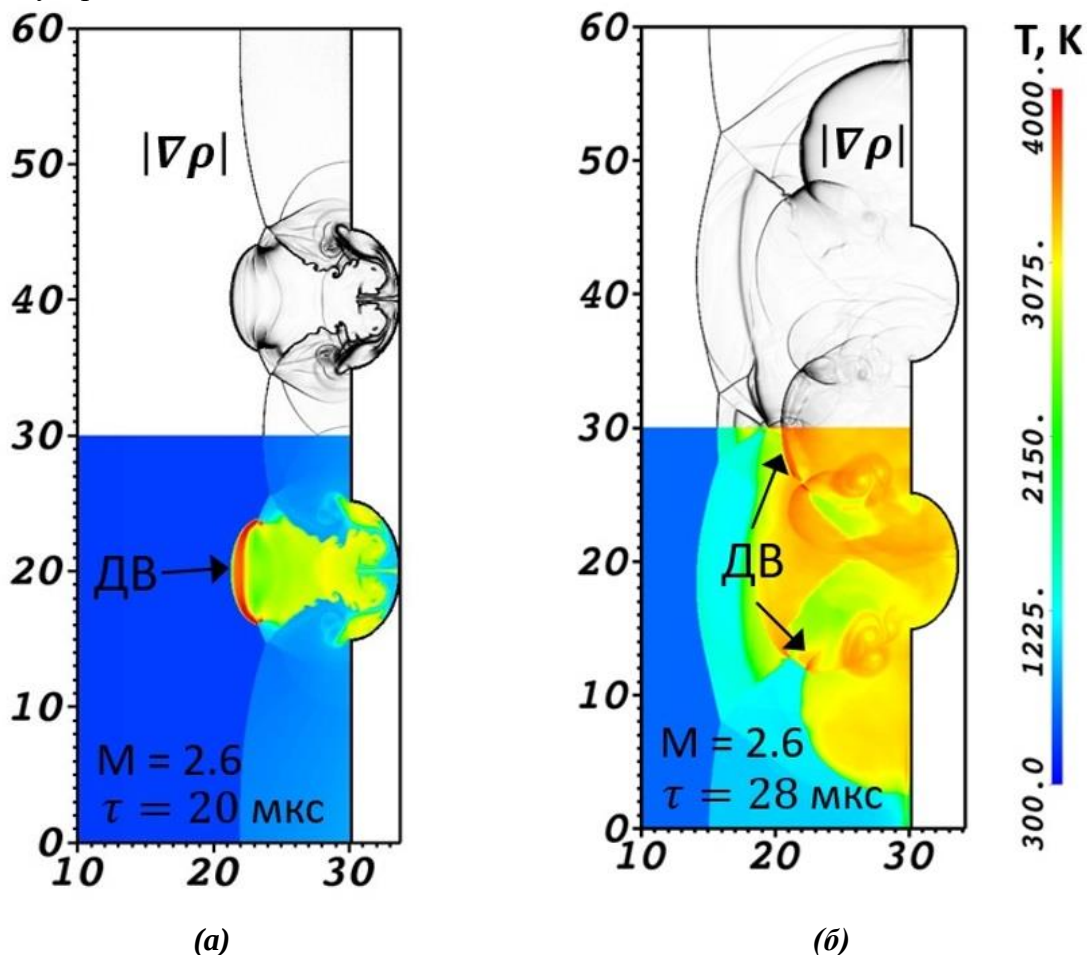


Рис. 1. Рассчитанные поля градиентов плотности (сверху) и температуры (снизу) в момент инициирования детонационной волны для числа Маха 2.6 набегающей волны. Глобальная кинетика Аррениуса (а), детальная кинетика (б).

Взаимодействие волн и их интерференция приводит к инициированию детонации по механизму близкому к слабому инициированию. Повышение числа Маха приводит к смене режима инициирования и уменьшению времени инициирования. Для числа Маха 2.6 инициирование детонационной волны происходит в момент времени 20 мкс у области эллиптического участка без интерференции волн от соседних эллиптических участков (рис. 1(а)). Инициирование детонации происходит по механизму сильного инициирования. Проведены расчеты для детальной кинетики горения водородно-кислородной смеси (модель описана, например, в работах [5-6]), которые показали аналогичную тенденцию с изменением режима инициирования. Однако, число Маха, при котором происходит смена режима инициирования, оказывается выше для детальной кинетики. Его значение находится в промежутке 2.6-2.7. Кроме этого, инициирование детонации происходит позже, чем в случае глобальной кинетики. Так, для числа Маха 2.6 иницииро-



вание детонации происходит в момент времени около 28 мкс (рис 1(б)). Подобные различия могут быть связаны с тем фактом, что детальная кинетика учитывает ряд эффектов, которые, в силу простоты, не учитывает в полной мере глобальная кинетика. Так, детальная кинетика учитывает эндотермические участки цепи реакций. Это приводит к тому, что абсолютные значения градиентов физических величин при горении оказываются меньше, по сравнению с результатами расчетов, полученных при использовании модели глобальной кинетики. Подобные особенности отмечены во многих работах, посвященных сравнению результатов, полученных с использованием кинетик разного типа (см. например, [7]).

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена в рамках гос. Задания ИАП РАН.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lopato A.I.* Some aspects on pulsating detonation wave numerical simulation using detailed chemical kinetics mechanism // *Applied Mathematics and Computational Mechanics for Smart Applications. Proceedings of AMMAI 2020.* 2021. V. 217. P. 103 – 114.
2. *Vasil'ev A.A.* Cellular structures of a multifront detonation wave and initiation (review) // *Combustion, explosion, and shock waves.* 2015. V. 51. P. 1 – 20.
3. *Lopato A.I., Utkin P.S., Vasil'ev A.A.* Mechanisms of detonation initiation in multi-focusing systems // *Shock Waves.* 2020. V. 30. N. 4. P. 741 – 753.
4. *Lopato A.I., Eremenko A.G., Utkin P.S., Gavrilov D.A.* Numerical simulation of detonation initiation: the quest of grid resolution. *Advances in Theory and Practice of Computational Mechanics // Proceedings of the 21st International Conference on Computational Mechanics and Modern Applied Software Systems.* Eds.: Jain, L.C., Nikitin, I.S., Favorskaya, M.N., Reviznikov, D.L. Part of the Smart Innovation, Systems and Technologies book series. 2020. V. 173. P. 79 – 89.
5. *Lopato A.I.* Numerical Simulation of Shock-To-Detonation Transition Using One-Stage and Detailed Chemical Kinetics Mechanism // *Smart Modeling for Engineering Systems. Proceedings of the International Conference on Computational Methods in Continuum Mechanics (CMCM 2021).* 2021. V. 2. P. 79 – 88.
6. *Lopato A.I.* Some Aspects on Pulsating Detonation Wave Numerical Simulation Using Detailed Chemical Kinetics Mechanism // *Applied Mathematics and Computational Mechanics for Smart Applications. Proceedings of AMMAI 2020.* 2021. V. 217. P. 103 – 114.
7. *Lieberman M., Wang C., Qian C., Liu J.* Influence of chemical kinetics on spontaneous waves and detonation initiation in highly reactive and low reactive mixtures // *Combustion Theory and Modeling.* 2019. V. 23. N. 3. P. 467 – 495.



### ТРЕХМЕРНЫЕ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАВАЮЩЕМ ЛЕДЯНОМ ПОКРОВЕ ОТ ДВИЖУЩЕГОСЯ ИСТОЧНИКА ВОЗМУЩЕНИЙ

*Ж.В. Маленко<sup>1</sup>, А.А. Ярошенко<sup>2</sup>*

<sup>1,2</sup>*Филиал Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Государственный морской университет имени адмирала Ф.Ф. Ушакова», Севастополь*

<sup>1,2</sup>*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Севастопольский государственный университет», Севастополь*

**ВВЕДЕНИЕ.**

Большинство рек и водоемов в районах Крайнего Севера, Сибири и Дальнего Востока в зимний период покрыто льдом. В этот период на реках организуются ледовые переправы, по которым осуществляется доставка различных грузов. При движении транспортного средства по льду возникают волны, которые приводят к разрушению ледяного покрова. С другой стороны для продления навигации возникает необходимость разрушения ледяного покрова. Для этих целей используются суда на воздушной подушке (СВП). СВП рационально использовать на мелководье, где невозможно применять другие ледокольные средства. Поэтому важно знать поведение ледяного покрова при воздействии на него движущейся нагрузки, знать критические скорости, при которых возможно разрушение ледяного покрова.

Математическая теория распространения волн в плавающем ледяном покрове была заложена в работе Хейсина Д.Е. [1]. В книге рассматриваются плоские задачи колебаний ледяного покрова при движении по нему нагрузки с учетом сжимающих усилий и при их отсутствии. Теория распространения трехмерных изгибно-гравитационных волн от движущегося источника возмущений получила свое дальнейшее развитие в работах [2-5]. В [6,7] исследуется пространственное распределение амплитуды образующихся изгибно-гравитационных волн в зависимости от скорости перемещения нагрузки [6] и сжимающих усилий [7].

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.**

Пусть на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины плавают ледяной покров, который моделируется тонкой упругой изотропной пластиной, по поверхности которой перемещается источник возмущений. Задача сводится к решению уравнения Лапласа для потенциала скорости  $\varphi$

$$\Delta\varphi = 0, \quad -H < z < 0, \quad -\infty < x, y < \infty$$

со следующими граничными условиями:

$$D_1 \nabla^4 \zeta + Q_1 \Delta_1 \zeta + \chi_1 v^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \zeta + \frac{v}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -p_1 f(x, y) \text{ при } z = 0,$$

$$\partial \varphi / \partial z = 0 \text{ при } z = -H, \quad \partial \varphi / \partial z = v \partial \zeta / \partial x \text{ при } z = 0,$$

где  $D_1 = D/\rho g$ ,  $Q_1 = Q/\rho g$ ,  $\chi_1 = \rho_1 h/\rho g$ ,  $D = Eh^3/(12(1-\mu^2))$ ,  $p_1 = p_0/\rho g$ ,  $\nabla^4 = \Delta_1^2$ ,  $\Delta_1 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ ,  $\rho$  – плотность жидкости,  $E$ ,  $h$ ,  $\rho_1$ ,  $\mu$  – модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона пластинки,  $Q$  – сжимающее усилие,  $\zeta$  – возвышение поверхности пластина-жидкость.

**РЕШЕНИЕ.**

Применяя для решения задачи интегральное преобразование Фурье по горизонтальным координатам  $x$ ,  $y$ , получим следующее интегральное представление для прогиба пластинки:

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} p_1 \operatorname{Re} \left( \int_0^\infty r \tau^{-1} f^*(r) M(r) I(r, R, \gamma) dr \right), \quad I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} k_0^{-1} \exp(irR \cos(\theta - \gamma)) d\theta,$$

где  $\tau = ((1 + Q_1 r^2 + D_1 r^4) M(r))^{1/2}$ ,  $M(r) = rg(1 + \chi_1 rg \operatorname{th} rH)^{-1} \operatorname{th} rH$ ,  $r = (m^2 + n^2)^{1/2}$ ,  $R = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ,  $m = r \cos \theta$ ,  $n = r \sin \theta$ ,  $x = R \cos \gamma$ ,  $y = R \sin \gamma$ ,  $k_0 = rv \cos \theta - \tau$ ,  $f^*(r)$  – трансформанта Фурье функции  $f(R)$ .

Применяя для вычисления интегралов методы теории функций комплексной переменной и метод стационарной фазы, получим, что в зависимости от скорости перемещения нагрузки на границе раздела пластина-жидкость образуется от одной до трех систем изгибно-гравитационных волн с амплитудой затухания как  $R^{-1/2}$ :

$$\zeta = \begin{cases} O(R^{-1}) & \text{при } 0 < v < v_0 \\ \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } v_0 < v < v_1 \\ \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } v_1 < v < \sqrt{gH} \\ \zeta_2 + \zeta_3 + O(R^{-1}) & \text{при } v > \sqrt{gH} \end{cases}$$

где  $v_0$  – минимальное значение фазовой скорости изгибно-гравитационной волны;  $v_1$  – скорость, при которой совпадают фазовые скорости изгибно-гравитационной, упругой и гравитационной волн;  $\sqrt{gH}$  – максимальное значение фазовой скорости гравитационной волны.

### РЕЗУЛЬТАТЫ.

При  $v < v_0$  волны с амплитудой затухания как  $R^{-1/2}$  не образуется. Отклонение не волнообразно и напоминает статический прогиб как при стационарной нагрузке.

При  $v_0 < v < v_1$  образуется изгибно-гравитационная волна  $\zeta_3$ . На рис. 1 представлено распределение амплитуды этой волны для сил растяжения (рис. 1а) и сжатия (рис. 2б). Волны, распространяющиеся впереди источника, более короткие и их амплитуда меньше амплитуды более длинных волн, распространяющихся за источником. При движении источника со скоростью близкой к  $v_0$  максимум амплитуды находится по трассе движения. При увеличении скорости максимум смещается от трассы, и при  $v = v_1$  максимальное значение амплитуды будет на лучах  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$  и  $\gamma = -\gamma_1 = -\gamma_2$  [6]. Увеличение сил растяжения увеличивает амплитуду волны  $\zeta_3$ , а увеличение сил сжатия и толщины ледяного покрова уменьшает ее.

При  $v_1 < v < \sqrt{gH}$  образуются три системы изгибно-гравитационных волн –  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ . Волны  $\zeta_3$  распространяются впереди источника, а  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  за источником возмущений внутри угловых зон  $-\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_1$  и  $\gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_1$  соответственно [6]. Амплитуда поперечной волны  $\zeta_1$  меньше амплитуды продольной  $\zeta_2$  и упругой  $\zeta_3$  волн. Силы сжатия и растяжения существенного влияния на амплитуды волн  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  не оказывают. При увеличении сжимающих усилий амплитуда упругой волны  $\zeta_3$  увеличивается и уменьшается при увеличении сил растяжения. Увеличение толщины ледяного покрова уменьшает амплитуды волн  $\zeta_2, \zeta_3$  и не оказывает влияния на амплитуду волн  $\zeta_1$ . Наибольшее влияние на амплитуды волн оказывает скорость перемещения нагрузки. Увеличение скорости уменьшает амплитуды всех трех волн.

При  $v > \sqrt{gH}$  образуются две системы волн – продольные  $\zeta_2$  и упругие  $\zeta_3$  волны. Продольные волны  $\zeta_2$  распространяются за источником возмущений в угловой зоне  $\gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_3$ , а упругие волны  $\zeta_3$  впереди источника возмущений. Увеличение сил сжатия, растяжения и толщины ледяного покрова на амплитуду волны  $\zeta_2$  существенного влияния не оказывает. Амплитуда упругой волны уменьшается при увеличении сил растяжения и толщины ледяного покрова. При увеличении сил сжатия амплитуда волны  $\zeta_3$  увеличивается. С увеличением скорости движения источника возмущений, амплитуды волн  $\zeta_2$  и  $\zeta_3$ , как и при  $v_1 < v < \sqrt{gH}$ , уменьшаются.

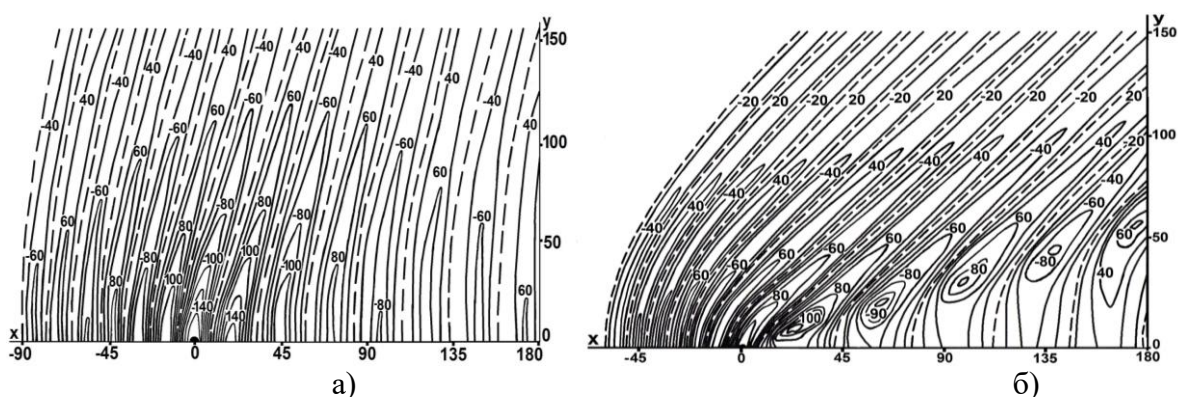


Рис. 1 Амплитуда изгибно-гравитационной волны  $\zeta_3$   
для  $v = 10 \text{ м/с}$ ,  $(v_0 < v < v_1)$ ,  $h = 0,2 \text{ м}$ ,  $H = 100 \text{ м}$

а)  $Q = -\sqrt{D\rho g}$ , б)  $Q = 0,5\sqrt{D\rho g}$

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** Наибольший интерес для практических целей имеют критические скорости  $v_0$  и  $v_1$ . Транспортное средство при перемещении по ледяному покрову должно двигаться со скоростью либо меньше  $v_0$ , либо больше  $v_1$ , чтобы избежать разрушения льда. С другой стороны, для разрушения ледяного покрова судно на воздушной подушке должно двигаться с критической скоростью  $v_0$  или  $v_1$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 215 с.
2. Козин В.М., Жесткая В.Д., Погорелова А. В., Чижиумов С. Д., Джабраилов М. Р., Морозов В. С., Кустов А. Н. Прикладные задачи динамики ледяного покрова. М.: Академия Естествознания, 2008. 329 с.
3. Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J. Moving Loads on Ice Plates. Springer Science & Business Media, 2012. 236 pp.
4. Букатов А.Е. Волны в море с плавающим ледяным покровом. Севастополь: ФГБУН МГИ, 2017. 360 с.
5. Козин В. М., Земляк В.Л., Рогожникова Е.Г., Погорелова А.В. Влияние ледовых условий на деформированное состояние ледяного покрова от движения нагрузки. Новосибирск: Издательство Сибирского отделения Российской академии наук, 2020. 120 с.
6. Маленко Ж.В., Ярошенко А.А. Изгибно-гравитационные волны в море с ледяным покровом от движущихся возмущений // Морские интеллектуальные технологии. 2021. Т. 4. №2. С. 157-161. DOI: 10.37220/MIT.2021.52.2.086
7. Маленко Ж.В., Ярошенко А.А. Влияние сжимающих усилий на амплитуды изгибно-гравитационных волн, генерируемых движущимися возмущениями // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2022. Т. 19. № 2. С. 29-38. DOI 10.31429/vestnik-19-2-29-38



# О ДАЛЬНЕЙШЕМ УСИЛЕНИИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ В ЗАДАЧАХ ОБ ЭЛЕКТРОВИХРЕВОМ ТЕЧЕНИИ В ПОЛУСФЕРИЧЕСКОМ СОСУДЕ

К.Ю. Малышев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> НИИЯФ МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва

<sup>2</sup> Российский университет дружбы народов, г. Москва

[kmalyshev08102@mail.ru](mailto:kmalyshev08102@mail.ru)

Рассматривается серия краевых задач о течении жидкого металла в сосуде полусферической формы. Течение порождается электрическим током  $I$ , растекающимся изотропно от центрального электрода конечного радиуса  $a$  к внешней границе сосуда, радиуса  $1$ , см. схему на рис. 1.

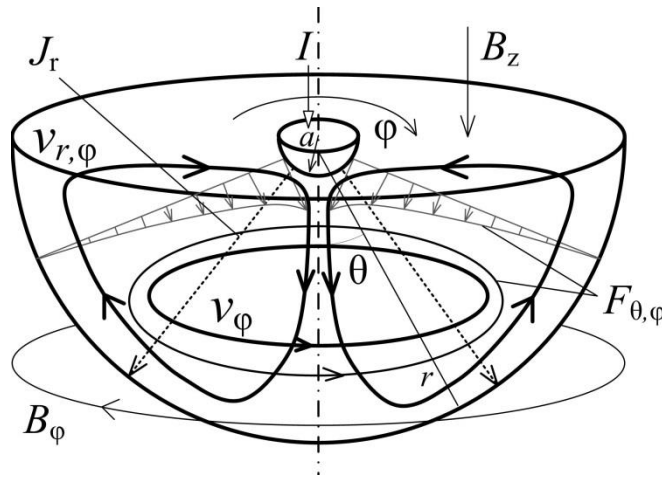


Рис. 1. Схема электровихревого течения в полусферическом сосуде при наличии внешнего магнитного поля.

Возникновение течения объясняется взаимодействием тока с порождаемым им магнитным полем  $B$ . Такие течения получили название электровихревых (ЭВТ) [1]. Существенное влияние на рассматриваемый процесс оказывают сторонние магнитные поля [2], в том числе магнитное поле Земли [3]. В линейном приближении аксиально-симметричное течение во внешнем вертикальном магнитном поле  $B^z$  описывается следующими уравнениями [4], [5]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) - \frac{\omega}{(r \sin \theta)^2} &= \frac{\sqrt{S}}{2\pi^2} \frac{1}{r^4} \frac{\cos \theta - 1}{\sin \theta}; \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - \frac{\psi}{(r \sin \theta)^2} &= -\omega; \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} \right) - \frac{v_\varphi}{(r \sin \theta)^2} &= \frac{\alpha \sqrt{S}}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r^2}; \\ r \in (a, 1), \theta \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Здесь  $\omega$  и  $\psi$  - азимутальные проекции завихренности и векторного потенциала течения,  $v_\varphi$  - азимутальная проекция поля скорости жидкого металла – скорость закрутки течения во внешнем вертикальном магнитном поле;  $S$  - аналог числа Рейнольдса для

ЭВТ,  $\alpha$  - параметр, характеризующий влияние внешнего магнитного поля. Все переменные считаются безразмерными, о выборе масштабов см. [1], [4], [5].

Эти уравнения необходимо дополнить граничными условиями. На свободной поверхности, если пренебрегать её деформациями, принято [6], [7], [8] рассматривать условие непротекания и отсутствия касательных напряжений:

$$\psi|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \omega|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta}|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0.$$

В работе [4] рассмотрены модельные граничные условия  $\omega|_{\delta} = \psi|_{\delta} = 0$  на полусферах, и для  $\omega$  и  $\psi$  получены двойные ряды по специальным функциям. Неполный метод Галёркина позволяет получить [9] для всех переменных задачи однократные ряды из элементарных функций, причём ряд для  $\psi$  сходится с порядком  $O(l^{-4.5})$ , для  $\omega$  - с порядком  $O(l^{-2.5})$  [9]. Эти оценки верны для различных типов граничных условий на сферических частях границы. При этом, для представления искомым функций нужно совсем немного элементарных слагаемых одномерных рядов. Однако вычисление полей скорости и давления требует дифференцирования рядов для  $\omega$  и  $\psi$ , что приводит к заметному снижению сходимости: для представления поля скорости нужно не менее 4-5-ти слагаемых соответствующего ряда [10]. В настоящей работе мы выделяем медленно сходящиеся части рядов для  $\omega$  и  $\psi$ , и суммируем их в конечном виде элементарных функций. Результатом суммирования в конечном виде оказалось решение задачи Лундквиста о стоковом ЭВТ, возникающем при изотропном истечении тока из точечного источника на поверхности жидкого металла, в заполненное жидким металлом полупространство [1]. Для нас важно, что после суммирования ряды для  $\omega$  и  $\psi$  сходятся не хуже, чем геометрическая прогрессия, и ускоряется сходимость рядов, получаемых почленным дифференцированием. Этот результат не зависит от типа граничных условий, поставленных на сферических границах.

Описанный подход применяется для изучения рядов, задающих переменную  $v_{\varphi}$ . Заметим, что  $v_{\varphi}$  удаётся выразить в конечном виде (см. [11]), если на полусферах имеет место полное прилипание, а на свободной поверхности – проскальзывание:

$$v_{\varphi}|_{r=a} = v_{\varphi}|_{r=1} = \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \theta}|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0 \Rightarrow v_{\varphi} = \frac{\alpha\sqrt{S}}{2\pi} \left( 1 - \frac{r(a+1) + r^{-2}a^2}{a^2 + a + 1} \right) \sin \theta.$$

Но в реальной экспериментальной установке [12] используется сплав In-Ga-Sn, поверхность которого быстро покрывается плёнкой окислов на воздухе, что приводит к выполнению условий полного прилипания на свободной поверхности. В этом случае в линейном приближении  $v_{\varphi}$  имеет вид одномерного ряда со степенной оценкой сходимости, которую также удаётся улучшить. Медленно сходящаяся часть ряда для  $v_{\varphi}$ , связанного с условиями полного прилипания на всей границе полусферового слоя, выражена элементарной функцией, и тогда  $v_{\varphi}$  представляется в виде:

$$\begin{aligned} v_{\varphi}|_{r=a} = v_{\varphi}|_{r=1} = v_{\varphi}|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow v_{\varphi} = \frac{\alpha\sqrt{S}}{2\pi} \frac{\cos^2 \theta - \cos \theta}{2 \sin \theta} + \sum_{l=1}^{\infty} (U_l r^{2l} + V_l r^{-2l-1}) P_{2l}^{(1)}(\cos \theta). \end{aligned}$$

Аддитивно выделенный ряд сходится не хуже геометрической прогрессии.

Приём ускорения сходимости, использованный в настоящей работе, является одной из версий известного метода А.Н. Крылова [13] улучшения сходимости рядов, ко-



гда для получения выражения для некоторого ряда находят подходящую краевую задачу, которой подчиняется указанный ряд, и решают её независимым способом. Подчеркнём, что возможность нахождения результатов в элементарных функциях связана с конкретным выбором источников в правых частях уравнений, следующим из нетривиальных физических соображений, см. [1].

В докладе обсуждаются преимущества и недостатки вычислений поля скорости для различных вариантов представления решений, и возможные применения этих вычислений.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Автор признателен Е.А. Михайлову за сотрудничество в студенческие годы. Автор благодарен И.О. Теплякову за ценные обсуждения.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бояревич В.В., Фрейнберг Я.Ж., Шилова Е.И. [и др.] под ред. Щербина Э.В.. Электровихревые течения. Рига: Зинатне. 1985.
2. Жилин В.Г., Ивочкин Ю.П., Игумнов В.С., Оксман А.А. Экспериментальное исследование электровихревых течений в полусферическом объеме // Теплофизика высоких температур. 1995. Т. 33, С. 3 – 6
3. Виноградов Д. А., Ивочкин Ю. П., Тепляков И. О. Влияние магнитного поля Земли на структуру электровихревого течения // Доклады Академии наук 2018. Том 483. Номер 1 С. 24-27.
4. Михайлов Е.А, Тепляков И.О. Аналитическое решение задачи об электровихревом течении в полусфере с электродами конечного размера в стоковом приближении // Вестник Моск. ун – та. Физ.Астрон. 2018. № 3. С. 39 – 44.
5. Georgievskaya E.P., Mikhailov E.A., Teplyakov I.O. Simulation of the electrovortex flow in a linear approximation under the action of the external magnetic field // *J. Phys.: Conf. Ser.* **1683** 022039
6. Sozou C., Pickering W.M. Magnetohydrodynamic flow due to the discharge of an electric current in a hemispherical container // *Journal of Fluid Mechanics*. 1976. V. 73. P. 641–650.
7. Sozou C, Pickering W M 1978 *Proc. R. Soc. Lond. A*. **362** 509-23.
8. Shatrov V., Gerbeth G. Stability of the electrically induced flow between two hemispherical electrodes, *Magnetohydrodynamics*, 2012, V.48, № 3, p. 469 -- 483.
9. Малышев К.Ю., Михайлов Е.А., Тепляков И.О. Быстросходящийся ряд для решения задачи об электровихревом течении в полусферическом сосуде // ЖВМ и МФ, 2022, том 62, № 7.
10. Malyshev K.Yu., Mihailov E.A., Teplyakov I.O. Analytical study of the velocity and pressure of the electrovortex flow in hemispherical bowl in a Stokes approximation // *J. Phys.: Conf. Ser.* **1683** 022076.
11. Малышев К.Ю., Михайлов Е.А., Тепляков И.О. Аналитическое исследование электровихревого течения в полусферическом контейнере при наличии внешнего магнитного поля в стоковом приближении // Труды 11-й международной школы молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах», Москва, 1-3 декабря 2020 г., ИСПО-принт, стр. 113-116.
12. Teplyakov I., Vinogradov D., Ivochkin Y. Experimental Study of the Velocity of the Electrovortex Flow of In-Ga-Sn in Hemispherical Geometry // *Metals* 2021, 11, 1806.
13. Крылов А.Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах. Москва-Ленинград, ГИТТЛ, 1950.

## КАРТИНЫ ТЕЧЕНИЙ ИМПАКТА КАПЛИ ВОДЫ В ЖИДКИЙ МЕТАЛЛ ПРИ КОМНАТНОЙ И ВЫСОКОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

А.А. Мамлеев<sup>1</sup>, А.Ю. Ильиных<sup>2</sup>

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

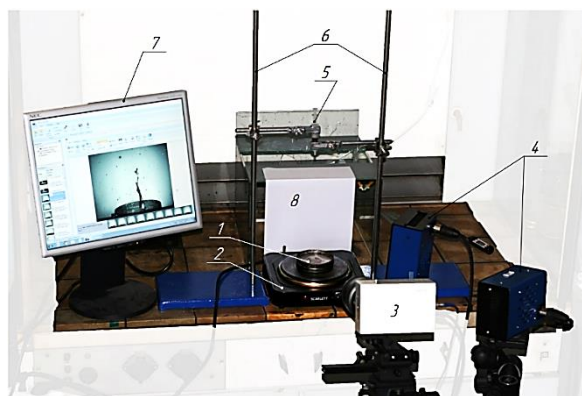
[mamleev.toni@mail.ru](mailto:mamleev.toni@mail.ru), [ilynykh@ipmnet.ru](mailto:ilynykh@ipmnet.ru)

Задача импакта капли воды в жидкий металл представляет как фундаментальный, так и прикладной интерес. При низких температурах интерес составляет влияние различных плотностей жидкостей, а при высоких (больше температуры насыщения воды при атмосферном давлении) в картине течений появляются процессы, вызванные кипением воды. В энергетике в последнее время интенсивно развивается направление ядерных реакторов с жидкометаллическим теплоносителем, поэтому поставленная задача также интересна с точки зрения моделирования температурных катастроф ядерных энергетических установок.

В качестве принимающей жидкости в работе использовался сплав InGaSn, его теплофизические свойства: состав In-67%, Ga-20.5%, Sn-12.5%, температура плавления 10.5 °С, плотность  $6.5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , кинематическая вязкость  $3.5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ . В качестве капельной жидкости использовалась чистая вода. Всего было проведено 72 эксперимента. Температура капельной жидкости во всех экспериментах была комнатной ~20 °С, температура жидкого металла принимала значения от 20 °С до 300°С. Большинство опытов проводилось в диапазоне температур принимающей жидкости от 100 до 200°С.

Опыты выполнены на стенде ТБП, входящем в состав комплекса УНУ «ГФК ИПМех РАН» (рис. 1).

Рис. 1. Экспериментальная установка:  
1 – тигель с металлом, 2 – нагреватель,  
3 – высокоскоростная камера «Optronis CR 3000x2», 4 – светодиодные осветители, 5 – капельница,  
6 – лабораторные штативы, 7 – компьютер, 8 – рассеивающий фон. Установка находится в вытяжном шкафу.



В число размерных параметров задачи входят условия эксперимента: диаметр капли  $D = 4.7 \pm 0.3 \text{ мм}$ , высота падения капли  $h = 50; 60 \text{ см}$ , скорость в момент контакта  $U = 3.1 \div 3.5 \text{ м/с}$ , ускорение свободного падения  $g$  и физические свойства взаимодействующих сред: плотности  $\rho_{d,t,e}$  кинематические  $\nu_{d,t,e}$  и динамические  $\eta_{d,t,e}$  вязкости, коэффициенты поверхностного натяжения  $\sigma_d^e$ ,  $\sigma_t^e$  и их отношения, где индекс  $d$  соответствует капле,  $t$  – принимающей жидкости,  $e$  – среде, в которой происходит взаимодействие (воздух). Отношения размерных параметров задачи задают наборы безразмерных комбинаций, включающие традиционные числа: Рейнольдса  $Re = (15 \div 17) \cdot 10^3$ , Фруда  $Fr = (2.0 \div 2.7) \cdot 10^2$ , Бонда  $Bo = 3$ , Онезорге  $Oh = 1.7 \cdot 10^{-3}$ , Вебера  $We = (6.2 \div 7.9) \cdot 10^2$ . Отношение кинетической энергии к потенциальной

поверхностной в момент контакта составляет  $E_k/E_\sigma = 50 \div 60$ , что соответствует режиму течений «всплеск» [1].

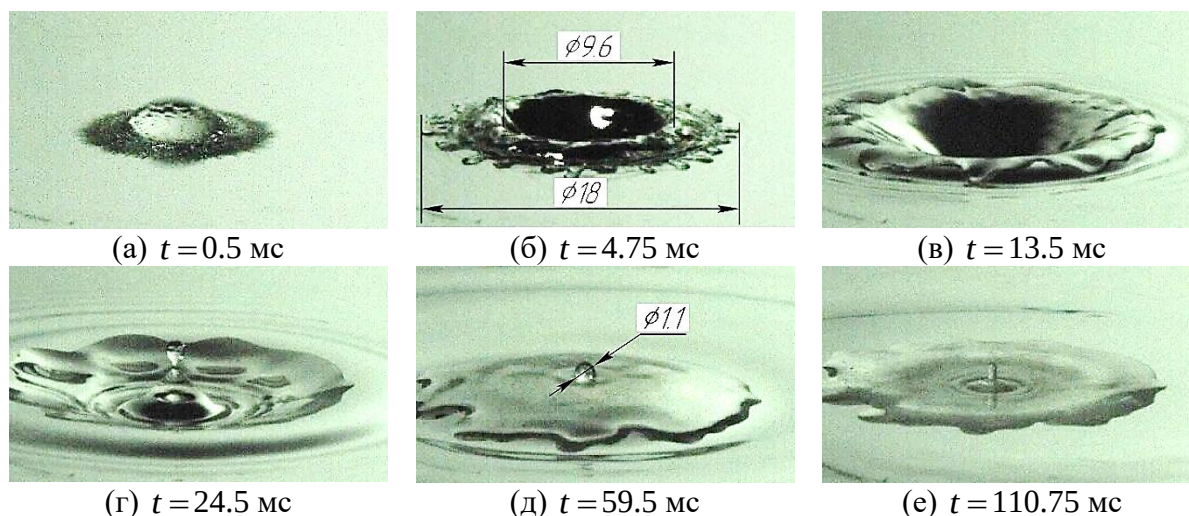


Рис. 2. Импакт капли воды в жидкий металл при комнатной температуре.

При контакте с металлом поверхность капли быстро покрывается сетчатыми капиллярными волнами. Вдоль поверхности металла разлетаются множественные брызги (рис. 2а). По мере погружения капли в принимающую жидкость образуется венец и каверна, внутренний диаметр которой увеличивается до значения порядка 1 см (рис. 2б). Водные брызги оседают на поверхности металла, оставаясь в пределах кольца диаметром 18 мм с центром в точке контакта. На поверхности принимающей жидкости заметны кольцевые капиллярные волны, длина которых увеличивается по мере увеличения глубины каверны (рис. 2б-в).

Далее каверна стягивается, и образуется всплеск. Поверхность вокруг основания всплеска покрыта кольцевыми волнами, скорость которых близка к скорости роста основания всплеска. С вершины всплеска (в данном опыте) отрывается капелька (рис. 2г) (отрыв капельки наблюдается далеко не во всех опытах). Стягивание всплеска порождает низкочастотные колебания поверхности, на которую приземляется оторвавшаяся ранее капелька (рис. 2д) (капелька приземляется на поверхность воды, растекшейся по поверхности металла). Капелька не сливается сразу с оставшейся жидкостью, коалесценция происходит поэтапно, вещество капли периодически поглощается жидкостью (рис. 2е), при этом формируется новая капелька [2].

В момент контакта капли воды с жидким металлом, нагретым выше температуры кипения воды, происходит «подсветка» поверхности капли. Она предположительно вызвана возмущениями поверхности капли. Вдоль поверхности металла начинают разлетаться водные брызги (рис. 3а). Вокруг венца (рис. 3б) в желтом свете (в опытах при комнатной температуре металла желтые осветители не использовались) отчетлива видна периодическая структура – вода заполняет впадины капиллярных волн. Вещество капли начинает вскипать, в результате чего образуется множество разлетающихся брызг разного размера. Вскипание воды формирует в центре картины множественные взрывающиеся газопаровые пузыри; вокруг которых можно наблюдать оставшееся капельное вещество, собранное в каплях, растекшихся по поверхности металла (рис. 3в). По прошествии некоторого времени данные капли взрываются с образованием множественных брызг, взрыв порождает капиллярные волны на поверхности металла (рис. 3г).

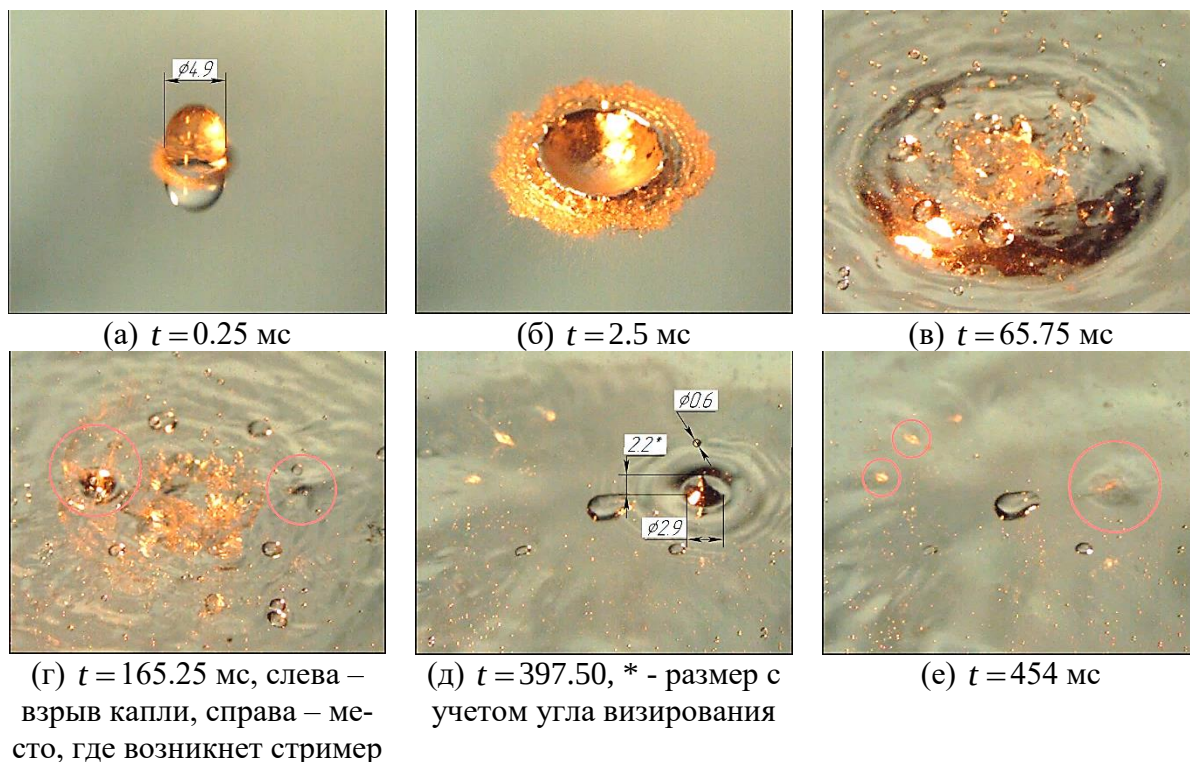


Рис. 3. Импакт капли воды в жидкий металл при температуре 190 °С.

Еще одним компонентом картины течений являются всплески металла (стримеры) (рис. 3д). Некоторые всплески образуются на ровной поверхности металла, другим предшествует неровность на поверхности металла (рис. 3г-д). Отмечено, что многие стримеры оставляют после себя оксидную пленку (выделенные области на рис. 3е соответствуют местам, в которых ранее произошел всплеск).

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** Сравнение картин течений импакта капель воды в жидкий металл при комнатной и высоких температурах показывает наличие как некоторых сходств: образование каверны, венца, капиллярных волн, так и качественных различий: водный всплеск при высоких температурах оказывается сильно подавлен, появляются процессы, связанные с кипением жидкости, образуются металлические всплески (стримеры).

#### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Авторы благодарны Теплякову И.О. за помощь в организации эксперимента. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598-П «Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью», <https://rscf.ru/project/19-19-00598/>).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чашечкин Ю. Д., Ильиных А. Ю. Задержка формирования каверны в интрузивном режиме слияния свободно падающей капли с принимающей жидкостью // ДАН. 2021. Т. 496, № 1. С. 45–50.
2. Chashechkin Yu.D., Ilyikh A.Yu. Complete Coalescence, Partial Bounce and Rebound: Different Regimes Resulting from the Interaction of a Free Falling Drop with a Target Fluid // FDMP. 2020. 10. 09168. DOI:10.32604/fdmp.2020.09168.



## О ВИХРЕОБРАЗОВАНИИ ПРИ СИНТЕЗЕ МИКРОЧАСТИЦ ЗА ВОЛНОЙ ГОРЕНИЯ УГЛЕРОДА В РЕАКТОРЕ С КАНАЛОМ ДЛЯ ПОДВОДА ГАЗА

*А.А. Марков*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

*[markov.ipm@yandex.ru](mailto:markov.ipm@yandex.ru)*

Хорошо известно, что состав газообразного окислителя является одним из наиболее удобных управляющих факторов для контроля параметров волны фильтрационного горения ФГ в твердом углеродном топливе наряду с общим расходом газообразного окислителя концентрация кислорода может определять уровень температуры во фронте волны горения, состав продуктов горения и скорость волны горения углеродного топлива. В исследованиях ФГ [1-3] преимущественно применяется модель Дарси для вычисления перемещения фронта горения. В случаях, когда давление газа в порах недостаточно для полного стехиометрического превращения, давление в зоне реакции снижается и необходимый газовый реагент фильтруется в зону реакции. Процессы горения сопровождаются конвективным массопереносом, который влияет на макрокинетику химического взаимодействия и тепловыделение. Градиенты температуры приводят к появлению градиентов давления, которые приводят в движение газовую фазу и частички реагентов и продуктов горения. Отметим, что в законе Дарси отражается равновесие сил вязкости и перепада давления. В классической теории ФГ не требуется задания начальных данных для поля скоростей т.к. законе Дарси течение газа изначально предполагается потенциальным. Перепад давления в газовой фазе реактора приводит к принудительной фильтрации газа в порах твердой фазы, состоящей из смеси реагентов и продукта синтеза частиц [1- 5]. Примерами реакторов с принудительной (вынужденной) инфильтрацией газа в зону синтеза твердых частиц являются осесимметричные прямоточный и трёхзонный реактор, рассмотренные в работе [6], в которой приведены дополнительные ссылки и представлены уравнения тепловой и массовой дисперсии, полученные методом усреднения по элементарному объему на основе взаимно-проникающих континуумов. При таком подходе утраченная детальная информация о микро-масштабах, таких как конфигурация межфазных границ и т.п. присутствует в виде коэффициентов тепло –и массопереноса. Отмечается, что в усредненных уравнениях наряду с молекулярной диффузией тепла и вещества важную роль играет пористость реагентов и продуктов синтеза и дисперсионный механизм. Причиной концентрационной и тепловой дисперсии являются флуктуации массового и теплового потока, тогда как диффузия массы и тепла вызвана случайным молекулярным движением. Размеры пор, как правило, неравномерно распределены в реакторе синтеза и меняются во времени. Это обстоятельство обуславливает важность моделирования изменения пористости смеси реагентов и продуктов в процессе синтеза мелкодисперсных порошков методом горения.

Синтез горением SHS (само распространяющейся высокотемпературный синтез), открытый А. Г. Мержановым и др. в 1971, см обзор [1], интенсивно развивается и в настоящее время для получения широкого спектра новых материалов, включая порошки и продукты из керамики, композиты и др. Развитие этого метода А. Г. Мержановым, его сотрудниками и учениками привело к появлению нового научного направления, включающего в себя как аспекты горения, так и материаловедение. Синтез горения

(CS) может происходить различными способами: самораспространяющийся высокотемпературный синтез SHS, его разновидность CCSO (синтез оксидов при горении углерода) [2] и синтез посредством объемного горения (VCS) [1], в котором образцы нагревают внешним источником (например, вольфрамовой спиралью, лазером), чтобы инициировать экзотермическую реакцию. Характерной особенностью режимов SHS и CCSO является самоподдерживающееся распространение волны реакции через гетерогенную смесь реагентов, после инициации горения. Температура волнового фронта может достигать довольно высоких значений (2000-4000 К, SHS и 1000-1500 К, CCSO). В принципе, если известны физико-химические параметры среды, а также мгновенные пространственные распределения температуры и концентрации, можно рассчитать скорость горения и скорость реакции во всей смеси [1,3]. Таким образом, SHS и CCSO - можно рассматривать как хорошо организованное волнообразное распространение экзотермической химической реакции через гетерогенную среду с последующим синтезом целевых конденсированных продуктов [1].

В данной работе анализируется развитие вихревых структур в двухтемпературной модели при синтезе методом CCSO сложных оксидов. Определяющая система уравнений включает уравнения движения и завихренности газовой фазы в пористой среде с распределенным сопротивлением пористости, а также уравнения сохранения массы и теплового баланса газовой фазы содержащие тензоры массовой и тепловой дисперсии, кондуктивного и конвективного переноса. Изложены результаты расчетов быстро протекающих процессов тепло-и массопереноса при синтезе микронных частиц титаната бария в трехзонном реакторе с применением различных моделей движения газа в порах. Применены уравнения для расчета завихренности газа в пористой смеси компонент твердой и газовой фазы.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** Результаты позволяют сделать вывод, что в реакторах с каналом для подачи воздуха в режимах принудительной (вынужденной) фильтрации возникает значительный вихрь. Вихрь инициируется градиентом температуры газа на входе в реактор и на охлаждаемой внешней поверхности  $r=1$ . Интенсивность вихря уменьшается с ростом продольной координаты по мере движения фронта горения, а также при удалении от канала подачи окислителя. Конвективный перенос количества движения в модели Навье-Стокса приводит к интенсивному поступлению окислителя в зону горения углерода и влияет на скорость синтеза.

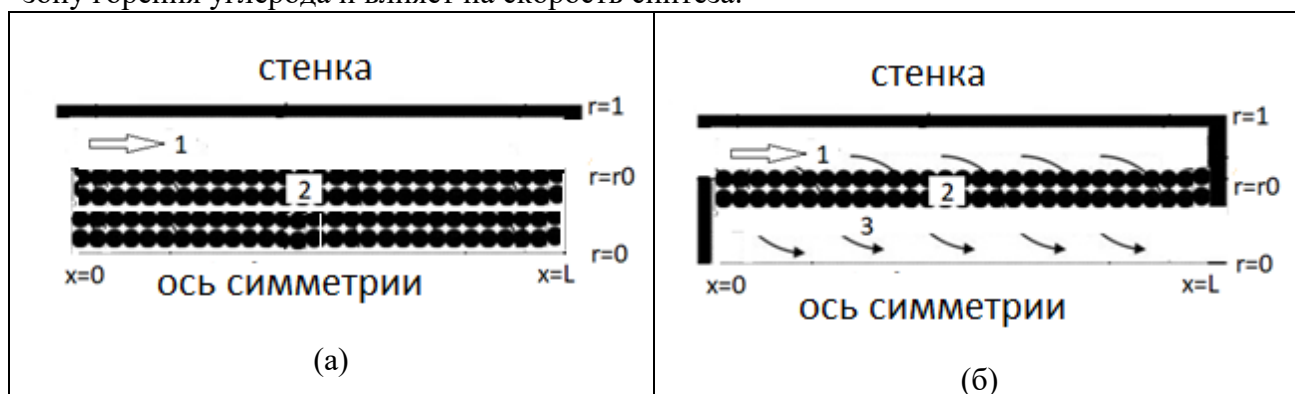


Рис. 1. (а) Схема проточного реактора и (б) осесимметричные области моделирования

синтеза в трехзонном реакторе: зона 1 - канал подачи смеси  $O_2$  и  $N_2$ ; зона 2 - область смеси частиц реагентов и продуктов синтеза титаната бария и компонент газовой смеси; 2а - нагретая область, содержащая продукт синтеза и продукт горения; 2б - холодная область, содержащая реагенты синтеза и горения; 2с - фронт горения углерода; зона 3 -



канал отвода смеси  $N_2$  и  $CO_2$ . Фронт горения движется слева направо, кислород поступает слева.

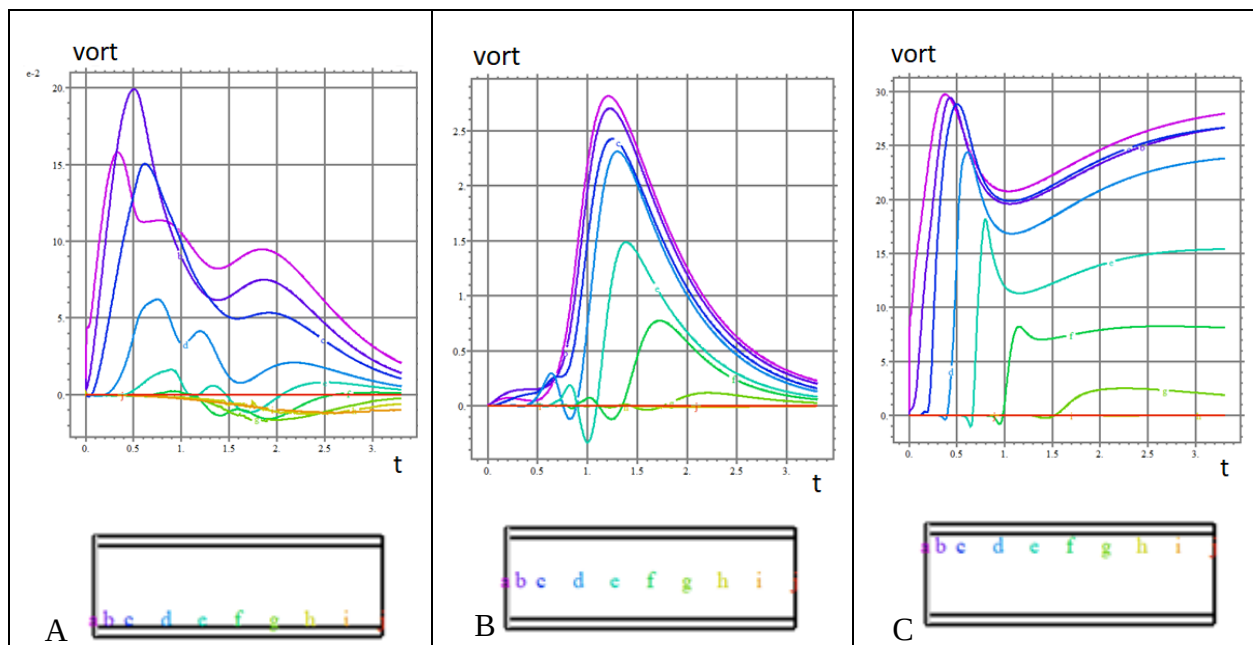


Рис. 2. Представлено изменение от времени завихренности газа  $\Omega(t, x, r)$  при  $r=0.2$  (A),  $r=0.5$  (B),  $r=0.8$  (C) в контрольных точках A,B,C.

Расчет проведен для коэффициента проницаемости  $k_f = 0.001$ , коэффициента порового сопротивления  $\zeta_x = \zeta_r = 52$  и диаметре частиц  $d_p = 0.2$ .

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена по теме государственного задания, № госрегистрации АААА-А20-120011690135-5.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arvind Varma, Alexander S. Rogachev<sup>1</sup>, Alexander S. Mukasyan, and Stephen Hwang. Combustion synthesis of advanced materials Advances in Chemical Engineering // 1998. V. 24 p 79-226.
2. K.S. Martirosyan, and D. Luss. Carbon Combustion Synthesis of Oxides: Process Demonstration and Features, AIChE J. , 2005. 51, 10, 2801-2810.
3. Алдушин А.П., Мержанов А.Г. Теория фильтрационного горения: общие представления и состояние исследований // Распространение тепловых волн в гетерогенных средах. Новосибирск: Наука. 1988. С. 9-52.
4. Nield D.A., Bejan A. Convection in porous media. N-Y: Springer, 2013. 778 p. doi: 10.1007/978-1-4614-5541-7.
5. Леонтьев Н.Е. Основы теории фильтрации. М.: МГУ, 2009. 87 с.
6. А. А. Марков. Газодинамические и тепловые эффекты синтеза микронных частиц методом горения углерода в прямоточном и трехзонном реакторе.// МЖГ, 2022, № 3, с. 17–29.

## ВЛИЯНИЕ РЕГИОНАЛЬНОЙ ВИХРЕВОЙ И БАССЕЙНОВОЙ ДИНАМИКИ НА ФОРМИРОВАНИЕ ПРОТИВОТЕЧЕНИЙ В СЕВЕРО-ВОСТОЧНОЙ ЧАСТИ ЧЕРНОГО МОРЯ

*Н.В. Маркова, О.А. Дымова*

*ФГБУН ФИЦ «Морской гидрофизический институт РАН», Севастополь*

[n.v.markova@mail.ru](mailto:n.v.markova@mail.ru)

### **ВВЕДЕНИЕ.**

Результаты численного моделирования и данные натурных наблюдений подтверждают существование в Черном море глубоководных течений, направленных противоположно поверхностной циркуляции [1]. Эти противотечения носят нерегулярный характер, наблюдаются вдоль материкового склона на глубинах от 200–300 до 1000–1600 м, а их размеры по ширине варьируют в пределах нескольких километров. Протяженность противотечений вдоль побережья может составлять от 200 до 700 км, а скорость достигать до 7–15 см/с. К основным механизмам генерации подобных противотечений в Мировом океане относят совместный эффект бароклинности и рельефа дна, разворот вдольбереговых течений вследствие увеличения нормального к берегу градиента плотности, а также генерацию вихрями. Наиболее часто глубоководные противотечения Черного моря обнаруживаются в районе северо-восточной части материкового склона, однако однозначного объяснения причин их формирования пока не предложено. Целью настоящей работы является исследование условий образования противотечений вблизи северокавказского побережья на основе анализа имеющихся данных.

### **МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ.**

Вследствие ограниченности данных глубоководных измерений термohалинных и динамических характеристик вод Черного моря, для анализа изменчивости структуры полей скорости и плотности в работе используются результаты численного моделирования. В качестве исследуемого периода рассмотрен временной интервал с сентября 2016 г. по февраль 2017 г. Выбор обусловлен тем, что по данным наблюдений ARGO (<http://www.coriolis.eu.org>) в этот период был дважды зафиксирован разворот траектории движения автономного всплывающего буя-профилемера № 6901833, дрейфовавшего вдоль северокавказского побережья на парковочной глубине 200 м (рис. 1), что может служить свидетельством наличия противотечений.

Моделирование циркуляции Черного моря в 2016–2017 гг. было выполнено на основе модели Морского гидрофизического института [2] с разрешением 1,6 км по горизонтали. В модели учитывалось реалистичное атмосферное воздействие по данным реанализа ERA5, проводилась ассимиляция спутниковых данных о температуре поверхности моря и измеренных профилей температуры и солености.

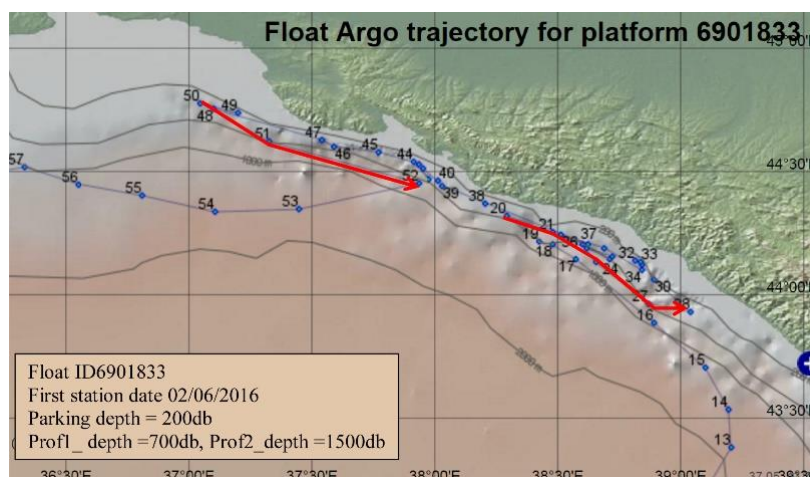


Рис. 1. Траектория буя-профилемера ARGO № 6901833 в районе северокавказского побережья в конце 2016 – начале 2017 гг. Цифрами отмечены номера станций, красными стрелками показаны перемещения буя на юго-восток, период между станциями 5 сут.

## РЕЗУЛЬТАТЫ.

Анализ рассчитанных полей скорости показал, что модель воспроизводит противотечения в сентябре 2016 г. и феврале 2017 г. на глубинах более 100 м (осенью 2016 г. они обнаруживались даже на горизонтах 50–75 м). Глубина залегания ядра противотечения со скоростями 5–10 см/с составляла 100–500 м. В оба периода противотечения формировались при ослаблении и отступлении от берега циклонического течения в верхнем слое и усилении Керченского антициклона. Как видно из рис. 2, прибрежное течение на глубине 5 м было направлено на северо-запад, а на горизонте 200 м – на юго-восток. Также в обоих эпизодах появления противотечений на глубине 200 м четко определяется структура Керченского антициклона (рис. 2, нижний ряд), не идентифицируемая вблизи поверхности.

## ОБСУЖДЕНИЕ.

Для выявления условий формирования противотечений были проанализированы поля солёности, плотности морской воды, частоты плавучести и относительной завихренности поля скорости на различные моменты времени. Анализ показал, что в сентябре 2016 г. и феврале 2017 г. в районе материкового склона происходила смена знака относительной завихренности с положительного (циклоническое вращение) на отрицательный (антициклоническое вращение). В обоих эпизодах при отрицательной завихренности поля скорости (рис. 3, верхний ряд) наблюдались увеличение солёности, плотности и уменьшение частоты плавучести (рис. 3, нижний ряд).

Оценка связи между динамическими и термохалинными свойствами циркуляции была проведена на основе уравнения квазигеострофического потенциального вихря (в формулировке Россби [3]), где все слагаемые уравнения имеют размерность завихренности. Получено, что доминирующий вклад в потенциальную завихренность вносит слагаемое, включающее производную по вертикальной координате от обратного квадрата частоты плавучести. Когда частота плавучести уменьшается, это слагаемое достигает максимальных по модулю отрицательных значений и потенциальная завихренность меняет знак (становится отрицательной).

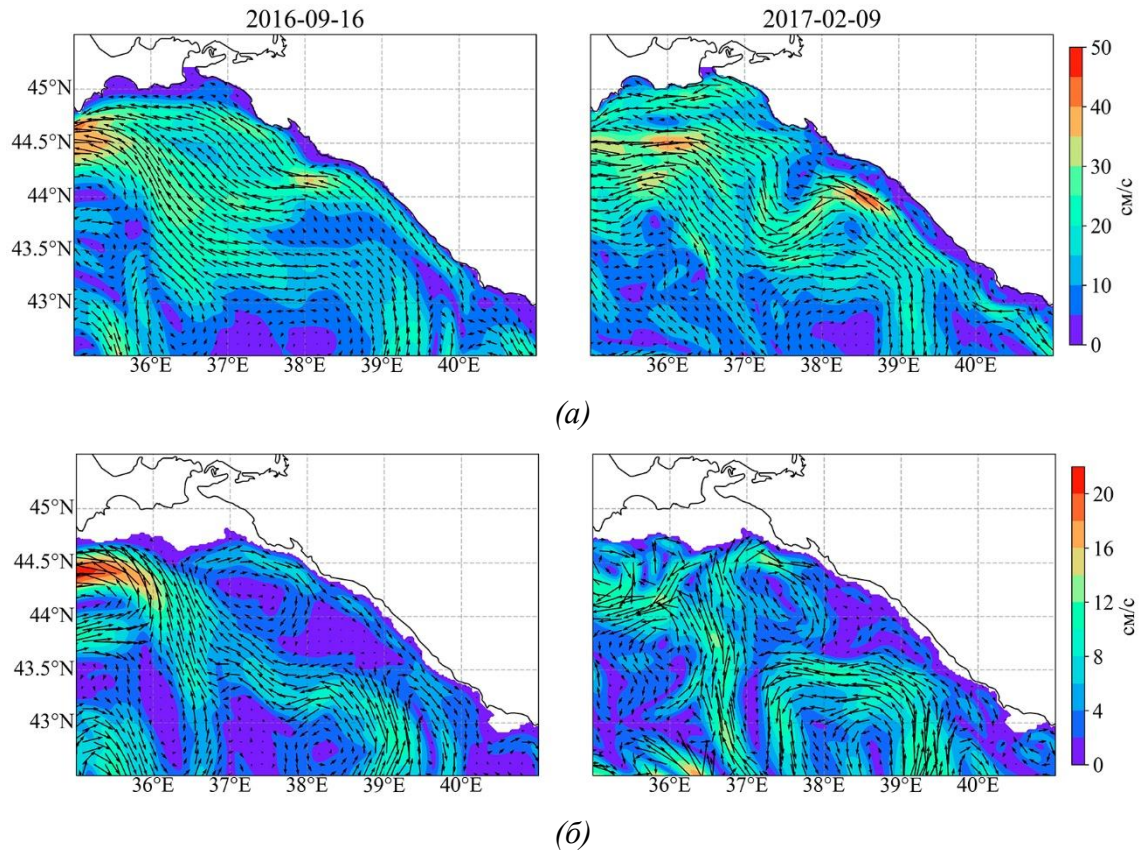


Рис. 2. Поле скорости течений по данным моделирования 16.09.2016 и 09.02.2017 на глубине 5 м (а) и 200 м (б)

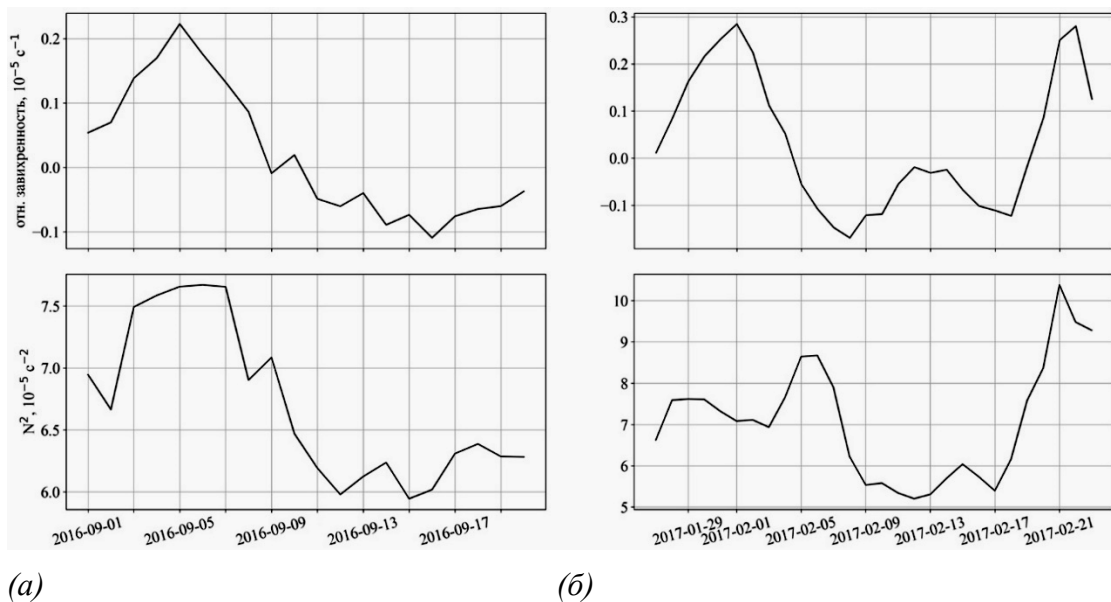


Рис. 3. Относительная завихренность и квадрат частоты плавучести ( $N^2$ ) на горизонте 200 м в точке (38,82° в.д., 43,83° с.ш.) в 2016 (а) и 2017 (б)

Таким образом, при ослаблении бассейновой циклонической циркуляции антициклоны, развивающиеся в слое постоянного пикноклина в районе северокавказского побережья, способствуют зарождению струйного антициклонического течения вблизи материково-



го склона. Развитие такого течения происходит на фоне выравнивания изопикнических поверхностей и соответствующего повышения значений солености вблизи склона. При этом вертикальный градиент плотности уменьшается, что в свою очередь приводит к уменьшению частоты плавучести и смене знака завихренности с положительного (циклоническая завихренность) на отрицательный (антициклоническая).

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Анализ динамической и термохалинной структуры вод Черного моря выполнен в рамках темы госзадания ФГБУН ФИЦ МГИ по теме № FNNN-2021-0003. Доработка модели МГИ для проведения расчетов с усвоением данных наблюдений и выполнение численного эксперимента осуществлялись Дымовой О.А. при финансовой поддержке гранта РФФИ № 22-77-10056.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Demyshev S.G., Dymova O.A., Markova N.V., Korshenko E.A., Senderov M.V., Turko N.A., Ushakov K.V. Undercurrents in the Northeastern Black Sea Detected on the Basis of Multi-Model Experiments and Observations // Journal of Marine Science and Engineering. 2021. Iss. 9. 933.
2. Демышев С.Г. Численная модель оперативного прогноза течений в Черном море // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2012. Т.48. №1. С. 137–149.
3. Rossby C.-G. Dynamics of Steady Ocean Currents in the Light of Experimental Fluid Mechanics // Papers in Physical Oceanography and Meteorology. 1936. V. 5. No. 1.



## СХЕМА МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ С ОСТРЫМИ КРОМКАМИ И УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ В ВИХРЕВЫХ МЕТОДАХ

*И.К. Марчевский, К.С. Сокол, Ю.А. Измайлова*

*Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва*  
[iliamarchevsky@mail.ru](mailto:iliamarchevsky@mail.ru), [kuz-ksen-serg@yandex.ru](mailto:kuz-ksen-serg@yandex.ru), [yulia.izmailova@mail.ru](mailto:yulia.izmailova@mail.ru)

### ВВЕДЕНИЕ И КРАТКАЯ ИСТОРИЯ ВОПРОСА.

В работах «отца русской авиации» Н.Е. Жуковского показана вихревая природа возникновения подъемной силы крыла; при этом из условия (Чаплыгина – Жуковского) плавного обтекания кромки удается определить циркуляцию поля скоростей при стационарном обтекании профиля несжимаемой жидкостью. Эти принципы легли в основу первых численных методов аэрогидродинамики – ими явились т.н. вихревые методы.

Основные черты «первого поколения» вихревых методов оформились в работах В. Прагера [1] и Л. Розенхеда [2]; их существенное развитие последовало с появлением ЭВМ; результатом работ научной школы С.М. Белоцерковского [3] стало семейство методов дискретных вихрей (МДВ). В них именно с кромок и угловых точек профилей моделировался сход вихревых пелен (в рамках модели идеальной несжимаемой среды – тонких поверхностей разрыва касательной скорости). Это позволило с достаточной для того времени точностью решить актуальные задачи, прежде всего по определению аэрогидродинамических характеристик профилей и систем профилей.

Дальнейшее интенсивное развитие вихревых методов связано с учетом вязкости среды. Это дало возможность отказаться от гипотезы Жуковского – Чаплыгина и силь-

но упрощенной модели присоединенного вихревого слоя и моделировать генерацию завихренности вблизи всей поверхности профиля с последующим расчетом ее эволюции в области течения. Это, помимо прочего, открыло путь к моделированию обтекания гладких профилей.

### ОПИСАНИЕ ПРОБЛЕМЫ.

Рассматриваемая модель среды – вязкая несжимаемая среда, плоское течение которой описывается уравнениями Навье – Стокса. На границе обтекаемого профиля (или системы профилей), неподвижного или подвижного, ставится условие прилипания.

С учетом вышеизложенного, в современных модификациях вихревых методов, имеющих завихренность в качестве первичной расчетной величины, корректность и точность процесса моделирования в основном определяются двумя факторами:

- 1) правильностью моделирования генерации завихренности у границы профиля, особенно около угловых точек, где ее интенсивность существенно возрастает;
- 2) правильностью моделирования эволюции завихренности, включая ее конвективный перенос и диффузию в вязкой среде.

Моделирование процесса генерации завихренности сводится к решению граничного интегрального уравнения (ГИУ), выражающего граничное условие на обтекаемой поверхности. Традиционно, восходя к вышеупомянутым работам, а также к классическим работам по теории потенциала, оно формулируется как сингулярное, или даже гиперсингулярное ГИУ, интеграл в котором следует понимать в смысле главного значения по Коши или конечной части по Адамару соответственно. Известные численные схемы для его решения, развитые И.К. Лифановым [4] применительно к методам типа МДВ, хотя и позволяют воспроизводить особенности вблизи угловых точек и кромок, но имеют невысокий порядок точности (ниже первого).

Это не было критичным для МДВ при моделировании вихревого следа лишь только в виде тонких пелен, сходящихся с кромок и угловых точек, но стало препятствием на пути развития новых схем моделирования, предполагающих рассмотрение непотенциальных течений вязкой среды.

Путь к решению данной проблемы видится в переходе к эквивалентной математической модели, выражаемой ГИУ 2-го рода с абсолютно интегрируемым ядром [5]. Подобный подход, однако, распространения не получал в силу относительной сложности построения вычислительного алгоритма, однако это препятствие было в основном преодолено в [6] для гладких профилей. Разработанные там на основе метода Галеркина расчетные схемы (*T*-схемы) обеспечивают 1-й, 2-й и 3-й порядок точности (в норме  $L_1$ ) при кусочно-постоянном, линейном и квадратичном представлении решения, в качестве которого выступает интенсивность вихревого слоя. Более того, данные *T*-схемы, согласованные со схемами аппроксимации формы профиля, обеспечивают те же порядки при восстановлении поля скоростей среды в области течения вблизи границы профиля. Ограничением указанных схем является предположение об ограниченности решения на профиле, нарушаемое при моделировании обтекания профиля с острой кромкой (точкой возврата) или угловой точкой; в этом случае порядок точности *T*-схем и схем восстановления поля скоростей снова становится ниже первого.

В данной работе предложен новый вариант *T*-схемы, позволяющий повысить точность моделирования обтекания кромок и угловых точек; воспроизводить в расчете неограниченные (в окрестности таких точек) решения для интенсивности вихревого слоя и соответствующие им поля скоростей. Представленная в докладе схема обеспечивает по обоим параметрам второй порядок точности и может быть легко реализуема.



## РЕЗУЛЬТАТЫ.

Попытка применения схемы  $T^1$  [6] с кусочно-линейным представлением завихренности на участках границы профиля (панелях) приводит при моделировании обтекания обобщенного профиля Жуковского, к результатам, показанным на рис. 1.

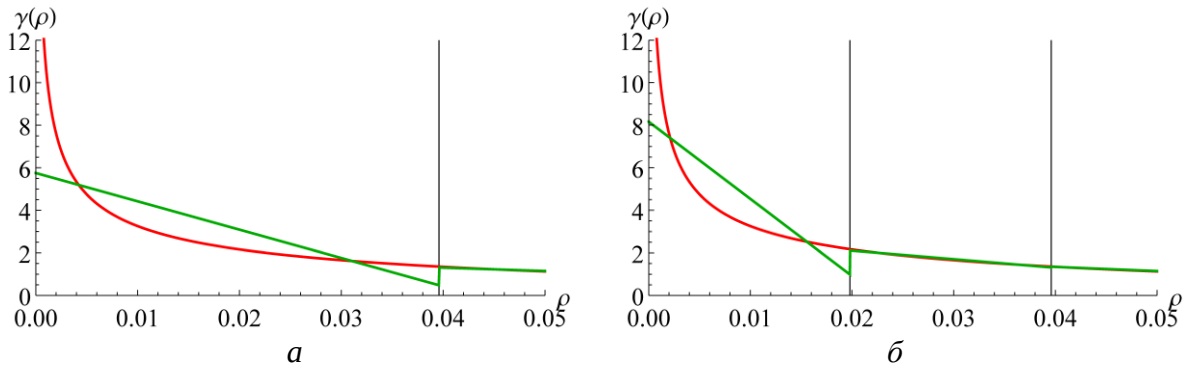


Рис. 1. Интенсивность вихревого слоя в зависимости от расстояния до острой кромки при использовании схемы  $T^1$  (зеленая линия) и точное решение (красная линия); число панелей: а –  $N = 100$ ; б –  $N = 200$ ; вертикальные линии – границы панелей

Существенное различие между точным и численным решением наблюдается лишь на первой (примыкающей к кромке) панели профиля; на остальных решение воспроизводится схемой  $T^1$  достаточно качественно. Сходная картина наблюдается на нижней поверхности профиля у последней панели, также примыкающей к кромке.

Проблему воспроизведения неограниченных решений соответствующих ГИУ рассматривал еще М.А. Лаврентьев [7], однако предложенный им метод расчета вихревого слоя на дуге произвольной формы распространения не получил ввиду сложности. В то же время известно [4], что асимптотика решения вблизи угловой точки есть  $O(\rho^{-\mu})$ ,  $\mu = 1 - \pi / \chi$ , где  $\rho$  – расстояние до нее,  $\chi$  – внешний угол, при этом  $0 < \mu \leq 1/2$ .

В новой схеме для представления решения на панелях, примыкающих к угловой точке, предлагается выбрать в качестве базисных постоянную функцию и функцию  $\rho^{-\mu}$ , сохранив в качестве проекционных – постоянную и линейную функции. Такой подход соответствует методу Петрова – Галеркина и позволяет, в частности, решить проблему неинтегрируемости квадрата решения для профилей с точкой возврата.

Получены точные аналитические выражения в замкнутой форме для всех необходимых интегралов, возникающих в  $T$ -схеме для решения ГИУ, а также при восстановлении поля скоростей вблизи профиля. Решение на весьма грубой сетке (100 панелей) на первой и последней панелях в сравнении с точным решением показано на рис. 2

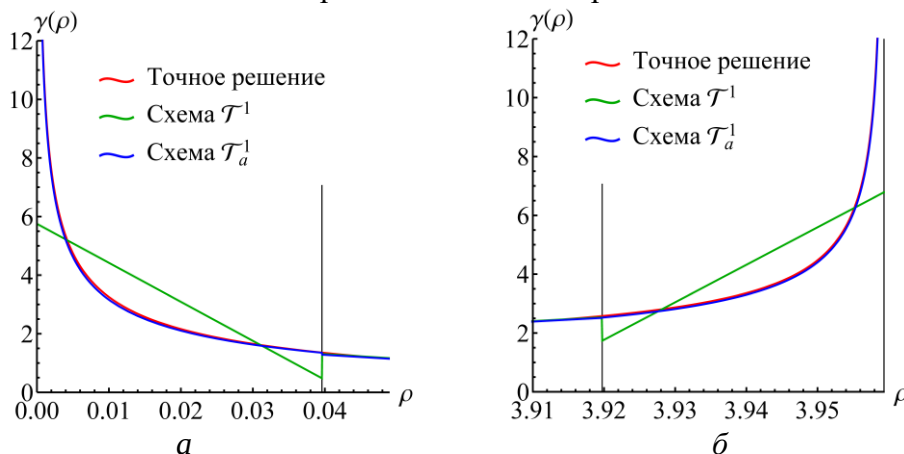


Рис. 2. Интенсивность вихревого слоя на первой (а) и последней (б) панели профиля

Вид поля скоростей в окрестности задней кромки крыла, восстановленного при использовании ранее известной и предложенной здесь схем показан на рис. 3.

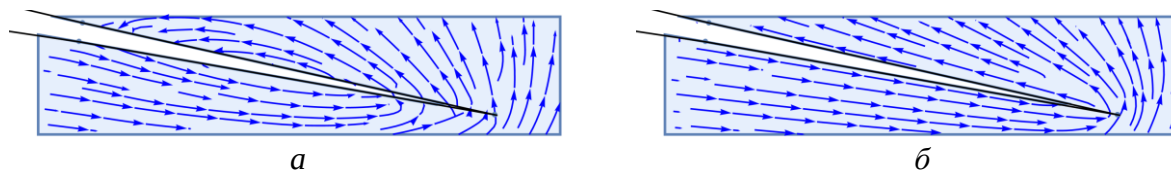


Рис. 3. Восстановленное поле скоростей среды в окрестности задней кромки крылового профиля: а – по Т-схеме [6], б – по разработанной в данной работе схеме

Видно, что новая схема позволяет существенно более точно обеспечить выполнение граничного условия вблизи кромки и не порождает «паразитного» вихря, что, в свою очередь, повышает качество моделирования обтекания вихревыми методами.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект № 0705-2020-0047)

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Prager W. Die Druckverteilung an Korpern in ebener Potentialstromung // Physikalische Zeitschrift. 1928. Vol. 29. Pp. 865-869.
2. Rosenhead L. The Formation of vortices from a surface of discontinuity // Proceedings of the Royal Society. Ser. A. 1931. Vol. 134, Is. 823. Pp. 170-192.
3. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978. 352 с.
4. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО «Янус», 1995. 520 с.
5. Kempka S.N., et al. Accuracy considerations for implementing velocity boundary conditions in vorticity formulations // SANDIA report. SAND96-0583, UC-700. 1996. 52 p.
6. Марчевский И.К., Сокол К.С., Измайлова Ю.А. Т-схемы для математического моделирования генерации завихренности на гладких профилях в вихревых методах // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер.: Естественные науки. 2022. № 6. В печати.
7. Лаврентьев М.А. О построении потока, обтекающего дугу заданной формы // Труды ЦАГИ. 1932. Вып. 118. 56 с.



### ВИЗУАЛИЗАЦИИ «БЕТА ПЛЮС» (ДВУХЦВЕТНАЯ) И «БЕТА МИНУС» ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗА. СРАВНЕНИЕ С ВИЗУАЛИЗАЦИЕЙ «ЛЯМБДА ДВА»

П.В. Матюшин

Институт Автоматизации Проектирования РАН, Москва

[pmatyushin@mail.ru](mailto:pmatyushin@mail.ru)

### ВВЕДЕНИЕ.

Для визуализации всей вихревой структуры пространственного (3D) течения жидкости или газа (рис. 1а) не подходят изоповерхности модуля завихренности  $\omega = |\text{rot } \mathbf{v}|$  или давления  $p$ , где  $\mathbf{v}$  – вектор скорости [1]. Изоповерхности  $\omega$  дают только вихри со значительным вращением сплошной среды. Для визуализации всей вихревой структуры 3D течения несжимаемой жидкости в статье [1] было предложено использовать изопо-

верхность  $\lambda_2 < 0$  (рис. 1е), где  $\lambda_2$  – второе собственное значение симметричного тензора  $\mathbf{F}^2 + \mathbf{B}^2$ , где  $\mathbf{F} + \mathbf{B} = \mathbf{G} = \mathbf{v}_{i,j}$ ,  $F_{i,j} = 0.5 \cdot (v_{i,j} + v_{j,i})$ ,  $B_{i,j} = 0.5 \cdot (v_{i,j} - v_{j,i})$ . В статье [1] также упоминается изоповерхность мнимой части  $\beta$  двух комплексно сопряженных собственных значений тензора градиента скорости  $\mathbf{G}$  (рис. 1в). Сначала я использовал  $\lambda_2$ -визуализацию [2], но далее перешел на  $\beta$ -визуализацию [3], имеющую ясный физический смысл, приведенный в части 2 настоящей статьи.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ДИСКА И МЕТОД ЕЁ РЕШЕНИЯ.

Рассмотрим задачу обтекания диска диаметром  $d$  и толщиной  $h = 0.76 \cdot d$  с горизонтальной осью симметрии  $Z$  равномерным потоком линейно стратифицированной по плотности вязкой жидкости со скоростью  $U$  (рис. 2з). В центре диска поместим начало декартовой системы координат СК1 ( $X, Y, Z$ ), ось  $X$  – вертикальна. Для математического моделирования этой задачи на вычислительных ресурсах Межведомственного суперкомпьютерного центра Российской академии наук (МСЦ РАН) при помощи численного метода МЕРАНЖ [4] решалась система уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска [5–6], записанная в цилиндрической системе координат ( $Z = Z, X = R \cdot \cos \varphi, Y = R \cdot \sin \varphi$ ). Эта задача характеризуется четырьмя параметрами:  $T_b$  – период плавучести жидкости,  $Fr = U \cdot T_b / (2\pi \cdot d)$  – внутреннее число Фруда,  $Re = U \cdot d / \nu$  – число Рейнольдса,  $Sc = 709.2$  – число Шмидта, где  $\nu = 0.01 \text{ см}^2/\text{с}$  – коэффициент кинематической вязкости жидкости. Пусть  $T = \tau / T_b$ , где  $\tau$  – реальное время, прошедшее с начала обтекания. Зафиксируем в СК1 произвольную точку  $M$  течения со скоростью  $\mathbf{v}_M$  и введем декартову систему координат СК2( $\mathbf{v}_M$ ) ( $x, y, z$ ), равномернодвигающуюся в СК1 со скоростью  $\mathbf{v}_M$ .

### МЕХАНИЗМ ФОРМИРОВАНИЯ ВОЛН.

В СК2(1, 0, 0) диск движется справа налево в резервуаре с покоящейся жидкостью. В [5] при помощи  $\beta$ -визуализации для СК2(1, 0, 0) был сформулирован следующий механизм формирования гравитационных внутренних волн. Пусть точка  $Q$  – место старта центра тыльной стенки диска на пересечении оси  $z$  с вертикальной черной линией на рис. 1а–б. В течение каждой  $\Delta T = 0.5$  при  $x > 0$  в силу гравитационной и сдвиговой неустойчивостей над  $Q$  формируется небольшой деформированный круг  $k = 1, 2, \dots$ , который со временем сдвигается вниз к оси  $z$  (рис. 1в–г). Левый полукруг  $k$  превращается в полуволну, длиной  $\pi \cdot Fr \cdot d$ , а правый полукруг  $-k$  утончается из-за появления правых полукругов  $k+1, k+2, \dots$  над ним.

### ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ «БЕТА»-ВИЗУАЛИЗАЦИИ.

Используя теорию обыкновенных дифференциальных уравнений можно показать, что  $\beta$  – это *усредненная по времени угловая скорость вращения молекул жидкости около точки  $M$  в СК2( $\mathbf{v}_M$ )*. Наличие вращения жидкости вокруг двух точек со скоростями  $(v_z, v_R, v_\varphi) = (0.973, 0.005, 0)$  (при  $x > d/2$ ) и  $(0, -0.01, 0)$  (при  $0 \leq x \leq d/2$ ) в СК1, отмеченных черными крестами на рис. 2а–б, показано на рис. 2б. Картина линий тока в СК2( $\mathbf{v}_M$ ) при  $0 \leq x \leq d/2$  и  $x > d/2$  на рис. 2б похожа на картину линий тока в СК1 (рис. 2з) и СК2(1, 0, 0) (рис. 2в), соответственно. Так на рис. 2б и 2з при  $0 \leq x \leq d/2$  мы видим рециркуляционную зону  $R$ , сформированную в СК1 в результате отрыва потока жидкости от тыльной стороны диска. А на рис. 2б и 2в при  $x > d/2$  – полуволны впадин (1, 3) и гребней (2).

### «БЕТА ПЛЮС»– И «БЕТА МИНУС»–ВИЗУАЛИЗАЦИИ.

В [6] под влиянием [7] мной была введена двухцветная « $\beta+$ »-визуализация, которая при помощи знака  $\omega_\varphi$  (рис. 1б) окрашивает полуволны впадин (1, 3) и гребней (2) двумя разными цветами (рис. 1а,в), что очень удобно при исследовании вихревой

структуры внутренних волн. Функция « $\beta+$ » определена при  $\beta > 0$ :  $\beta+ = \text{sign}(\omega_\phi) \cdot \beta$ . (Вместо  $\omega_\phi$  здесь можно использовать возмущение солёности  $S$  (рис. 1з).) Топологии двухцветных структур течения, полученные при помощи « $\beta+$ »-визуализации [6] и «Rortex»-визуализации [7], совпадают при умеренных  $Re$ , в то время как запрограммировать « $\beta+$ »-визуализацию легче.

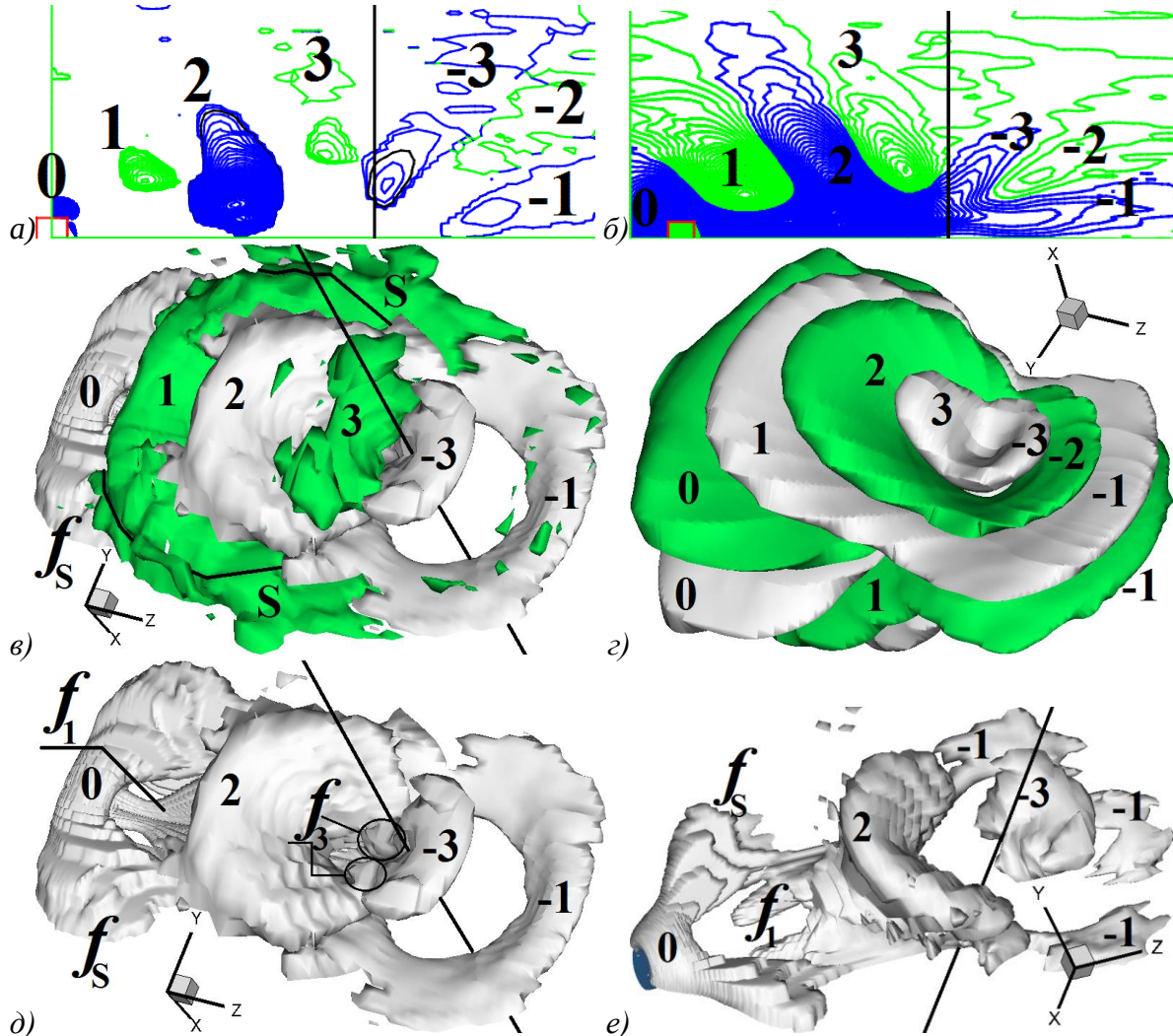


Рис. 1. Течение около диска при  $T = 1.51$ ,  $Fr = 0.8$ ,  $Re = 50$ ,  $T_b = 6.28$  с: а–б) изолинии  $\beta+$  ( $\delta\beta+ = 0.002$ ) и  $\omega_\phi = (\text{rot } \mathbf{v})_\phi$  ( $\delta\omega_\phi = 0.003$ ) в вертикальной плоскости  $x$ – $z$ , в–е) изоповерхности  $\beta+ = 0.002$  (в), возмущения солёности  $S = 2 \cdot 10^{-6}$  (з),  $\beta- = 0.002$  (д) и  $\lambda_{2-} = -3 \cdot 10^{-6}$  (е). Положительные  $\beta+$ ,  $\omega_\phi$  и  $S$  окрашены зеленым.

Аналогичным образом можно ввести двухцветные « $\omega+$ »- и « $\lambda_{2+}$ »-визуализации.  $\omega+ = \text{sign}(\omega_\phi) \cdot \omega$ . Функция « $\lambda_{2+}$ » определена при  $\lambda_2 < 0$ :  $\lambda_{2+} = \text{sign}(\omega_\phi) \cdot |\lambda_2|$ . Далее было замечено, что на большей площади рис. 1б  $\omega_\phi < 0$ . Поэтому, если на 2D рис. 1б убрать области с  $\omega_\phi \geq 0$ , то структура течения станет в два раза проще, но при этом удаленные структуры можно легко мысленно восстановить. Более того, в 3D случае на рис. 1в вихревые структуры с  $\omega_\phi \geq 0$  закрывают нити  $f_1$  и  $f_3$  около оси  $z$  (рис. 1д). Поэтому в [6] мной была введена одноцветная « $\beta-$ »-визуализация. Функция « $\beta-$ » определена при  $\beta > 0$  и  $\omega_\phi < 0$ :  $\beta- = \beta$  (рис. 1д). Если при « $\beta-$ »-визуализации полуволна 3 и полукольцо –2 полностью исчезают с рис. 1в, то исчезновение полуволны 1 и головной части  $S$  боковых нитей  $f_s$  [5] сопровождается удалением небольшой части оболочки следа 0 (рис. 1д). Граница между областями «0+S» и 1 на рис. 1в отмечена чёрной линией.

Функция « $\lambda_2$ » определена при  $\lambda_2 < 0$  и  $\omega_\phi < 0$ :  $\lambda_2 = \lambda_2$  (рис. 1е). Сравнение рис. 1д и 1е для  $T = 1.5$ ,  $Fr = 0.8$ ,  $Re = 50$ ,  $T_b = 6.28$  с показывает, что вихревые структуры, полученные при помощи « $\beta$ » и « $\lambda_2$ »-визуализаций, практически совпадают, но « $\beta$ »-визуализация более гармонично представляет структуру течения жидкости. Так на рис. 1д нити  $f_1$  соединяются с кольцом R, а на рис. 1е не соединяются, т.е. как бы разорваны. Полукольцо  $-1$  на рис. 1д цельное, а на рис. 1е разорвано на три части.

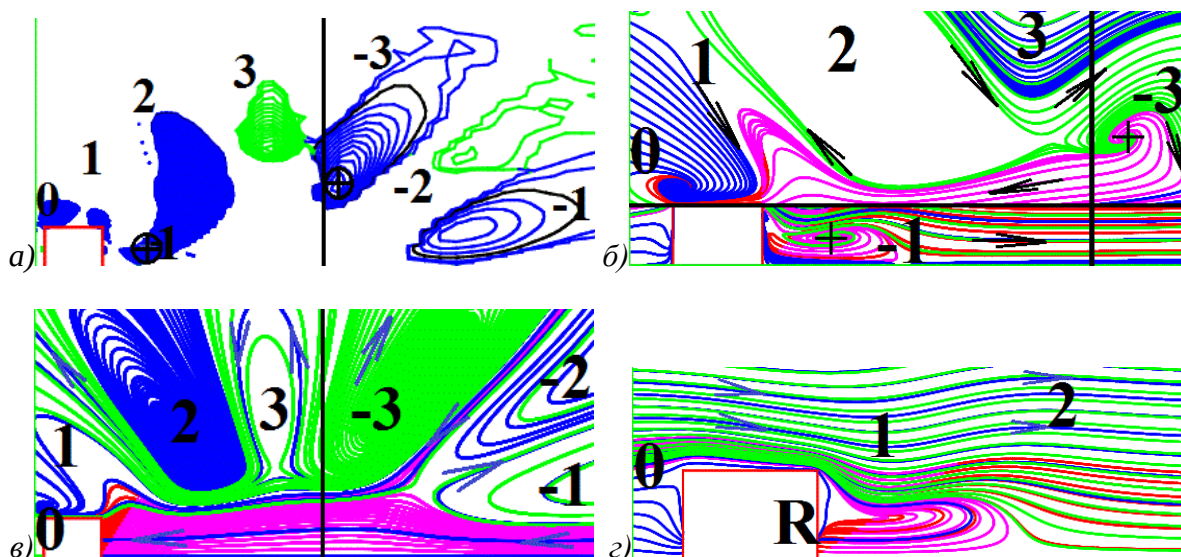


Рис. 2. Течение около диска при  $T = 1.5$ ,  $Fr = 0.3$ ,  $Re = 50$ ,  $T_b = 6.28$  с в вертикальной плоскости  $x$ - $z$ : а – изолинии  $\beta$  ( $\delta\beta = 0.002$ ); б–г – мгновенные линии тока в СК2(0, -0.01, 0) и СК2(0.973, 0.005, 0) при  $0 \leq x \leq d/2$  и  $x > d/2$ , соответственно (б), в СК2(1, 0, 0) (в) и в СК1 (г).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jeong J., Hussain F. On the identification of a vortex // J. Fluid Mech. 1995. V. 285. P. 69 - 94.
2. Матюшин П.В. Численное моделирование пространственных отрывных течений однородной несжимаемой вязкой жидкости около сферы // Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. М., 2003. 194 с.
3. Гуцин В.А., Матюшин П.В. Механизмы формирования вихрей в следе за сферой при  $200 < Re < 380$  // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 5. С. 135 – 151.
4. Белоцерковский О.М., Гуцин В.А., Коньшин В.Н. Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // Ж. вычислительной математики и математ. физики. 1987. Т. 27. № 4. С. 594 – 609.
5. Матюшин П.В. Процесс формирования внутренних волн, инициированный началом движения тела в стратифицированной вязкой жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2019. № 3. С. 83 - 97.
6. Матюшин П.В. Вихревая структура, генерируемая равномерным движением диска в сильно стратифицированной вязкой жидкости // «Волны и вихри в сложных средах»: 12-ая Междунар. конф. – школа молодых ученых; 01-03 декабря 2021 г.; Москва: Сборник материалов школы. – М.: ООО «ИСПО-принт», 2021. С. 160 - 162.
7. Tian S., Gao Y., Dong X., Liu C. Definition of vortex vector and vortex // J. Fluid Mech. 2018. V. 849. P. 312 - 339.



## ВОЛНА ТЕРМИЧЕСКОЙ ДЕТОНАЦИИ В СИСТЕМЕ «РАСПЛАВЛЕННЫЙ СВИНЕЦ – ВОДЯНОЙ ПАР – ВОДА»

*В.И. Мелихов, О.И. Мелихов, Салех Башар*

*Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва*

[basharsaleh10@gmail.com](mailto:basharsaleh10@gmail.com)

### ВВЕДЕНИЕ.

При тяжелых авариях на АЭС с реактором с водой под давлением, когда происходит плавление материалов активной зоны реактора, могут возникнуть ситуации, когда расплав материалов активной зоны реактора (кориум) проникает в виде струи в объем, занимаемый водой, и при этом дробится на отдельные капли, окруженные водой. Ввиду высокой температуры расплава (порядка 3000 К) на его поверхности вода закипает, в результате чего капля расплава обволакивается паровой пленкой, которая примерно на два порядка снижает тепловой поток от расплава в воду. Вследствие этих процессов образуется смесь капель расплава с водой, время существования которой определяется скоростью седиментации капель и гидродинамикой воды, возникающей при попадании расплава в воду (в воде могут возникнуть вихревые течения, влияющие на кинематику капель расплава). Очевидно, это время имеет порядок нескольких секунд, что достаточно, чтобы в смеси расплава с водой произошел паровой взрыв [1].

В реакторных установках со свинцовым теплоносителем типа БРЕСТ при аварии с разрывом теплообменной трубки в парогенераторе может возникнуть обратная ситуация, когда струя воды из разрыва проникает в объем парогенератора, заполненный расплавленным свинцом. В этом случае происходит фрагментация струи воды, в результате чего образуется смесь капель воды в жидком свинце, при этом капли окружены паровыми оболочками, подавляющими интенсивную теплопередачу от расплава в воду. В работе [2] было выдвинуто предположение, что в такой смеси капель воды в расплаве также может произойти паровой взрыв. В настоящей работе исследуется возможность реализации парового взрыва в такой системе. Анализ выполнен в рамках стационарной постановки.

### МОДЕЛЬ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕРМИЧЕСКОЙ ДЕТОНАЦИИ В СИСТЕМЕ «КАПЛИ ВОДЫ – ПАР – ЖИДКИЙ СВИНЕЦ».

Для описания системы рассматриваются три фазы: 1) жидкий свинец как сплошная фаза с индексом ( $m$ ), 2) крупные капли воды внутри паровых пузырей с индексом ( $d$ ), 3) мелкие фрагменты воды внутри паровых пузырей с индексом ( $f$ ). Предполагается, что дисперсные фазы (пар и вода) находятся в тепловом и скоростном равновесии. Для каждой фазы своё объёмное доле  $\alpha$ , и каждая фаза описывается своей плотностью, скоростью и температурой, давления всех фаз одинаковы. Эти фазы занимают полностью объем рассматриваемой области, поэтому:

$$\alpha_m + \alpha_d + \alpha_f = 1. \quad (1)$$

Из-за скоростной неравновесности между сплошной фазой ( $m$ ) и дисперсной фазой ( $d$ ), начинается фрагментация крупных капель воды на мелкие фрагменты, в результате чего резко увеличивается поверхность теплообмена от расплава к пароводяной смеси, и расширение пара.

Система уравнений, определяющих волну термической детонации, включает три уравнения неразрывности, три уравнения сохранения импульса и три уравнения сохранения энергии.



$$\frac{d}{dx}(\alpha_m \rho_m V_m) = 0, \frac{d}{dx}(\alpha_d \rho_d V_d) = -\Gamma_f, \frac{d}{dx}(\alpha_f \rho_f V_f) = +\Gamma_f, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx}(\alpha_m \rho_m V_m^2) = -\alpha_m \frac{dP}{dx} + K_{dm}(V_d - V_m) + K_{fm}(V_f - V_m), \quad (3)$$

$$\frac{d}{dx}(\alpha_d \rho_d V_d^2) = -\alpha_d \frac{dP}{dx} + K_{dm}(V_m - V_d) - \Gamma_f V_d, \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx}(\alpha_f \rho_f V_f^2) = -\alpha_f \frac{dP}{dx} + K_{fm}(V_m - V_f) + \Gamma_f V_d, \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx}(\alpha_m \rho_m V_m h_{sm}) = R_{dm}(T_d - T_m) + R_{fm}(T_f - T_m) + V_m K_{dm}(V_d - V_m) + V_m K_{fm}(V_f - V_m) \quad (6)$$

$$\frac{d}{dx}(\alpha_d \rho_d V_d h_{sd}) = R_{dm}(T_m - T_d) + V_d K_{dm}(V_m - V_d) + K_{dm}(V_m - V_d)^2 - \Gamma_f h_{sd} \quad (7)$$

$$\frac{d}{dx}(\alpha_f \rho_f V_f h_{sf}) = R_{fm}(T_m - T_f) + V_f K_{fm}(V_m - V_f) + K_{fm}(V_m - V_f)^2 + \Gamma_f h_{sd} \quad (8)$$

В уравнениях (2) – (8) используются следующие обозначения  $P$  – давление,  $V$  – скорость,  $T$  – температура,  $h_s$  – энтальпия торможения. Величины  $K_{dm}$ ,  $K_{fm}$  и  $R_{dm}$ ,  $R_{fm}$  описывают трение и теплообмен между фазами  $d/f$  и  $m$ , соответственно,  $\Gamma_f$  – скорость фрагментации крупных капель воды. Их вид приведён в [3].

## РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

На рисунке 1 представлены распределения давления в зоне фрагментации, видно, что максимальное давление не достигается в плоскости Чепмена-Жуге, а находится около фронта ударной волны.

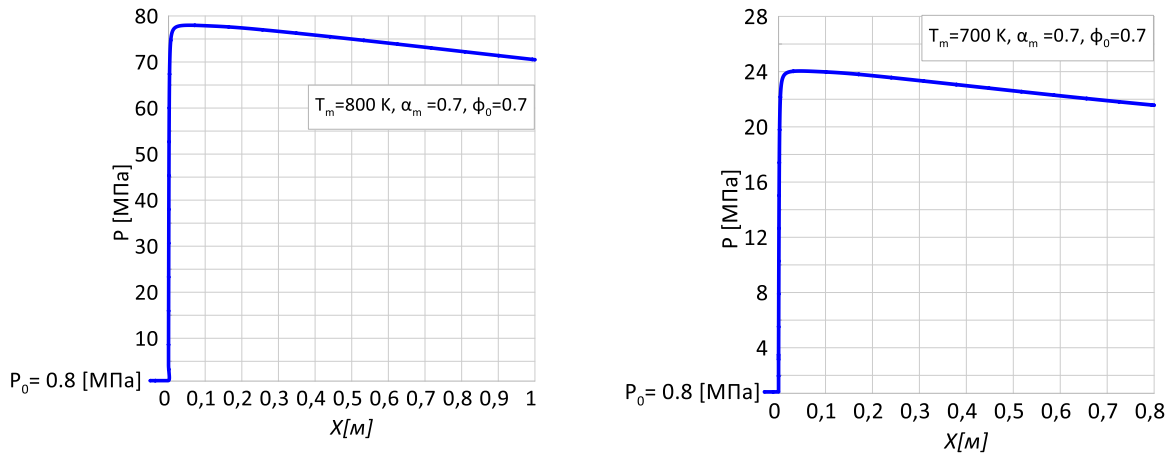


Рис. 1. Распределения давления в зоне фрагментации дисперсной фазы волны термической детонации

На рисунках 2 – 3 показаны распределения температур и скоростей фаз в зоне фрагментации. Видно, что скоростное равновесие фаз достигается в районе максимального давления у фронта ударной волны, и оно достигается значительно быстрее термического равновесия.

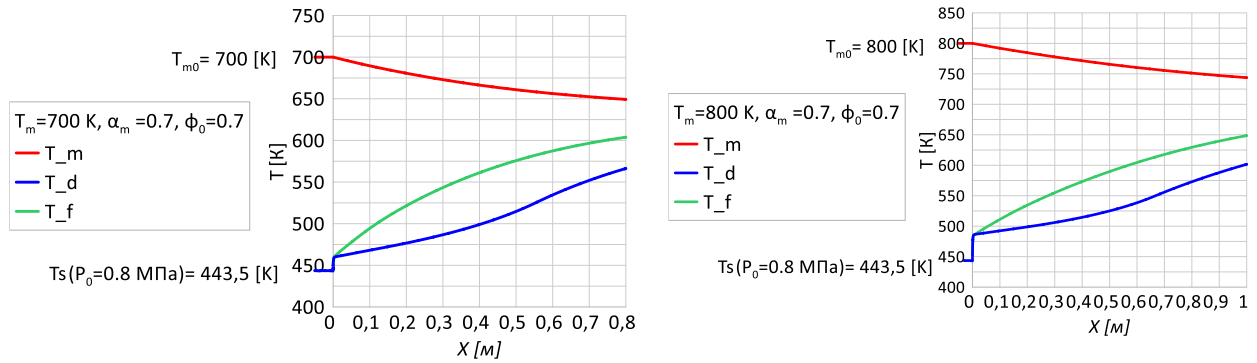


Рис. 2. Распределения температур фаз в зоне фрагментации

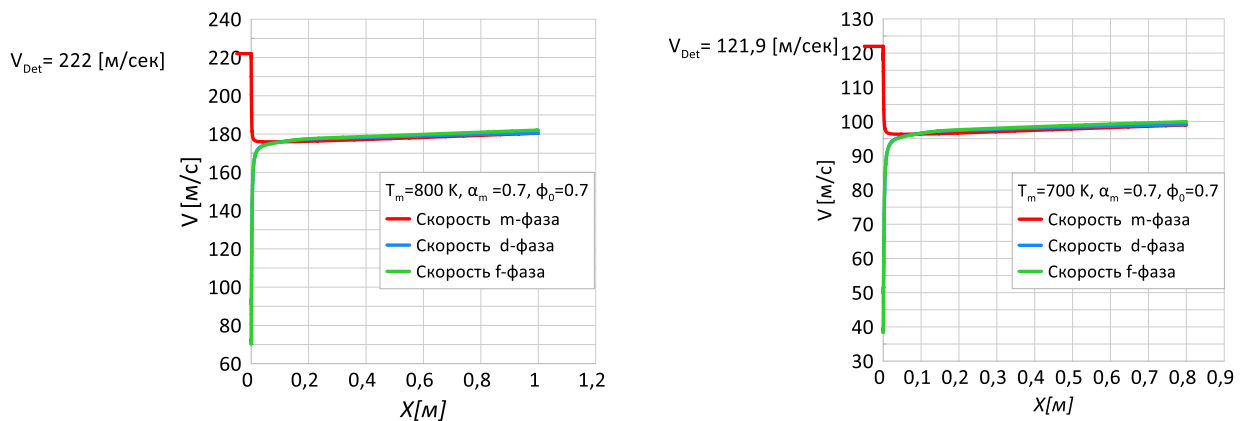


Рис. 3. Распределения скоростей фаз в зоне фрагментации

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** Для расчёта внутренней структуры детонационной волны разработана одномерная стационарная модель для многофазной смеси, состоящей из трех фаз: жидкий свинец (сплошная фаза) и капли воды внутри паровых пузырей (дисперсная фаза). Учитываются сила межфазного трения, теплообмен и фрагментация дисперсной фазы. Результаты исследований показали, что в волне термической детонации максимальное давление достигается около фронта ударной волны, а не в плоскости Чепмена-Жуге, что, позволяет точнее оценить воздействие волны термической детонации на оборудование при разрыве трубки парогенератора реактора БРЕСТ-ОД-300.

#### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках проекта № 21-19-00709.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мелихов В.И., Мелихов О.И. Якуш С.Е. Гидродинамика и теплофизика паровых взрывов. М.: Издательство ИПМех РАН. 2020. С. 276.
2. Dinh T.N. Multiphase flow phenomena of steam generator tube rupture in a lead-cooled reactor system: a scoping analysis // Proceedings of ICAPP 2007. Paper No. 7497. May 13-18, 2007. Nice, France.
3. Fletcher D.F. An improved mathematical model of melt/water detonations – I. Model formulation and example results // Int. J. Heat Mass Transfer. 1991. Vol. 34. No. 10. P. 2435-2448.



# ПОЛИГОНАЛЬНЫЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ ПРЫЖКИ КАК РЕЗУЛЬТАТ РАЗВИТИЯ ГОФРИРОВОЧНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

*Е.И. Могилевский, Л.Р. Оганесян*

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва*

[Evgeny.mogilevskiy@math.msu.ru](mailto:Evgeny.mogilevskiy@math.msu.ru)

Если круглая струя вязкой жидкости падает на горизонтальную плоскость, вблизи места падения жидкость растекается тонким слоем, а на некотором расстоянии от него образуется участок, где толщина слоя резко изменяется – имеет место гидравлический прыжок. Как правило, при умеренных числах Рейнольдса падающей струи имеет место стационарное осесимметричное течение и прыжок является круговым. Вместе с тем, в экспериментальных работах [1,2] показано, что при определенных условиях наблюдаются сложные структуры, прыжок имеет форму звездчатого многоугольника со скругленными концами; мы будем называть такие прыжки полигональными. Измерения показывают, что переход от кругового прыжка к полигональным происходит при достаточно большом вкладе капиллярных сил, а также в том случае, когда перепад толщин велик [2]. Описанные в литературе модели полигональных прыжков предполагают, что число вершин прыжка задается граничными условиями, что принципиально отличается от постановки задачи, соответствующей эксперименту.

В настоящей работе предлагается модель, позволяющая определить наиболее вероятное число вершин полигональных прыжков, а также критерии их образования. Используется аналогия между течениями мелкой воды и газовой динамикой и исследуется механизм, аналогичный гофрировочной неустойчивости ударных волн [3,4].

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Пусть вертикальная круглая струя вязкой несжимаемой жидкости падает на поверхность круглой горизонтальной плиты, ограниченной вертикальной стенкой с изменяемой высотой  $H$ . Для описания течения вводится цилиндрическая система координат  $(r, \varphi, z)$ , связанная с поверхностью плиты и падающей струей. Ось  $r$  направлена горизонтально вдоль поверхности плиты, ось  $z$  – вертикально вверх против оси падающей струи в начале в плоскости поверхности плиты,  $\varphi$  – угол между осью  $r$  и радиус-вектором частицы прыжка (рис. 1).

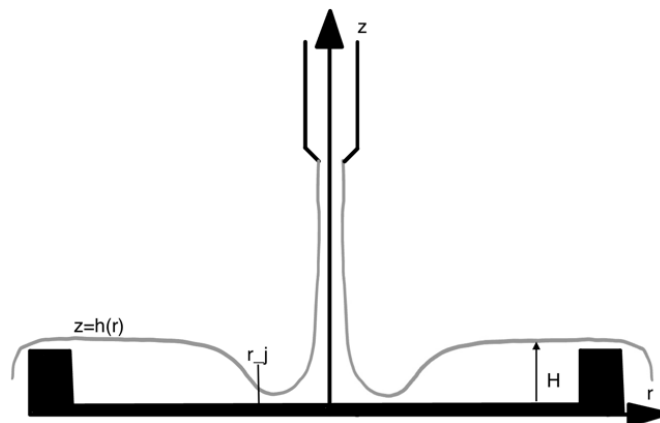


Рис. 1. Схема течения гидравлического прыжка.

В качестве основных безразмерных параметров используются следующие величины:  $H_c = \left(\frac{Qv}{g}\right)^{\frac{1}{4}}$ ,  $U_c = (Qv)^{\frac{1}{8}} g^{\frac{3}{8}}$ ,  $R_c = Q^{\frac{5}{8}} g^{-\frac{1}{8}} v^{\frac{3}{8}}$ , выраженные через расход жидкости  $Q = 2\pi U_c R_c H_c$ , ускорение свободного падения  $g$  и коэффициент кинематической вязкости  $\nu$ . Они выбраны таким образом, чтобы инерционные, гравитационные и вязкие силы имели один и тот же порядок. Для диапазона величин из эксперимента Bush et al. [2]  $\nu = 10 \dots 32$  сСт,  $Q = 10 \dots 51$  см<sup>3</sup> с<sup>-1</sup> параметр  $\varepsilon = H_c/R_c$  является малым, что позволяет использовать уравнения тонкого слоя, осредненные по толщине с учетом граничных на свободной поверхности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (h \overline{V_r}) + \frac{C_1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r h \overline{V_r^2}) + \frac{C_1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (h \overline{V_r V_\varphi}) - C_1 h \frac{\overline{V_\varphi^2}}{r} &= -h \frac{\partial h}{\partial r} - C_2 \frac{\overline{V_r}}{h}, \\ \frac{\partial}{\partial t} (h \overline{V_\varphi}) + C_1 \frac{\partial}{\partial r} (h \overline{V_r V_\varphi}) + \frac{C_1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (h \overline{V_\varphi^2}) &= -\frac{h}{r} \frac{\partial h}{\partial \varphi} - C_2 \frac{\overline{V_\varphi}}{h}, \\ r \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (r h \overline{V_r}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (h \overline{V_\varphi}) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $C_1 = \int_0^h f^2\left(\frac{z}{h}\right) d\left(\frac{z}{h}\right)$ ,  $C_2 = f'(0)$ ,  $V_r = \overline{V_r} f\left(\frac{z}{h}\right)$ ,  $V_\varphi = \overline{V_\varphi} f\left(\frac{z}{h}\right)$ .

Предполагается, что профили радиальной и азимутальной скорости одинаковы.

### СТАЦИОНАРНЫЙ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ ПРЫЖОК.

Для исследования устойчивости осесимметричного прыжка к возмущениям рассматривается его стационарное решение. При условии постоянства расхода  $\overline{V_r} h r = 1$  можно получить выражение для высоты слоя жидкости из уравнений движения (1):

$$h' = \frac{C_1 h - C_2 r^2}{r(h^3 r^2 - C_1)}. \quad (2)$$

Течение разделяется на докритическую и сверхкритическую области, которые соединяются гидравлическим прыжком. В сверхкритической области основными являются инерционные и вязкие сил, решение близко к автомодельному решению Watson [5], так что константы осреднения определяются именно этим решением:  $C_{1\_left} = 1.26$ ,  $C_{2\_left} = 2.28$ . В докритической зоне решение начинается с достаточно большого радиуса  $r$ , начальным условием будет равенство уровня жидкости высоте ограничивающей стенки:  $h_\infty = H/H_c$ . Предполагается, что в докритической области профиль скорости параболический:  $C_{1\_right} = 1.2$ ,  $C_{2\_right} = 3$ . Докритическое и сверхкритическое решения сопрягаются условием сохранения импульса на скачке, которое является уравнением для определения его радиуса:

$$C_{1\_left} u_1^2 h_1 + \frac{1}{2} h_1^2 = C_{1\_right} u_2^2 h_2 + \frac{1}{2} h_2^2 + B o \frac{h_2 - h_1}{r_j}, \quad (3)$$

где индекс «1» обозначает параметры слева до прыжка, «2» после него, число Бонда  $B o = \frac{U_c^2 R_c \rho}{\sigma}$  характеризует влияние капиллярных сил на прыжке,  $\sigma$  – поверхностное натяжение жидкости,  $r_j$  – радиус прыжка,  $\rho$  – плотность жидкости.

### ГОФРИРОВОЧНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ПРЫЖКА

Мы описывает переход от кругового прыжка к полигональному как результат развития гофрировочной неустойчивости ударных волн в газе [3,4]: поверхность разрыва подвержена малым возмущениям, распространяющимися в докритической области. Рассматривается решение в следующем виде:

$$\begin{aligned} \overline{V_r} &= u' + U(r), \quad u' = \overline{V_r}'(r) \exp(i(n\varphi - \omega t)); \quad \overline{V_\varphi} = \overline{V_\varphi}'(r) \exp(i(n\varphi - \omega t)); \\ h &= h' + H(r) \quad h = h'(r) \exp(i(n\varphi - \omega t)), \end{aligned}$$

где  $n$  – количество граней прыжка,  $U(r), H(r)$  – стационарное решение. Система уравнений для возмущений примет вид:

$$I(Hu + Uh) + \frac{C_1}{r}(2u' + U^2h) + C_1(U^2h' + 2hUU') + \frac{C_1}{r}HUnw + Hh' + hH' + C_2\left(\frac{U}{H} + \frac{u}{H} - \frac{U}{H^2}h\right) = 0, \\ IHw + C_1(UH'w + HU'w + HUw') - \frac{nH}{r}h + C_2\frac{w}{H} = 0, \\ Irh + Hu + Uh + rH'u + rHu' + nHw = 0, \quad (4)$$

где  $I = -\frac{i\omega R_c}{U_c}$  – безразмерный коэффициент усиления,  $w = iv$ . Условия на прыжке с учетом его деформации  $r_j = R_j + \xi \exp i(n\varphi - \omega t)$  имеют вид

$$IH_2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = uH_2 + hU_2, \\ -\frac{Bo}{r}(H_2'\xi - H_1'\xi + h) - \frac{Bo}{r^2}\xi(n^2 - 1)(H_2 - H_1) = 2H_2U_2u + hU_2^2 + H_2h, \\ w = -n\xi U_2(\alpha - 1), \quad (5)$$

где  $\alpha = \frac{H_2}{H_1} = \frac{U_1}{U_2}$  интенсивность прыжка. Неустойчивым модам соответствуют нетривиальные решения, для которых  $I > 0$ .

Наличие нетривиальных решений для данного  $I$  проверялось численно, строились собственные функции для мод, аналогичных звуковым и энтропийно-вихревым в газах, после чего выяснялось лежит ли вектор амплитуд, удовлетворяющий условиям на прыжка, в линейной оболочке полученных решений.

### РЕЗУЛЬТАТЫ.

Вычисления проводились для параметров экспериментов Bush et al.[2]. Перебором значения количества граней  $n$  определялось наиболее растущее решение. Предполагалось, что именно наиболее растущая мода наблюдается в эксперименте.

На основе анализа результатов расчетов были сделаны следующие выводы:

при увеличении поверхностного натяжения жидкости  $\sigma$  и высоты ограничивающей стенки  $H$  радиус прыжка уменьшается, и прыжок схлопывается до радиуса струи;

механизм гофрировочной неустойчивости определяет наиболее опасный тип возмущений и фиксирует число граней полигонального прыжка;

поверхностное натяжение является основным фактором, определяющим развитие неустойчивости и характеристики доминирующей моды.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена в рамках бюджетного плана исследований Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. C. Ellegaard et al. Creating corners in kitchen sinks. Nature, 392(6678):767–768, 1998.
2. J. M. Aristoff J. W. M. Bush and A. E. Hosoi. An experimental investigation of the stability of the circular hydraulic jump. J. Fluid Mech., 558:33–52, 2006.
3. С. П. Дьяков. Об устойчивости ударных волн. ЖЭТФ, Т. 27, No3:288–296, 1954.
4. G. W. Swan and G. R. Fowles. Shock wave stability. The Physics of Fluids, 18(1):28–35, 1975.
5. E. J. Watson. The radial spread of a liquid over a horizontal plane. J. Fluid Mech., 20:481–499, 1964.



# ВЛИЯНИЕ ДИАМЕТРА ВНУТРЕННЕГО ЦИЛИНДРА НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ТЕЧЕНИЯ АНОМАЛЬНО ТЕРМОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КОЛЬЦЕВОМ КАНАЛЕ

А.А.<sup>1</sup>Мухутдинова, В.Н.<sup>2</sup>Киреев, С.Ф.<sup>1</sup>Урманчиев

<sup>1</sup>Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН

<sup>2</sup>Башкирский государственный университет

[muhutdinova18@gmail.com](mailto:muhutdinova18@gmail.com)

В данной работе рассматривается течение аномально термовязкой несжимаемой жидкости в кольцевом канале, на внутренней и внешней поверхностях которого задан конвективный теплообмен с окружающей средой согласно закону Ньютона – Рихмана. Течение жидкости происходит под действием постоянного перепада давления  $\Delta p$ .

Введем цилиндрическую систему координат, ось  $z$  которой направлена вдоль оси цилиндров. Пусть аномально вязкая жидкость течет в кольцевом канале длиной  $L$ , радиусы внутреннего цилиндра –  $r_0$ , внешнего –  $R > r_0$ . (рис.1). Будем считать канал сильно удлиненным ( $L \gg h$ ).

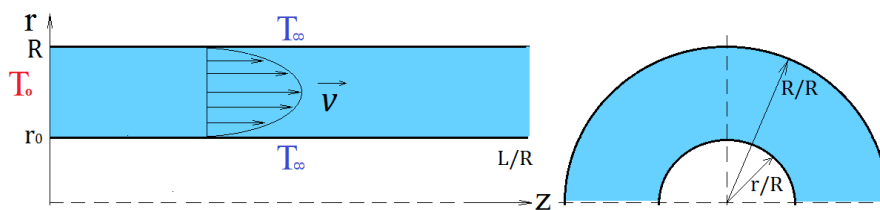


Рис. 1. Схема канала.

Математическая модель, состоит из уравнения неразрывности, уравнений Навье – Стокса и уравнения для температуры [1], записана в цилиндрических координатах с учетом осевой симметрии в безразмерном виде, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu(T) \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu(T) \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) + \frac{\mu(T)}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\mu(T)}{r^2} v_r \right)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu(T) \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu(T) \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\mu(T)}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{\text{Pe}} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right),$$

где  $v_r$  и  $v_z$  – радиальная и осевая компоненты вектора скорости,  $p$  – давление,  $T$  – температура,  $\text{Re}$  и  $\text{Pe}$  – безразмерные числа Рейнольдса и Пекле.

Входящая в уравнения Навье – Стокса функция  $\mu = \mu(T)$  представляет собой температурную зависимость вязкости жидкости. В настоящей работе рассмотрена аномальная зависимость вязкости от температуры (т.е. вязкость жидкости зависит от температуры немонотонным образом) [2,3] следующего вида:



$$\mu(T) = \exp \left[ -B(T - 0.5)^2 \right],$$

где  $B > 0$  - параметр описывающий характер изменения вязкости.

В расчётах были приняты во внимание различные формы зависимости вязкости от температуры, определяемые параметром  $B$ , что позволило провести расчёты, сопоставимые со случаем с постоянной вязкостью.

На стенках канала для скоростей задаются условия прилипания, а для температуры задается конвективный теплообмен с окружающей средой согласно закону Ньютона – Рихмана (граничное условие третьего рода):

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0/R} = \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=1} = -Nu \cdot T,$$

где  $Nu$  - безразмерное число Нуссельта.

### ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

Уравнения математической модели решались численно с использованием метода контрольного объема и алгоритма SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation) [4], модифицированного для учета переменного коэффициента вязкости. Оригинальный компьютерный код реализован на языке программирования C++ в кроссплатформенной среде разработки Qt Creator.

На рис.2 представлено распределение вязкости в сечении кольцевого канала, причём граничные условия для температуры были одинаковыми и определялись числом Нуссельта  $Nu = 5$ . Однако разность величин кривизны внешней и внутренней стенок канала привело к несимметричному распределению высоковязкой зоны.

Расход жидкости в зависимости от интенсивности теплообмена представлен на рис.3. На нём показано, что расход жидкости немонотонно зависит от значения числа Нуссельта. На начальном участке изменения числа Нуссельта расход уменьшается, а затем происходит его рост.

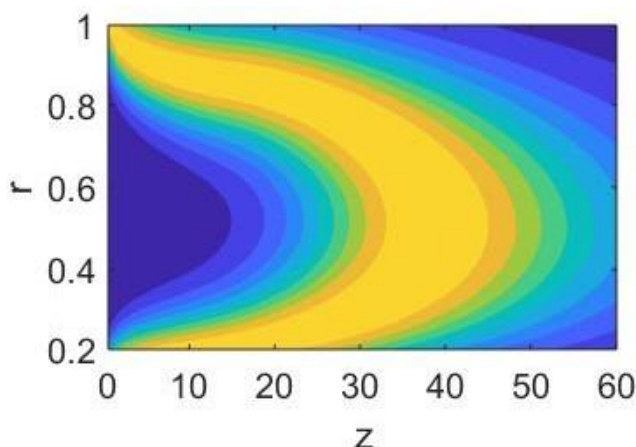


Рис. 2. Распределение вязкости в кольцевом канале  
 $h/r_0 = 4.0$ ,  $Nu = 5.0$ .

Так, при отношении толщины кольцевого канала к внутреннему радиусу  $h/r_0 = 4.0$ , расход между максимальным и минимальным значениями может изменяться в 50 раз.

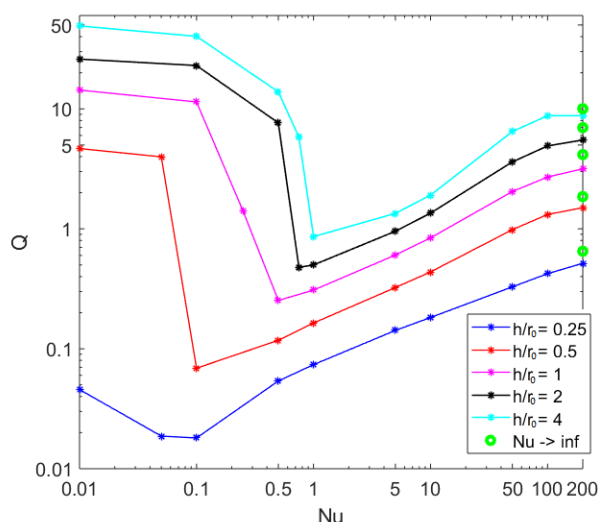


Рис. 3. Зависимость расхода жидкости от числа Нуссельта и геометрии немонотонной зависимости.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКА НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда в рамках проекта № 22-21-00915.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кочин Н. Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть 2 // М.: Физматлит. 1963. С. 728.
2. Урманчеев С. Ф., Киреев В. Н. Установившееся течение жидкости с температурной аномалией // Доклады Академии наук. 2004. Т. 396. № 2. С. 204-207.
3. Kuleshov, V.S., Moiseev K.V., Urmanceev S.F. Isolated Convection Modes for the Anomalous Thermoviscous Liquid in a Plane Cell // Fluid Dynamics 2019, Vol. 54, P. 983–990.
4. Патанкар С. В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. // М.: МЭИ, 1984. 145 с.



## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БЛОКИРУЮЩЕГО ЭФФЕКТА ТЕРМООБРАТИМОЙ КОМПОЗИЦИИ В КАНАЛЕ ИСПЫТАТЕЛЬНОГО СТЕНДА

А.А.<sup>1</sup>Мухутдинова, В.Н.<sup>2</sup>Киреев, С.Ф.<sup>1</sup>Урманчеев

<sup>1</sup>Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН

<sup>2</sup>Башкирский государственный университет

[said52@mail.ru](mailto:said52@mail.ru)

В работе рассмотрена фильтрация термообратимой полимерной композиции в системе коаксиальных цилиндрических каналов лабораторного стенда. Будем считать, что пористость насыпки металлических сферических частиц во внутреннем цилиндре высокая, а в кольцевом сечении внешнего цилиндра – низкая за счёт меньшего радиуса частиц (рис.1). Стенд предназначен для исследования закономерностей процесса бло-

кирования высокопроницаемой области полимерной композицией в условиях теплообмена с окружающей средой и оптимизации параметров блокирования.

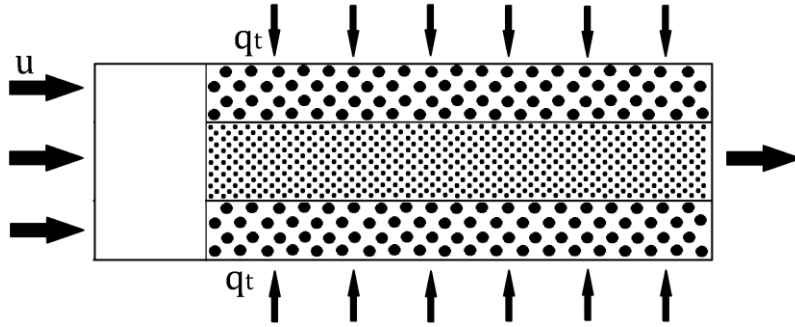


Рис. 1. Схема канала.

В качестве термообратимой композиции был использован водный раствор метилцеллюлозы с добавлением карбамида, разработанный Л.К. Алтуниной и В.А. Кувшиновым и известным под названием МЕТКА [1].

Математическая модель рассматриваемого процесса представлена системой уравнений в цилиндрических координатах, в которую входит уравнение неразрывности несжимаемой жидкости, уравнения течения жидкости с вязкостью, зависящей от температуры и скорости деформаций, а также уравнения теплопроводности.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1 u_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\alpha_1 u_z)}{\partial z} + \frac{\alpha_1 u_r}{r} &= 0 \\ \rho_1 \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho_1 u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \rho_1 u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} &= -\alpha_1 \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu_1(T) \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_1(T) \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu_1(T)}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\mu_1(T)}{r^2} u_r \right) - F^{(r)}, \\ \rho_1 \frac{\partial u_z}{\partial t} + \rho_1 u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \rho_1 u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\alpha_1 \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu_1(T) \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_1(T) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{\mu_1(T)}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) - F^{(z)}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{1}{\text{Pe}} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) - Q, \end{aligned}$$

где  $\alpha_1$  – объемная концентрация жидкой фазы;  $u_r$ ,  $u_z$  – поперечная и продольная компоненты скорости жидкой фазы;  $\rho_1$  – осредненная (эффективная) плотность жидкой фазы;  $\mu_1$  – вязкость жидкой фазы;  $F^{(r)}$ ,  $F^{(z)}$  – составляющие вектора силы межфазного взаимодействия, действующей на жидкость со стороны пористой среды;  $p$  – давление;  $T$  – температура;  $Q$  – интенсивность теплового взаимодействия фаз.

Эффективная плотность и объемная концентрация жидкости связаны соотношением

$$\rho_1 = \alpha_1 \rho_1^0,$$

где  $\rho_1^0$  – истинная плотность жидкости в отсутствии другой фазы.

Объемные концентрации обеих фаз постоянны по времени, причем концентрация дисперсной фазы за пределами насыпного слоя равна 0:

$$\alpha_1 = \begin{cases} 0.51 - \text{ во внешнем, кольцевом, слое цилиндра;} \\ 0.15 - \text{ во внутренней области цилиндра;} \end{cases}$$

Для объемных концентраций жидкости  $\alpha_1$  и пористой среды  $\alpha_2$  выполняется соотношение

$$\alpha_2 = 1 - \alpha_1.$$

Силы межфазного взаимодействия и межфазный теплообмен записываются с учетом объемных концентраций фаз и неподвижности дисперсной фазы:

$$F^{(r)} = -\eta_\mu \alpha_1 \alpha_2 a^{-2} u_r,$$

$$F^{(z)} = -\eta_\mu \alpha_1 \alpha_2 a^{-2} u_z,$$

$$Q_{21} = sa^{-1} \lambda_1 Nu (T_\Sigma - T_1)$$

где  $a$  – радиус частиц скелета пористой среды;  $\eta_\mu$  – структурный коэффициент, определяемый формой и поверхностью гранул (для гладких сферических частиц  $\eta_\mu = \frac{9}{2} \mu_1$ ),  $s$  – удельная межфазная поверхность,  $T_\Sigma$  – температура границы раздела фаз.

Таким образом, численное моделирование течения полимерной композиции было проведено на основе решения уравнений Навье-Стокса и теплопроводности с учётом межфазных сил и межфазного теплообмена. Кинетика гелеобразования определялась зависимостью вязкости от температуры. Численная реализация системы уравнений была проведена на основе модифицированного метода контрольного объёма [2].

При проведении численных расчётов было исследовано влияние условий теплообмена между цилиндрическими слоями различной пористости и влияние соотношения между коэффициентами теплопроводности насыпных пористых сред и раствора полимера на интенсивность гелеобразования термообратимой композиции. Результаты настоящей работы качественно согласуются с результатами, полученными при исследовании течения anomalно термовязкой жидкости в плоском канале [3], [4]. Определены объёмы втекающего раствора для эффективного блокирования высокопроницаемого участка. На рисунках (рис.2 и рис.3) представлены распределение высоковязкой зоны по длине высокопроницаемого кольцевого канала и динамика вязкого барьера, состоящего из геля, приводящего к блокированию потока жидкости с течением времени.

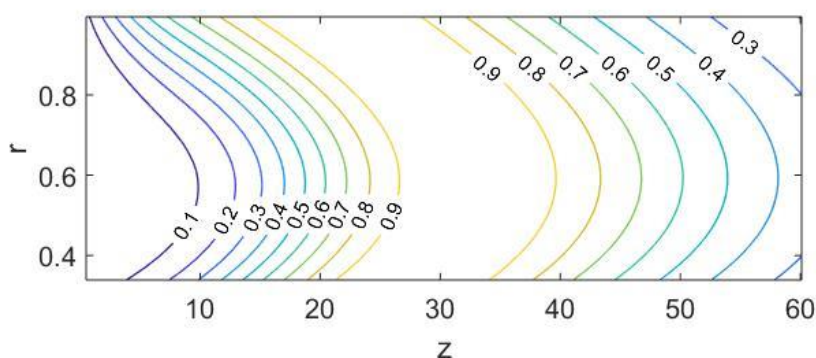


Рис.2. Распределение высоковязкой гелевой зоны в канале.

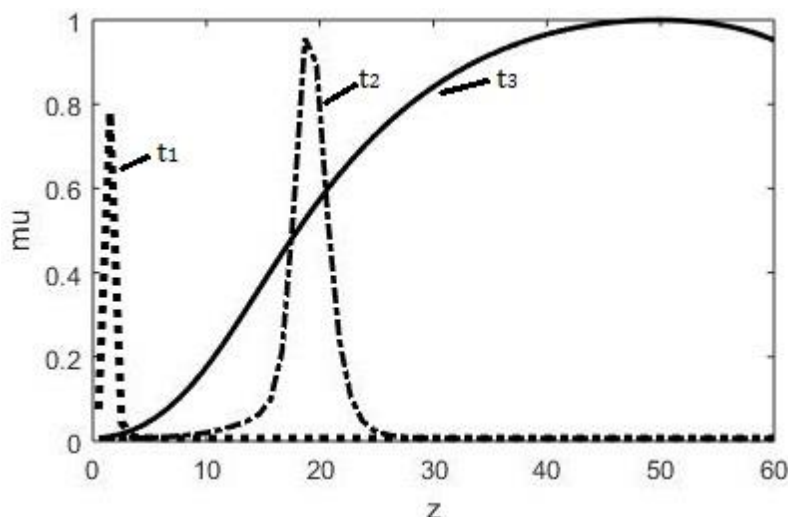


Рис. 3. Динамика высоковязкой гелевой зоны.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКА НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда в рамках проекта № 22-21-00915.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Altunina L. K. Kuvshinov V. A. Physicochemical methods for enhancing oil recovery from oil fields. // Russian Chemical Reviews. 2007. 76(10). P. 971–987. doi:10.1070/RC2007v076n10ABEN003723
2. Патанкар С. В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. // М.: МЭИ, 1984. 145 с.
3. Урманчеев С. Ф., Киреев В. Н. Установившееся течение жидкости с температурной аномалией // Доклады Академии наук. 2004. Т. 396. № 2. С. 204–207.
4. Uрманчеев S., Kireev V. The Transient Flow of Liquid with Non-Monotonous Temperature Dependent Viscosity in a Plane Channel // AIP Conference Proceedings, 2017, vol. 1906, 200009. – 4p. (American Institute of Physics) <https://doi.org/10.1063/1.5012485>



## ЭЛЕКТРОКОНВЕКТИВНЫЕ ВОЛНЫ СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КОНДЕНСАТОРЕ ПРИ НАЛИЧИИ ИНЖЕКЦИИ С КАТОДА

О.О. Некрасов, Б.Л. Смородин

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь

[dakeln2@gmail.com](mailto:dakeln2@gmail.com)

### ВВЕДЕНИЕ.

Электроконвекция в диэлектрических и слабопроводящих жидкостях может существовать благодаря появлению в них за счет инъекции свободных зарядов и взаимодействию этих зарядов с внешним электрическим полем [1-3]. В изотермическом случае в результате обратной бифуркации возникает стационарная электроконвекция [1-2].

При нагреве конденсатора сверху, благодаря конкуренции сил Кулона и плавучести, неустойчивость жидкости может возникать колебательным образом [3], что приводит к возникновению стоячих и бегущих волн [4]. Результаты [2,4], получены в рамках безиндукционного приближения в случае, когда инжектированный заряд на катоде линейно зависит от приложенного поля.

В данном исследовании использован другой подход, связанный с полной постановкой задачи: электрическое поле в конденсаторе, определяется перераспределением заряда внутри него. Предполагается, что имеет место автономная инжекция, при которой величина инжектированного заряда постоянна.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТЫ.

Рассматривается заполненный слабопроводящей жидкостью горизонтальный конденсатор ( $d$  – расстояние между обкладками). Предполагается, что плотность  $\rho_0$ , кинематическая вязкость  $\nu$ , температуропроводность  $\chi$  и диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  жидкости постоянны. Конденсатор находится в поле силы тяжести, а к его обкладкам, приложены разность потенциалов  $V_0$  и разность температур  $\Theta$ .

Рассмотрим двумерные возмущения:  $\mathbf{v} = (v_x, 0, v_z)$ , и введем функции тока  $\psi$  и завихренности  $\varphi$  соответственно:

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, v_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \varphi = (\text{rot} \mathbf{v})_y \quad (1)$$

Система уравнений для эволюции полей  $\psi$ ,  $\varphi$ , температуры  $\theta$ , плотности заряда  $q$  и электрического потенциала  $\Phi$  слабопроводящей жидкости в безразмерном виде будет выглядеть следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \Delta \varphi + \frac{T^2}{M^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial z} \right) - \frac{Ra}{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{T}{M^2} (q^2 - \nabla \Phi \nabla q) \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{Pr} \Delta \theta \\ \Delta \Phi = -q \\ \Delta \psi = -\varphi \end{array} \right. \quad (2)$$

с соответствующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} z = 0: \psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \theta = 1, \Phi = 0, q = C, \\ z = 1: \psi = 0, \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \theta = 0, \Phi = 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Система уравнений (1) и граничные условия (2) содержат следующие безразмерные параметры: число Рэлея  $Ra = \frac{g \beta d^3 \Theta}{\nu \chi}$ , электрическое число Рэлея  $T = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon V_0}{K \nu \rho_0}$ , число Прандтля  $Pr = \frac{\nu}{\chi}$ , параметр подвижности ионов  $M = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{K^2 \rho_0}}$  и параметр инжекции  $C = \frac{q_0 d^2}{V_0 \varepsilon_0 \varepsilon}$  ( $q_0$  – плотность инжектируемого на катоде заряда). Расчеты проведены в ячейке длиной  $l=2$ , с использованием сетки  $41 \times 21$  с применением явных конечноразностных схем. Решения уравнений Пуассона, входящих в систему (2), на каждом временном шаге вычислялись при помощи метода последовательной верхней релаксации. Представленные в данной статье результаты получены для набора параметров  $Ra=-2500$ ,  $C=-0.224$ ,  $M=14.14$ ,  $Pr=10$ .



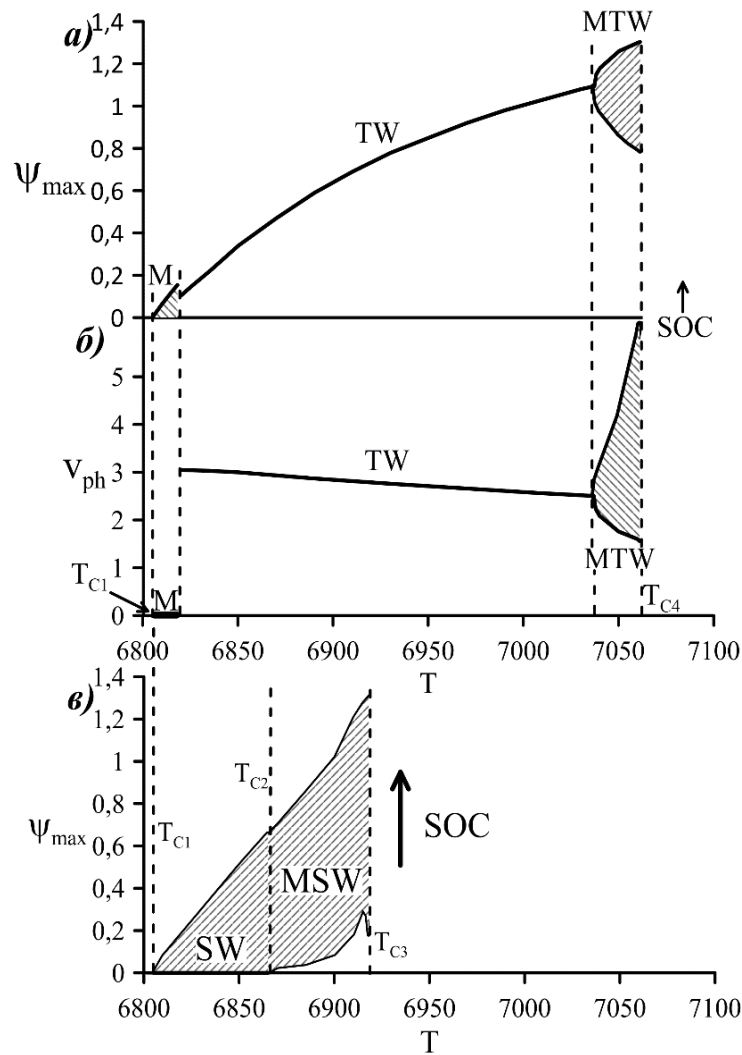


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма решений в виде бегущих (а,б) и стоячих (в) волн. а, в – зависимости максимального значения функции тока от электрического числа Релея, б – зависимость фазовой скорости бегущей волны от электрического числа Релея

При значении электрического числа Релея  $T_{C1} = 6805$  в результате прямой бифуркации Хопфа возникает конвекция. При использовании в нелинейных расчетах периодических граничных условий на вертикальных границах ячейки первый устойчивый режим представляет собой колебательное течение, в котором смешаны свойства стоячих и бегущих волн (так называемый смешанный режим – М). Рост параметра  $T$  (рис. 1, а, б) приводит к появлению бегущих волн (TW), а затем модулированных бегущих волн (MTW).

Во всей области изменения параметра  $T$  режим стоячих волн неустойчив. Для реализации в численном эксперименте этого режима (рис.1 в) и его дальнейшего анализа использованы граничные условия, запрещающие существования бегущей волны: на левой вертикальной границе ячейки значение функции тока приравнивалось нулю, для остальных переменных применялось условие периодичности.

Порог возникновения стоячих волн (SW) совпадает с порогом возникновения бегущих волн  $T_{C1} = 6805$ . Рост электрического параметра Релея приводит к небольшому

понижению частоты стоячей волны. При  $T_{c2} = 6865$  возникают модулированные стоячие волны (MSW), в которых происходит конкуренция первой и второй пространственных гармоник (количество конвективных валов внутри рассматриваемой области пространства периодически изменяется от двух до четырех). Максимальное значение функции тока в этом режиме колеблется в некотором интервале, нижняя и верхняя границы которого представлены на Рис.1 в.

Модулированные бегущие волны прекращают свое существование при  $T_{c4} = 7061$  (модулированные стоячие волны – при  $T_{c3} = 6919$ ) вследствие перехода к высокоинтенсивному режиму стационарной конвекции (SOC), характеризующимся на порядок большим безразмерным теплотокном по сравнению с рассмотренными выше надкритическими типами движения жидкости.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lacroix J. C., Atten P., Hopfinger E. J. Electroconvection in a dielectric liquid layer subjected to unipolar injection// J. Fluid Mech. 1975. Vol. 69. Part 3. P.539–563.
2. Верещага А. Н., Тарунин Е. Л. Надкритические режимы униполярной конвекции в замкнутой полости. в сб. Численное и экспериментальное моделирование гидродинамических явлений в невесомости, Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 92-96.
3. Смородин Б.Л., Тараут А.В. Параметрическая конвекция слабопроводящей жидкости в переменном электрическом поле. Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа// 2010. № 1. С. 3-11.
4. Мордвинов А.Н., Смородин Б.Л. Электроконвекция при инжекции с катода и нагреве сверху// Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2012. Т. 141. Вып. 5. С. 997–1005.



### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА УСКОРЕННОЙ СХОДИМОСТИ В СИНГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧАХ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

С.В. Нестеров, В.Г. Байдулов

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

[bayd@ipmnet.ru](mailto:bayd@ipmnet.ru)

Предложена модификация метода ускоренной сходимости, позволяющая решать задачи Штурма–Лиувилля для когда у коэффициентов уравнений могут присутствовать особенности как внутри интервала интегрирования, так и на его границе.

Пусть рассматривается уравнение вида

$$(p(x)u')' + [\lambda r(x) - q(x)]u = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

С краевыми условиями одного из трех видов

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (1), \quad u(0) = u'(1) = 0 \quad (2), \quad u(0) = \alpha_1 u(1) + \beta_1 u'(1) = 0 \quad (3)$$

и справедливы допущения

$$0 < p_0 \leq p(x) \leq p^+ < \infty, \quad 0 < r_0 \leq r(x) \leq r^+ < \infty,$$

а функции  $p(x)$ ,  $r(x)$ ,  $q(x)$  достаточно гладкие и могут быть определены на более широком интервале интегрирования  $0 \leq x \leq 1 + a$ .

Тогда справедлива следующая оценка сверху первого собственного числа

$$\lambda_1 \leq \lambda_1^* = \int_0^1 (p(x)\psi'^2 + q\psi^2) dx / \int_0^1 r(x)\psi^2 dx, \text{ где } \psi(0) = \psi(1) = 0$$

В работе определен критерий близости  $\lambda_1$  и  $\lambda_1^*$ , предложен конструктивный метод получения оценки снизу  $\lambda_{1*}$ :  $\lambda_{1*} \leq \lambda_1 \leq \lambda_1^*$ . Определена итерационная процедура уточнения собственных чисел и собственных функций с любой наперед заданной точностью. Процедура нахождения собственных чисел и расчета соответствующих функций реализована в виде программы в среде Maple. Приведены примеры решения задач Штурма–Лиувилля для сейш в канале переменной глубины и поперечных колебания круглой неоднородной упругой мембраны.

#### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Исследование выполнено в рамках госзадания №АААА-А20-120011690138-6



### ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРОВ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ТЕРМОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КОЛЬЦЕВОМ КАНАЛЕ

*А.Д. Низамова, С.Ф. Урманчеев, В.Н. Киреев*  
*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа*  
*Башкирский государственный университет, Уфа*  
[adeshka@yandex.ru](mailto:adeshka@yandex.ru), [kireev@anrb.ru](mailto:kireev@anrb.ru)

Основные теоретические результаты в области гидродинамической устойчивости были получены для течения в плоском канале [1]. При этом вязкость жидкости принималась постоянной величиной. Однако, если принять во внимание зависимость вязкости от температуры в рассматриваемой реальной жидкости и условия теплообмена на стенках канала, неоднородное распределение температуры приведёт к соответствующему распределению вязкости по его сечению. Таким образом на основе постановки задачи гидродинамической устойчивости при течении термовязких жидкостей в плоских каналах было получено обобщённое уравнение Орра-Зоммерфельда с учётом переменной вязкости [2]. При этом зависимость вязкости от температуры большинства капельных жидкостей с той или иной степенью точности можно описать экспоненциально убывающей функцией. Результаты исследования спектров соответствующего дифференциального оператора привели к установлению важной зависимости критического числа Рейнольдса от показателя термовязкости конкретной жидкости: было показано, что с его увеличением происходит снижение критического числа Рейнольдса [3-4].

В представленной работе рассмотрена задача об устойчивости ламинарного течения термовязкой жидкости в кольцевом канале. В качестве примера из области возможных приложений задачи можно привести обтекание тепловыделяющей сборки теплоносителем в ячеечной модели ядерных энергетических установок.

Поставленная задача была сведена к обобщённому уравнению Орра-Зоммерфельда относительно возмущений амплитуды поперечной скорости. Для его решения был использован спектральный метод на основе разложения по полиномам Чебышева первого рода. Решение для устойчивого течения термовязкой жидкости в кольцевом канале было найдено аналитически.

Численные исследования проводились для жидкостей с различными параметрами термовязкости  $\alpha$  и отношением радиусов внешней поверхности к внутренней  $h = R/r_0$ . Результаты численного анализа представлены графически на рис.1, на котором приведены спектры собственных значений обобщённого оператора Орра-Зоммерфельда для указанных значений параметров  $\alpha$  и  $h$ .

На рис. 1, а изображён спектр собственных значений обобщённого оператора Орра-Зоммерфельда в случае величины параметра термовязкости  $\alpha = 1.0$ , при этом геометрический параметр кольцевого канала равен  $h = 1.001$ , то есть радиусы кривизны поверхностей кольцевого сечения канала приблизительно одинаковы. Спектр собственных значений по своей структуре практически идентичен спектру, полученному для классического уравнения Орра-Зоммерфельда [1], построенному при постоянной вязкости для плоского канала. Чётко прослеживается левая ветвь, объединяющая моды Эйри (А), на которой располагается единственная неустойчивая мода с положительной мнимой частью собственного значения. Аналогично, правая ветвь объединяет моды Пекериса (Р) и, наконец, вертикальная ветвь – это моды Шенстедт (S). В отличие от ветвей А и Р, имеющих конечное число точек, ветвь S имеет счётное число точек. При этом все три ветви сходятся в одной точке.

На рисунке 1, б изображен спектр, соответствующий течению в канале с параметром термовязкости  $\alpha = 1.0$  и отношением радиусов канала, равным  $h = 4.0$ . В этом случае спектр собственных значений выглядит совершенно иначе – все ветви спектра отошли от общей точки пересечения ветвей, образовав некое подобие треугольника, также содержащего собственные числа.

Аналогичная картина наблюдается и при большем значении параметра термовязкости  $\alpha = 3.0$ . Для идентификации спектров можно ввести отрезок прямой, характеризующий изменение расстояния между ветвями Эйри и Пекериса. При всём различии полученных спектров за пределами упомянутой треугольной области все ветви сохраняют свои специфические характеристики и направления. Очевидно, что и ветвь Шенстедт на рис. 1, г за пределами рисунка имеет привычную форму.

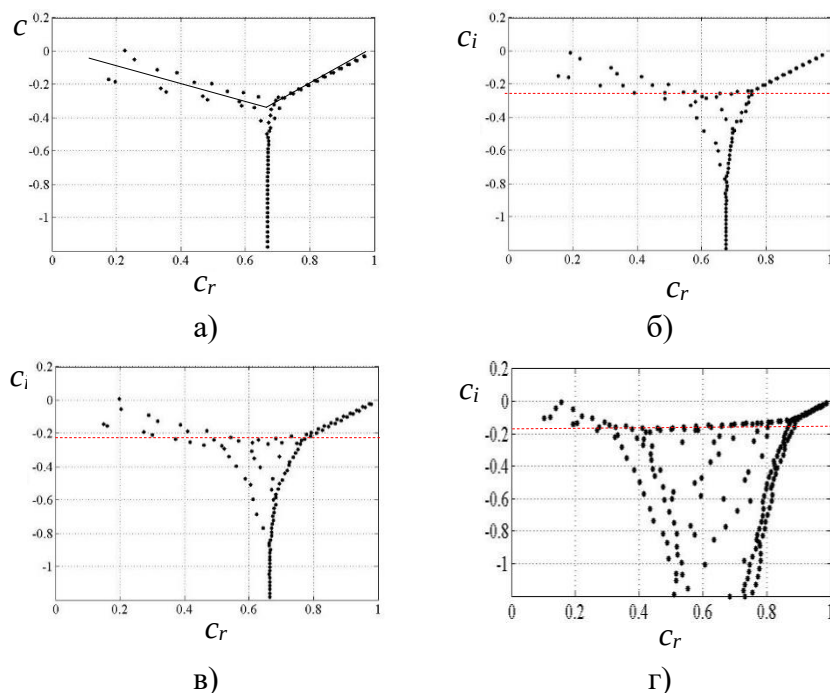


Рис.1. Спектры собственных значений обобщённого оператора Орра-Зоммерфельда: а)  $\alpha = 1.0$ ,  $h = 1.001$ ; б)  $\alpha = 1.0$ ,  $h = 4.0$ ; в)  $\alpha = 3.0$ ,  $h = 1.001$ ; г)  $\alpha = 3.0$ ,  $h = 4.0$ .

Известно, что неустойчивые моды возникают в соответствующих точках ветви Эйри, мнимые части собственных значений которых больше нуля. На рис. 1, а и рис. 1, в такие точки имеются, в то время как на рис. 1, б и рис. 1, г их нет. В связи с этим, следует напомнить, что в линейной теории гидродинамической устойчивости течение в цилиндрической области всегда устойчиво. Как здесь показано, это касается и кольцевой области при определённых отношениях радиусов внешней и внутренней поверхностей.

В заключение отметим, что разнообразию спектров собственных значений соответствует разнообразие собственных функций, имеющих нетривиальный характер распределения амплитуды осцилляций по сечению в каждом случае.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда в рамках проекта № 22-21-00915.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Drazin P.G.* Introduction to Hydrodynamic Stability. Cambridge University Press. 2002. 278 p.
2. *Potter M.C., Graber E.* Stability of plane Poiseuille flow with heat transfer // *Physics of Fluids*. 1972. Vol. 15. Issue 3. P. 387-391
3. *Kireev V.N., Nizamova A.D., Urmancheev S.F.* Some Features of Hydrodynamic Instability of a Plane Channel Flow of a Thermoviscous Fluid // *Fluid Dynamics*. 2019. Vol. 54. Issue 7. P. 978–982
4. *Nizamova A.D., Murtazina R.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F.* Features of Laminar-Turbulent Transition for the Coolant Flow in a Plane Heat-Exchanger Channel // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021. Vol. 42. Issue 9. P. 2211–2215
5. *Orszag S.A.* Accurate solution of the Orr–Sommerfeld equation // *Journal of Fluid Mechanics*. 1971. Vol. 50. Issue 4. P. 689-703



### ОПИСАНИЕ ВОЛН НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ ДЕЙСТВИЕМ ЧЛЕНОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ ЭЙЛЕРА

*В.М.Овсянников*

*Российский университет транспорта, Москва*

[OvsyannikovVM@yandex.ru](mailto:OvsyannikovVM@yandex.ru)

В высокотемпературной плазме, использующейся в установках для управляемого термоядерного синтеза, проявляется большая степень неустойчивости. В статье анализируется возможность увеличения степени устойчивости движения плазмы учетом в уравнении неразрывности для напряженности магнитного поля членов высокого порядка малости, вычисленных в 1752 г. Эйлером при выводе гидродинамического уравнения неразрывности. Предлагается использовать магнитное поле, обеспечивающее минимальные значения производных от якобианов второго порядка по координатным осям.

## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ.

Сравнительно недавно обнаруженные слагаемые локального несохранения в работах Л.Эйлера [1] и Н.Е.Жуковского в уравнении неразрывности в виде добавок к оператору дивергенции членов высокого порядка малости являются побудителями автоколебаний, вибраций, начальной стадии турбулизации, генерации звука и создания неустойчивости.

Развитие физики и техники показало, что в наибольшей степени в изучении устойчивости течений нуждается высокотемпературная плазма. Это связано с проявлением в ней кулоновских взаимодействий частиц с электрическим зарядом. Дальнейшие кулоновские силы создают комплексы частиц, упруго притягивающихся или упруго отталкивающихся друг от друга, в процессе поддержания квазинейтральности плазмы при ее течении со сложными деформациями элементарных объемов.

С неустойчивостью плазмы экспериментаторы столкнулись при решении важнейшей задачи управляемого термоядерного синтеза. Шнур высокотемпературной плазмы, вдоль которого течет электрический ток большой силы, оттесняется от стенок канала магнитным полем и теряет устойчивость течения. На нем образуются шейки утончений, винтовые возмущения – змейки.

Ввиду большой склонности плазмы к образованию неустойчивости необходимо использовать весь арсенал методов изучения самопроизвольной генерации волн, автоколебаний и способов их ослабления. Рассмотрим приложение результатов Эйлера и Жуковского к уравнениям электродинамики Максвелла.

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЧЛЕНОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ ЭЙЛЕРА В УРАВНЕНИЯХ МАКСВЕЛЛА .

Найденное в первом, раннем варианте [1] классической работы Эйлера *Principia motus fluidorum* уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + (t - t_0) \left[ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(v, w)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial(w, u)}{\partial(z, x)} \right] + (t - t_0)^2 \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0$$

где  $u, v, w$  – компоненты скорости вдоль осей координат  $x, y, z$ ;  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$  и  $\partial(u, v, w)/\partial(x, y, z)$  – якобианы поля скорости второго и третьего порядков соответственно;  $t$  – время;  $t_0$  – время начала деформации контрольной фигуры, было записано [2] для компонент напряженности магнитного поля четвертого уравнения Максвелла в виде

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} + \left[ \frac{\partial(H_x, H_y)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(H_y, H_z)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial(H_z, H_x)}{\partial(z, x)} \right] (t - t_0) + \frac{\partial(H_x, H_y, H_z)}{\partial(x, y, z)} (t - t_0)^2 = 0$$

Здесь  $H_x, H_y, H_z$  – компоненты напряженности магнитного поля в направлениях осей координат. Остальные три уравнения Максвелла имеют классический вид.

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0,$$

Здесь  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  – векторы напряженности электрического и магнитного полей,  $c$  – скорость света,  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные,  $\varepsilon$  и  $\mu$  – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды,  $\mathbf{J}$  – вектор плотности электрического тока.

Стандартный вывод волнового уравнения для магнитного поля, использованный Максвеллом и изложенный в учебнике [3], дает волновое уравнение для напряженности магнитного поля  $H_x$  в направлении оси  $x$



$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} \\ = \frac{\partial J_y}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial y} - (t - t_0) \left\{ \frac{\partial}{\partial (x, y)} \left[ \frac{\partial (H_x, H_y)}{\partial (x, y)} + \frac{\partial (H_y, H_z)}{\partial (y, z)} + \frac{\partial (H_z, H_x)}{\partial (z, x)} \right] \right\} / \frac{\partial}{\partial x} \\ - (t - t_0)^2 \frac{\partial \left[ \frac{\partial (H_x, H_y, H_z)}{\partial (x, y, z)} \right]}{\partial x} \end{aligned}$$

Слагаемые с якобианами второго и третьего порядков имеют размерности, отличающиеся от основных членов уравнения. Чтобы получить, хотя бы качественное, (если не количественное), приближенное решение полученных волновых уравнений вводятся неизвестный пока коэффициент  $q\tau$ . Его размерность равна произведению размерности плотности электрического заряда на время. Поэтому один коэффициент обозначен двумя буквами.

Волновое уравнение для напряженности магнитного поля по оси  $x$  принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} \\ = \frac{\partial J_y}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{(t - t_0)}{\tau q} \left\{ \frac{\partial}{\partial (x, y)} \left[ \frac{\partial (H_x, H_y)}{\partial (x, y)} + \frac{\partial (H_y, H_z)}{\partial (y, z)} + \frac{\partial (H_z, H_x)}{\partial (z, x)} \right] \right\} / \frac{\partial}{\partial x} \\ - \left[ \frac{(t - t_0)}{\tau q} \right]^2 \frac{\partial \left[ \frac{\partial (H_x, H_y, H_z)}{\partial (x, y, z)} \right]}{\partial x} \end{aligned}$$

Аналогичный вид имеют волновые уравнения по осям  $y$  и  $z$ .

Для описания движения плазмы можно использовать, например, одножидкостную модель, изложенную в монографии [4].

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_q + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Уравнение движения

$$\rho_m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V} = \rho_q \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} - \nabla p$$

Здесь  $\mathbf{B}$  - вектор магнитной индукции,  $\mathbf{J}$  - плотность электрического тока,  $\rho_m$ ,  $\rho_q$  - средние плотности массы и электрического заряда. Нумерация приведенных формул указана согласно с монографией [4].

## ПОВЫШЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ ОПТИМАЛЬНЫМ ВЫБОРОМ КОНФИГУРАЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ.

Н.Кролл и А.Трайвелпис ([4] на с. 21) пишут, что в установке для управляемого термоядерного синтеза «плазма локализована неоптимальным образом в конфигурационном пространстве» и о возможной оптимизации формы силовых магнитных линий напряженности магнитного поля для получения большей устойчивости. По приведенным выше уравнениям уменьшить воздействие правой неоднородной части волнового уравнения можно даже не зная численного значения коэффициента  $q\tau$ . Надо подобрать такое геометрическое распределение напряженности магнитного поля, чтобы производные по координатам от якобианов имели наименьшее значение. В самом деле, левая часть волнового уравнения описывает передачу возмущений напряженности магнитного поля по пространству, но новых волн не создает. Новые волны генерируются только членами правой, источниковой частью волнового уравнения. Распределение напряжен-

ности магнитного поля так, чтобы уменьшить производные от якобианов по пространственным координатам, позволит повысить стабильность плазмы и увеличить время штатной работы установки управляемого термоядерного синтеза для получения энергии.

Использование членов высокого порядка малости в гидродинамическом и электродинамических уравнениях неразрывности аналогично успешно развиваемым в ИПМ им. М.В. Келдыша квазигазодинамическим уравнениям для регулирования устойчивости моделирования численными методами.

**ВЫВОДЫ.** В уравнении неразрывности для напряженности магнитного поля системы уравнений электродинамики Максвелла учтены члены высокого порядка малости, вычисленные Эйлером в 1752 г. для гидродинамического уравнения неразрывности.

Представлен математический аппарат уменьшения самопроизвольного волнообразования и увеличения устойчивости течения плазмы, составленный только из классических построений Эйлера и Максвелла без включения в него каких-либо дополнительных соотношений и ограничений.

Для повышения устойчивости течения плазмы в установке для управляемого термоядерного синтеза предлагается использовать магнитное поле, обеспечивающее минимальные значения производных от якобианов второго порядка по координатным осям.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эйлер Л.* Принципы движения жидкостей. Перевод начальных разделов доклада 1752 г. в Берлинской АН / Пер. с латинского Е.В.Ивановой и В.М.Овсянникова. - 4-е изд., доп. – М.: Спутник+. 2020. С. 203.
2. *Овсянников В.М.* Волны напряженности магнитного поля, генерируемые членами высокого порядка малости уравнения неразрывности Эйлера. В сборнике материалов школы: Волны и вихри в сложных средах. 12-ая международная конференция-школа молодых ученых; 1-3 декабря 2021 г. Москва. –М.: ООО «ИСПОпринт», 2021. С.175-178.
3. *Детлаф А.А., Яворский Б.М.* Курс физики. М.:ВШ. 2000. С. 718.
4. *Н.Кролл, А.Трайвеллис.* Основы физики плазмы. М.: Мир. 1975. С. 525.



### О ВИЗУАЛИЗАЦИИ ТЕЧЕНИЙ В НЕВЯЗКИХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ И ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

*А.А.Очиров<sup>1</sup>, К.Ю.Лапина<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Институт проблем ме-ханики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

<sup>2</sup>*Федеральное государственное образовательное учреждение высшего образования «Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова», Ярославль*  
[otchirov@mail.ru](mailto:otchirov@mail.ru)

Рассматривается задача о распространении поверхностных волн по границе раздела невязких стратифицированных жидкостей, движущихся поступательно друг относительно друга с постоянной скоростью. Скорость относительного движения считается докритической в смысле реализации неустойчивости по отношению к тангенциальному

разрыву скоростей. Ставится задача об определении дисперсионных соотношений и визуализации течения, связанного с распространением волны.

Рассмотрим две идеальных неограниченных полубесконечных жидкости с плотностями  $\rho_a$  и  $\rho_w > \rho_a$  в декартовой системе координат  $Oxz$ , в которой ось  $Oz$  направлена вертикально против направления действия поля сил тяжести  $\mathbf{g}$ , а движение считается независимым от горизонтальной координаты  $y$ . Капиллярная сила на поверхности раздела характеризуется коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ . Будем считать, что более плотная жидкость заполняет нижнее полупространство  $z < 0$ , а по границе раздела распространяется бегущая синусоидальная волна, вызывающее отклонение границы раздела  $z = \zeta(x, t)$  от равновесного положения  $z = 0$ .

Математическая формулировка задачи состоит из уравнений Эйлера для обеих сред и уравнений неразрывности:

$$z < \zeta : \rho_w \partial_t \mathbf{u}_w + \rho_w (\mathbf{u}_w \cdot \nabla) \mathbf{u}_w = -\nabla P_w + \rho_w \mathbf{g} \quad (1)$$

$$\partial_t \rho_w + \text{div}(\rho_w \mathbf{u}_w) = 0 \quad (2)$$

$$z > \zeta : \rho_a \partial_t \mathbf{u}_a + \rho_a (\mathbf{u}_a \cdot \nabla) \mathbf{u}_a = -\nabla P_a + \rho_a \mathbf{g} \quad (3)$$

$$\partial_t \rho_a + \text{div}(\rho_a \mathbf{u}_a) = 0 \quad (4)$$

Здесь  $P_{w,a}$  – давление нижней и верхней жидкости соответственно,  $\mathbf{u}_{w,a}$  – поле скоростей для нижней и верхней жидкости соответственно. Причем в поле скоростей для верхней среды необходимо к горизонтальному компоненту скорости добавить постоянную скорость относительного движения сред  $u_0$ .

Задача (1) – (4) дополняется граничными условиями на поверхности раздела:

$$z = \zeta : \partial_t (z - \zeta) + \mathbf{u}_a \cdot \nabla (z - \zeta) = 0 \quad (5)$$

$$\partial_t (z - \zeta) + \mathbf{u}_w \cdot \nabla (z - \zeta) = 0 \quad (6)$$

$$P_w - P_a - \rho_a g \zeta + \rho_w g \zeta - \sigma \nabla \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (7)$$

Здесь  $\mathbf{n} = \nabla(z - \zeta) / |\nabla(z - \zeta)|$  – вектор нормали к свободной поверхности направленный из нижней среды в сторону верхней.

Важными характеристиками потока жидкости являются плотность потока энергии и поток импульса:

$$\rho_{w,a} \mathbf{u}_{w,a} \left( \frac{\mathbf{u}_{w,a}^2}{2} + \frac{P_{w,a}}{\rho_{w,a}} \right)$$

$$P_{w,a} \mathbf{k} + \rho_{w,a} \mathbf{u}_{w,a} (\mathbf{u}_{w,a} \cdot \mathbf{k})$$

Здесь  $\mathbf{k}$  – волновой вектор, который определяется при помощи дисперсионного соотношения через частоту волнового движения.

Задача была решена в линейном приближении по амплитуде волны, получены дисперсионные соотношения в наблюдаемых переменных. Проведен анализ распро-

странения поверхностных капиллярно-гравитационных волн в равномерно стратифицированных жидкостях.

Были получены и проанализированы дисперсионные соотношения, описывающие связь между частотой и длиной волны или волновым числом, а также другими параметрами рассматриваемой задачи. Получены выражения для фазовой и групповой скоростей волнового движения. Визуализированы потоки энергии и импульса, возникающие при волновом движении. Исследовано влияние стратификации жидкости на характеристики волнового движения.

### **БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ**

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598-П «Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью», <https://rscf.ru/project/19-19-00598/>).



## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ ВИХРЕЙ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ МЕТОДАМИ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ**

*Д.Г. Павлов<sup>1,2</sup>, В.В. Стегайлов<sup>1,2</sup>*

*<sup>1</sup>Объединённый институт высоких температур РАН, Москва*

*<sup>2</sup>Московский физико-технический институт, Долгопрудный*

*[pavlov.dg@phystech.edu](mailto:pavlov.dg@phystech.edu)*

В течение долгого времени численное описание гидродинамических процессов в природе и промышленности сводилось к численному решению уравнений Навье-Стокса на макроскопических масштабах. Исследования таких процессов на молекулярном уровне, в свою очередь, долгое время были невозможны в силу недостатка вычислительных мощностей. Однако современные технологии позволяют проводить молекулярно-динамические расчеты с беспрецедентными масштабами и временными рамками.

Первые попытки применить метод молекулярной динамики для исследования жидкостей были произведены в 1986 году [1], в двумерной системе и для малого (по современным меркам) количества частиц ( $N \approx 104$ ). На данный момент одной из наиболее примечательных работ в данной области является работа [2], в которой автор получил турбулентный режим при количестве моделируемых частиц  $N = 291287810$  с использованием CPU мощностей суперкомпьютера CX2. В этой работе было продемонстрировано рождение турбулентности в Куэттовском течении, однако на энергетическом спектре все еще не было видно Колмогоровского участка — известного свойства турбулентного течения.

В последние годы широкое развитие получили GPU-ускорители (видеокарты) и поддержка научных вычислений на них. Появились и вошли в применение новые технологии параллелизации алгоритмов, такие как CUDA, HIP, SYCL, Kokkos. Их развитие привело к сдвигу парадигмы высокопроизводительных вычислений, которые раньше проводились в основном на CPU. Начали появляться суперкомпьютеры, значительная часть мощности которых достигается благодаря видеокартам. В частности, отечественные кластеры Desmos (ОИВТ РАН) [3], Christofari (Sber), sHARISMa (НИУ ВШЭ) [4].

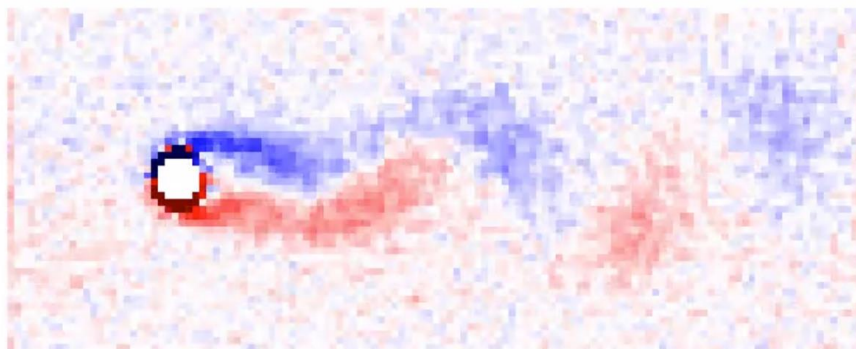


Рис. 1. Визуализация завихренности в системе с  $N = 1352268$  частиц в режиме отрывного течения при  $Re \approx 33$ .

В данной работе представлен и реализован новый метод создания стационарного потока вещества в задаче молекулярной динамики в рамках вычислительного пакета OpenMM [5], приведены примеры его применения и реализованы методы высокопроизводительного анализа и визуализации (см. Рис. 1) полученных с его помощью данных. Помимо этого в работе представлен метод конечно-разностной аппроксимации завихренности на сетке и проанализирована его точность. Приведено обсуждение границ применимости предложенных техник. Был проведен анализ основных причин сложностей в достижении перехода в турбулентный режим и были обозначены векторы развития для их преодоления. Было произведено сравнение производительности пакетов OpenMM и LAMMPS [6] на разных системах

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. C. Rapaport, E. Clementi, "Eddy Formation in Obstructed Fluid Flow: A Molecular-Dynamics Study" // Phys. Rev. Lett. — 1986. — Aug. — Vol. 57. — Pp. 695–698.
2. E.R. Smith, "A molecular dynamics simulation of the turbulent Couette minimal flow unit" // Physics of Fluids. — 2015. — Vol. 27, no. 11. — P. 115105.
3. V. Stegailov, E. Dlinnova, T. Ismagilov, M. Khalilov, N. Kondratyuk, D. Makagon, A. Semenov, A. Simonov, G. Smirnov, A. Timofeev, "Angara interconnect makes gpu-based desmos supercomputer an efficient tool for molecular dynamics calculations." // The International Journal of High Performance Computing Applications 33(3), 507–521 (2019)
4. P.S. Kostenetskiy, R.A. Chulkevich, V.I. Kozyrev, "HPC Resources of the Higher School of Economics" // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1740, No. 1. P. 012050.
5. P. Eastman, J. Swails, J.D. Chodera, R.T. McGibbon, Y. Zhao, K.A. Beauchamp, L. Wang, A.C. Simmonett, M.P. Harrigan, C.D. Stern, R.P. Wiewiora, B.R. Brooks, V.S. Pande, "OpenMM 7: Rapid development of high performance algorithms for molecular dynamics." // PLOS Computational Biology 13(7): e1005659. (2017)
6. S. Plimpton, "Fast Parallel Algorithms for Short-Range Molecular Dynamics." // J. Comput. Phys. 117(1), 1–19 (Mar 1995)

## ВЛИЯНИЕ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ НА СТРУКТУРУ ВИХРЕВОГО ТЕЧЕНИЯ И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ ПРИ ТЕЧЕНИИ ГАЗОКАПЕЛЬНОГО ПОТОКА В ОРЕБРЕННОМ КАНАЛЕ

*Пахомов М.А.*

*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск  
pakhomov@ngs.ru*

В работе проведено численное исследование локальной структуры, турбулентности и теплопереноса в плоском канале при испарении капель воды в газовом потоке с использованием эйлерова подхода. Показано, что структура турбулентного двухфазного течения претерпевает существенные изменения в сравнении с течением двухфазного потока в плоском канале.

### **ВВЕДЕНИЕ.**

Одними из наиболее эффективных методов управления структурой течения и увеличения теплопереноса являются использование пассивных интенсификаторов теплообмена, имеющих различные формы поверхности. Использование оребрения стенок канала является одним из наиболее эффективных способов управления структурой течений и повышения теплообмена [1,2]. Отношение высоты и ширины ребра, межреберного расстояния, формы преграды, степени расширения оребренного канала, а также ряда иных факторов оказывают большое влияние на развитие отрывной области течений и теплообмена в таких потоках.

Анализ ранее выполненных работ позволяет сделать следующие выводы. В этой области сделаны первые шаги, которые свидетельствуют о больших потенциальных возможностях подобного подхода методов. В литературе присутствует крайне ограниченное число работ. Автору известно только пять работ, где выполнены экспериментальные и численные исследования теплообмена в турбулентном газокапельном течении при обтекании двумерных препятствий. Исследования в данном направлении нуждаются в углублении и детализации, причем не только структуры течения, турбулентности, но и теплообмена. В этих работах было показано значительное увеличение теплообмена до 3 раз в сравнении с однофазным потоком в гладком канале при фиксированном числе Рейнольдса потока. Все численные работы используют RANS подход и различные изотропные модели турбулентности ( $k-\varepsilon$  и  $k-\omega$  SST). Применение таких моделей при моделировании сложного вихревого турбулентного течения даже для более простого случая обтекания обратного уступа имеет ряд ограничений [3]. Эйлерово-лагранжево описание применялось при моделировании динамики и теплообмена в дисперсной фазе.

Целью настоящей работы является численное исследование влияния испарения капель на течение и турбулентность при течении двухфазного газокапельного потока в оребренном плоском канале.

### **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ.**

В работе рассмотрена задача о динамике двухфазного газокапельного турбулентного потока при наличии межфазного теплообмена в межреберной ячейке. При решении используются двумерные стационарные RANS уравнения, записанные с учетом влияния частиц на процессы переноса в газе [4,5]. Для описания динамики течения и тепломассопереноса в газовой и дисперсной фазах используется эйлеров континуальный подход [6]. Схематическое представление течения приведено на рис. 1.



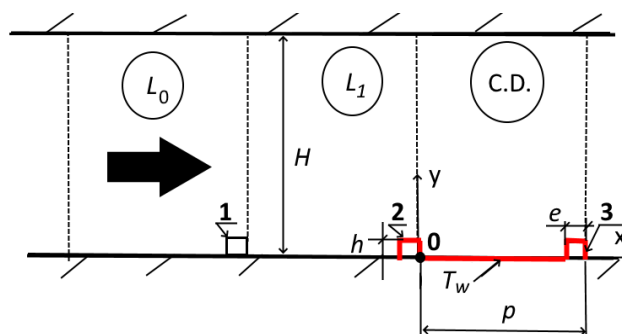


Рис. 1. Схема обтекания двухфазным турбулентным потоком в оребренном канале. Черная стрелка - направление потока, аббревиатура «C.D.» - расчетная область, «1», «2» и «3» - 1-е, 2-е и 3-е ребро.

### РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ И ИХ КРАТКИЙ АНАЛИЗ.

Все численные расчеты выполнены для смеси воздуха с каплями воды на входе в канал для случая нисходящего движения двухфазного потока при атмосферном давлении. На одной из стенок плоского канала установлено оребрение. Нагрев проводился по всей поверхности межреберной ячейки с целью уменьшения влияния возможного процесса пленкообразования при осаждении капель на стенку из двухфазного потока.

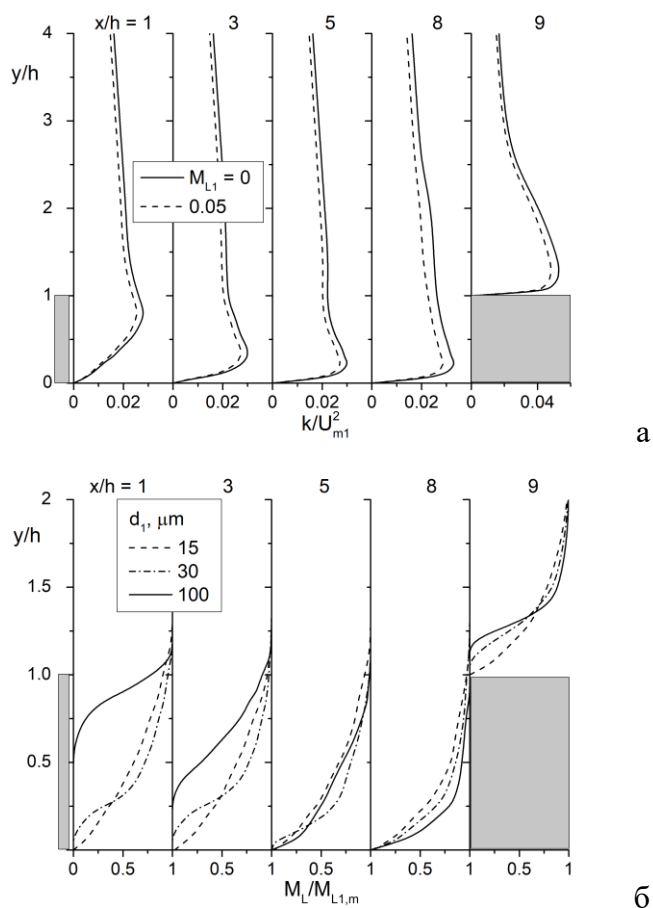


Рис. 2. Поперечные профили ТКЭ (а) и массовой концентрации дисперсной фазы при вариации начального диаметра капель жидкости (б).  $Re = 1.6 \times 10^4$ . (а):  $d_1 = 15$  мкм; (б):  $M_{L1} = 0.05$ .

Максимальное значение турбулентной кинетической энергии (ТКЭ) газовой фазы получено в районе преграды, расположенной вниз по потоку, и оно превышает значение для кинетической энергии турбулентности внутри межреберной ячейки практически в 2 раза (см. рис. 2а). Мелкие частицы при  $Stk < 1$  ( $d_1 < 30$  мкм) проникают в об-

ласть отрыва потока и наблюдаются по всему поперечному сечению канала и могут выходить из пределов области межреберной ячейки ввиду их малой инерции. Крупные инерционные капли ( $Stk > 1$  и  $d_l > 30$  мкм) присутствуют в основном в слое смешения и ядре потока и накапливаются в пристенной области в потоке при приближении к ребру, расположенному вниз по потоку (см. рис. 2б).

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Результаты получены в рамках Мегагранта Министерства науки и образования РФ (Код проекта 075-15-2021-575).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калинин Э.К., Дрейцер Г.А., Ярхо С.А. Интенсификация теплообмена в каналах. М.: Машиностроение. 1990. 208 с.
2. Terekhov V., Dyachenko A., Smulsky Ya., Bogatko T., Yarygina N. Heat transfer in subsonic separated flows. Cham: Springer. 2022.
3. Зайков Л.А., Стрелец М.Х., Шур М.Л. Сравнение возможностей дифференциальных моделей турбулентности с одним и двумя уравнениями при расчете течений с отрывом и присоединением. Течение в канале с обратным уступом // ТВТ. 1996. Т. 34. № 5. С. 724–736.
4. Pakhomov M.A., Terekhov V.I. Second moment closure modelling of flow, turbulence and heat transfer in droplet-laden mist flow in a vertical pipe with sudden expansion // Int. J. Heat Mass Transfer. 2013. V. 66. P. 210–222.
5. Pakhomov M.A., Terekhov V.I. Droplet evaporation in a gas-droplet mist dilute turbulent flow behind a backward-facing step // Water 2021. V. 13. Paper 2333.
6. Зайчик Л.И., Козелев М.В., Периуков В.А. Расчет турбулентных газодисперсных течений в каналах с зонами рециркуляции // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 4. С. 65–75.



## МЕХАНИЗМ ЗАПУСКА ОБЪЕМНЫХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЕЙ ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ КАПЛИ С ВОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В.Е. Прохоров

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва  
[prohorov@ipmnet.ru](mailto:prohorov@ipmnet.ru)

Ярким эффектом в акустике падающих капель является резонансное излучение воздушных пузырей, отрывающихся от подводных каверн. Явление представляет большой интерес для фундаментальной науки [1,2,3] и прикладных задач – измерения подводного шума дождя [4,5], обнаружения выходов газа из природных [6] и магистральных [7] источников. Несмотря на огромное количество экспериментов и теоретических работ, остается открытым вопрос о механизме запуска объемных осцилляций, которые, в свою очередь, являются источниками акустического излучения. Основную трудность здесь представляет обнаружение как самих осцилляций, так и процессов, инициирующих осцилляции. В [8] предложен метод вычисления объема и поверхности для пузырей, обладающих вращательной симметрией относительно вертикальной оси – в этом случае задача сводится к одномерной, что позволяет рассчитать геометрические

параметры пузырей по кадрам видеосъемки и, при достаточном пространственном и временном разрешении, выделить в них объемные осцилляции.

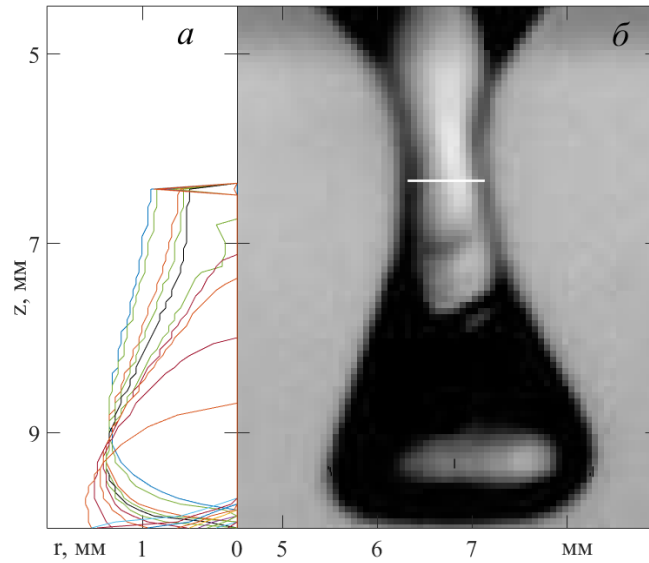


Fig. 1. *a* - семейство контуров (левая половина) формирующегося пузыря (*б*) в координатах  $(r, z)$ . Светлая черта – линия отрыва.

В настоящей работе проводилась скоростная видеосъемка (15000 к/с) подводной каверны, возникающей при ударе капли, с одновременной регистрацией акустических сигналов с временным разрешением 1 мкс. Далее выделялись видеокадры, содержащие каверны, от которых отделялись осесимметричные пузыри. Каждый видеокадр обрабатывался для получения контура каверны от линии разрыва (рис. 1б, светлая черта) до нижнего края. По семейству контуров рассчитывались значения объема и площади поверхности в текущий момент времени, и осредненное по поверхности давление Лапласа  $p_s$ , которое, вместе с гидростатическим давлением  $p_h$ , является внешним по отношению к внутреннему объему пузыря:

$$p_s(t) = \frac{\sigma}{S(t)} \int_{z_1}^{z_2} (\kappa_p + \kappa_m) ds$$

где  $S(t) = \int_{z_1}^{z_2} ds(t)$  – текущее значение площадь поверхности пузыря,

$$ds(t) = 2\pi r \sqrt{1 + r_z^2(z, t)} dz, \quad r_z(z, t) = dr / dz, \quad \kappa_m = z_{rr} (1 + z_r^2)^{-3/2} \text{ и}$$

$$\kappa_p = z_r \left( r \cdot \sqrt{1 + z_r^2} \right)^{-1} - \text{меридиональная и параллельная кривизны, } z_r = r_z^{-1},$$

$z_{rr} = dz_r / dr$  – первая и вторая производные. Пространственные массивы линейных переменных  $r$  и  $z$  берутся путем обработки отдельных контуров (рис. 1а), а их временные зависимости – по всему семейству контуров.

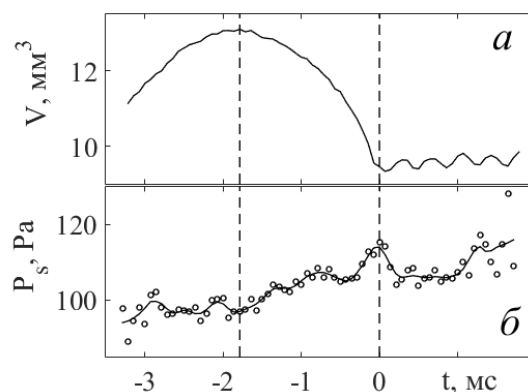


Рис. 2. Временные зависимости объема пузыря (а) и давления Лапласа (б, кружки – эксперимент, кривая – осреднение). Отсчет времени от момента разрыва перемычки.

Эволюция давления укладывается в три стадии, и тесно связана с эволюцией объема пузыря. На первых двух стадиях – I и II – пузырь существует как составная часть каверны, расположенная ниже линии отрыва. На стадии I каверна имеет цилиндрическую форму, ее размер растет, что отражается в росте условного объема (рис. 2а). В среднем поверхность каверны гладкая, однако из-за нестабильности формы оголовка (рис. 1б) при вычислении  $p_s$  получается сильный разброс интегральной кривизны вблизи среднего уровня (рис. 1а, I). На границе стадий I и II в каверне намечается сужение на уровне разрыва, в этот момент объема достигает максимума (рис. 1а) и начинает уменьшаться. В дальнейшем на стадии II каверна принимает форму песочных часов, в ней окончательно формируется перемычка, что сопровождается заметным немонотонным ростом кривизны и давления. На данной стадии каверны имеет четкие формы с ярко выраженной кривизной, которая при вычислении дает точки, тесно расположенные вдоль немонотонно растущей кривой давления (рис. 2б). В конце стадии II перед отрывом пузыря скорость сужения резко возрастает, что быстро меняет интегральную кривизну и вызывает резкий скачок давления на границе II-III (рис. 2б). Сразу после отрыва остроконечная вершина отделившегося пузыря быстро сокращается, кривизна резко падает, а вместе с ней и давление Лапласа. В результате формируется импульс давления амплитудой около 10 Па с вершиной при  $t = 0$ , передний фронт ( $\tau \approx 0.3 \text{ ms}$ ) которого расположен в зоне II, а задний ( $\tau = 0.25 \text{ ms}$ ) – в зоне III. К моменту заднего фронта отделившийся от каверны пузырь представляет собой замкнутую полость, которая в ответ на спад внешнего давления резко расширяется и начинает осциллировать на частоте свободных колебаний (рис. 2, а, III) 2.4 kHz. Во время переднего фронта осцилляции отсутствуют, так как пузырь остается незамкнутым, и воздух стравливается через перемычку в атмосферу. По этой же причине локальные скачки давления, возникающие на стадиях I и II, не приводят к осцилляциям.

Эксперименты проведены на Гидрофизическом комплексе для моделирования гидродинамических процессов в окружающей среде и их воздействия на подводные технические объекты, а также распространения примесей в океане и атмосфере ("ГФК ИПМех РАН") [9].

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект 19-19-00598-П "Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью").

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Longuet-Higgins, M.S. An analytical model of sound production by raindrop. J. Fluid Mech. 1990, 214, 395–410.
2. Guo Y.P., Williams J.E. A theoretical study on drop impact sound and rain noise. J. Fluid Mech. 1991. V. 227. pp. 345-355.
3. Howe M.S., Hagen N.A. On the impact noise of a drop falling on water. Journal of sound and vibration. 2011. V. 330. pp. 625-635.
4. Bjorno L. Underwater rain noise: sources, spectra and interpretations. J. De Physique IV. Colloque C5. Supplement de J. De Physique 3. 1994. V. 4. P. C5-1023 – C5-1030.
5. Nystuen J. Rainfall measurements using underwater ambient noise. J. Acoust. Soc. Am. V. 79 (4). 1986. pp. 972-982.
6. Greene C. A., Wilson P. S. Laboratory investigation of a passive acoustic method for measurement of underwater gas seep ebullition. J. Acoust. Soc. Am. 2012. v. 131 (1). pp. EL61-EL66. doi: 10.1121/1.3670590.
7. Leighton T. G. and White P. R. Quantification of undersea gas leaks from carbon capture and storage facilities, from pipelines and from methane seeps, by their acoustic emissions. Proc. R. Soc. London, Ser. A 468. 485–510 (2012).
8. Prokhorov V.E. Acoustics of oscillating bubbles when a drop hits the water surface. Phys. Fluids 33, 083314 (2021).
9. Гидрофизический комплекс для моделирования гидродинамических процессов в окружающей среде и их воздействия на подводные технические объекты, а также распространения примесей в океане и атмосфере (ГФК). <http://www.ipmnet.ru/uniquequip/gfk/>.



### О ВОПРОСАХ РЕАЛИЗАЦИИ ТРЕХМЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕРМОГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ ОПТИЧЕСКОГО РАЗРЯДА В ГАЗОРАЗРЯДНОЙ ЛАМПЕ

Прохорчук К.В.<sup>1,2</sup>, Котов М.А.<sup>2</sup>, Соловьев Н.Г.<sup>2</sup>, Шемякин А.Н.<sup>2</sup>, Якимов М.Ю.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>НИЯУ МИФИ

<sup>2</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

[oilwserious@yandex.ru](mailto:oilwserious@yandex.ru)

Исследование посвящено моделированию термогравитационной конвекции при генерации непрерывного оптического разряда (НОР) в газоразрядной лампе. Изучается проблема неустойчивости излучения плазмы из-за образующихся пульсаций конвективного факела. Модель строится на основе ранее полученных результатов, в частности, квазитрехмерной симметричной задаче [1], которая представляла из себя цилиндр с прилегающим сектором с симметрией на границах, образуя таким образом квазисферическую расчетную область. Были получены динамические распределения плотности, давления, температуры и скорости. Результаты качественно согласовывались с результатами экспериментов, на основе чего подтверждалось выдвинутое ранее предположение о гидродинамической термогравитационной природе колебаний [2]. Проводилось вариационное создание моделей [3], направленное на количественное согласование с ранее упомянутыми экспериментами. В этих исследованиях менялась расчетная область, а также задавались дополнительные газовые потоки через расход для увеличения частот пульсаций и выявления проблем ранее полученных результатов. Дан-

ная работа посвящена вопросам вычислительной реализации описанных колебаний с учетом некоторых аспектов реальной геометрии газоразрядных ламп, в которых проводились эксперименты по поддержанию НОР.

Вопрос о влиянии геометрических факторов расчетной области на выходные параметры уже поднимался в работах [1-4] – небольшое занижение частоты моделируемых колебаний, наблюдавшееся в сравнении с экспериментом, может быть обусловлено влиянием направлений течения плазмообразующего газа. Ранее не учитывалось влияние электродов на конвективные течения, т.к. задачи выполнялись в квазисферической расчетной области с осевой симметрией. В данной работе рассматривалась реальная геометрия лампы в форме вытянутого эллипсоида. Здесь, влияние электродов учитывалось как трехмерный локальный эффект – имелось влияние геометрического характера за счет задания расчетной области согласно размерам чертежа лампы, используемой в эксперименте (рис. 1).

Модель представляет из себя область в форме эллипсоида  $17 \times 6.5 \text{ мм}^2$ . Ксенон с характеристиками плотности, давления, вязкости и теплопроводности, взятыми из [5], задавался в качестве газовой среды. Размеры области тепловыделения, моделирующей плазменный источник, составляли  $0.3 \times 0.5 \text{ мм}^2$ , мощность 5 Вт. По бокам от источника находились области электродов с размерами, взятыми из рис.1 Решалась система уравнений Навье-Стокса с заданными граничными условиями прилипания и теплоотвода от стенок лампы. Начальное распределение параметров получалось вследствие решения стационарной задачи, затем происходило нестационарное моделирование. Такая постановка позволяла ускорить развитие газодинамических колебаний и сократить время вычислений. Более подробная информация содержится в [1]. Полученные распределения плотности представлены на рис. 2.

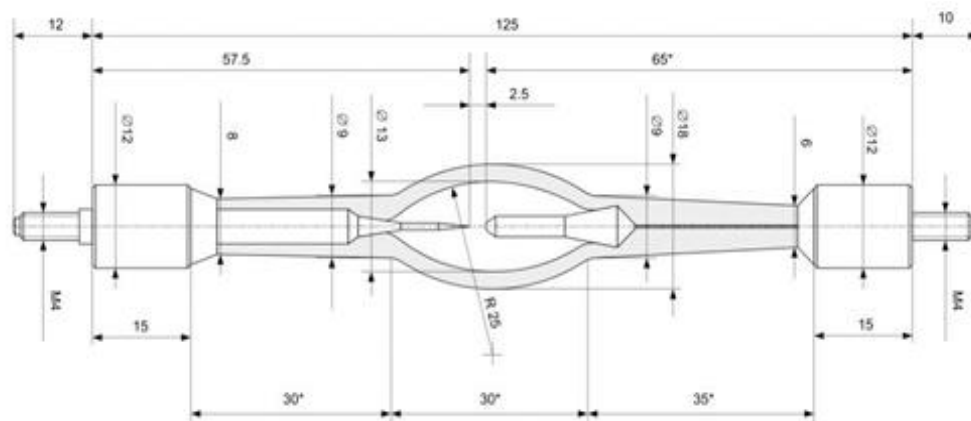


Рис.1. Схема газоразрядной лампы OSRAM 150 W/1, используемой в эксперименте для поддержания НОР.

Количество расчетных элементов сетки для стационарной задачи составляло порядка миллиона, для нестационарной чуть меньше половины миллиона. В такой задаче важными становятся аспекты сеточного разрешения (прежде всего, сгущение узлов) не только в областях высоких температурных градиентов (края НОР), но и в пристеночных слоях электродов (эффекты пограничного слоя). Уменьшение шага расчетной сетки было задано по краям лампы, на границе электродов и вблизи области тепловыделения. Расчетное время составляло 0.1 с. с шагом по времени 0.0002 с. Такие значения выбирались исходя из наблюдений за установлением расчетных колебаний, сделанными ранее в [1-4].



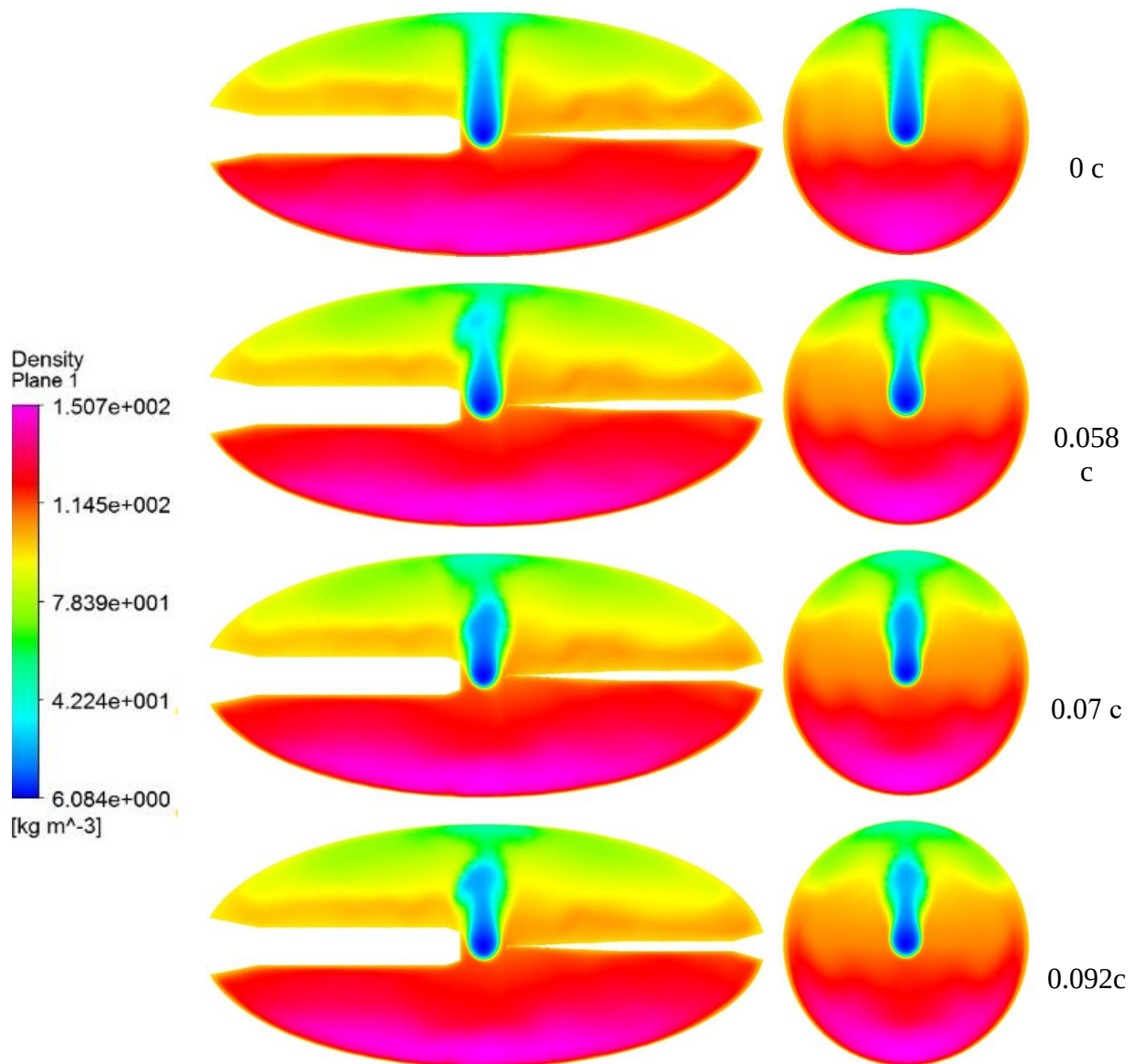


Рис.2. Распределения плотности в различные моменты времени в продольном и поперечном сечениях лампы. Давление горячего газа в лампе 47 атм, частота колебаний 49 Гц.

На рис. 3 проиллюстрированы распределения плотности, давления, температуры и скорости для случая с рис. 2.

Из-за присутствия электродных областей колебания конвективного факела теряют осесимметричную структуру и смещаются в продольном направлении. Картина поведения пульсаций становится более похожей на наблюдаемую в экспериментах [1,4]. Рассчитанное значение частоты колебаний выросло до 49 Гц по сравнению с предыдущими расчетами [1] и стало ближе к частотам пульсаций, регистрируемым в эксперименте.

Можно сказать, что полученные данные стали лучше описывать реальное поведение потоков газа, происходящих в газоразрядной лампе во время поддержания НОР. Однако, стоит упомянуть, что несмотря на близость данных к эксперименту, в проведенном исследовании не учитываются тепловые коэффициенты электродов, зависящие от материала и влияющие на внутренний нагрев.

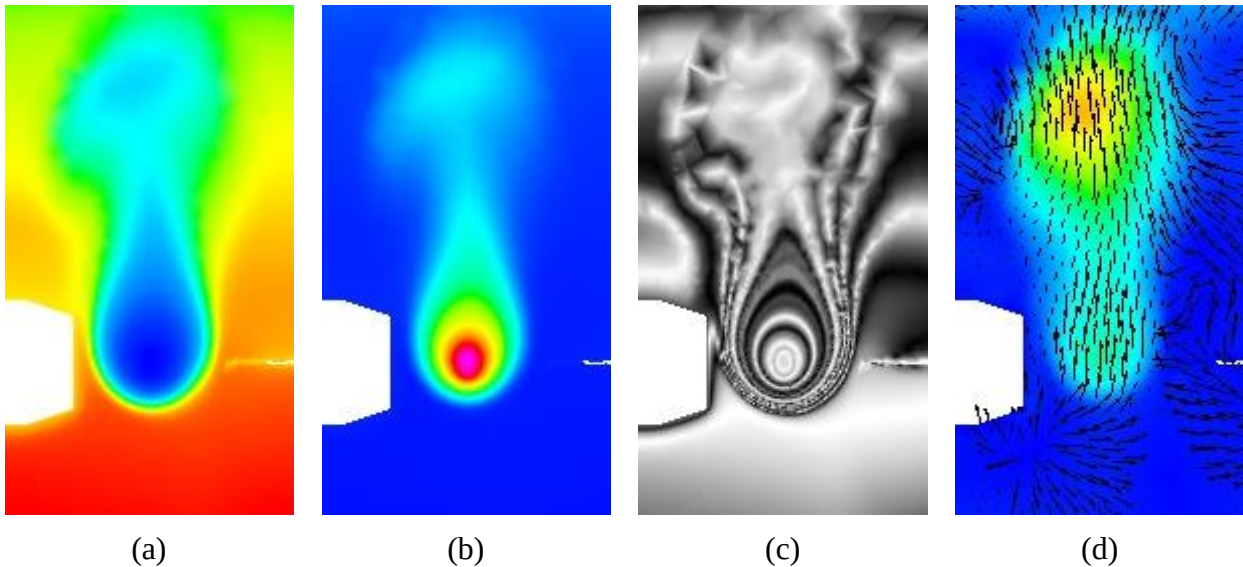


Рис.3. Распределения плотности (a), температуры (b), давления (c) и векторы скорости (d) на 0,096 с.  
Вырезанные области – электроды.

Также не учитывается лучистый теплообмен, поскольку в реальных условиях электроды поглощают излучение НОР, нагреваются и сами излучают. Исследования в этом направлении продолжатся. Представленные в работе расчеты приближают возможность комплексного моделирования явлений, происходящих во время колебаний конвективного факела НОР, и позволяют стать на шаг ближе к созданию методов стабилизации лазерно-плазменных источников.

#### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ АААА-А20-120011690135-5).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kotov M.A., Lavrentyev S.Yu., Solovyov N.G., Shemyakin A.N., Yakimov M.Yu. Dynamics of laser plasma convective plume in high pressure xenon // 2020 J. Phys.: Conf. Ser., 1675, 012073
2. Котов, М.А., Лаврентьев, С.Ю., Соловьев, Н.Г., Шемякин, А.Н., Якимов, М.Ю. (2021). Структура прямотеневого изображения градиентной среды и закон подобия для частоты колебаний конвективного факела непрерывного оптического разряда // Волны и вихри в сложных средах: 12-я международная конференция, Москва. Сборник материалов школы. – М.: ООО ИСПО-принт
3. Прохорчук К.В., Котов М.А., Якимов М.Ю. Изменение частоты пульсаций конвективного факела оптического разряда в дополнительном потоке газа // XLVII Гагаринские чтения : Сборник трудов Международной молодежной научной конференции. Секция «Механика и моделирование материалов и технологий» Москва, ИПМех РАН, 2021, с.127-130
4. Lavrentyev S.Yu., Solovyov N.G., Shemyakin A.N., Yakimov M.Yu. Buoyancy driven convection instability and related pulsing of continuous optical discharges // 2019 J. Phys.: Conf. Ser. 1394, 012012
5. Murphy A.B., Tam E. 2014 J. Phys. D: Appl. Phys. **47** 295202

## ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ РЕЗОНАТОРА ГЕЛЬМГОЛЬЦА ПЕРИОДИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ГАЗА

Пью Ко Ко, В.Г. Байдулов

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва

bayd@ipmnet.ru

В рамках длинноволнового приближения исследованы частоты и формы собственных колебаний газа в трубе периодического сечения, моделирующих камеру сгорания. Задачи сводится к задаче Штурма – Лиувилля с краевыми условиями первого рода, решение которой проводится методом ускоренной сходимости. Проведен детальный анализ зависимостей собственных чисел и собственных функций от параметров трубы. Выявлен «автомодельный» тип зависимости собственной частоты для различных мод. Выделены характерные значения параметров периодичности трубы, при которых происходит резкое изменение собственной частоты.

Исследуются собственные колебания газа в камере сгорания переменного сечения. В камеру поступает поток газа со скоростью, превышающую скорость звука. Таким образом, в области основного течения существование собственных частот и форм колебаний невозможно, однако расчеты показывают, что наличие в профиле камеры неоднородностей как конструктивного характера, так и дефектов приводит к возникновению областей, где скорость течения падает и становится меньше скорости звука. В таких областях часть энергии набегающего потока преобразуется в энергию стоячих акустических волн, при этом форма корпуса также испытывает искажение. При определенных условиях возможно также существование и нарастание амплитуды собственных колебаний газа может привести к неустойчивости горения. Для анализа возникающих в этом случае эффектов в данной работе было предложено аппроксимировать сечение камеры сгорания (далее трубы) периодической функцией вида  $S = S_0 h^2$ ,  $h = 1 - c \sin \pi b x$ , где  $c$  – амплитуда профиля сечения, а  $b$  – волновое число трубы (Рис. 1).

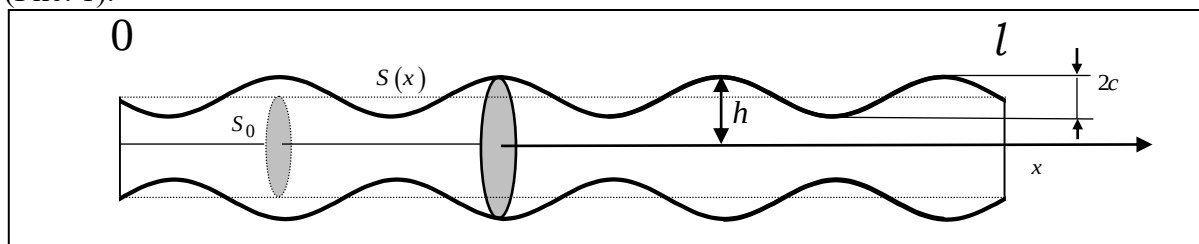


Рис. 1 Геометрия задачи

Итак, имеется труба периодического сечения длины  $l$ , в которой в линейном приближении исследуются собственные колебания газа. Пусть поперечные размеры трубы значительно меньше, чем продольный размер. Оба конца трубы открыты. Требуется определить, как изменяются частоты и формы продольных колебаний в зависимости от амплитуды профиля и волнового числа трубы. Используя линеаризованные уравнения акустики для звукового потенциала, после разделения переменных приходим к задаче Штурма–Лиувилля вида

$$u'' + 2 \frac{h'}{h} u' + \omega^2 u = 0, \quad a < 1 \quad (1)$$

С граничными условиями

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (2)$$

При малых величинах параметра  $a$  зависимость собственных частот от неоднородности профиля трубы можно оценить заменяя зависимость  $h'/h$ , на ее среднее значение на интервале  $\delta = -\langle h'/h \rangle$ .

Тогда решение ЗШЛ имеет вид

$$u_k = e^{kx} \sin \omega_k x, \text{ где } \omega_k = \sqrt{\pi^2 k^2 + \delta^2} \quad (3)$$

т.е. возрастание частоты колебания по сравнению с невозмущенной.

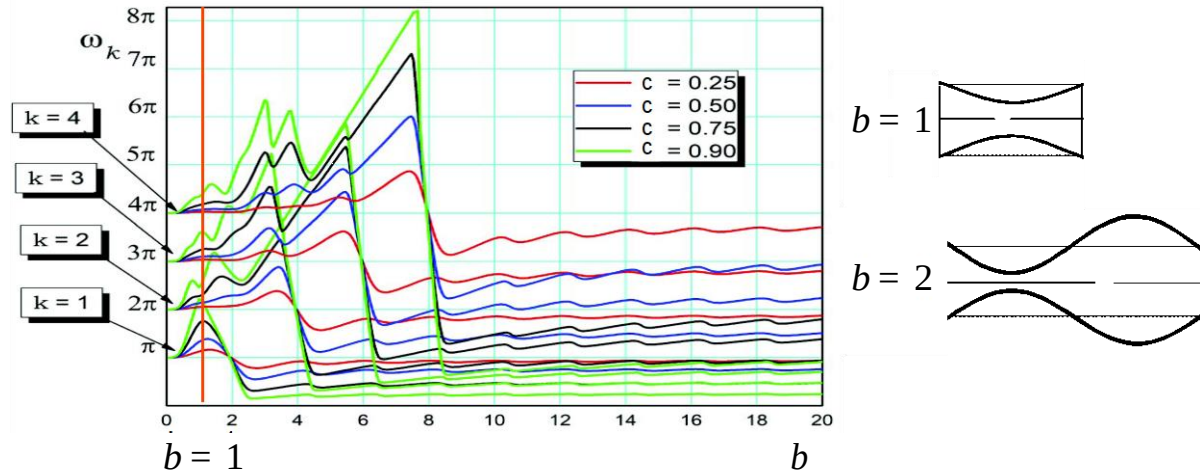


Рис. 2. Собственные частоты для разных значений амплитуды поперечного сечения трубы ( $c = 0.25, 0.50, 0.75, 0.90$ )

Для решения задачи Штурма–Лиувилля во всем диапазоне параметров применялся численно-аналитический метод ускоренной сходимости. Для всех допустимых значений амплитуды профиля трубы были вычислены первые четыре собственных чисел, соответственно четыре первых частот  $\omega_n = \sqrt{\lambda_n}$  с погрешностью  $10^{-6}$ .

Зависимости собственных частот колебаний от волнового числа трубы, приведенные на Рис. 2 показали, что первоначальное увеличение собственной частоты (согласующееся с асимптотикой (3)) достигает максимума при первом центрально-симметричном профиле трубы ( $b=1$ , Рис. 2, справа). Величина максимума более чем в два раза превышает невозмущенное значение  $\omega_n(0) = \pi n$ . Затем происходит падение значений частот до величин ниже невозмущенного значения. При этом при четном значении волнового числа трубы  $b=2k$  частота практически принимает невозмущенное значение, ее величина слабо зависит от величины амплитуды трубы. Начиная со значения  $b=2k$  зависимости частот для разных мод носят однотипный характер и могут быть представлены единообразно в переменных  $b \rightarrow b - 2(k-1)$ :  $\omega_k \rightarrow \omega_k / k$ ,  $k = \overline{1, 4}$ . Анализ результатов расчетов методом наименьших квадратов показал (для асимптотики больших  $b$ ) степенной рост отклонения частоты колебаний от невозмущенного значения с показателем не зависящим от номера моды  $\Delta \omega_{1,2}(b=2\pi n) \sim c^{2/3}$ . Профили первых собственных функций центрально симметричных труб ( $b=2n-1$ ) для различных значений амплитуд профиля трубы  $c$  приведен на Рис. 3.

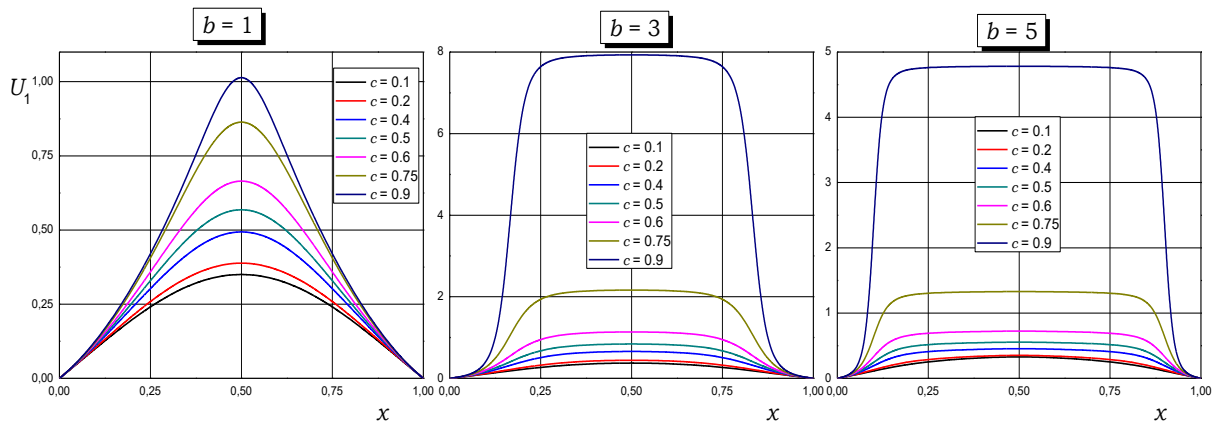


Рис. 3. Профили симметрично распределенных ( $b = 2k + 1$ ) первых собственных мод для различных значений параметра  $c$

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Исследование выполнено в рамках госзадания №АААА-А20-120011690138-6



## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АТТРАКТОРОВ ВНУТРЕННИХ ВОЛН, ГЕНЕРИРУЕМЫХ УГЛОВЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ ПЛАСТИНЫ В ЛИНЕЙНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Я.Е. Рудая<sup>1</sup>, Н.Д. Шмакова<sup>1</sup>, А.В. Чеботников<sup>1</sup>, О.А. Бойко<sup>1</sup>,  
Е.В. Ерманюк<sup>1</sup>, И.Н. Сибгатуллин<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Институт системного программирования им. В.П. Иванникова РАН, Москва

<sup>3</sup>Институт океанологии им. П.П. Шишова РАН, Москва

[y.rudaya@g.nsu.ru](mailto:y.rudaya@g.nsu.ru)

Исследование внутренних волн имеет множество приложений в геофизике и климатологии [1]. Внутренние волны в океане возникают в стратифицированной жидкости при взаимодействии приливных течений с рельефом океанического дна. В лабораторных экспериментах часто рассматривается система отсчета, связанная с приливным течением, т.е. жидкость находится в покое, а колебания осуществляет погруженное в жидкость тело. Дисперсионное соотношение для таких волн имеет вид

$$\frac{\omega}{N} = \sin\theta,$$

где  $\omega$  - частота колебания,  $N$  - частота плавучести,  $\theta$  - угол распространения волны с горизонталью.

Из дисперсионного соотношения следует специфический закон отражения волновых лучей от наклонной стенки: падающая и отраженная волны распространяются под одним и тем же углом к вектору силы тяжести, что приводит к фокусировке волновой энергии. При определенном сочетании геометрии области и угла распространения волновых лучей фокусировка может привести к концентрации энергии волн вблизи замкнутых геометрических конфигураций, называемых волновыми аттракторами [2].



Целью работы является экспериментальное исследование квази-двумерных аттракторов внутренних волн, имеющих по одному отражению от вертикальных и горизонтальных стенок, генерируемых угловыми колебаниями пластины. Экспериментальная установка представляет собой резервуар из оргстекла длиной 110 см, шириной 23 см и глубиной 50 см, с наклоненными под углом  $32^\circ$  боковыми стенками и помещенной в центре пластиной, совершающей колебания с определенными амплитудой  $A$  и частотой  $\omega$ . На пластине закреплен датчик линейных перемещений и момента силы. Колебания пластины в однородно-стратифицированной жидкости генерируют два симметричных волновых аттрактора. Для визуализации течения используется синтетический шлирен-метод. Поля градиентов плотности вычислены с помощью кросс-корреляции изображений. Для фильтрации волн на определенных частотах использовано преобразование Гильберта [3].

### РЕЗУЛЬТАТЫ.

Рассмотрено влияние амплитуды колебаний на структуру волнового аттрактора. При малых амплитудах аттрактор устойчив. При увеличении амплитуды колебания волнопродуктора возникает триадный резонанс и волновая турбулентность (рис. 1), как и в случае аттрактора внутренних волн, генерируемых специальным волнопродуктором [4].

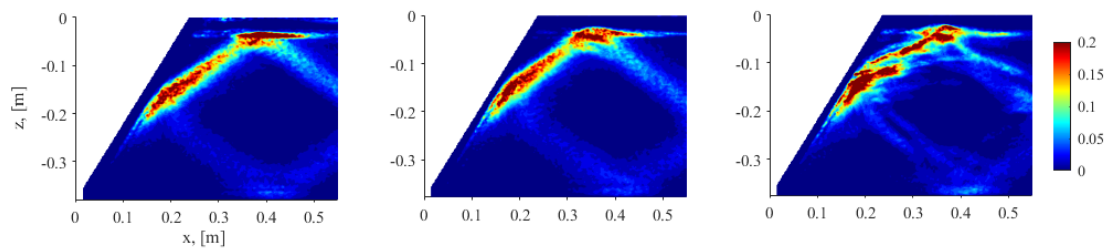


Рис. 1. Поля изменения плавучести  $\Delta N^2$  при амплитудах колебаний (слева направо) 0.76, 2.56 и 3.5 мм на периоде колебаний 45 при частоте колебаний  $\omega = 0.47$  рад/с.

Проведено сравнение экспериментальных данных с двумерными численными расчетами. При сравнении аттракторов на малых амплитудах наблюдаются различия в ширине лучей аттрактора, но качественно формы аттракторов подобны.

Из данных, полученных с датчика момента силы, и из двумерных численных расчетов была вычислена мощность в системе [5]. На рис. 3 проведено сравнение мощностей для различных амплитуд колебаний. В линейном режиме (амплитуда  $A = 0.47$ ) расчет в точности совпадает с экспериментальными данными. При увеличении амплитуды колебаний, растет диссипация энергии на горизонтальных стенках, которая отсутствует в двумерных расчетах [4]. Таким образом, расчет и экспериментальные данные расходятся на больших амплитудах колебаний.

При достаточно большой амплитуде колебаний, обнаружены вторичные короткие волны на основной частоте возмущения с групповой скоростью, противоположно направленной групповой скорости основной волны. На рис. 3 представлены данные для горизонтального градиента плотности  $\partial \rho / \partial x$ , отфильтрованные на основной частоте и по пространству (рис. 3 слева волновой вектор  $\vec{k} < 0$ , справа  $\vec{k} > 0$ ).



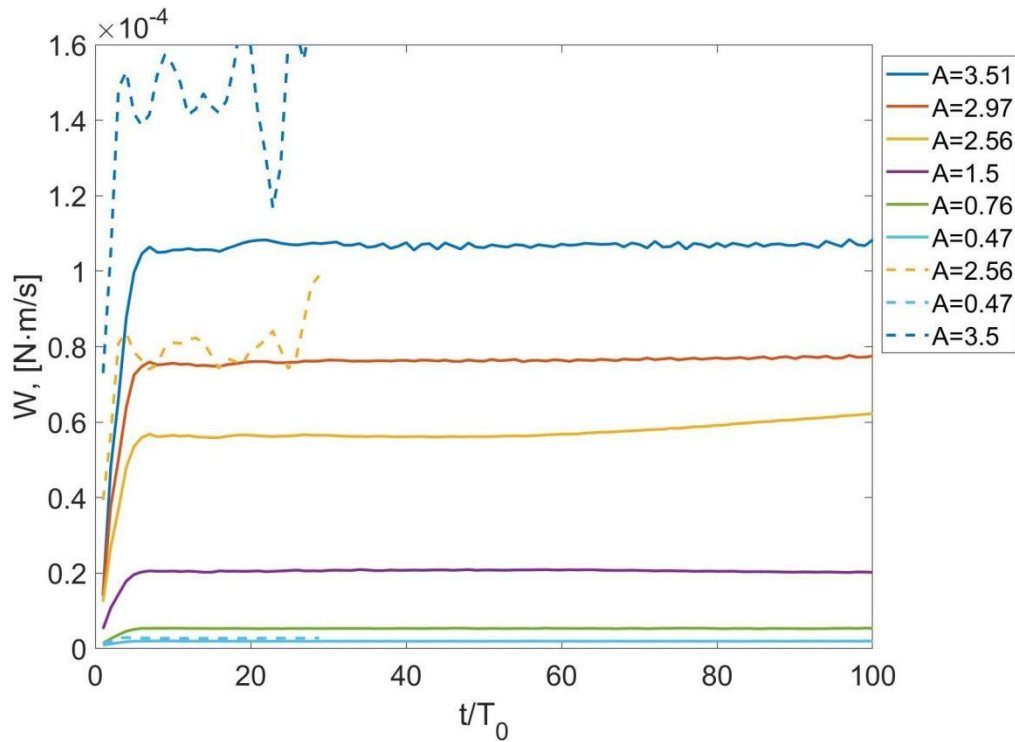


Рис. 2. График мощности в системе в зависимости от времени: сплошными линиями показаны данные, рассчитанные с датчика момента силы, пунктирными линиями – численные, цветом показаны различные амплитуды колебаний.

Наблюдается возникновение коротких вторичных волн на основной частоте, направление фазовой скорости которых противоположно направлению фазовой скорости основного луча аттрактора в той же области.

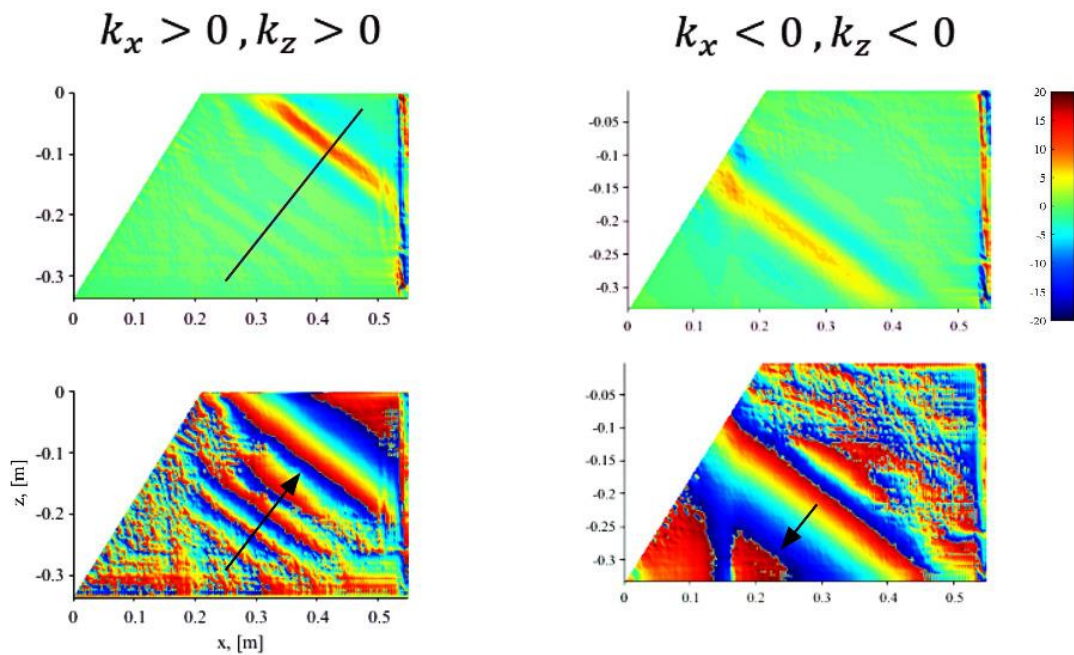


Рис. 3. Возмущение плотности  $\partial \rho / \partial x$  ( $\text{кг/м}^4$ ) одной из ветвей аттрактора с амплитудой 3.5 мм.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 20-11-20189

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ferrari, R. What goes down must come up // *Nature*. – 2014. – 513. – 179–180.
2. Maas, L. R. M., Benielli, D., Sommeria, J., Lam, F.-P. A. Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid // *Nature*. – 1997. – 388. – 557–561.
3. Mercier M. J., Garnier N.B., Dauxois T. Refection and diffraction of internal waves analysed with the Hilbert transform // *Physics of Fluids*, V. 20, pt. 8. 086601, 2008.
4. Brouzet C., Sibgatullin I. N., Scolan H., Ermanyuk E. V., Dauxois T. Internal wave attractors examined using laboratory experiments and 3D numerical simulations // *Journal of Fluid Mechanics*, 793: 109 - 131, 2016.
5. Davis G., Dauxois T., Jamin T., Joubaud S. Energy budget in internal wave attractor experiments // *Journal of Fluid Mechanics*, 880: 743-763, 2019.



## ПЕРВЫЙ МЕТОД СТОКСА В ЗАДАЧЕ О ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

*А.И. Руденко*

*«Калининградский государственный технический университет»*

*ФГБОУ ВО «КГТУ», Калининград*

[alex-rudenko@bk.ru](mailto:alex-rudenko@bk.ru)

Получено приближенное решение задачи о строении и характеристиках стационарной нелинейной периодической волны на поверхности жидкости конечной глубины. Способ решения такой: сначала упрощаются кинематическое и динамическое условия. Упрощению динамического условия содействует интеграл Бернулли. Вводится интегральный оператор типа свертки. Определяются четыре функции одной переменной, основной из которых является уровень волны. Получены одно линейное и три квадратичных уравнения. Определены и обоснованы условия нулевого среднего для уровня и относительной функции тока, а также условие ортогональности уровня волны основной гармонике. Как у Стокса, неизвестные функции и параметры ищутся в виде разложений по безразмерному волновому числу. Получено нелинейное дисперсионное соотношение. Выполнен анализ решений. Рассмотрены случаи коротких и длинных волн.

Для достижения цели нам пришлось видоизменить методику Стокса. Прежде всего, мы упростили математическую постановку задачи путем введения относительной функции тока (Стокс и его последователи использовали потенциал скоростей, что усложняет процедуру решения), и преобразования кинематического и динамического граничных условий. Упрощению динамического условия содействует интеграл Бернулли. Введен интегральный оператор типа свертки. Определены четыре функции одной переменной, основной из которых является профиль стационарной волны. Благодаря этому задача о нелинейной стационарной волне сводится к решению одного линейного и трех квадратичных уравнений.

Уравнения динамики жидкости дополнены условиями нулевого среднего для уровня и относительной функции тока. Условие нулевого среднего для уровня фактически определяет глубину жидкости. Условие нулевого среднего для относительной

функции тока означает, что дрейф волны отсутствует и, значит, это условие позволяет получить реальное значение для скорости волны.

Для решения используются разложения по степеням произведения  $ka$ . Приняты условие ортогональности второго и третьего приближений основной гармонике. Это условие однозначно определяют решение трех систем уравнений для трех низших приближений.

Система уравнений линейного приближения.

$$\psi_1(x) = \cos(kx), \xi_1(x) = s_0 \cos(kx), \xi_1(x) - k^{-1}V(\psi_1(x)) = 0.$$

Система уравнений второго приближения.

$$-\eta_2(x) + \psi_2(x) = B_{21}(x) + d_2, -s_0\eta_2(x) + \xi_2(x) = B_{22}(x) - P_2, \xi_2(x) - k^{-1}V(\psi_2(x)) = 0,$$

где  $B_{21}(x) = -\cos(kx) \cdot \xi_1(x)$ ,

$$B_{22}(x) = s_0 s_1 \cos(kx) + k^{-2} \left( \frac{1}{2} (\psi_1'(x))^2 + \cos(kx) \psi_1''(x) \right) + \frac{1}{2} \xi_1^2(x).$$

Система уравнений третьего приближения.

$$-\eta_3(x) + \psi_3(x) = B_{31}(x) + d_2, -s_0\eta_3(x) + \xi_3(x) = B_{32}(x) - P_3, \xi_3(x) - k^{-1}V(\psi_3(x)) = 0,$$

где

$$B_{31}(x) = -\eta_2(x)\xi_1(x) - \cos(kx)\xi_2(x) + \frac{1}{2} k^{-2} H_{22}(x) \psi_1''(x),$$

$$B_{32}(x) = s_0(s_2 \cos(kx) + s_1 \eta_2(x)) + k^{-2}(\eta_2(x) \psi_1''(x) + \psi_1'(x) \psi_2'(x) + \cos(kx) \psi_2''(x)) - \\ - \cos(kx)(\psi_1''(x) \xi_1(x) - \psi_1'(x) \xi_1'(x)) + \frac{1}{2} H_{22}(x) \xi_1''(x) + \xi_1(x) \xi_2(x),$$

$$H_{22}(x) = \frac{1}{2} k^{-2} (1 + \cos(2kx)).$$

Решение системы уравнений линейного приближения имеет вид:

$$\psi_1(x) = \cos(kx), \xi_1(x) = R \cdot \cos(kx), s_0 = R.$$

Решение системы уравнений второго приближения имеет вид:

$$\eta_2(x) = \frac{1}{2^2} R(3R^2 - 1) \cos(2kx), \psi_2(x) = \frac{3}{2^2} R(R^2 - 1) \cos(2kx),$$

$$\xi_2(x) = \frac{3}{2^2} (R^4 - 1) \cos(2kx), s_1 = 0.$$

Решение системы уравнений третьего приближения имеет вид:

$$\eta_3(x) = \frac{3}{2^6} R(3R^2 - 1)(3R^4 + 1) \cos(3kx),$$

$$\psi_3(x) = \frac{1}{2^3} R^2(6R^2 - 1) \cos(kx) + \frac{1}{2^6} R(R^2 - 1)(3R^2 + 1)(9R^2 - 13) \cos(3kx),$$

$$\xi_3(x) = \frac{1}{2^3} R^3(6R^2 - 1) \cos(kx) + \frac{3}{2^6} R^2(R^2 - 1)(R^2 + 3)(9R^2 - 13) \cos(3kx),$$

$$s_2 = \frac{1}{2^3} R(9R^4 - 10R^2 + 9).$$

Выражение уровня свободной поверхности, образуемого стационарной нелинейной периодической волной и ОФТСГ.

$$\eta(x) \equiv a \cos(kx) + \frac{1}{2^2} k R(3R^2 - 1)a^2 \cos(2kx) + \frac{3}{2^6} k^2 R(3R^2 - 1)(3R^4 + 1)a^3 \cos(3kx),$$

$$\psi(x) \equiv a \cos(kx) + \frac{3}{2^2} k R(R^2 - 1)a^2 \cos(2kx) - \frac{1}{2^3} k^2 R^2(6R^2 - 1)a^3 \cos(kx) +$$

$$+ \frac{1}{2^6} k^2 R(R^2 - 1)(3R^2 + 1)(9R^2 - 13)a^3 \cos(3kx).$$

Значения параметра  $s$ , динамической глубины и параметра  $P$ .

$$s \equiv k R(1 - \frac{1}{2^3} R(9R^4 - 10R^2 + 9)(ka)^2), \quad d \equiv h + \frac{1}{2} R(ka)^2, \quad P = \frac{1}{2^2} (R^2 - 1)(ka)^2.$$

Нелинейное дисперсионное соотношение:

$$c = \sqrt{\frac{g}{kR}} (1 + \frac{1}{2^4} R(9R^4 - 10R^2 + 9)(ka)^2).$$

Это выражение показывает, что скорость нелинейной стационарной волны растет с ростом ее амплитуды. Для уединенной волны это свойство обнаружил Скотт Рассел.

В случае коротких волн  $kh \gg 1$ , поэтому  $R \approx 1$ . Тогда выражения уровня свободной поверхности, образуемого короткой стационарной нелинейной периодической волной таковы.

$$\eta(x) \equiv a \cos(kx) + \frac{1}{2} k a^2 \cos(2kx) + \frac{3}{2^3} k^2 a^3 \cos(3kx),$$

$$\psi(x) \equiv a(1 - \frac{5}{2^3} (ka)^2) \cos(kx).$$

Значения динамической глубины и параметра  $P$ .

$$d - h \equiv \frac{1}{2} (ka)^2, \quad P = 0.$$

Нелинейное дисперсионное соотношение.

$$c = \sqrt{\frac{g}{kR}} (1 + \frac{1}{2} (ka)^2).$$

В случае длинных волн  $kh \ll 1$ , поэтому  $R \approx (kh)^{-1}$ . Тогда выражение уровня свободной поверхности, выражение ОФТСГ, значения динамической глубины и параметра  $P$ , а также нелинейное дисперсионное соотношение (см. пункт 8) принимают следующий вид:

$$\eta(x) \equiv a \cos(kx) + \frac{3}{2^2 k^2 h^3} a^2 \cos(2kx) + \frac{3^3}{2^6 k^5 h^7} a^3 \cos(3kx),$$

$$\psi(x) \equiv a \cos(kx) + \frac{3}{2^2 k^2 h^3} a^2 \cos(2kx) - \frac{5}{2^3 k^2 h^4} a^3 \cos(kx) + \frac{3^3}{2^6 k^5 h^7} a^3 \cos(3kx),$$

$$d \equiv h + \frac{1}{2h} ka^2, \quad P = \frac{1}{2^2 h^2} a^2, \quad c = \sqrt{gh} (1 + \frac{3^2}{2^4 k^3 h^5} a^2).$$

В формулах следует считать, что  $\frac{a}{kh^2} \ll 1$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stokes, G. G. 1880. Math. Phys. Papers, Vol 1, Camb. Univ. Press.
2. Shwartz Bernard. Journal of Fluid Mechanics. V. . 1974, Pp.42-68.

3. *Бабенко К.И.* Несколько замечаний к теории поверхностных волн конечной амплитуды.// Докл. АН СССР. 1987. Т. 294. № 5. С. 1033 -1037.
4. *Karabut E.A.* An approximation for the highest gravity waves on water of finite depth.// J. Fluid Mech. 1998. V. 372. P. 45 - 70.
5. *Зайцев А.А., Руденко А.И.* К теории стационарных волн на горизонтальном течении с линейным профилем скорости// ПМТФ. Т. 47. № 3. Новосибирск. 2006. С. 43 - 49.



## О РАБОЧЕМ ВРЕМЕНИ БЕЗДИАФРАГМЕННОЙ УДАРНОЙ ТРУБЫ

*Л.Б. Рулева*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

[ruleva@ipmnet.ru](mailto:ruleva@ipmnet.ru)

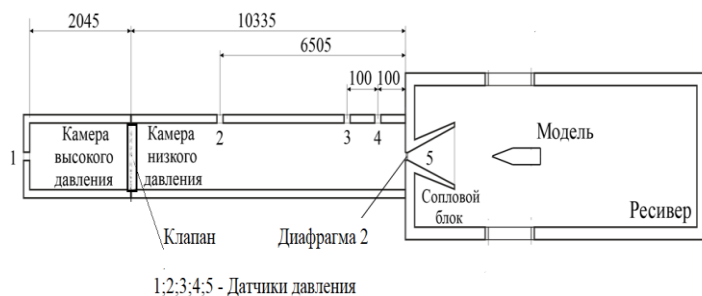
### ВВЕДЕНИЕ.

Рабочее время ударных труб кратковременного действия мало, исчисляется единицами и долями миллисекунд. Увеличение рабочего времени методом «сшитой поверхности» [1] трудно реализовать на многорежимной ударной трубе. В ударной трубе установки «Гиперзвуковая ударная аэродинамическая труба» (ГУАТ) [2] формируются различные режимы давлений и температур «пробки» торможения ударной волны на входе в сопло [3]. В ГУАТ используют электромагнитный пневматический клапан [4] для инициации контактного разрыва вместо металлической диафрагмы между камерами высокого (КВД) и низкого (КНД) давлений. Клапан дает хорошую повторяемость от эксперимента к эксперименту, что важно для валидации математического моделирования. Продолжительность рабочего времени на установке ГУАТ была увеличена на 30% [5] путем удлинения КНД, обеспечивая рекомендуемое [6] соотношение диаметра к длине КНД. Этот способ экономически затратный, требует увеличения металлоемкой части ударной трубы и больших лабораторных площадей.

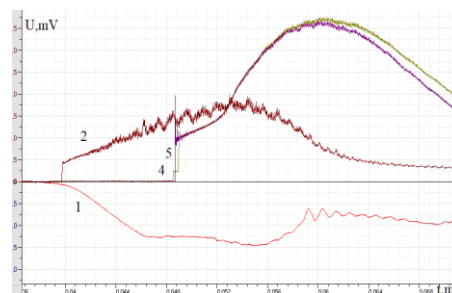
Рассмотрим предлагаемое техническое решение по увеличению продолжительности рабочего времени бездиафрагменной ударной трубы ГУАТ, используя свойства электромагнитного пневматического клапана [4].

### ЛАБОРАТОРНАЯ УСТАНОВКА

Схема лабораторной установки ГУАТ показана на рис.1., графики датчиков давления приведены на рис.2.



*Рис.1. Установка ГУАТ.*



*Рис.2. Графики датчиков давления*

Графики датчиков давления (4) и (5) рис. 2. показывают начало отсчета рабочего времени: падающую, отраженную ударную волну, «полочки» квазистационарного состояния потока. Подъем графиков свидетельствует о приходе контактной поверхности и росте давления до момента подхода волны разрежения, после чего рабочее время ударной трубы заканчивается, т.к. давление начинает снижаться. Длительность рабочего времени на графике этого режима работы, составила 12 мс. Чем больше перепад давлений в камерах высокого и низкого давлений, тем выше скорость потока и меньше время существования «полочек» [6].

Диаграмма рабочего времени ударной трубы показана на рис.3 с примером изменений, вызванных использованием функции клапана, схема которого приведена на рис.4.

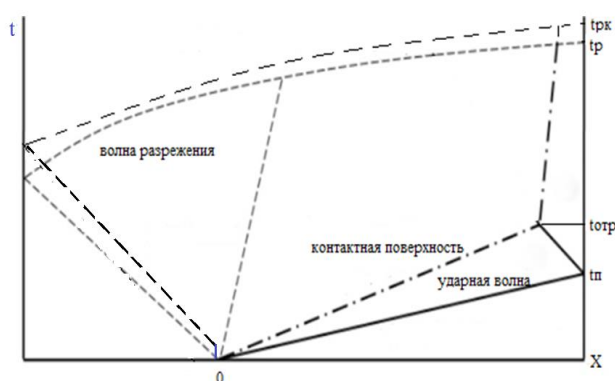


Рис.3. Диаграмма рабочего времени ударной трубы. Время:  $t_n$ ,  $t_{otr}$ ,  $t_p$ ,  $t_{rk}$  – падающей, отраженной, рабочее и рабочее с клапаном.

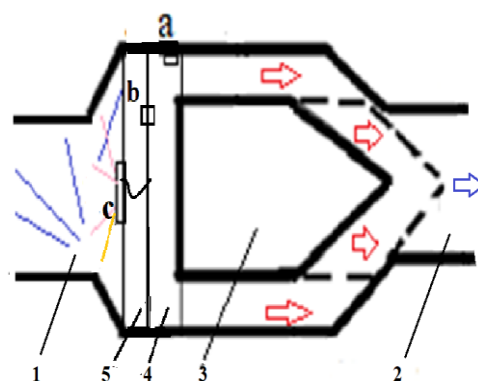


Рис.4. Клапан. 1-КВД; 2-КНД; 3-колпак, 4-полость 1, 5-полость 2; a,b,c – окна.

Электромагнитный пневматический клапан в штатном исполнении заправляется воздухом в полость (1) под небольшим давлением, который позволяет запереть подвижным колпаком (3) проходное сечение КНД (2). При срабатывании электромагнита клапана заправленный воздух стравливается через окно «a» в атмосферу, подвижный колпак перемещается и открывает кольцевой зазор между стенками колпака и стенкой КНД. Из КВД воздух вытекает с ускорением, благодаря диффузорной форме колпака. При этом КВД заполняется волной разрежения. Фронт волны разрежения распространяется со скоростью звука и в теоретических исследованиях этот процесс интерпретируется движением поршня [1].

Рабочее время ударной трубы предлагается увеличить ( $t_{rk}$ ) путем торможения волны разрежения, используя функциональные возможности клапана.

#### ТОРМОЖЕНИЕ ВОЛНЫ РАЗРЕЖЕНИЯ.

Сдерживание волны разрежения возможно путем направления потока стравливания воздуха не в атмосферу, а внутрь ударной трубы, а именно в КВД в момент снижения давления до давления менее 1 атм. В новом исполнении клапана вводятся полость 5 и окна «b» и «c» рис.4. При срабатывании электромагнита воздух стравливается в полость 5 прежней золотниковой системой клапана и удерживается там давлением в КВД на крышку окна «c». Когда давление в КВД станет меньше 1 атм, в полости 5 подпружиненная крышка автоматически откроется и газ истечет в КВД, препятствуя волне разрежения.

Рабочее время ударной трубы увеличивается  $t_{rk}$ . Окно «b» открывается штатно золотниковым механизмом, заложенным в известной конструкции для окна «a», которое в предложенной конструкции не нужно. Подпружиненная крышка «c» открывается



автоматически за счет перепада давлений. Поджимающий колпак воздух, вместо выброса в атмосферу, остается в ударной трубе.

### **ВЫВОДЫ.**

Предложен способ увеличения рабочего времени путем торможения волны разрежения в многорежимной бездиафрагменной ударной трубе. Используется отработанный воздух управления подвижным элементом электромагнитного пневматического клапана, который направляется в камеру высокого давления при снижении давления в ней менее 1 атм. Клапан снабжается дополнительной полостью, перемещение воздуха в ней осуществляется прежней золотниковой системой. Конструктивные дополнения не влияют на работу клапана в штатном режиме.

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Масленников В.Г., Сахаров В.А. Двухдиафрагменная ударная труба Физико-технического института//ЖТФ. –М.1997. – С.88–95.
2. Суржиков С. Т. Расчетные исходные данные для решения тестовых задач в измерительной секции гиперзвуковой ударной аэродинамической трубы ГУАТ лаборатории РадГД ИПМех РАН//Физико-химическая кинетика в газовой динамике.– М. 2021.– Т.22.– вып. 1. –URL: <http://chemphys.edu.ru/issues/2021-22-1/articles/931>.
3. Суржиков С. Т. трубы ГУАТ лаборатории РадГД ИПМех РАН//Физико-химическая Расчетные исходные данные для решения тестовых задач в рабочей зоне гиперзвуковой ударной аэродинамической кинетика в газовой динамике.–М.2021.–Т. 22.– вып. 1.
4. Исаков С.Н., Исаков И.Н., Юркин С.В. РФ. Патент РФ №2066656 «Пусковая установка» (20.09.1996).
5. Panasenko A.V., Ruleva L.B. and Solodovnikov S.I. Increasing hypersonic aerodynamic shock tube working time duration//IOP Conf. Ser. —Mater. Sci. Eng. 927 012082.— 2020.— <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/927/1/012082/pdf>.
6. Hornung Hans. Ground Testing for Hypervelocity flow//Capabilities and Limitations Graduate Aerospace Laboratories California Institute of Technology RTO-EN-AVT-186. 2010. 26 p.
7. Рулева Л. Б., Солодовников С. И. Экспериментальные исследования формирования ударной волны в бездиафрагменной ударной трубе//Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2022. Т.23, вып. 3. <http://chemphys.edu.ru/issues/2022-23-3/articles/997/>.



## **ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВИЖУЩЕЙСЯ КАПЛИ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО РАСПЛАВА С ВОДОЙ**

*Н.С. Сиваков, С.Е. Якуш*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва,  
[sivakov@ipmnet.ru](mailto:sivakov@ipmnet.ru)*

Паровой взрыв – явление, происходящее при взаимодействии холодной (летучий хладагент) и горячей (имеющей температуру выше температуры кипения хладагента) жидкости при их тесном контакте.

Паровые взрывы представляют собой одну из основных проблем безопасности в атомной энергетике. При тяжелых авариях на ядерных реакторах возможно взаимодействие высокотемпературного расплава кориума, образовавшегося в результате плавления активной зоны реактора, с водяным теплоносителем [1].

В настоящее время большая роль в изучении паровых взрывов отведена численному моделированию. Например, численное исследование взрыва одиночных капель позволяет изучить физические механизмы фрагментации капель, а также получить количественные результаты, которые невозможно измерить экспериментально.

Данная работа посвящена трехмерному численному моделированию взаимодействия движущейся капли расплава с водой. Рассматривается сферическая капля олова, изначально свободно двигающаяся в воде на протяжении определенного времени, за которое формируется устойчивая паровая пленка, окружающая каплю. Далее происходит возмущение паровой пленки за счет волны давления, моделируемой заданным законом повышения и спада давления воды на границе. В результате паровая пленка симметрично схлопывается, что приводит к удару воды по расплаву и дальнейшему нарастанию новой паровой пленки, которая схлопывается с образованием двух мощных осевых струй, одна из которых пробивает каплю. Рассмотрено несколько вариантов задачи с различными скоростями капли и формами парового пузыря в момент прихода импульса давления, оценено их влияние на взаимодействие.

#### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ.

Для описания трехфазной системы «расплав-вода-пар» с возможностью фазового перехода на границе раздела вода-пар используется модель VOF (Volume of Fluid). Вводится эффективная жидкость, свойства которой зависят от объемных долей фаз  $\alpha_k$  (индекс  $k = m, w, v$  здесь и ниже обозначает расплав, жидкую воду и водяной пар, величины без индекса относятся к эффективной жидкости), причем для них выполняется условие совместности  $\sum \alpha_k = 1$ .

Для эффективной жидкости справедливы уравнения импульса и энергии:

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -\nabla P + \nabla \tau + \rho \mathbf{g} + \mathbf{F}_s$$

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{DP}{Dt} + \nabla \lambda \nabla T - \Gamma \Delta h_{ev}$$

где  $\tau$  – тензор вязких напряжений,  $\mathbf{F}_s$  – сила поверхностного натяжения,  $\mathbf{g}$  – ускорение силы тяжести,  $\Delta h_{ev}$  – скрытая теплота испарения воды.

Уравнение неразрывности для эффективной жидкости получается путем сложения уравнений неразрывности для составляющих фаз:

$$\frac{\partial \rho_k \alpha_k}{\partial t} + \nabla (\rho_k \alpha_k \mathbf{U}) = \Gamma_k,$$

$$\nabla \mathbf{U} = -\sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k}{\rho_k} \frac{D\rho_k}{Dt} + \Gamma \left( \frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_w} \right),$$

где  $\Gamma = \Gamma_v = -\Gamma_l$  – массовая скорость фазового перехода на единицу объема ( $\Gamma > 0$  отвечает испарению воды).

Для отслеживания движения фаз решаются уравнения переноса для объемных долей  $\alpha_k$ , в правой части которых присутствуют источниковые члены, учитывающие сжимаемость фаз и наличие фазовых переходов:

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \alpha_k + \alpha_k (\nabla \mathbf{U}) = - \frac{\alpha_k}{\rho_k} \frac{D \rho_k}{Dt} + \frac{\Gamma_k}{\rho_k}$$

Данная математическая модель была реализована в открытом программном пакете *OpenFOAM* путем усовершенствования существующих расчетных модулей.

### РЕЗУЛЬТАТЫ.

В работе рассмотрено взаимодействие движущейся высокотемпературной капли расплава с водой, происходящее за счёт внешнего изменения давления. Изначально капля расплава радиусом  $R_m = 3.36$  мм и температурой  $T_m = 950$  К свободно движется в воде с температурой  $T_w = 293$  К со скоростью  $v_d$  на протяжении времени  $t_d$ . К этому времени форма и объем паровой пленки практически перестают изменяться. Далее происходит скачок давления на границе расчетной области, импульс имеет треугольный профиль по времени с пиком давления  $P_0 = 10$  бар и шириной импульса  $t_0 = 20$  мкс.

Рассматривается три варианта задачи, в которых скорости капли  $v_d = 0.15$  м/с соответствует время  $t_d = 4$  мс, а скоростям капли  $v_d = 0.3, 0.5$  м/с – время  $t_d = 8$  мс. Для удобства варианты обозначим как V1, V2 и V3, соответственно.

Расчеты проводились в трехмерной постановке на сетке, содержащей  $150 \times 150 \times 300$  ячеек (моделировалась 1/4 часть объема в предположении о симметрии течения). Для пара используется уравнение состояния идеального газа, для воды и расплава используется слабосжимаемая линейная модель.

К моменту времени  $t_d$  образовавшаяся паровая пленка над каплей расплава имеет неравномерную толщину, при этом наиболее толстая паровая пленка наблюдается вблизи задней поверхности капли (см. рис. 1).

При моделировании наблюдалось два схлопывания парового пузыря (см. рис. 2, результаты для V2). Изначально, происходит стремительно схлопывание паровой пленки из-за резкого роста давления на границе, что приводит к удару воды по поверхности расплава и прямому контакту капли с водой (рис. 2а), далее следует вскипание воды, обратное наращивание объема паровой пленки (рис. 2б) и деформация капли расплава. Вторичное схлопывание сопровождается столкновением потоков воды и возникновением двух мощных осевых струй (рис. 2в), одна из которых в дальнейшем наносит удар по поверхности расплава (рис. 2г). Эти струи по своей природе аналогичны известным кумулятивным струям. Форма капли расплава, полученная в конце расчета, хорошо соответствует формам, наблюдаемым в работе [2].

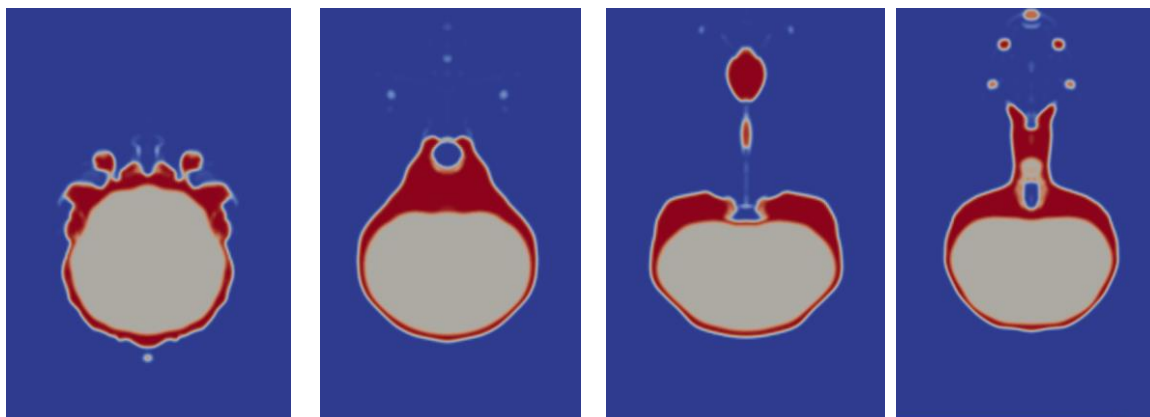


Рис. 1. Формы капель расплава (серый) и паровой пленки (красный) для вариантов V1, V2, V3(C1), C2 (слева направо).

Влияние схлопываний парового пузыря на такие важные характеристики взаимодействия расплава с водой, как максимальные регистрируемые давления и площадь поверхности расплава, отображено на Рис.3а. На графике давления хорошо видны две пиковые области, соответствующие моментам прямого контакта расплава с водой, наблюдаемым на Рис. 2. Ускорение увеличения площади поверхности расплава наблюдается на Рис. 3а после момента времени  $t = 0.8$  мс, что согласуется с моментом удара струйки воды по поверхности расплава при втором схлопывании.

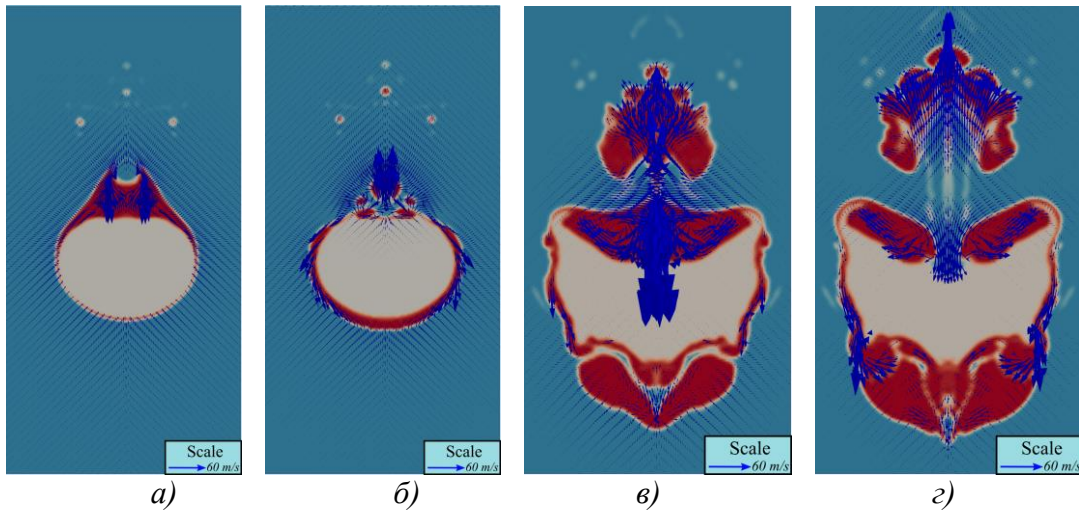


Рис. 2. Схлопывание паровой пленки,  $t = 0.02$  мс (а),  $t = 0.1$  мс (б); формирование и удар струйки воды по расплаву  $t = 0.88$  мс (в),  $t = 0.9$  мс (з).

Полученные результаты не позволяют сделать однозначных выводов о зависимости параметров взаимодействия от скорости капли. Например, максимальное зарегистрированное для вариантов давление соответствует варианту V2. Изменения площадей поверхности расплава для вариантов V2 и V3 для первых 2 мс расчета выглядят практически идентичными, чего не скажешь про сравнение этих же площадей для вариантов V1 и V2.

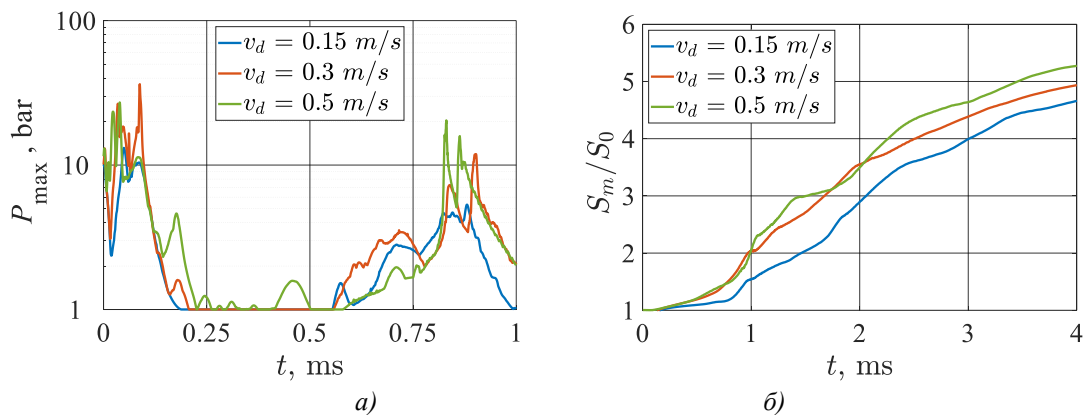


Рис. 3. Максимальные давления в области (а); относительные площади поверхности расплава (б) для вариантов V1-V3.

Объяснением этому может служить различная форма паровой пленки в момент прихода импульса давления (рис. 1). Если проанализировать формы пленок для вариан-

та V2 и V3, можно заметить, что варианту V2 соответствует вытягивание пузыря, тогда как для варианта V3 происходит отрыв паровой пленки. Для выяснения влияния формы пленки на результаты был проведен дополнительный расчет C2 с параметрами  $v_d = 0.5$  м/с и  $t_d = 6$  мс (в результате форма паровой пленки получается вытянутой), результаты были сравнены с вариантом V3, для удобства обозначенным здесь C1. Путем сравнения результатов для вариантов C1 и C2 можно отследить ярко выраженную зависимость параметров взаимодействия от формы парового пузыря. Действительно, максимальное давление, зарегистрированное в расчетной области, возросло на 30 %, площадь поверхности расплава увеличилась на 5-10%.

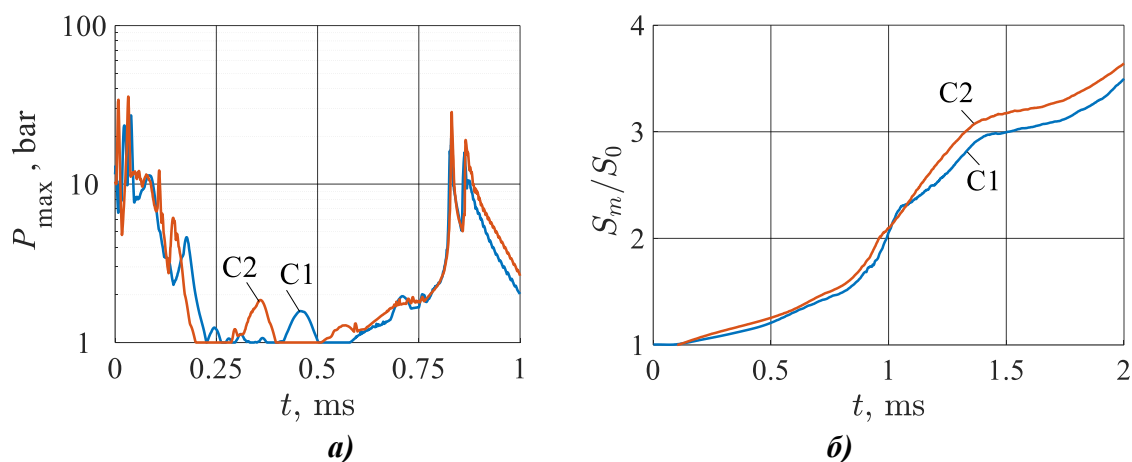


Рис. 4. Максимальные давления в области (а); относительные площадь поверхности расплава (б) для вариантов C1,C2.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

В данной в работе путем численного моделирования взаимодействия движущейся капли расплава с водой методом VOF проанализировано влияние скорости капли на параметры, характеризующие паровой взрыв. Показано, что в результате взаимодействия происходит два основных схлопывания парового пузыря, отличных по своей природе, но приводящих к существенной фрагментации капли расплава. Важно отметить, что результаты зависят не только от скорости капли, но и в значительной степени от формы парового пузыря в момент прихода импульса давления.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФ (проект № 18-19-00289).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мелихов В.И., Мелихов О.И., Якуш С.Е. Теплофизика и гидродинамика паровых взрывов. М., ИПМех РАН, 2020, 276 с.
2. Thakre, S., Ma, W. 3D simulations of the hydrodynamic deformation of melt droplets in a water pool // Annals of Nuclear Energy. 2015. V. 75. P. 123–131.

## КОГЕРЕНТНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ВОДЫ: ДИНАМИКА, СТАТИСТИКА, ОБНАРУЖЕНИЕ

*А.В.Слюняев*

*Институт прикладной физики РАН, Н. Новгород*

*Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН, Владивосток*  
[slunyaev@ipfran.ru](mailto:slunyaev@ipfran.ru)

Интригующая проблема аномально высоких морских волн («волн-убийц») находится в центре внимания многочисленных исследований. Подход к изучению этого сложного природного явления с помощью прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation, DNS) нерегулярных волн стал популярным благодаря высокой производительности современных компьютеров и усовершенствованным математическим моделям и численным алгоритмам. Потенциальные уравнения Эйлера хорошо подходят для моделирования создаваемых ветром гравитационных волн на поверхности моря. Они могут решаться с помощью существующих численных алгоритмов во много раз быстрее, чем уравнения Навье-Стокса и спектральные уравнения Захарова, что позволяет моделировать эволюцию больших ансамблей волн с учетом эффектов сильной нелинейности. На небольших временах (десятки минут) эффектами вязкой диссипации можно пренебречь; эпизодические обрушения волн часто учитывают посредством параметризации.

Наиболее интересными представляются нелинейные механизмы генерации «волн-убийц», связанные с образованием долгоживущих паттернов когерентных волн. Простейшей моделью здесь является нелинейное уравнение Шредингера, имеющее точные решения в виде солитонов огибающей. Очень короткие долгоживущие группы волн с максимальной крутизной, близкой к порогу обрушения волн, были впервые обнаружены в численном моделировании исходных уравнений гидродинамики для условий большой глубины [1]. Такие сильно нелинейные гидродинамические солитоны огибающей в условиях спокойной воды были позднее воспроизведены в лабораторных условиях: сначала одиночные солитоны огибающей, а затем взаимодействующие пары солитонов огибающей [2, 3]. Проведенные эксперименты подтвердили, что концепция солитонов огибающей для волн на воде – устойчивых локализованных волновых образований – распространяется и на случай большой крутизны и относительно широкого спектра (пара осцилляций внутри группы) однонаправленных волн. Другие серии численных и лабораторных экспериментов показали применимость точных решений нелинейного уравнения Шредингера для описания динамики модулированных волн небольшой крутизны на относительно протяженных временных интервалах [4-7].

По результатам выполненного прямого численного моделирования нерегулярных волн с характерным для ветровых волн профилем частотного спектра JONSWAP было показано, что в случае значительной средней крутизны волн и относительно узкого (но реалистичного для морских условий) углового спектра реализуются особые условия, характеризующиеся аномально частым возникновением волн большой высоты («волн-убийц») [8-9]. При этом изменяется баланс вкладов в вероятностные распределения от свободных и связанных волн, наблюдаются специфические распределения энергии в моментальных пространственно-временных спектрах и регистрируются очень долгоживущие интенсивные волновые паттерны [10-11]. Эти особенности были связаны с ранее упомянутыми солитоноподобными группами волн.

Задача выделения солитонов огибающей в полях реалистичных волн на поверхности воды решалась в работах [12-14]. Предложенный метод анализа позволил про-



следить эволюцию устойчивой группы интенсивных волн, случайным образом возникшей в поле нерегулярных коллинеарных волн, в течение порядка 200 периодов [14]. С помощью оконной процедуры, использующей аппарат метода обратной задачи рассеяния, на моментальных снимках поверхности выделялись положения солитоноподобных групп интенсивных волн, определялись их скорости и собственные амплитуды (см. пример на рис. 1). Скорость и амплитуда максимального выделенного солитона оказались чрезвычайно устойчивыми характеристиками, что демонстрирует способность примененной процедуры вычленять солитонные группы в полях нерегулярных волн и подтверждает адекватность интерпретации интенсивных групп в терминах солитонов огибающей нелинейного уравнения Шредингера.

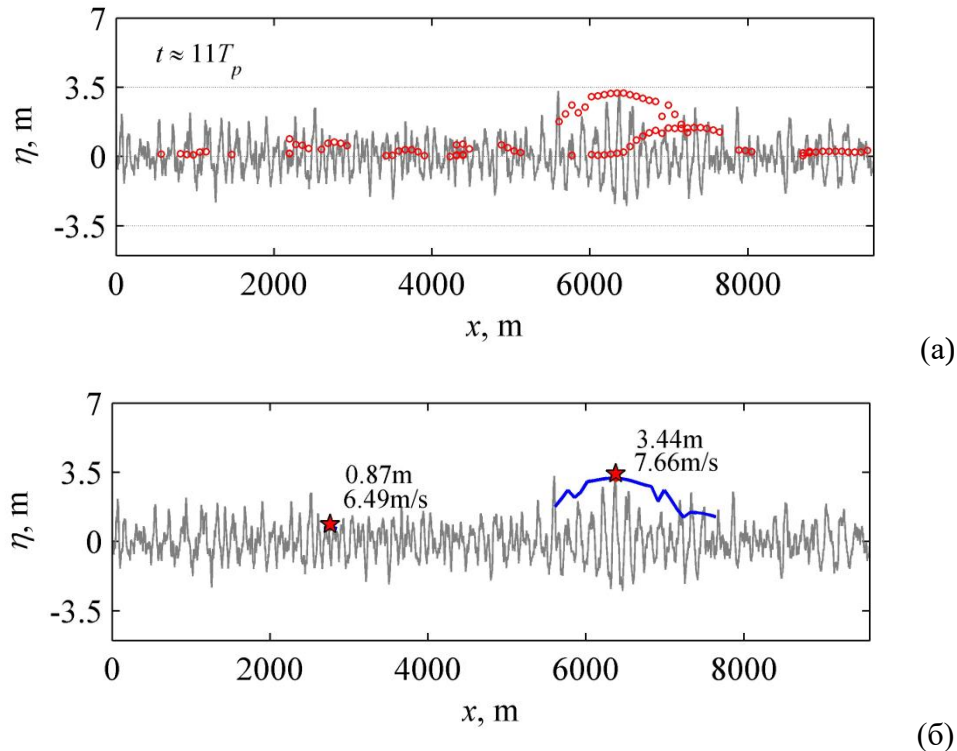


Рис. 1. Демонстрация двух шагов применения процедуры выделения солитонов огибающей: локальные амплитуды солитонов огибающей по результатам оконного анализа (а) и положения (звездочки), собственные амплитуды и скорости (числовые значения) интенсивных солитонов огибающей (б). Черной линией построено моментальное смещение поверхности в метрах. Характерный период волн 10 с.

Выполненное моделирование демонстрирует возможность самопроизвольного формирования связанных нелинейных когерентных структур из нерегулярных однонаправленных волн на поверхности глубокой воды, которые могут существовать сотни периодов волн, приводят к экстремизации волнения, а также представляют собой области, на фоне которых возникают аномально высокие волны. Критически важными для такого сценария является относительно малый разброс волн по направлениям. В то же время, это условие может смягчаться в ситуации захваченных волн, когда каналирование ведет к эффективному понижению размерности динамической системы. Тогда волны с довольно широким угловым спектром могут характеризоваться динамикой, схожей с однонаправленными волнами [15]. Предельный случай встречных волн оказывается также вполне благоприятным для возникновения экстремальных волновых условий. В этом случае теория предсказывает отсутствие обмена энергией между системами волн, двигающимися навстречу друг другу [16]. Недавно проведенные лабораторные и численные эксперименты подтвердили верность этого прогноза [17]. Двигающиеся

навстречу две системы волн: одна однородная, а вторая с растущей в результате нелинейной самомодуляции группой волн, развивались практически независимо.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Исследования выполнены при поддержке гранта РФФ 22-17-00153.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

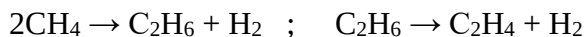
1. *Dyachenko, A.I., Zakharov, V.E.* On the formation of Freak Waves on the surface of deep water // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т. 88. С. 356-359.
2. *Slunyaev, A., Clauss, G.F., Klein, M., Onorato, M.* Simulations and experiments of short intense envelope solitons of surface water waves // Phys. Fluids. 2013. V. 25. P. 067105.
3. *Slunyaev, A., Klein, M., Clauss, G.F.* Laboratory and numerical study of intense envelope solitons of water waves: generation, reflection from a wall and collisions // Phys. Fluids. 2017. V. 29. P. 047103.
4. *Chabchoub, A., Hoffmann, N.P., Akhmediev, N.* Rogue wave observation in a water wave tank // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 106. P. 204502.
5. *Slunyaev, A.V., Shrira, V.I.* On the highest non-breaking wave in a group: fully nonlinear water wave breathers vs weakly nonlinear theory // J. Fluid Mech. 2013. V. 735. P. 203-248.
6. *Slunyaev, A., Pelinovsky, E., Sergeeva, A., Chabchoub, A., Hoffmann, N., Onorato, M., Akhmediev, N.* Super rogue waves in simulations based on weakly nonlinear and fully nonlinear hydrodynamic equations // Phys. Rev. E. 2013. V. 88. P. 012909.
7. *Chabchoub, A., Slunyaev, A., Hoffmann, N., Dias, F., Kibler, B., Genty, G., Dudley, J.M., Akhmediev, N.* The Peregrine breather on the zero-background limit as the two-soliton degenerate solution: An experimental study // Frontiers in Physics. 2021. V. 9. P. 633549.
8. *Slunyaev, A.V., Kokorina, A.V.* Soliton groups as the reason for extreme statistics of unidirectional sea waves // J. Ocean Eng. Marine Energy. 2017. V. 3. P. 395-408.
9. *Слюняев А.В., Кокорина А.В.* Численное моделирование «волн-убийц» на морской поверхности в рамках потенциальных уравнений Эйлера // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2020. Т. 56. С. 210-223.
10. *Kokorina, A., Slunyaev, A.* Lifetimes of rogue wave events in direct numerical simulations of deep-water irregular sea waves // Fluids. 2019. V. 4. P. 70.
11. *Slunyaev, A.V.* Effects of coherent dynamics of stochastic deep-water waves // Phys. Rev. E. 2020. V. 101. P. 062214.
12. *Slunyaev, A.* Nonlinear analysis and simulations of measured freak wave time series // Eur. J. Mech. B / Fluids. 2006. V. 25. P. 621-635.
13. *Слюняев А.В.* Анализ нелинейного спектра интенсивного морского волнения с целью прогноза экстремальных волн // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 2018. Т. 61. С. 1-23.
14. *Slunyaev, A.V.* Persistence of hydrodynamic envelope solitons: detection and rogue wave occurrence // Phys. Fluids. 2021. V. 33. P. 036606.
15. *Shrira, V.I., Slunyaev, A.V.* Nonlinear dynamics of trapped waves on jet currents and rogue waves // Phys. Rev. E. 2014. V. 89. P. 041002.
16. *Dyachenko, A., Kachulin, D., Zakharov, V.* Super compact equation for water waves // J. Fluid Mech. 2017. V. 828. P. 661.
17. *He, Y., Slunyaev, A., Mori, N., Chabchoub, A.* Experimental evidence of nonlinear focusing in standing water waves // Phys. Rev. Lett. 2022. V. 129. P. 144502.

## ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ДВУХТЕМПЕРАТУРНОЙ СРЕДЕ ГАЗ - НАНОЧАСТИЦЫ ПРИ ЛАЗЕРНОЙ КОНВЕРСИИ МЕТАНА

*В.Н.Снытников, Е.Е.Пескова, О.П.Стойковская*  
*Институт катализа им. Г.К. Борескова СО РАН, Новосибирск*  
[snyt@catalysis.ru](mailto:snyt@catalysis.ru)

Одним из перспективных направлений решения задачи прямой переработки метана в этилен и водород является лазерный катализ. Ключевая идея этого направления состоит в создании двухтемпературной реакционной среды, в которой каталитические наночастицы имеют более высокую температуру, чем реакционный газ. Как результат, на поверхности нагретых частиц происходит активация метана и синтез промежуточных соединений, а их дальнейшее превращение протекает в газовой среде. Для лазерного катализа необходим такой массо- и теплоперенос в среде, при котором превращения получаемых целевых продуктов определяются температурой газовой фазы, а не дисперсных частиц. Двухтемпературному состоянию среды противодействует процесс тепловой релаксации при теплообмене между газом и частицами, интенсивность которого тем выше, чем меньше размер частицы. С другой стороны, чем меньше размер частицы, тем больше каталитических центров активации метана на поверхности при заданном в среде массовом содержании катализатора из наночастиц. Поэтому для создания двухтемпературной среды с управляемым химическим процессом целесообразно использовать нанодисперсные частицы, а для поддержания их температуры, отличной от температуры газа - лазерное излучение, которое поглощается твердой фазой. Необходимые условия для реализации прямой переработки метана в ценные продукты на основе этой идеи исследуются экспериментально в Институте катализа им. Г.К.Борескова СО РАН на стенде лазерного катализа [1].

Математическая модель газа и частиц в дозвуковом потоке многокомпонентного газа с излучением включает уравнение неразрывности для каждой компоненты газа, уравнение неразрывности для каждой фракции частиц, уравнение движения для газа и частиц, уравнение энтальпии смеси газа и частиц и уравнение для интенсивности излучения. Система дополнена уравнением состояния для смеси идеальных газов. Для химических процессов принято максимально упрощенное описание из двух связанных между собой брутто – реакций, первая из которых протекает на наночастицах, а вторая является газофазной:



Эти реакции протекают с поглощением тепла.

Численный метод для интегрирования этой системы уравнений является дальнейшей модификацией осесимметричного кода [2]. В предварительных расчетах нами получены значения различных функций, характеризующих газ, частицы и лазерное излучение в отсутствие указанных химических реакций. Эта группа расчетов позволяют оценить уменьшение концентрации частиц при поглощении излучения и нагреве частиц излучением. Последующий нагрев газа ведет к увеличению его скорости и скорости частиц. При определенном выборе параметров, в частности, для радиуса частиц 5 нм и начальной плотности мощности излучения  $8 \cdot 10^{10}$  Вт/м<sup>2</sup>, начальном значении концентрации частиц в максимуме  $10^{14}$  м<sup>-3</sup> разница между температурами частиц и газа достигает примерно 350 К при установившемся потоке тепла от наночастиц в газ. Этот поток тепла не прогревает основную массу газа. Если в расчет включить эндотермические реакции на наночастицах - катализаторах, то температура частиц падает примерно на 150 К и составляет около 1500 К. Данное значение температуры характерно для включения реакций с метаном. Температура газа остается на 350 К меньше. Для этих

температур конверсия метана в области с наночастицами составляет около 20 массовых долей, а выходы этилена - около 16 массовых долей с соответствующим выходом водорода. Предшественник этилена, этан, остается в зонах с низкой концентрацией наночастиц, так как в этих зонах температура газа низкая и вторая газофазная реакция идет медленно.

Существование режима с двухтемпературной средой вместе с получаемыми решениями сильно зависит от многих параметров задачи, которые нелинейно связаны между собой. В частности, к ним относятся коэффициент аккомодации, радиус и концентрация наночастиц, интенсивность лазерного излучения, начальная температура газа. Изучение нелинейных связей между параметрами модели и получаемыми решениями представляет собой одну из наших целей численных экспериментов. В дальнейшем физико - химическая модель из двух брутто - химических реакций будет уточняться включением детального механизма гетерогенно-гомогенного катализа для дегидрирования предельных углеводородов.

### **БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ**

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 21-19-00429 .

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Снытников В.Н., Снытников Вл.Н., Масюк Н.С., Маркелова Т.В., Пармон В.Н.* Стенд лазерного катализа // Приборы и техника эксперимента. 2021. №3. С.129-137.
2. *Peskova E.E.* Numerical Modeling of Subsonic Axisymmetric Reacting Gas Flows // Journal of Physics: Conference Series. 2021. V. 2057. N1. 012071 P. 1-7.



## **РАЗВИТИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЭЛЕЯ-ТЕЙЛОРА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ КОНЕЧНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ПЛОТНОСТИ**

*Е.Б. Соболева*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

[soboleva@ipmnet.ru](mailto:soboleva@ipmnet.ru)

Задача о развитии неустойчивости Рэлея-Тейлора является одной из классических в гидродинамике. В настоящей работе изучается данный вид неустойчивости, развивающейся в пористой среде. Нижний слой образован однокомпонентной жидкостью, верхний слой состоит из такой же жидкости и растворенной в ней примеси. Это система смешивающихся жидкостей; примесь распространяется за счет диффузии и конвекции. На начальном этапе, пока конвективное движение еще не появилось, примесь диффундирует из верхней части области в нижнюю; при этом формируется диффузионная зона между слоями, расширяющаяся со временем. В [1] отмечено, что особенность подобных задач заключается в том, что базовое состояние нестационарно из-за расширения диффузионной зоны, поэтому важно, в какой момент времени существующие в системе малые возмущения приведут к появлению конвективного движения. Можно предполагать, что время начала конвекции оказывает влияние на ее характеристики в дальнейшем. Начало и развитие неустойчивости в данной работе исследуется численным методом. Используется гидродинамическая модель, включающая уравнение неразрывности несжимаемой жидкости, уравнение движения, основанное на законе

Дарси, и уравнение конвекции-диффузии, описывающее транспорт примеси. В системе исходно задаются конечные флуктуации плотности на интерфейсе между слоями жидкости, что, во-первых, приближает постановку задачи к реальным условиям, во-вторых, при изменении масштаба флуктуаций дает представление об их влиянии на начало и развитие конвективного движения. В [2] изучалась начальная (квазипериодическая) стадия конвекции. В настоящей работе исследования продолжены до более поздних времен, чтобы попытаться ответить на вопрос, который ранее не обсуждался: как долго начальные флуктуации влияют на конвективное течение и массоперенос?

Базовая система уравнений имеет вид [3]:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu}(\nabla P - \rho g \mathbf{e}) \quad (2)$$

$$\phi \frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho_c = \nabla \cdot (\phi D \nabla \rho_c) \quad (3)$$

В (1)-(3) входят величины:  $\mathbf{u}$ ,  $P$ ,  $\rho$ ,  $\rho_c$ ,  $k$ ,  $\phi$ ,  $\mu$ ,  $D$ ,  $g$ ,  $\mathbf{e}$  – скорость фильтрации, давление, плотность раствора, плотность растворенной примеси, проницаемость и пористость твердой фазы, коэффициенты вязкости раствора и диффузии примеси, модуль ускорения силы тяжести и единичный вектор, сонаправленный с силой тяжести. Считается, что параметры  $k$ ,  $\phi$ ,  $\mu$ ,  $D$  постоянны. Величины  $\rho$  и  $\rho_c$  связаны линейным уравнением состояния:  $\rho = \rho_0 + \alpha \rho_c$ , где  $\rho_0$  – плотность чистой воды,  $\alpha = 0,82$ . Система уравнений приводится к безразмерным переменным. Безразмерная плотность, обозначенная как  $S$ , определяется следующим образом:  $S = (\rho - \rho_0)/(\rho_b - \rho_0)$ . Здесь  $\rho_b$  – начальная плотность раствора в верхнем слое. В конвективном процессе переменная  $S$  меняется в диапазоне:  $S \in [0, 1]$ .

В начальный момент на границе между слоями задаются флуктуации плотности. В каждом узле пространственной сетки, попадающем на интерфейс, определяется свое значение флуктуаций  $\Delta s$ . Таким образом, принимается условие:

$$S = 0.5 + \Delta s, \quad \Delta s = \sigma(R - 0.5) \quad (4)$$

Здесь  $R$  – случайное число из диапазона:  $R \in [0, 1]$ ,  $\sigma$  – амплитуда флуктуаций,  $\sigma \ll 1$ . Изучается влияние  $\sigma$  на начало и развитие конвективного движения. Решение получено численно с помощью авторского вычислительного кода, многократно проверенного при решении задач о концентрационно-конвективных течениях в различных постановках [4-7].

Получено, что при уменьшении  $\sigma$  от  $10^{-2}$  до  $10^{-8}$  время начала конвекции увеличивается почти в 15 раз. Поскольку при уменьшении  $\sigma$  конвекция формируется позже, то в момент ее появления ширина диффузионной зоны между слоями жидкости  $h$  оказывается также больше. Можно построить число Рэлея-Дарси  $Ra_h$ , соответствующее началу конвекции, по ширине  $h$ :

$$Ra_h = \frac{k(\rho_b - \rho_0)gh}{\phi \mu D} \quad (5)$$

На Рис. 1 показаны значения  $Ra_h$  в зависимости от  $\sigma$ . Видно,  $Ra_h$  увеличивается примерно в 4 раза от ~100 до ~400 в исследованном диапазоне  $\sigma$ . Полученный результат показывает, что в данной задаче нельзя указать пороговое значение числа Рэлея-Дарси, характеризующее начало конвекции, как это имеет место в случае неустойчивости в горизонтальном слое, где найдено пороговое значение  $Ra = 4\pi^2 \approx 40$  [8].

Исследовано поведение различных характеристик конвективного движения и перемешивания как на начальном квазипериодическом, так и на последующем стохастическом

ческом этапах. Обнаружено, что зависимость усредненных величин от амплитуды начальных флуктуаций становится со временем менее заметной. Однако влияние флуктуаций на усредненные характеристики движения и перемешивания прослеживается длительное время и заметно даже в стохастическом режиме.

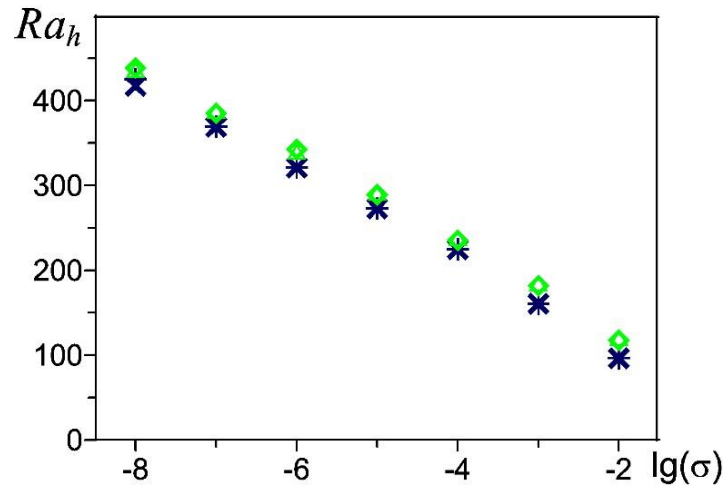


Рис.1. Число Рэлея-Дарси  $Ra_h$ , соответствующее началу конвекции, в зависимости от амплитуды начальных флуктуаций  $\sigma$ .

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (код проекта 21-11-00126).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bestehorn M., Firoozabadi A. Effect of fluctuations on the onset of density-driven convection in porous media // Phys. Fluids. 2012. V. 24. P. 114102.
2. Soboleva E.B. Onset of Rayleigh-Taylor Convection in a Porous Medium // Fluid Dynamics. 2021. V. 56. No. 2. P. 200-210.
3. Bear J., Cheng A. Modeling Groundwater Flow and Contaminant Transport. New York: Springer. 2010.
4. Soboleva E.B., Tsypkin G.G. Numerical simulation of convective flows in a soil during evaporation of water containing a dissolved admixture // Fluid Dynamics. 2014. V. 49. No. 5. P. 634-644.
5. Soboleva E. Numerical investigations of haline-convective flows of saline groundwater // Journal of Physics: Conference Series. 2017. V. 891. P. 012104.
6. Soboleva E.B. A method for numerical simulation of haline convective flows in porous media applied to geology // Comp. Mathematics and Math. Physics. 2019. V. 59. No. 11. P. 1893-1903.
7. Soboleva E.B. Influence of finite-density fluctuations on the development of the Rayleigh-Taylor instability // Theoretical and Mathematical Physics. 2022. V. 211. No. 2. P. 724-734.
8. Nield D.A., Bejan A. Convection in Porous Media: New York, Springer. 2006.



## ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ В ГАЗОПЫЛЕВОЙ СРЕДЕ БЕЗ ДИССИПАЦИИ С МЕЖФАЗНЫМ ОБМЕНОМ ИМПУЛЬСОМ И ТЕПЛОВОЙ ЭНЕРГИЕЙ

*О.П.Стойановская, Т.В.Маркелова*

*Институт катализа им. Г.К.Борескова СО РАН, Новосибирск*

[o.p.sklyar@gmail.com](mailto:o.p.sklyar@gmail.com)

Для моделирования на макроуровне динамики газозвесей необходимо численно решать уравнения газодинамического типа с релаксационными слагаемыми, описывающими передачу импульса и энергии от газа к частицам и наоборот. Для ультрадисперсных частиц время скоростной и тепловой релаксации намного короче, чем время, на котором рассматривается динамика среды. В этом случае время релаксации является малым параметром задачи, который делает задачу жесткой. В настоящий момент ведется разработка методов, погрешность которых при фиксированных счетных параметрах стремится к нулю при бесконечно малых и бесконечно больших временах релаксации. Такие методы имеют преимущество при решении жестких задач, так как позволяют выбирать расчетные параметры независимо от малых физических параметров задачи [1]. Для исследования свойств новых методов и верификации вычислительных комплексов необходимы задачи, имеющие аналитическое или эталонное решение [2].

В работе рассматривается модель газопылевой среды с невязким несущим политропным газом, которая представляет собой квазилинейную систему уравнений в частных производных слабо гиперболического типа. Для этой системы получено дисперсионное соотношение и найдено аналитическое решение задачи, соответствующее движению монохроматической бегущей волны в двухфазной среде. При конечных временах релаксации фазовая скорость зависит от длины волны. Показано, что в предельных случаях (времена скоростной и тепловой релаксации стремятся к нулю или релаксационное равновесие, соответствующие времена стремятся к бесконечности или замороженное равновесие) скорость движения волн не зависит от длины волны. Это позволяет распространять известные аналитические решения для чистого газа на газопылевую среду в релаксационном равновесии. Установлено, что скорость звука в двухфазной среде в релаксационном равновесии есть функция от скорости звука в чистом газе, а также безразмерных переменных - массовой доли твердых частиц в газе, показателя адиабаты газа (отношения теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме) и показателя адиабаты для газопылевой среды (отношения теплоемкостей пыли и газа при постоянном объеме).

Путем численного анализа дисперсионного соотношения, соответствующего режиму релаксационного равновесия, установлен диапазон значений массовой доли частицы, в котором скорость звука в среде чувствительна к значению показателя адиабаты для газопылевой среды [3].

Аналитическое решение воспроизведено в численных расчетах и рекомендуется к использованию как тест для изучения алгоритмов расчета межфазного взаимодействия.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена за счет средств Российского научного фонда (код проекта 21-19-00429).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stoyanovskaya O.P., Davydov M.N., Arendarenko M.S., Isaenko E.A., Markelova T.V., Snytnikov V.N. Fast method to simulate dynamics of two-phase medium with intense

- interaction between phases by smoothed particle hydrodynamics: Gas-dust mixture with polydisperse particles, linear drag, one-dimensional tests, 2021. Journal of Computational Physics. 430, 110035.
2. Stoyanovskaya O.P., Grigoryev V.V., Savvateeva T.A., Arendarenko M.S., Isaenko E.A., Markelova T.V. Multi-fluid dynamical model of isothermal gas and buoyant dispersed particles: monodisperse mixture, reference solution of DustyWave problem as test for CFD-solvers, effective sound speed for high and low mutual drag // International Journal of Multiphase Flow, 2022
  3. Stoyanovskaya O.P., Markelova T.V. Analytical solution of sound wave propagation in dusty gas with momentum and energy exchange between phases // in preparation



## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ФЛЮИДА В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ С УЧЁТОМ ИЗМЕНЕНИЯ PVT СВОЙСТВ

*Е.А. Стрижаков, Ф.С. Хисматуллина*  
РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина, Москва  
[evgeny.strizhakov@lukoil.com](mailto:evgeny.strizhakov@lukoil.com)

В настоящей работе представлена математическая модель фильтрации флюида в неоднородной среде с учётом динамики изменения пластового давления. Приведены практические результаты использования модели в рамках разработки алгоритма расчёта системы «флюид-пласт» для интегрированного моделирования месторождений нефти и газа. Схематически продемонстрирована связь между компонентами системы.

Для математического описания многофазной многокомпонентной фильтрации флюидов (нефть, газ, вода) в неоднородной пористой среде используются фундаментальный закон сохранения вещества для каждого компонента, который позволяет строго соблюдать материальный баланс и моделировать любые физико-химические преобразования, и граничные и начальные условия. Такая система уравнений данного процесса решается численно. С помощью модели решается ряд важных производственных задач: прогнозирование показателей разработки, выбор способа эксплуатации, оптимизация добычи, расчёт взаимовлияния объектов, подбор промыслового оборудования и т.д. В данной работе численные расчёты системы «флюид-пласт» используются в рамках одного из модулей для интегрированного моделирования месторождений нефти и газа.

Сложность описания потока флюидов в нефтенасыщенном пласте состоит в изменении свойств среды и флюида при снижении пластового давления в процессе эксплуатации. Происходящие процессы схематично представлены на рисунке 1. При пластовом давлении выше давления насыщения (рисунок 1 (а)) газ растворён в нефти, расширение нефти и воды при снижении давления происходит за счёт их сжимаемости. Однако, когда пластовое давление опускается ниже давления насыщения (рисунок 1 (б)), из нефти начинает выделяться газ, что приводит к резкому изменению физико-химических свойств добываемого флюида и, как следствие, изменению фильтрационных потоков, которые необходимо учитывать при моделировании.

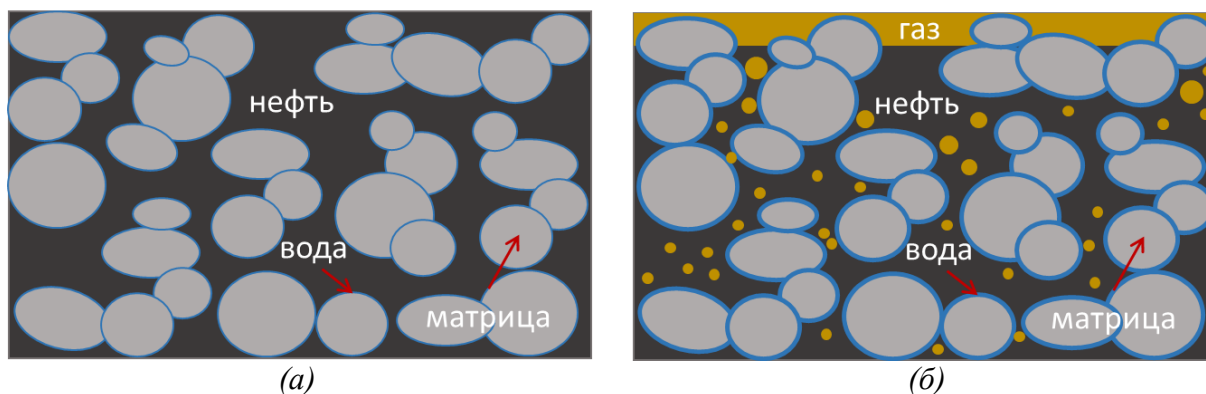


Рис. 1. Состояние системы флюид-порода: а – при  $P_{пл} > P_{нас}$ ; б – при  $P_{пл} < P_{нас}$

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ.

Для математического описания многофазного потока флюидов в пористой среде используем уравнение материального баланса, т.е. извлечённый объём равен сумме первоначального и привнесённого объёмов [1]:

$$(w_e - w_p B_w) + ((G - G_{fg})B_g - G B_{gi}) + \left( \frac{(c_f + c_w S_{wi}) \Delta P N B_o}{1 - S_{wi}} \right) + (w_i B_w) + (G_{inj} B_g) = \\ = N B_{oi} - ((N - N_p) B_o + (N R_{si} - (N - N_p) R_s - G_p) B_g),$$

где  $N$  - начальный объём нефти в пласте, приведённый к поверхностным условиям,  $N_p$  - накопленная добыча нефти,  $p_i$  - начальное пластовое давление,  $p_p$  - текущее пластовое давление,  $B_o$  - объёмный коэффициент нефти,  $B_{oi}$  - начальный объёмный коэффициент нефти,  $B_g$  - объёмный коэффициент газа,  $B_{gi}$  - начальный объёмный коэффициент газа,  $B_w$  - объёмный коэффициент воды,  $R_s$  - газосодержание,  $R_{si}$  - начальное газосодержание,  $w_e$  - накопленный приток из законтурной области,  $w_p$  - накопленная добыча воды,  $w_i$  - накопленная закачка воды,  $G$  - начальный объём газа газовой шапки, приведённый к поверхностным условиям,  $G_{fg}$  - накопленный свободный газ,  $G_p$  - накопленный растворённый и свободный газ,  $G_{inj}$  - накопленная закачка газа,  $c_f$  - сжимаемость пористой среды,  $c_w$  - сжимаемость воды,  $S_{wi}$  - начальная средняя насыщенность связанной водой.

Здесь рассматривается модель дегазированной нефти – Black Oil, наиболее используемая на практике модель флюида. Переменные, характеризующие свойства флюида (PVT свойства) –  $B_{oi}$ ,  $B_{gi}$ ,  $B_o$ ,  $B_g$ ,  $B_w$ ,  $R_{si}$ ,  $R_s$ , рекомендуется рассчитывать по давно зарекомендовавшим себя корреляционным зависимостям: Standing, Glaso, Al-Marhoun, Petrosky и др. [2, 3, 4, 5].

Также при расчёте предлагается учитывать приток воды из законтурной области по моделям Fetkovich и Carter-Tracy [6,7]. Это необходимо для учёта перераспределения давления в пласте, что будет значительно влиять на PVT свойства флюида. Приток из аквифера характеризует параметр  $w_e$ , который зависит от заданных величин радиуса, толщины, проницаемости, отношение внешнего/внутреннего радиуса и углового простирания аквифера.

### АЛГОРИТМ РАСЧЁТА.

Практическим примером описанной математической модели движения флюида служит созданный алгоритм расчёта для интегрированного моделирования месторождений нефти и газа.

Алгоритм интегрированной модели можно разделить на 4 взаимовлияющих между собой компонент: флюид, пласт, скважина, система сбора и транспортировки (ССиТ). В настоящей работе подробно рассматривается алгоритм расчёта системы «флюид-пласт», схема расчёта которого представлена на рисунке 2.

Компонент «флюид» рассчитывается по ранее обозначенным корреляциям [2,3,4,5]. Особенностью алгоритма является возможность выбора наиболее подходящей корреляции для расчёта давления насыщения, газосодержания, объёмного коэффициента и вязкости нефти с учётом лабораторных данных для наиболее точного соответствия между собой реального и цифрового флюидов (PVT Matching).

Как видно из рисунка 2, расчёт компонента «пласт» разделён на 2 блока: история и прогноз. При имеющейся истории добычи по месторождению в блоке «история» происходит перерасчёт пластового давления по МБ и его сопоставление с исторической динамикой. При существенном различии осуществляется адаптация под историю посредством изменения начальных параметров пласта, параметров аквифера, либо в более редком случае PVT свойств флюида.

Для расчёта текущего пластового давления на  $i$ -ом шаге выразим переменную  $p_p$  из общего уравнения МБ, тогда

$$p_p = p_i - \frac{(NB_{oi} - ((N - N_p)B_o + (NR_{si} - (N - N_p)R_s - G_p)B_g) - (c_f + c_w S_{wi})NB_o - (w_e - w_p B_w) - ((G - G_{fg})B_g - GB_{gi}) - w_i B_w - G_{inj} B_g) \cdot (1 - S_{wi})}{(c_f + c_w S_{wi})NB_o}$$

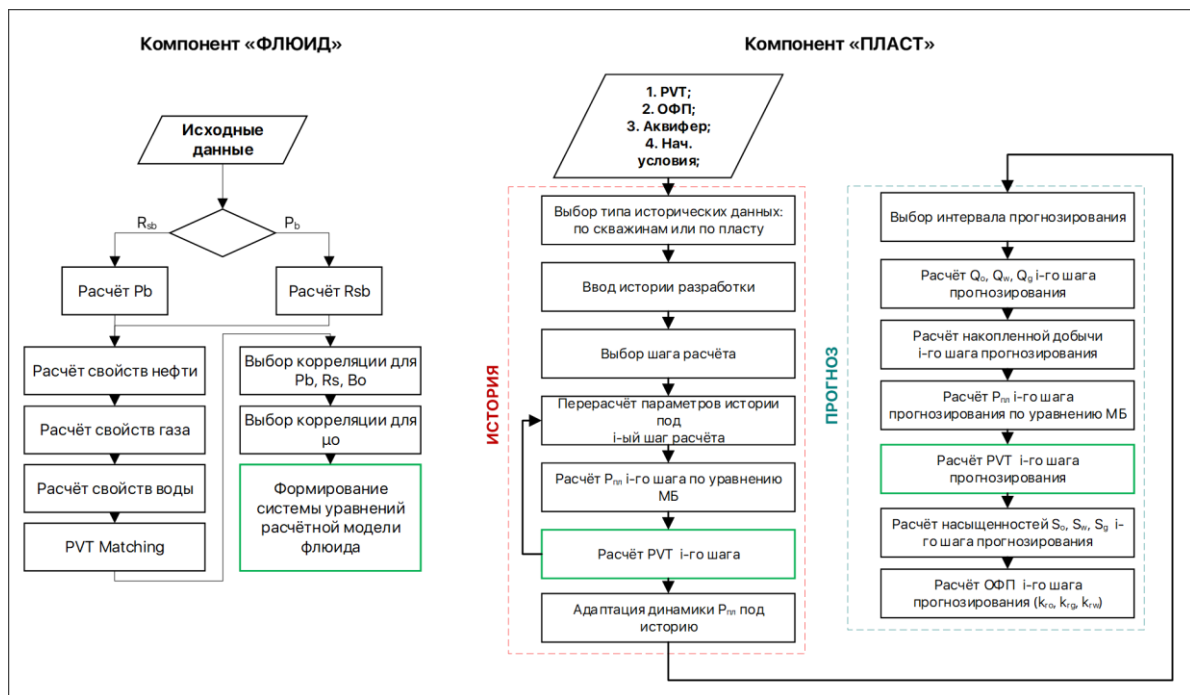


Рис. 2. Алгоритм расчёта системы «флюид-пласт»

Блок «прогноз» интегрируется с компонентой скважины для получения добычи по нефти, газу и воде за  $i$ -й расчётный шаг. С учётом полученных данных, производится перерасчёт пластового давления по МБ, PVT свойств, насыщенностей. Из последнего рассчитываются относительные фазовые проницаемости и передаются в компонент скважины.

## РЕЗУЛЬТАТЫ.

Таким образом, в результате работы представлена математическая модель описания флюида в неоднородной среде с учётом динамики изменения пластового давления. Продемонстрирован расчётный алгоритм, использующий данную модель. На настоя-

ший момент представленная работа легла в основу программного обеспечения для интегрированного моделирования месторождений нефти и газа.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schilthuis, R.J.* Active Oil and Reservoir Energy, Trans AIME, 118: 1936, pp. 33–52.
2. *Standing, M. B.* A Pressure-Volume-Temperature Correlation for Mixtures of California Oils and Gases, Drilling and Production Practice [API]: 1947, pp. 275–287.
3. *Glaser, O.* Generalized Pressure-Volume-Temperature Correlations, Journal of Petroleum Technology: May 1980, pp. 785–795.
4. *Al-Marhoun, Muhammad Ali.* PVT Correlations for Middle East Crude Oils, J Pet Technol 40: 1988, pp. 650–666.
5. *Petrosky, G. E., and F. Farshad.* Pressure-Volume-Temperature Correlations for Gulf of Mexico Crude Oils, SPE paper 26644, presented at the 68th Annual Technical Conference of the Society of Petroleum Engineers, Houston, October 3–6, 1993.
6. *Fetkovich, M.J.*, A Simplified Approach to Water Influx Calculations—Finite Aquifer Systems, J Pet Technol 23 (7): 814–28. SPE-2603-PA, 1971.
7. *Carter, R.D. and Tracy, G.W.*, An Improved Method for Calculating Water Influx, Trans., AIME 219: 1960, 415 p..



### ТОНКАЯ СТРУКТУРА И СИММЕТРИИ СТРАТИФИЦИРОВАННОГО ТЕЧЕНИЯ ЗА ГОРИЗОНТАЛЬНО ДВИЖУЩЕЙСЯ СФЕРОЙ

*Е.Я. Сысоева, Ю.Д. Чашечкин*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

[yulidch@gmail.com](mailto:yulidch@gmail.com)

В силу научной содержательности и практической направленности численные и экспериментальные исследования обтекания тел стратифицированной жидкостью заметно активизировались в последнее время. Особое внимание уделяется изучению обтекания тела идеальной формы – сферы [1]. Математической основой лабораторных исследований ИПМех РАН является редуцированная версия системы фундаментальных уравнений, в которой пренебрегается эффектами сжимаемости и теплопроводности [2, 3]. Пространственное и временное разрешение инструментов выбиралось из условия наблюдения крупных компонентов – внутренних волн и вихрей, размеры которых определяются геометрией тела (диаметром  $D$  и длиной внутренней волны  $\lambda = UT_b$ , задаваемой скоростью  $U$  и периодом плавучести  $T_b$ ) и разрешения тонких структур – прослоек и волокон – лигаментов, толщиной  $\delta_N^v = \sqrt{\nu / N}$  и  $\delta_N^{ks} = \sqrt{\kappa_s / N}$  в поле волн и  $\delta_U^v = \nu / U$  или  $\delta_U^{ks} = \kappa_s / U$  в спутном течении [4]. Здесь  $N = 2\pi / T_b$  – частота плавучести,  $\nu$  и  $\kappa_s$  – коэффициенты кинематической вязкости и диффузии. Опыты выполнены на стенде «Изучения тонкой структуры течений» комплекса Уникальных исследовательских установок ИПМех РАН [5]. Визуализация течений проводилась теневыми приборами и методом электролитической преципитацией [6] в широком диапазоне параметров, включающем течения, индуцированные диффузией ( $Re_u = uD / \nu \sim 1$ ,  $u$  – скорость жидкости), волновой и различные вихревые режимы ( $Re = UD / \nu \sim 10^3$ ).



Теневая картина течения, индуцированного диффузией на неподвижной сфере и возмущений около медленно движущегося тела, приведены на Рис. 1а. Наибольшие возмущения наблюдаются около полюсов сферы, где формируется система осесимметричных кольцевых ячеек с противотечениями.

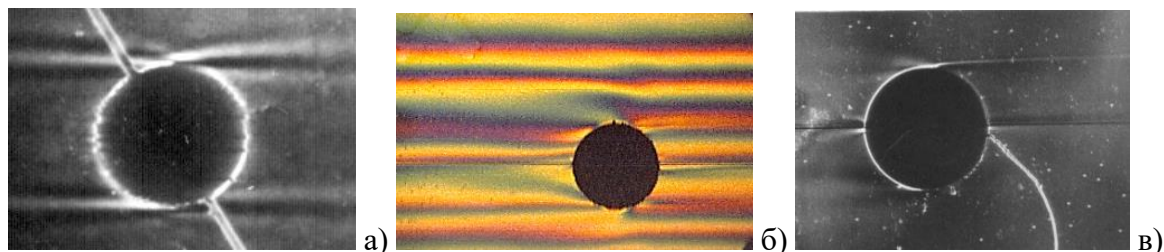


Рис. 1 Теневые фотографии медленных течений на сфере: а) неподвижной,  $T_b = 6.0$  с;  $D = 5$  см и движущейся справа налево, б) –  $T_b = 8.0$  с;  $D = 4.0$  см, в) –  $T_b = 8.0$  с,  $D = 4.0$  см, в) –  $T_b = 4.5$  с,  $D = 5$  см,  $U = 0.08$  см/с,  $Re = 40$ ,  $Fr = 1.3 \cdot 10^{-4}$ .

С началом движения перед сферой в стратифицированной жидкости формируется область заблокированной жидкости с более однородным распределением плотности, а у полюсов возникают лучи внутренних волн и лигаменты – оболочки следа (Рис. 1, б, в).

Сечение плотностного следа при этом имеет прямоугольную форму – сходящая с центрального пояса суспензия оконтуривает узкий вытянутый по вертикали след (Рис. 2) с выраженной тонкой структурой. Более отчетливо лигаменты, образующие оболочки и внутреннюю структуру следа, выражены на теневых фотографиях (Рис. 3).

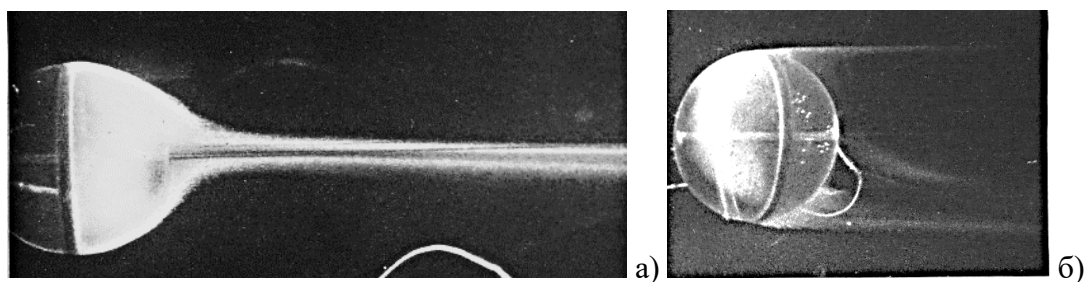


Рис. 2. Картины распределения суспензии в следе за сферой:  $T_b = 4.5$  с,  $D = 5$  см,  $U = 0.03$  см/с,  $Re = UD / \nu = 15$ ,  $Fr = U^2 / N^2 D^2 = 1.8 \cdot 10^{-5}$ ; (а, б) вид сверху и сбоку.

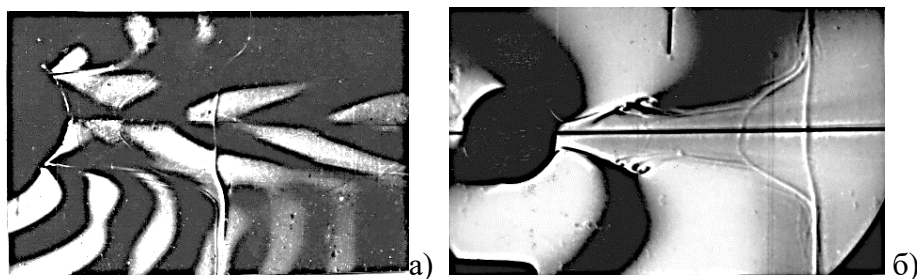


Рис. 3. Теневые картины следа за сферой: а) –  $T_b = 3.0$  с,  $D = 5$  см,  $U = 0.76$  см/с,  $Re = 384$ ,  $Fr = 0.005$ ; б) –  $T_b = 12.0$  с,  $D = 4$  см,  $U = 0.8$  см/с,  $Re = 256$ ,  $Fr = 0.15$ .



Резкая прослойка разделяет поля присоединенных внутренних волн (фазовые поверхности – полуокружности) и волны внутри следа, представленные системой наклонных полос (Рис. 3а). С увеличением скорости усиливается интенсивность воздействия волн на спутное течение, локализация вариаций высоты которого согласована с картиной волн (Рис. 3б). Лигаменты на вершинах следа сворачиваются в завитки (течение Holmboe). Плотностные метки показывают гладкость поля скорости в слое сдвига на границе следа, в центре которого располагаются тонкие лигаменты.

Сравнение картин распределения суспензии в следе за сферой, движущейся горизонтально в непрерывно стратифицированной жидкости, иллюстрирует сильное влияние, которое оказывают сравнительно слабые вариации плотности ( $\Delta\rho/\rho < 0.1\%$ ) на симметрию течения – дискретную в стратифицированной (Рис. а) и непрерывную аксиальную в однородной жидкости (Рис 4, б). С увеличением скорости вертикальный размер следа уменьшается, а горизонтальный – растет (Рис 4, б), вплоть до критического значения, при котором происходит смена вида внутренней вихревой структуры следа.

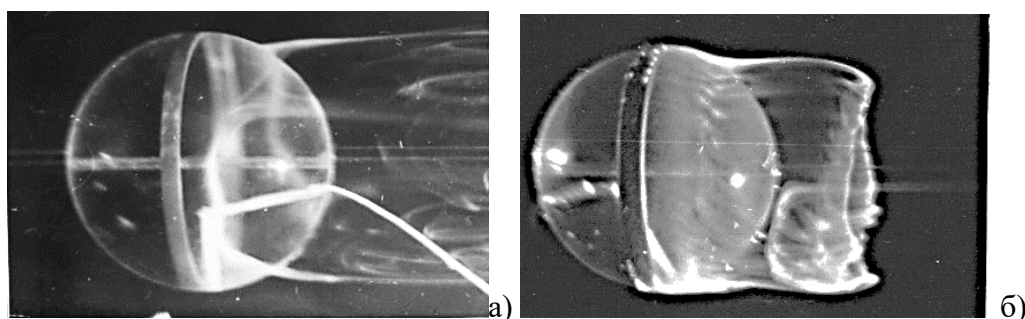


Рис. 4. Дискретная и непрерывная в однородной жидкости симметрия следа за сферой  $D = 5\text{ см}$ , : а) –  $T_b = 4.5\text{ с}$ ,  $U = 0.7\text{ см/с}$ ,  $Re = 350$ ,  $Fr = 0.01$ ; б) –  $U = 0.7\text{ см/с}$ ,  $Re = 350$ .

В режиме интенсивного взаимодействия внутренних волн со следом вертикальные «вихревые столбы», образующиеся при движении тела с малыми скоростями, следы которых видны на Рис. 4, сменяются «вихревыми пузырями», содержащими пару погруженных в след вихрей с горизонтальной осью. Теневое изображение и картина распределения суспензии при электролитической преципитации показаны на Рис. 5.

На всех рисунках – и в теневых, и в электролитических изображениях выражены тонкие волокна и прослойки – лигаменты, образующие тонкую структуру течения. В математическом описании стратифицированных течений им соответствуют сингулярно возмущенные компоненты полных решений. Их появление объясняется высокой плотностью внутренней энергии в ряде областей на малых масштабах.

Многообразие компонентов, четкость тонких структур и воспроизводимость в целом картин течений, указывает на важную роль всех механизмов передачи энергии и необходимость развития теории течений на основе полной системы уравнений механики жидкостей с замыкающими уравнениями состояния для потенциала Гиббса и плотности.

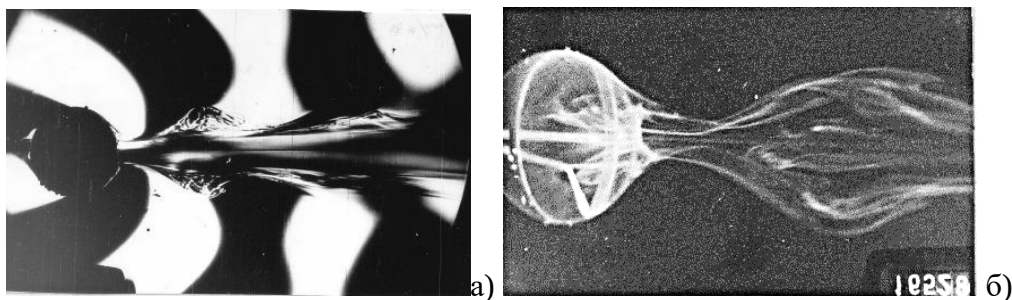


Рис. 5. «Вихревые пузыри» в следе за сферой – пары вихрей с горизонтальной осью, замороженных в поле внутренних волн: а) – теневая картина  $T_b = 3.0$  с,  $D = 4$  см,  $U = 1.37$  см/с,  $Re = 750$ ,  $Fr = 0.03$ , б) – электролитическая преципитация  $T_b = 9.0$  с,  $D = 5$  см,  $U = 1.38$  см/с,  $Re = 690$ ,  $Fr = 0.15$ .

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Эксперименты проведены на стендах ЛПБ и ТСТ УИУ "ГФК ИПМех РАН".

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cocetta, F.; Gillard, M.; Szmelter, J.; Smolarkiewicz, P.K. Stratified flow past a sphere at moderate Reynolds numbers. *Comp. and Fluids*. 2021, 226, 104998. doi:10.1016/j.compfluid.2021.104998.
2. Chashechkin Yu. D., Zagumennyi I. V. 2D hydrodynamics of a plate: from creeping flow to transient vortex regimes // *Fluids*. 2021. V. 6(9). 310. <https://doi.org/10.3390/fluids6090310>
3. Chashechkin Y.D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // *Axioms*. 2021. V. 10. 286. <https://doi.org/10.3390/axioms10040286>.
4. Chashechkin, Yuli D. Conventional partial and new complete solutions of the fundamental equations of fluid mechanics in the problem of periodic internal waves with accompanying ligaments generation // *Mathematics*. 2021. V. 9(6). No. 586. <https://doi.org/10.3390/math9060586>
5. УИУ "ГФК ИПМех РАН": Гидрофизический комплекс для моделирования гидродинамических процессов в окружающей среде и их воздействия на подводные технические объекты, а также распространения примесей в океане и атмосфере. Сайт: <http://www.ipmnet.ru/uniquequip/gfk/#equip>.
6. Honji, H. Vortex Motions in the Stratified Wake Flows. *Fluid Dyn. Res.* 1988, 3(1-4), 425–430. [http://dx.doi.org/10.1016/0169-5983\(88\)90104-9](http://dx.doi.org/10.1016/0169-5983(88)90104-9)



### ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ КВАНТОВАНИЯ ВИХРЕВОГО КОЛЬЦА

С.В. Талалов

Тольяттинский государственный университет, Тольятти  
[svt\\_19@mail.ru](mailto:svt_19@mail.ru)

В докладе рассматривается квантовое описание динамической системы (вихревого кольца), которая представляет собой замкнутую кривую  $\mathbf{r}(\tau, \xi)$ , эволюционирующую в пространстве в соответствии с уравнением локальной индукции

$$\partial_\tau \mathbf{r}(\tau, \xi) = \frac{1}{R_0} \partial_\xi \mathbf{r}(\tau, \xi) \times \partial_\xi^2 \mathbf{r}(\tau, \xi). \quad (1)$$

Доклад основан на работах автора [1,2]. Рассматриваются малые возмущения кольца:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q}_0 + \varepsilon \mathbf{q}, \quad \mathbf{J}(\tau, \xi) = \mathbf{j}_0(\xi) + \varepsilon \mathbf{j}(\tau, \xi),$$

где  $\mathbf{j}_0(\xi) = \{-\sin \xi, \cos \xi, 0\}$  – касательный вектор к невозмущенной конфигурации, а константы интегрирования  $\mathbf{q}$  можно считать координатами центра кольца. С точностью до величин порядка  $\varepsilon^2$  получаем уравнение для "возмущений"  $\mathbf{j}(\tau, \xi)$ :

$$\partial_\tau \mathbf{j}(\tau, \xi) = \mathbf{j}_0(\tau, \xi) \times [\mathbf{j}(\tau, \xi) + \partial_\xi^2 \mathbf{j}(\tau, \xi)]. \quad (2)$$

В цилиндрических координатах

$$\mathbf{j}(\tau, \xi) = j_\rho(\tau, \xi) \mathbf{e}_\rho + j_\varphi^0 \mathbf{e}_\varphi + j_z(\tau, \xi) \mathbf{e}_z,$$

Причем, не ограничивая общности, можно считать  $j_\varphi^0 = \text{const}$  [1]. Вводя комплексную амплитуду возмущений  $\mathbf{g} = j_\rho + i j_z$ , уравнение (2) может быть записано в виде:

$$\partial_\tau \mathbf{g} = -i \partial_\xi^2 \mathbf{g} - \frac{i}{2} (\mathbf{g} - \bar{\mathbf{g}}).$$

Данное уравнение может быть решено явно:

$$\mathbf{g}(\tau, \xi) = \sum_n \mathbf{g}_n e^{i[n\xi + n\sqrt{n^2 - 1}\tau]}, \quad (3)$$

где  $j_n \equiv \text{const}$ , а коэффициенты  $\bar{j}_{-n}$  и  $j_n$  связаны соотношением:

$$\bar{\mathbf{g}}_{-n} = 2 \left[ n\sqrt{n^2 - 1} - n^2 + \frac{1}{2} \right] \mathbf{g}_n$$

В дополнении к уравнению (1), в рассматриваемой модели постулируется известная формула [3] для импульса жидкости:

$$\mathbf{p} = \frac{\rho_0}{2} \int \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) dV.$$

Вектор  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$  обозначает завихренность. Данная величина для вихревой нити, как известно [4], вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = \Gamma \int_0^{2\pi} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(\xi)) \partial_\xi \mathbf{r}(\xi) d\xi,$$

где символ  $\Gamma$  означает циркуляцию.

Идея заключается в описании рассматриваемой (формальной) динамической системы в терминах расширенного множества переменных  $\mathcal{A} = \{\mathbf{q}, \mathbf{j}(\xi), \Gamma\}$  в которое, помимо координат "центра масс"  $\mathbf{q}$  и возбуждений кольца  $\mathbf{j}(\xi)$  включена также и циркуляция  $\Gamma$ . Это позволяет учесть (минимальным образом) наличие жидкости, окружающей кривую  $\mathbf{r}(\tau, \xi)$ . Такое расширение позволяет более полно, на взгляд автора, интерпретировать формальную динамическую систему "замкнутая кривая, эволюционирующая в соответствии с уравнением (1)", именно как вихревую нить.

Далее осуществляется переход к новым переменным  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}' = \{\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{j}(\xi)\}$ . Такой переход делает, в частности, наглядной интерпретацию вихревого кольца как частицы с внутренними степенями свободы  $\mathbf{j}(\xi)$ , координатами  $\mathbf{q}$ , импульсом  $\mathbf{p}$ , и, как следствие, облегчает последующее квантование теории. Так, в предлагаемом подходе представляется естественным выбрать пространство квантовых состояний в виде

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{H}_F,$$

где символ  $\mathbf{H}_2$  означает Гильбертово пространство свободной бесструктурной частицы на плоскости и символ  $\mathbf{H}_F$  означает Фоковское пространство бесконечного набора

гармонических осцилляторов. Заметим, что множество  $\mathcal{A}'$  более широкое, чем исходное множество  $\mathcal{A}$ , поэтому в теории появляются связи. Это делает процедуру квантования нетривиальной. Так, в частности, физическое пространство  $H_{phys} \subset H$  оказывается связанным с системой когерентных состояний одной из квантованных мод разложения (3).

В итоге находим спектр энергии

$$\varepsilon = \frac{|p|^2}{2\mu_0} + \frac{\hbar}{t_0} \sum_{n>1} \sum_{j=1}^k \delta_{n,n_j} n \sqrt{n^2 - 1},$$

где  $n_j$  - числа заполнения соответствующего вектора состояний для внутренних степеней свободы,  $\mu_0$  - центральный заряд расширенной группы Галилея.

Рассмотрим движение кольца в конкретной замкнутой области, например, в цилиндре высотой  $L$  и с образующей, скользящей вдоль замкнутой плоской кривой  $S$  (с некоторым характерным размером  $R_0$ ). В рамках данной модели оказывается возможным вычислить (именно вычислить, а не постулировать) спектр циркуляции  $\Gamma_{n,m,k}$ , как ряд по константам  $\varepsilon$  и  $\hbar$ :

$$\Gamma_{n,m,k} = \frac{\hbar n}{\mu_v} \left[ 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{L \lambda_m}{\pi n} \right)^2 - \frac{4 \hbar k}{\mu_0 v_0 R_0} \right) \right] + O(\varepsilon^4, \hbar^3).$$

Здесь  $\mu_v \propto \mu_0$ ,  $v_0$  – скорость звука в среде и  $\lambda_m$  – собственные числа оператора Лапласа в плоской области, ограниченной кривой  $S$ .

Обсуждения, доказательства и другие детали могут быть найдены в работах [1,2].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Talalov S.V. Small Oscillation of a Vortex Ring: Hamiltonian Formalism and Quantization // Eur. Journ. Mech B/Fluids. **92**. pp. 100 - 106.
2. Talalov S.V. Closed vortex filament in a cylindrical domain: Circulation quantization // Physics of Fluids. **34**. 041702-1 – 041702-4. (2022).
3. Бетчелор Дж. Введение в динамику жидкости. – М.: Мир, 1973.
4. Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л.. Введение в теорию концентрированных вихрей. – Новосибирск: Ин-т теплофизики СО РАН, 2003.



## ОПТИМИЗАЦИЯ ИНТЕГРИРОВАННОГО РАСЧЕТА ПРОЦЕССА ДВИЖЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО ПОТОКА «НЕФТЬ-ГАЗ-ВОДА» В СИСТЕМЕ «СКВАЖИНА-НАЗЕМНАЯ ИНФРАСТРУКТУРА»

С.Р. Тарариев<sup>1,2</sup>, Д.В. Поляков<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>РГУ нефти и газа (НИУ) имени И. М. Губкина, Москва

<sup>2</sup>ООО «ЛУКОЙЛ-Инжиниринг», Москва

dmitry.polyakov@lukoil.com, syoma.tar-tar@yandex.ru

## ВВЕДЕНИЕ.

В настоящее время одним из ключевых направлений деятельности нефтедобывающих компаний является создание интегрированных моделей для ключевых активов. Такие модели позволяют существенно повысить качество принимаемых проектных решений по управлению их разработкой.

Расчет процесса движения многокомпонентного потока «нефть-газ-вода» в системе сбора месторождений углеводородов от скважины и до системы подготовки является сложной задачей, требующей применения средств автоматизированного расчета.

Большинство интегрированных моделей создаются в зарубежных программных продуктах. Например, Petroleum Experts Limited. Данный программный комплекс состоит из трех модулей: MBAL (моделирование пласта), PROSPER (моделирование скважин) и GAP (моделирование системы сбора и интеграция всех модулей).

В рамках импортозамещения нефтяные компании создают отечественные аналоги зарубежных программ или разрабатывают собственное ПО.

Результатам оптимизации расчета движения многокомпонентного потока «нефть-газ-вода» в системе «скважина-наземная инфраструктура» моделей месторождений нефти и газа посвящена данная работа.

### **ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ РАБОТЫ ИНТЕГРИРОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ.**

В общем случае интегрированная модель месторождения состоит из четырех ключевых компонентов: модель флюида, модель пласта, модель скважины и модель системы сбора.

Принцип работы этих компонентов основан на системе линейных уравнений зависимости основных физико-химических свойств пластовых флюидов, расхода жидкости при движении флюида от пласта к забою скважины, от забоя к устью и от устья к сепаратору от давления.

Решение данной системы уравнений позволяет рассчитать ключевые технологические показатели разработки месторождения с учетом ограничений в каждом из элементов системы.

В данной работе подробно рассмотрен алгоритм расчета для модели скважины и модели системы сбора.

### **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОСНОВА ПРОЦЕССА ДВИЖЕНИЯ ФЛЮИДА.**

Модель скважины представляет собой систему уравнений движения флюида от пласта к забою скважины (IPR кривая) и от забоя к устью скважины (VLP кривая) [1].

В общем случае IPR кривая описывается следующим уравнением:

$$Q = PI(P_{пл} - P_3);$$

где  $Q$  – объемный расход жидкости;  $PI$  – коэффициент продуктивности скважины, зависящий от фильтрационно-емкостных свойств призабойной зоны пласта;  $P_{пл}$  – пластовое давление;  $P_3$  – давление на забое скважины [2].

VLP кривая в общем виде описывается следующим уравнением:

$$P_{уст} = P_3 - \rho_{гжс} g H \sin \alpha - \frac{f_{тр} \rho_{гжс} H Q^2}{2 d^5},$$

где  $P_{уст}$  – давление на устье скважины;  $P_3$  – давление на забое скважины;  $\rho_{гжс}$  – плотность газожидкостной смеси;  $g$  – ускорение свободного падения;  $H$  – длина скважины;  $\alpha$  – угол отклонения скважины от вертикали;  $f_{тр}$  – коэффициент гидравлического трения;  $Q$  – объемный расход жидкости;  $d$  – внутренний диаметр скважины.

Плотность газожидкостной смеси и коэффициент трения зависят от PVT свойств флюида [3] и могут быть определены различными способами в зависимости от используемой корреляции движения многофазного потока. Так как современные нефтяные и газовые скважины имеют сложную геометрию и состоят из множества сегментов с раз-

ными отклонениями от вертикали, решение уравнения 2 производится последовательно для каждого сегмента [4].

В результате итоговая система уравнений IPR и VLP кривых имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q = PI(P_{пл} - P_3) \\ P_{уст} = P_1 - \rho_{гжс}(P_1, Q, WCUT, ГФ) * gH \sin \alpha_{уст-1} - \frac{f_{тр}(P_1, Q, WCUT, ГФ) * \rho_{гжс}(P_1, Q, WCUT, ГФ) * HQ^2}{2d^5} ; \\ P_1 = P_2 - \rho_{гжс}(P_2, Q, WCUT, ГФ) * gH \sin \alpha_{уст-1} - \frac{f_{тр}(P_2, Q, WCUT, ГФ) * \rho_{гжс}(P_2, Q, WCUT, ГФ) * HQ^2}{2d^5} ; \\ .....; \\ P_n = P_{заб} - \rho_{гжс}(P_{заб}, Q, WCUT, ГФ) * gH \sin \alpha_{уст-1} - \frac{f_{тр}(P_{заб}, Q, WCUT, ГФ) * \rho_{гжс}(P_{заб}, Q, WCUT, ГФ) * HQ^2}{2d^5} ; \end{array} \right.$$

где  $P_{1...n}$  – давление в сегментах трубы, WCUT – обводненность флюида, д. ед.; ГФ – газовый фактор,  $m^3/m^3$ .

Таким образом модель скважины позволяет определить три ключевых параметра её работы (давление на забое, давление на устье, дебит) с учётом ограничений в каждом элементе системы.

Компонент система сбора и транспортировки представляет собой гидравлический расчёт ключевых узлов наземной инфраструктуры системы разработки. Результаты данного расчёта зависят от используемой корреляции движения многофазного потока [5].

### ОПТИМИЗАЦИЯ ИНТЕГРИРОВАННОГО РАСЧЁТА.

Несмотря на то, что существующий математический аппарат представляет весьма точно описывать и прогнозировать процесс движения флюида в стволе скважины и системе сбора, на практике в ряде случаев он слишком сложен в использовании и нуждается в оптимизации.

Рассмотрим случай, когда известно давление на устье скважины и необходимо определить расход жидкости и давление на забое. В данной ситуации единственный способ рассчитать потери давления в стволе, это выразить расход жидкости и забойное давление из уравнения IPR кривой, после чего подставлять полученные математические выкладки при расчете каждого участка скважины. В итоге выразить искомые переменные из полученной системы уравнений будет практически невозможно.

Для решения данной задачи можно осуществить методом подбора значений искомых переменных таким образом, чтобы расчетное значение устьевое давление совпадало с заданным. Алгоритм расчёта представлен на рисунке 1.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** Таким образом, был разработан алгоритм интегрированного моделирования системы «скважина-наземная инфраструктура». Преимуществом данного алгоритма по сравнению с зарубежными аналогами заключается в использовании неявной схемы расчета, что освобождает инженера от необходимости передачи данных из одного программного модуля в другой. К недостаткам можно отнести величину математического аппарата алгоритма, что увеличивает нагрузку на вычислительные мощности компьютера, и как следствие, время расчета.



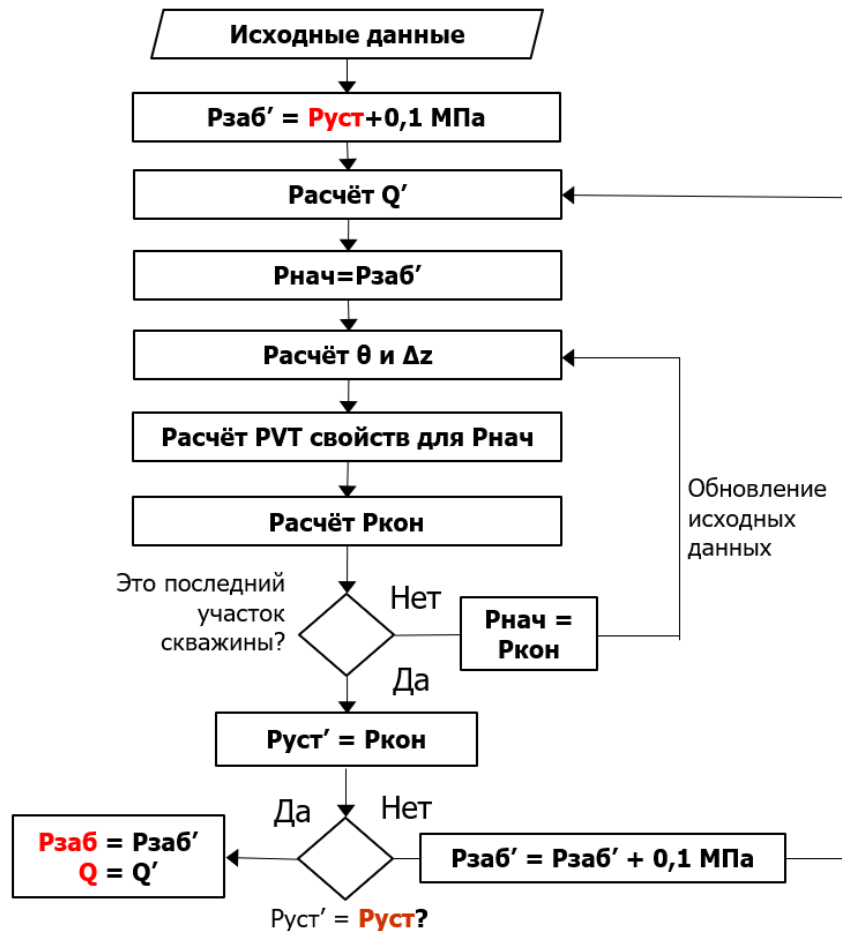


Рис.1 Алгоритм расчета расхода жидкости и потерь давления в стволе скважины при известном устьевом давлении

Реализация данного алгоритма совместно с моделью пласта и флюида в едином программном продукте позволит сократить количество действий, требуемых для создания интегрированной модели, что в свою очередь, снизит вероятность ошибки и повысит эффективность работы инженера.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. K. E. Brown and J. F. Lea «Nodal Systems Analysis of Oil and Gas Wells», SPE 14714, JPT, Oct 1985
2. Gallice F., Wiggins M.L. «A Comparison of Two-Phase Inflow Performance Relationships», SPE 88445, 2004
3. Al-Marhoun, Muhammad Ali. «PVT Correlations for Middle East Crude Oils.» J Pet Technol 40: 650–666, 1988
4. S. Bartz, J. M. Mach, Jawaaid Saeedi, «Lets Get the Most out of Existing Wells», Oilfield Review, 1997
5. Islam Fetoui, «Multiphase flow correlations», Production Technology

## НАБЛЮДЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО РЕЖИМА ЭЛЕКТРОВИХРЕВОГО ТЕЧЕНИЯ В ЖИДКОМ МЕТАЛЛЕ В ПОЛУСФЕРИЧЕСКОМ СОСУДЕ

*И.О.Тепляков<sup>1</sup>, К.Ю.Малышев<sup>2,3</sup>, К.Г. Кубриков<sup>1</sup>, Д.А. Виноградов<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>*Объединенный институт высоких температур РАН, Москва,*

<sup>2</sup>*Московский государственный университет им. Ломоносова, Москва*

<sup>3</sup>*Российский университет дружбы народов, Москва*

[igor.teplyakov@mail.ru](mailto:igor.teplyakov@mail.ru)

При пропускании электрического тока через объем жидкого металла возникает объёмная сила  $\mathbf{F}=\mathbf{J}\times\mathbf{B}$  (здесь,  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{B}$  – плотность электрического тока и магнитная индукция созданного им поля), приводящая в случае пространственно неоднородного распределения  $\mathbf{J}$  к образованию т.н. электровихревого течения (ЭВТ). Подобные течения существенным образом влияют на многие технологические процессы в машиностроении (электрошлаковая сварка) и электрометаллургии (электрошлаковый переплав, различные электроплавильные печи). В частности, именно ЭВТ определяют гидродинамическую структуру потоков в рабочей ванне дуговых печей постоянного тока, которые находят все большее применение в промышленности [1].

Вышеуказанные примеры относятся в первую очередь к сильноточным процессам (100 А и более), но процессы происходящие при относительно малых токах (до 1 А) также представляют научный интерес. По данным [1] при токах менее 0.9 А возможна реализация линейного (стоксова) режима течения. Аналитическое выражение для азимутальной (в случае присутствия внешнего магнитного поля и условия проскальзывания на свободной поверхности жидкого металла) компоненты скорости течения приведено в [2]. Оценки осевой скорости течения [3] показывают, что её значения слишком малы для измерения имеющимся инструментарием (волоконно-оптическим [4] или термокорреляционным [5] методом), но можно провести измерения азимутальной скорости в линейном режиме в присутствии достаточно малого внешнего магнитного поля, используя маркеры на поверхности жидкого металла.

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ.

Схема экспериментальной установки показана на рис. 1. Эвтектический сплав In-Ga-Sn 5 (массовое содержание компонент Ga—67%, In—20.55, Sn—12.5%, температура плавления 10.5 С, плотность  $\rho=6452$  кг/м<sup>3</sup>, кинематическая вязкость  $\nu=4.3\text{e-}7\text{м}^2/\text{с}$ ) заполнял медный полусферический контейнер, радиусом  $r_2=94$  мм. Малый электрод, радиусом  $r_1=0.95$  мм, помещался в центр полусферы и от источника через систему пропускания электрический ток до 1 А. Внешнее магнитное поле может создаваться соле-ноидом.

Электрический ток растекается от малого электрода к стенке полусферы, при этом радиальная компонента взаимодействует с внешним вертикальным магнитным полем (в этих экспериментах, в качестве внешнего поля мы рассматривали магнитное поле Земли, вертикальная компонента которого, на широте Москвы равна  $\sim 5\text{e-}5$  Тл.), создавая азимутальную силу. Азимутальная сила создает закрутку течения в горизонтальной плоскости. МП контролировалось при помощи магнитометра LakeShore DSP475.



Аналитическое выражение (в сферических координатах) для азимутальной скорости на свободной поверхности ( $\theta=\pi/2$ ) имеет вид [2] ( $a=r_1/r_2$ ):

$$U_{\varphi}(r) = \frac{IB_{\text{ext}}}{2\pi\rho\nu} \left( 1 - \frac{r(a+1) + r^{-2}a^2}{a^2 + a + 1} \right).$$

Для параметров соответствующих линейному режиму течения  $I=0.5$  А,  $B_{\text{ext}}=8.5\text{e-}5$  Тл, максимальная скорость составляет  $\sim 2.5$  мм/с. (Реальное магнитное поле несколько больше чем  $5\text{e-}5$  из-за наличия ферромагнитных конструктивов).

### РЕЗУЛЬТАТЫ.

На рисунке 3 представлено сравнение экспериментальных результатов и аналитической зависимости для азимутальной скорости от радиуса для случая  $a=0.01$ .

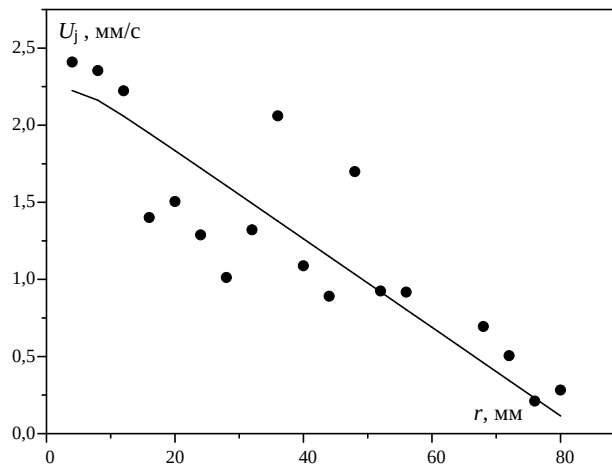


Рис. 3. Зависимость азимутальной скорости от радиуса, точки – эксперимент, линия – аналитический расчет,  $r_1=0.95$  мм,  $r_2=94$  мм,  $I=0.5$  А,  $B_{\text{ext}}=8.5\text{e-}5$  Тл.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** В работе показана возможность экспериментального наблюдения линейного режима течения, результаты могут быть использованы для верификации аналитических и численных расчетов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.В. Бояревич, Я.Ж. Фрейнберг, Е.И. Шилова [и др.] под ред. Э.В.Щербина. Электровихревые течения. Рига: Зинатне. 1985. с. 315.
2. К.Ю. Малышев, Е.А. Михайлов, И.О. Тепляков. Аналитическое исследование электровихревого течения в полусферическом контейнере при наличии внешнего магнитного поля в стоксовом приближении // Труды 11-й международной школы молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах», Москва, 1-3 декабря 2020 г., ИСПО-принт, стр. 113-116.
3. K.Yu. Malyshev, E.A. Mihailov, I.O. Teplyakov Analytical study of the velocity and pressure of the electrovortex flow in hemispherical bowl in a Stokes approximation // *J. Phys.: Conf. Ser.* **1683** 022076.
4. В.Г. Жилин Волоконно-оптические измерительные преобразователи скорости и давления. - М.: Энергоатомиздат, 1987.
5. Teplyakov I., Vinogradov D., Ivochkin Y. Experimental Study of the Velocity of the Electrovortex Flow of In-Ga-Sn in Hemispherical Geometry // *Metals* 2021, 11, 1806.
6. I. O. Teplyakov1, D. A. Vinogradov1, I. B. Klementyeva, Yu. P. Ivochkin Application of the video correlation method to measure the velocity on the surface of a liquid metal // *J. Phys.: Conf. Ser.* **2057** 012020.

# ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ОБОБЩЁННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ВРИЗА- БЮРГЕРСА В СЛУЧАЕ ФУНКЦИИ ПОТОКА С ЧЕТЫРЬМЯ ТОЧКАМИ ПЕРЕГИБА

А.М. Томашева<sup>1</sup>, В.А. Шаргатов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва

<sup>2</sup>Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва

[anastasiatomasheva@gmail.com](mailto:anastasiatomasheva@gmail.com), [shargatov@mail.ru](mailto:shargatov@mail.ru)

Целью работы является исследование разрывных решений обобщенного уравнения Хопфа, основанное на изучении структуры разрывов и их устойчивости. Непрерывное и сильное изменение параметров среды в узких зонах, соответствующих разрывам в решениях уравнения Хопфа, описывается обобщённым уравнением Кортевега-де Вриза-Бюргерса. Установлены условия существования и устойчивость решений в виде бегущей волны (структур разрывов). Множество решений содержит классические и особые разрывы.

Рассматриваются решения уравнения Кортевега-де Вриза-Бюргерса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(v)}{\partial x} = \mu * \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - m * \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}, \quad v = v(x, t), \quad (1)$$

где  $\mu, m = \text{const} > 0$  — коэффициенты диссипации и дисперсии соответственно.

На больших масштабах, если производными в правой части можно пренебречь, решения уравнения (1) становятся близкими к решениям интегрального уравнения Хопфа

$$\oint \varphi(v) dt - v dx = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) имеет разрывные кусочно-постоянные решения в виде бегущей волны (ударной волны)

$$v(x - Wt) = \begin{cases} v_l & \text{при } x - Wt < 0, \\ v_r & \text{при } x + Wt > 0, \end{cases} \quad W = \frac{[\varphi(v)]}{[v]}, \quad (3)$$

где  $W$  — скорость бегущей волны,  $v_r$  и  $v_l$  — значения параметров перед разрывом и за ним соответственно.

Для некоторых наборов значений  $W$  и  $v_r$  существуют решения уравнения (1) в виде бегущей волны, которые близки к решению (3) вне узкой зоны ударного перехода. Такие решения уравнения (1) называются стационарными структурами разрывов.

Сделаем замену переменных

$$v \rightarrow u + v_r, t \rightarrow t\sqrt{m}, x \rightarrow x\sqrt{m}, \gamma = \frac{\sqrt{m}}{\mu}, \varphi(v) = f(v - u_r)$$

и поставим задачу для бегущей волны:

$$u = u(\xi), \quad \xi = x - Wt,$$

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} - \frac{1}{\gamma} \frac{du}{d\xi} = Wu - f(u), \quad (4)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} u(\xi) = u_r \equiv 0.$$

Функция потока  $f(u)$  (Рис. 1) имеет вид

$$f(u) = ((u - 1.5)^2 - 2.25)((u - 1.5)^2 - 0.25)^2 - \frac{a}{256(u - 1.5)^2 + 1} \quad (5)$$

и обладает четырьмя точками перегиба. График этой функции при  $\alpha = 1$  показан на Рис. 2.

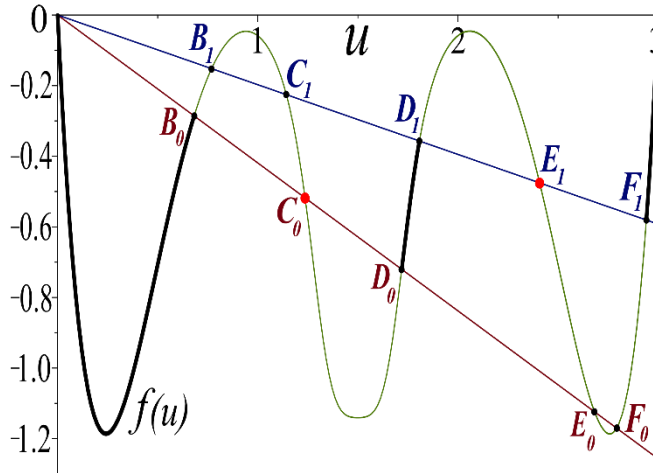


Рис. 2.  $f(u)$ . Выделенные интервалы — множество классических разрывов со структурой. Точки  $C_0$  и  $E_1$  соответствуют особым разрывам.

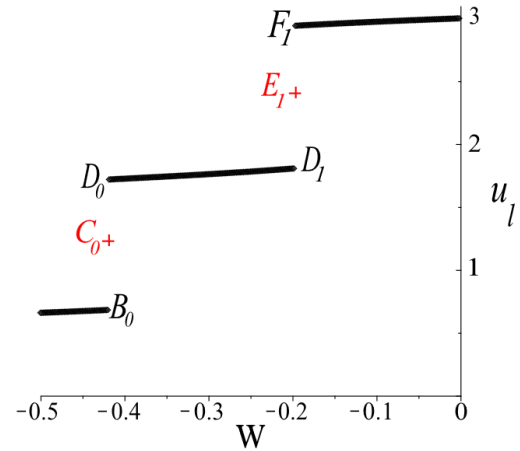


Рис. 1. Значения  $u_l$  в зависимости от скорости бегущей волны  $W$  для структур разрывов.

Обозначим значение  $u$  в конечной точке фазовой траектории при  $\xi \rightarrow -\infty$  через  $u_l$ . При  $\gamma = 2$  множество значений  $u_l$  состоит из интервалов, полуинтервалов и отдельных точек, как показано на Рис. 1. Отдельным точкам ( $C_0$  и  $E_1$ ) на Рис. 1 соответствуют гетероклинические кривые типа седло-седло, которые называют особыми разрывами [1]. На Рис. 2 значения  $u_l$ , полученные для решений в виде бегущей волны, выделены жирной линией и обозначены точками  $C_0$  и  $E_1$ . Для точек  $B_0, B_1, C_1, D_0, D_1, E_0, F_0$  и  $F_1$  решений нет. Из данных, представленных на рис. 1 и 2, видно, что для каждого значения скорости существует решение в виде бегущей волны. Если функция  $f(u)$  имеет четыре точки перегиба, то одно и то же значение скорости могут иметь пять разных решений вида (3) для уравнения (2). Например, точки  $B_0, C_0, D_0, E_0$  и  $F_0$  лежат на Рис. 2 на одной прямой. Скорость бегущей волны равна тангенсу угла наклона прямой, проведенной из точки  $O$ , поэтому точкам  $B_0, C_0, D_0, E_0$  и  $F_0$  соответствует одна и та же скорость разрыва в решении (3). Но только для точки  $C_0$  существует решение уравнения (1) в виде бегущей волны. Таким образом, не для каждого значения  $u_l$  существует разрыв со структурой. Условие существования структуры разрыва, согласно [1], является *дополнительным условием*.

Исследованы структуры особых и классических разрывов. Впервые найден пример существования двух особых разрывов с монотонной структурой, обладающих разными скоростями. Эти разрывы показаны на рис. 1 и 2 точками  $C_0$  и  $E_1$ . Методом функции Эванса исследована линейная устойчивость этих разрывов и показано, что оба особых разрыва являются устойчивыми. Ранее в [2, 3] устойчивость решений в виде бегущей волны исследовалась для функции потока с двумя точками перегиба, и устойчивостью обладал всегда только один особый разрыв. Для классических разрывов результаты исследования устойчивости качественно согласуются с полученными ранее в [2, 3] для функции потока с двумя точками перегиба. Для случая, приведенного на рис. 1, устойчивыми являются классические разрывы между точками  $O$  и  $B_0$ , а также в некоторой окрестности точек  $D_0$  и  $F_1$ .



## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 20-01-00071.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куликовский А.Г. О возможном влиянии колебаний в структуре разрыва на множество допустимых разрывов // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 275, № 6. — С. 268–303.
2. Chugainova A.P., Il'ichev A.T., Kulikovskii A.G., Shargatov V.A. Problem of arbitrary discontinuity disintegration for the generalized Hopf equation: Selection conditions for a unique solution // IMA Journal of Applied Mathematics (Institute of Mathematics and Its Applications). — 2017. — Vol. 82, no. 3. — P. 496–525.
3. Il'ichev A.T., Chugainova A.P., Shargatov V.A. Spectral stability of special discontinuities // Doklady Mathematics. — 2015. — Vol. 91, no. 3. — P. 347–351.



## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ГАЗА С ЧАСТИЦАМИ В АКУСТИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ ДЛЯ ГАЗА С МОНОДИСПЕРСНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

Д.А.Тукмаков

Федеральный исследовательский центр Казанский научный центр РАН, Казань  
[tukmakovda@imm.knc.ru](mailto:tukmakovda@imm.knc.ru)

Одним из разделов физики сплошных сред являются механика жидкости и газа предметом исследования, которой являются всевозможные течения газообразных, жидких сред или же смесей [1-12]. В механике жидкости и газа широко используются как методы математического моделирования, так и методики проведения физических экспериментов. Сложной задачей является описание и моделирование течений неоднородных по своим механическим и физико-химическим свойствам [1-3]. В частности, течений аэрозольных сред, встречающихся в практических приложениях [3]. В горной и химической промышленности, а также энергетике технологические процессы используют аэрозольные потоки. Для осаждения дисперсной компоненты аэрозоля применяется воздействие акустических полей. В настоящее время в литературе применяется несколько подходов к моделированию динамики смесей компоненты, в которых имеют различное агрегатное состояние [1]. Равновесный подход, предполагающий описание смеси как однородной среды, параметры которой определяются наличием дисперсной компоненты. Диффузионный подход предполагает описание непрерывности плотности для каждой из компонент смеси и описание сохранения импульса и энергии для всей смеси в целом. В континуальном подходе динамика каждой компоненты описывается полной гидродинамической системой с учетом взаимодействия каждой из компонент с остальными. Скоростная и тепловая неоднородность смеси наиболее существенно выражена в смесях, в которых компоненты имеют близкую массовую долю [1]. В данной работе применяется математическая модель, описывающая поля скорости и температуры у каждой из компонент смеси. Работа посвящена моделированию колебательных процессов в акустическом резонаторе [12]. Движение аэрозоля описывается континуальной моделью динамики неоднородных сред, учитывающей обмен импульсом и теплом между компонентами смеси [1-3]. Несущая среда моделировалась как вязкий, сжимаемый и теплопроводный газ [19]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla(\rho_i \mathbf{V}_i) = 0, \quad (i=1,2) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_1 V_1^k}{\partial t} + \nabla^i (\rho_1 V_1^k V_1^i + \delta_{ik} p - \tau_{ik}) = -F_k + \alpha \nabla^k p, \quad (i,k=1,2), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_2 V_2^k}{\partial t} + \nabla^i (\rho_2 V_2^k V_2^i) = F_{2k} - \alpha \nabla^k p, \quad (i,k=1,2), \quad (3)$$

$$\frac{\partial(e_1)}{\partial t} + \nabla^i (V_1^i (e_1 + p - \tau_{ii}) - V_1^k \tau_{ki} - \lambda \nabla^i T) = -Q - |F_k| (V_1^k - V_2^k) + \alpha \nabla^k (p V_1^k), \quad (i,k=1,2) \quad (4)$$

$$\frac{\partial(e_2)}{\partial t} + \nabla^k (e_2 V_2^k) = Q_2, \quad (k=1,2), \quad (5)$$

$$p = (\gamma - 1)(e_1 - \rho_1(u_1^2 + v_1^2)/2), \quad e_1 = \rho_1 I + \rho_1(u_1^2 + v_1^2)/2, \quad \rho_2 = \alpha \rho_{20}, \quad e_2 = \rho_2 C_{p2} T_2$$

$\mathbf{V}_i = [u_i, v_i]$  - вектор скорости газа и дисперсной компоненты,  $\tau_{ij}$  - составляющие тензора вязких напряжений газа:

$$\tau_{11} = \mu \left( 2 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{22} = \mu \left( 2 \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{12} = \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right), \quad D = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}.$$

Уравнение (1) описывает непрерывность плотности несущей среды и «средней плотности» дисперсной фазы ( $i>1$ ). Уравнения (2) и (3) описывают законы сохранения импульса несущей среды и дисперсной фазы соответственно. Уравнения (4) и (5) описывают законы сохранения полной энергии газа и тепловой энергии дисперсной фазы.

Введены обозначения:  $p, \rho_1$  - давление и плотность газа;  $T_1, e_1$  - температура и полная энергия газа;  $\alpha, \rho_2, \rho_{20}, T_2, C_{p2}, e_2, r$  - объемное содержание дисперсной фазы, средняя плотность, физическая плотность, температура, теплоемкость, внутренняя энергия дисперсной фазы и радиус частиц.

Система уравнений дополнялась межфазным обменом импульсом (6) и замыкающими соотношениями (7) [1]:

$$F_1 = \frac{3}{4} \frac{\alpha}{(2r)} C_{d2} \rho_1 \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} (u_1 - u_2) + \alpha \rho_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) +$$

$$+ 0.5 \alpha \rho_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - v_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right),$$

$$F_2 = \frac{3}{4} \frac{\alpha}{(2r)} C_d \rho_1 \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} (v_1 - v_2) + \alpha \rho_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) +$$

$$+ 0.5 \alpha \rho_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right), \quad (6)$$

$$C_{d2} = \frac{24}{Re_{21}} + \frac{4}{Re_{21}^{0.5}} + 0.4, \quad M_{21} = |V_1 - V_2| / c,$$

$$Re_{21} = \rho_1 |V_1 - V_2| 2r / \mu, \quad Pr = C_p \mu / \lambda, \quad (7)$$

$$Nu_{21} = 2 \exp(-M_{21}) + 0.459 Re_{21}^{0.55} Pr^{0.33},$$

$$Q = 6 \alpha \lambda Nu_{21} (T_1 - T_2) / (4r^2) \quad (8)$$

В формулах (6)  $F_k$  - составляющие вектора силового взаимодействия дисперсной фазы и несущей среды,  $k=1,2$ . В формуле (8)  $Q(T_1, T_2)$  - функция теплообмена между газом и дисперсной компонентой аэрозоля [1,2].

Значения скорости компонент смеси приравнивались нулю на неподвижных поверхностях. Для остальных динамических функций, на поверхностях ограничивающих объем акустического резонатора, приравнивались нулю конечно-разностные аппроксимации производных по направлению нормалей к поверхностям. Система уравнений динамики многофазной среды (1)-(5) решалась двухэтапным явным конечно-разностным методом Мак-Кормака, позволяющим получать решения второго порядка точности [9].

Алгоритм численного метода можно отобразить на примере нелинейного уравнения (9):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial a(f)}{\partial x} + \frac{\partial b(f)}{\partial y} = c(f) \quad (9)$$

При реализации алгоритма последовательно выполняются действия (10) и (11) [19,20]:

$$f_{j,k}^* = f_{j,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} a_{j,k}^n + \frac{\Delta t}{\Delta y} b_{j,k}^n - \Delta t c_{j,k}^n \quad (10)$$

$$f_{j,k}^{n+1} = 0,5(f_{j,k}^n + f_{j,k}^*) - 0,5 \frac{\Delta t}{\Delta x} (a_{j,k}^* - a_{j-1,k}^*) - 0,5 \frac{\Delta t}{\Delta y} (b_{j,k}^* - b_{j,k-1}^*) + 0,5 \Delta t c_{j,k}^* \quad (11)$$

Здесь  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta t$  – шаги конечно-разностной сетки. Для подавления численных осцилляций, возникающих в процессе интегрирования уравнений методом Мак-Кормака, применялась схема нелинейной коррекции [10,11].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. – Ч.1 Наука, 1987. 464с.
2. Кутушев А.Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. – СПб.: Недра, 2003. 284 с.
3. Федоров А.В., Фомин В.М., Хмель Т.А. Волновые процессы в газовзвешах частиц металлов. – Новосибирск, 2015. 301 с.
4. Тукмаков Д.А. Способ увеличения интенсивности колебаний газа, генерируемых в акустическом резонаторе // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. №3. 2014. С.79-82.
5. Тукмаков Д.А. Увеличение интенсивности колебаний газа в акустическом резонаторе // Инженерно-физический журнал. 2015. №3. С.638-641.
6. Тукмаков Д.А. Теоретическое исследование релаксации интенсивности скачка давления на фронте ударной волны в газовзвеси // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2019. № 3. С.3-11.
7. Тукмаков Д.А. Численное исследование влияния свойств газовой составляющей взвеси твердых частиц на разлет сжатого объема газовзвеси в двухкомпонентной среде // Инженерно – физический журнал. 2020. №2. С. 304-310.
8. Тукмаков Д.А. Численная модель течения аэрозоля, обусловленного взаимодействием частиц и газа // Сложные системы. 2021. №1. С. 64-71.
9. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей В 2-х томах, Т.2, – Москва: Мир, 1991. 552 с.
10. Тукмаков А.Л. Модель движения и осаждения заряженной газовзвеси в электрическом поле // Инженерно-физический журнал. 2014. № 1. С. 35-44.
11. Музафаров И.Ф., Утюжников С.В. Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа // Математическое моделирование. 1993. №3. С.74-83.
12. Горелик Г.С. Колебания и волны. – М.: Физ. - мат. ГИЗ, 1959. 572 с.

## ЭВОЛЮЦИЯ И СТРУКТУРА ДВИЖЕНИЙ В СИСТЕМЕ РЕАГИРУЮЩИХ РАСТВОРОВ С МЕЖФАЗНОЙ ГРАНИЦЕЙ

*В.Ю. Уточкин, Д.А. Браун*

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь*

[vladimir.utochkin.97@mail.ru](mailto:vladimir.utochkin.97@mail.ru)

В последние два десятилетия всё большее внимание со стороны исследователей в области химии и механики жидкости привлекает к себе проблема взаимодействия конвективного движения и химических реакций. С одной стороны, это связано с появлением множества приложений в технологиях химической промышленности [1, 2]. С другой, проблема имеет фундаментальный характер и представляет интерес с точки зрения исследования спонтанной самоорганизации сложных систем [3].

Спектр задач реакции-диффузии и без учета механического движения среды чрезвычайно обширен, поэтому значительная часть исследователей фокусируется на реакции нейтрализации с ее простой, но нелинейной кинетикой. Наиболее удобной в этом случае является конфигурация в виде двухслойной системы растворов кислоты и щёлочи, приведение которых в контакт сопровождается появлением третьего компонента — соли. Наличие сразу трех веществ с различными физическими свойствами обуславливает большое количество параметров задачи и, следовательно, широкое многообразие сценариев эволюции. В частности, в недавней экспериментальной работе [4], посвященной исследованию неустойчивости в системе двух несмешивающихся реагирующих жидкостей, был обнаружен ряд уникальных режимов конвекции, теоретическая трактовка которых до сих пор не ясна.

В настоящей работе строится математическая модель явления, наблюдавшегося в [4]. В начальный момент времени две несмешивающиеся жидкости — водный раствор кислоты  $\text{HCl}$  и раствор основания  $\text{NaOH}$  в пентаноле — размещаются друг над другом в ячейке Хеле-Шоу, вертикально ориентированной в поле силы тяжести. Поверхность раздела жидкостей считается недеформируемой в течение всего времени эволюции. Предполагается, что молекулы основания не могут свободно проникать через данную поверхность, тогда как для молекул кислоты она является проницаемой, в связи с чем конвективное движение локализуется преимущественно снизу от межфазной границы. Верхняя же часть кюветы играет роль пассивного резервуара с кислотой [4].

Применяется новый подход, учитывающий производство воды вблизи реакционного фронта. В основу подхода заложено представление добавочной плотности в виде

$$\rho = A + R_B B + W(t) R_S S,$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $S$  — концентрации растворов кислоты, основания и соли соответственно,  $R_B$ ,  $R_S$  — числа Рэлея. Функция  $W(t)$  представляет собой поправку к концентрации соли за счет производства воды в реакционной зоне. В соответствии с приближением Буссинеска указанное разложение плотности в уравнениях движения учитывается только в слагаемом с объемной силой.

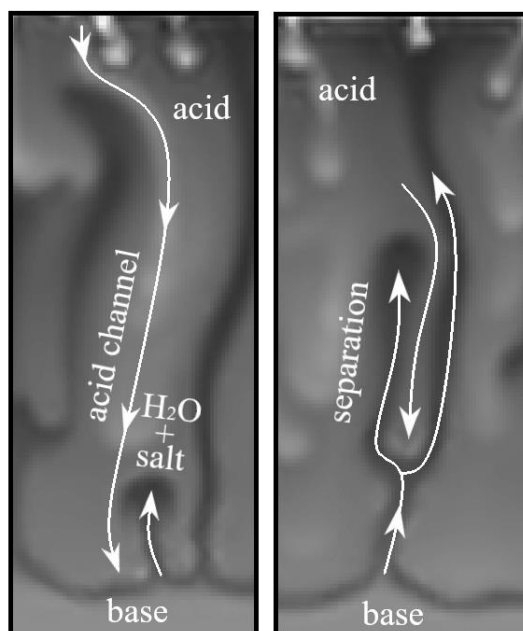


Рис. 1. Распределение поля плотности жидкости в реакционном объеме. Демонстрируется механизм уменьшения длины волны конвективной структуры в режиме движения типа плотностной волны.

В рамках исследования сформулирована система уравнений реакции-диффузии-конвекции, описывающая поведение системы реагирующих жидкостей, разделенных межфазной границей. Получено основное состояние реакции-диффузии в условиях механического равновесия. Анализ распределений плотности в основном состоянии позволил получить качественное согласие с картой устойчивости в пространстве начальных концентраций, построенной в [4]. Обнаружено четыре качественно различных распределения, потенциально приводящих к четырем сценариям развития конвекции. Эволюция и структура движения в каждом из найденных режимов воспроизводится путем прямого численного моделирования.

#### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Исследование финансово поддержано Российским Научным Фондом (грант № 19-11-00133).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dupeyrat M., Nakache E. Direct conversion of chemical energy into mechanical energy at an oil water interface // Bioelectrochem. Bioenerg. 1978. Vol. 5. No. 1. P. 134-141.
2. Thomson P.J., Batey W., Watson R.J. Interfacial activity in two phase systems  $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2/\text{Pu}(\text{NO}_3)_4/\text{HNO}_3\text{-H}_2\text{O-TBP/OK}$ // Proc. of the Extraction '84: Symposium on Liquid-Liquid Extraction Science. Dounreay, Scotland, 1984.
3. G. Nicolis, I. Prigogin. Self Organization in Non-Equilibrium systems / Wiley-Interscience, New-York, 1977
4. Mizev A, Shmyrova A. Buoyancy-driven instabilities induced by a neutralization reaction in immiscible fluids // J. Phys.: Conf. Ser. 1809, 012030. 2021.

## ВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА КАПЕЛЬ ОКТАФТОРПРОПАНА В УПРУГО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Ю.В. Федоров

Институт механики и машиностроения ФИЦ КазНЦ РАН, Казань

[kopperfildd@ya.ru](mailto:kopperfildd@ya.ru)

В последнее время большой интерес представляет изучение эмульсий с фазовыми переходами, обладающих следующей особенностью. Под действием ультразвука внутри капель жидкости образуются пузырьки пара. Этот процесс известен как акустическое испарение капель [1]. Использование данных эмульсий имеет огромный потенциал в биомедицине [2, 3], поскольку, в отличие от обычных газовых микропузырьков капли жидкости могут быть достаточно маленькими и могут спокойно протекать через тонкие капилляры. В качестве капель жидкости обычно используют капли перфторуглерода, такие как декафторбутан  $C_4F_{10}$ , октафторпропан  $C_3F_8$  и додекафторпентан  $C_5F_{12}$ . Выбор данных веществ связан с тем, что они остаются метастабильными при физиологической температуре и не могут самопроизвольно испаряться. Для их испарения требуется акустическая энергия. В настоящей работе представлена математическая модель, определяющая рост пузырька пара внутри капли октафторпропана  $C_3F_8$ , находящейся в вязкоупругой жидкости. Некоторые результаты по данной теме опубликованы в работах авторов [5–8].

**РЕЗУЛЬТАТЫ.** В работе [4] представлены экспериментальные данные по росту пузырька пара внутри капли октафторпропана, находящейся в воде. Начальный радиус капли  $R_{20}$  составлял  $10^{-6}$  м, начальный радиус зародыша пара  $R_{10} = 10^{-7}$  м. Предполагалось, что когда капля полностью испарялась, то начинал совершать радиальные колебания чистый пузырек пара, то есть в этом случае полагалось, что отсутствуют фазовые переходы. Для проверки корректности полученной теории и выбранной численной реализации, на рис. 1 приведено сравнение с данным экспериментом. Как видно, найдено хорошее соответствие теории с опытными данными.

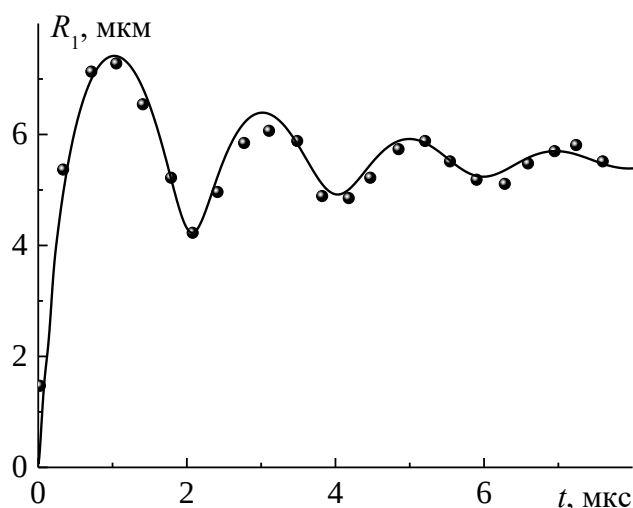


Рис. 1. Сравнение зависимости радиуса пузырька пара от времени с экспериментальными данными [4]



На рис. 2 приведены зависимости радиуса пузырька пара от времени при различных значениях модуля сдвига несущей фазы.

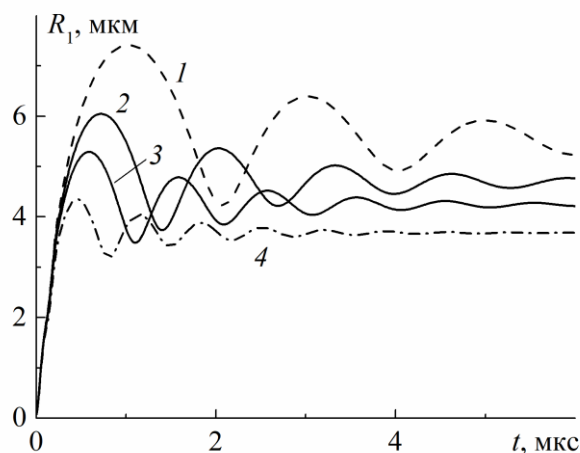


Рис. 2. Радиус пузырька пара при различных модулях сдвига: 1 –  $G_l = 0$ , 2 –  $5 \times 10^4$ ,  
3 –  $10^5$ , 4 –  $2 \times 10^5$  Па;  $\mu_l = 10^{-3}$  Па·с

Остальные параметры те же, что и на рис. 1. Как и следовало ожидать, увеличение модуля сдвига несущей фазы приводит к уменьшению роста парового пузырька, а также к более быстрому затуханию его радиальных колебаний. Таким образом, достаточно упругая внешняя жидкость сдерживает радиальные движения включения.

#### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-00025).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kripfgans O.D., Fowlkes J.B., Miller D.L., Eldevik O.P., Carson P.L. Acoustic droplet vaporization for therapeutic and diagnostic applications // *Ultrasound Med. Biol.* 2000. V. 26. P. 1177-1189.
2. Sheeran P.S., Dayton P.A. Phase-change contrast agents for imaging and therapy // *Curr. Pharm. Des.* 2012. V. 18. P. 2152-2165.
3. Kee A.L., Teo B.M. Biomedical applications of acoustically responsive phase shift nanodroplets: current status and future directions // *Ultrason. Sonochem.* 2019. V. 56. P. 37-45.
4. Doinikov A.A., Sheeran P.S., Bouakaz A., Dayton P.A. Vaporization dynamics of volatile perfluorocarbon droplets: a theoretical model and in vitro validation // *Medical Physics*. 2014. V. 41. P. 102901 (doi: 10.1118/1.4894804)
5. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Волновая динамика покрытых оболочкой включений в вязкоупругой среде // *Прикладная механика и техническая физика*. 2020. Т. 61. № 4. С. 22-30.
6. Gubaidullin D.A., Fedorov Yu.V. Acoustics of a viscoelastic medium with encapsulated bubbles // *Journal of Hydrodynamics*. 2021. V. 33. № 1. P. 55-62.
7. Fedorov Yu.V., Panin K.A. Heat and mass transfer in the acoustics of liquid with encapsulated droplets // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2022. V. 43. № 2. P. 376-380.
8. Губайдуллин Д.А., Панин К.А., Федоров Ю.В. Акустика жидкости с покрытыми оболочкой каплями при наличии фазовых переходов // *Известия РАН. МЖГ*. 2022. № 4. С. 41-51.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ О ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ВИБРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ В ОБЛАСТЯХ РАЗЛИЧНОЙ ГЕОМЕТРИИ

А.И. Федюшкин<sup>1</sup>, К.А. Иванов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

<sup>2</sup>АО НПП «Пульсар», Москва

[fai@ipmnet.ru](mailto:fai@ipmnet.ru), [kirill7785@mail.ru](mailto:kirill7785@mail.ru)

В данной работе проведены примеры численного решения задач о вибрационной конвекции в областях различной геометрии (прямоугольной, цилиндрической, одно- и многосвязной) заполненной неравномерно нагретой жидкостью, находящейся в высокочастотном вибрационном поле с ускорением  $g_{vibr}$  (рис.1).

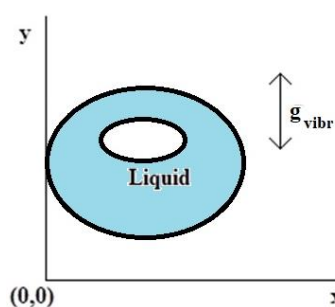


Рис 1. Геометрия расчётной области.

В приближении высокочастотных вибраций задача описывается системой уравнений вибрационной конвекции Симоненко-Зеньковской [1]. В данной работе эти уравнения решались методом контрольных объёмов для двумерного случая в переменных «вихрь - функция тока - температура» [2-3]. Данный метод решения реализован в программном коде, написанном на языке C/C++, верификация которого проведена на решении тестовых задач [4, 5].

В работе предполагается, что вибрации поступательные, гармонические, направлены вдоль оси  $Oy$ , с малой амплитудой  $a$  и удовлетворяют следующему закону:  $y = -a \cdot \sin(\Omega \cdot t)$ , где  $\Omega = 2\pi f$  и вибрационное ускорение равно  $g_{vibr} = \ddot{y} = a \cdot \Omega^2 \cdot \sin(\Omega \cdot t)$ , где  $f$  – частота колебаний (30 - 100Гц),  $a$  – амплитуда вибраций (100-200мкм). Результаты расчётов виброконвекции в расплаве с малым числом Прандтля ( $Pr=0.0824$ ) для прямоугольных и цилиндрических областей в вертикальном вибрационном поле для условий невесомости показаны на рис. 2-5. На рис.2 показаны изотермы и модуль скорости течения расплава в квадрате со стороной 3см, подогреваемом сбоку с теплоизоляционными горизонтальными стенками. Наблюдается одновихревое виброконвективное течение с направлением закрутки, зависящим от вибрационных параметров.

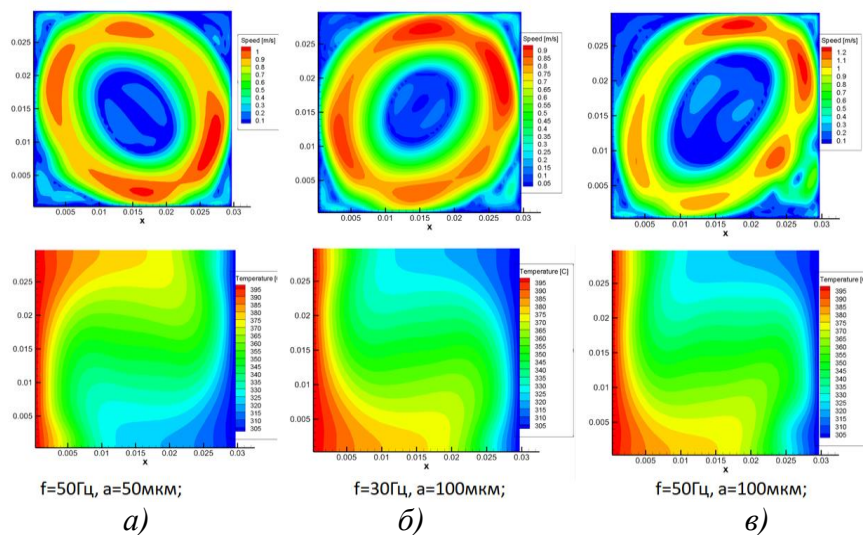


Рис. 2. Изотермы (нижний ряд) и модуль скорости (верхний ряд) течения расплава при вибрационной конвекции в квадрате, подогреваемом сбоку, для параметров: а)  $f=50\text{Гц}$ ,  $a=50\text{мкм}$ ; б)  $f=30\text{Гц}$ ,  $a=100\text{мкм}$ ; в)  $f=50\text{Гц}$ ,  $a=100\text{мкм}$ .

На рис. 4 показано влияние виброконвективного течения расплава в модели метода Бриджмена в вертикальном вибрационном поле на поле температуры при малом числе Прандтля. Видно, что это влияние меньше, чем при воздействии погруженного вибратора на расплав с числом Прандтля больше единицы, как это было показано в работе [6].

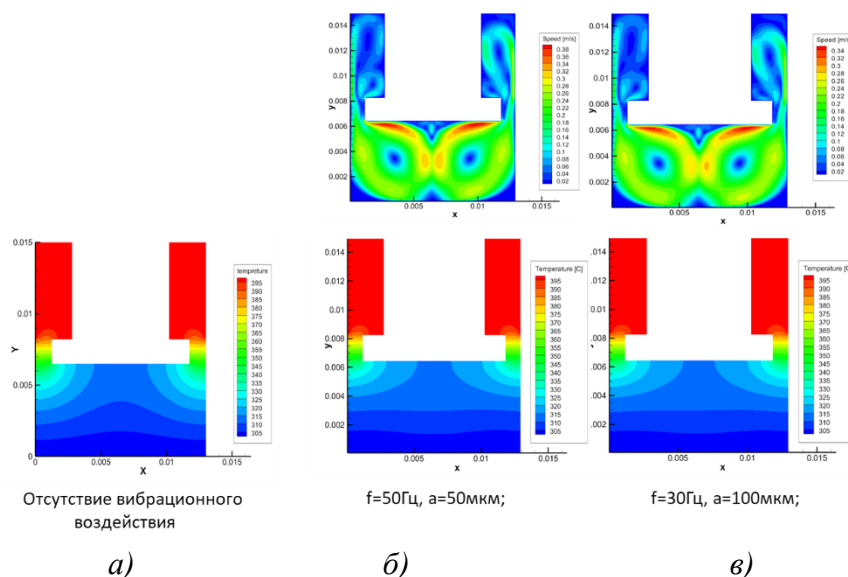


Рис.3. Модуль скорости (вверху) и изотермы (внизу) при вибрационной конвекции расплава в модели метода Бриджмена в вертикальном вибрационном поле для параметров: а) без вибраций; б)  $f=50\text{Гц}$ ,  $a=50\text{мкм}$ ; в)  $f=30\text{Гц}$ ,  $a=100\text{мкм}$

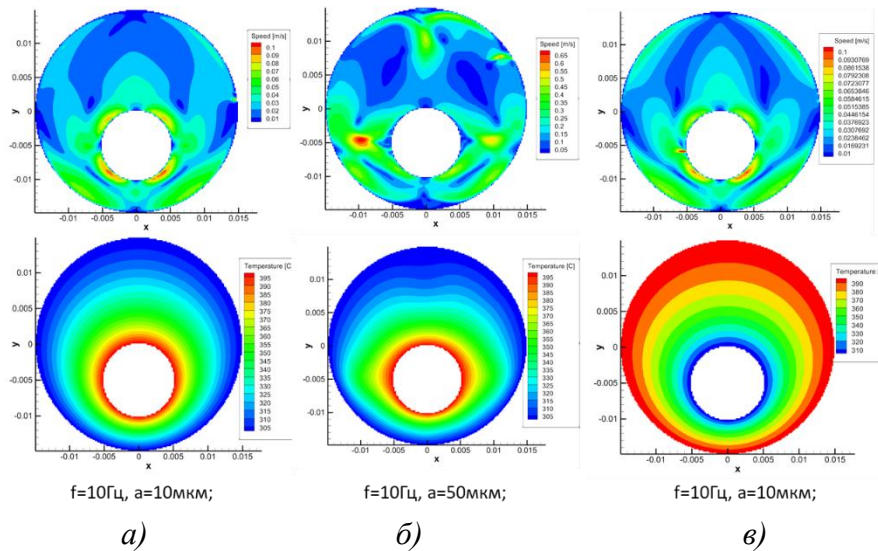


Рис. 4 Модуль скорости (вверху) и изотермы (внизу) при вибрационной конвекции в горизонтальном цилиндрическом кольце с вертикальной эксцентricностью. а)  $f=10\text{ Гц}$ ,  $a=10\text{ мкм}$  (подогрев изнутри); б)  $f=10\text{ Гц}$ ,  $a=50\text{ мкм}$  (подогрев изнутри); в)  $f=10\text{ Гц}$ ,  $a=10\text{ мкм}$  (подогрев извне)

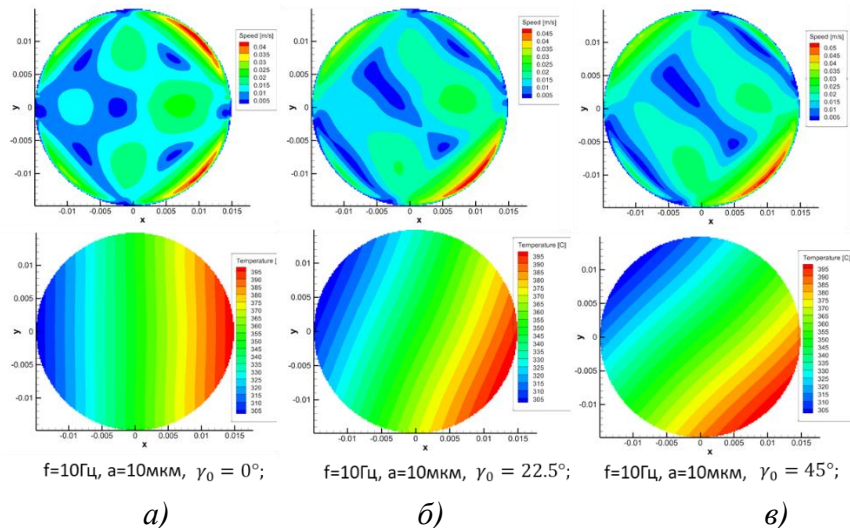


Рис. 5. Модуль скорости (вверху) и изотермы (внизу) при вибрационной конвекции ( $f=10\text{ Гц}$ ,  $a=10\text{ мкм}$ ) в цилиндрической полости с тремя углами наклона начального градиента температуры  $T(\gamma)=T_0+\Delta T\cos(\gamma+\gamma_0)$ : а)  $\gamma_0=0$ ; б)  $\gamma_0=22.5^\circ$ ; в)  $\gamma_0=45^\circ$

Влияние способа подогрева (внешнего или внутреннего кольца) и амплитуды вибраций на структуру течения и поле температуры в горизонтальном цилиндрическом кольце с вертикальной эксцентricностью показано на рис. 4. Течение расплава при  $f=10\text{ Гц}$  увеличении амплитуды вибрационного воздействия от  $a=10\text{ мкм}$  до  $a=50\text{ мкм}$  интенсифицируется во всей полости, становясь четырех-вихревым, и изменяет начальное поле температуры по вертикали, несмотря на малое значение числа Прандтля.

На рис. 5 показано модуль скорости (вверху) и изотермы (внизу) при вибрационной конвекции ( $f=10\text{ Гц}$ ,  $a=10\text{ мкм}$ ) расплава с малым числом Прандтля в цилиндрической полости с тремя углами наклона  $\gamma_0$  начального градиента температуры  $T(\gamma)=T_0+\Delta T\cos(\gamma+\gamma_0)$ : а)  $\gamma_0=0$ ; б)  $\gamma_0=22.5^\circ$ ; в)  $\gamma_0=45^\circ$ . Угол наклона подогрева цилиндра также влияет на структуру течения, но не влияет на поле температуры при данных вибрационных параметрах (при больших частотах и амплитудах виброконвекция оказывает влияние и на поле температуры).

**ВЫВОДЫ.** Для условий невесомости в высокочастотном вибрационном поле представлены виброконвективные течения в расплаве (с малым числом Прандтля) в полостях различной геометрии для разных вибрационных параметров. Показано что изменением вибрационных параметров можно менять структуру и направление конвективного течения, что согласуется с теоретическими результатами, указывающими на дискретную неустойчивость возникновения виброконвекции.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена в рамках государственного задания № АААА-А17-117021310375-7.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зеньковская С. М., Симоненко И. Б. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН СССР, МЖГ. 1966, N5, с. 51-55.
2. Федюшкин А.И., Иванов К.А., Золотарев А.А., Пунтус А.А. Численное решение осредненных уравнений Навье–Стокса для задач с высокочастотными вибрациями. // Материалы XIV Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАГ'2022), 4–13 сентября 2022 г., Алушта. М, 2022. С.366-368.
3. А.И. Федюшкин, К.А. Иванов, А.А. Пунтус. Эффективный многосеточный метод решения задач высокочастотной вибрационной конвекции. Сибирский журнал индустриальной математики. Том 26, номер 1. 2023. (в печати).
4. Davis de Vahl G., Jones I. P. Natural convection in square cavity: A comparison exercise // Intern. J. Numer. Meth. Fluids. - 1983. - V. 3. - P. 227.
5. Федюшкин А.И. Исследование матричного метода решения уравнений конвекции. Комплекс программ «МАРЕНА». Препринт №471 ИПМ. М. 1990 г.
6. Fedyushkin A. I., Burago N. G., Puntus A. A. Convective heat and mass transfer modeling under crystal growth by vertical bridgman method // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1479. 012029. DOI: [10.1088/1742-6596/1479/1/012029](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012029)



### ТОНКАЯ СТРУКТУРА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЩЕСТВА СОСТАВНОЙ КАПЛИ В ПРИНИМАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ В РЕЖИМЕ ФОРМИРОВАНИЯ ВСПЛЕСКА

*Хайирбеков Ш.Х., Ильиных А.Ю.*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*  
[msturistt09@gmail.com](mailto:msturistt09@gmail.com), [ilynykh@ipmnet.ru](mailto:ilynykh@ipmnet.ru)

Практический и научный интерес к явлению импакта капли обусловлен фундаментальностью данной задачи, а также широким диапазоном масштабов природных и технологических процессов: от масштабов порядка размеров первичной капли и вторичных брызг (перенос вещества мелкими брызгами, излучение звука), до глобальных в масштабах планеты (формирование туманов и облаков).

Систематическое исследование импакта капли началось со второй половины XIX в.: этому способствовало как использование искровой вспышки для освещения быстропротекающих процессов, так и достаточный уровень развития гидродинамики в целом.

Прикладное значение явлений импакта капель трудно переоценить. Традиционно являясь ключевым в нефтехимической, фармацевтической и во многих других отраслях промышленности, развитие капельных технологий охватывает все более новые области (капельное орошение, струйная печать, сушка распылением).



Механизмы наблюдаемых процессов при импакте капли имеют качественно различный характер для смешивающихся и не смешивающихся жидкостей. При контакте смешивающихся жидкостей отмечается дискретный характер распределения вещества капли [1]: тонкие полосчатые элементы (*лигаменты*) образуют вертикальные линейчатые структуры на поверхности венца и сетчатую структуру с трех-, четырех-, и пятиугольными ячейками на поверхности каверны (рис.1, ряд I). Картина распределения вещества капли активно эволюционирует в тонкие волокна и петли в толще жидкости. Формирование структур связано с преобразованием доступной потенциальной поверхностной энергии (ДППЭ) в другие формы. При этом размеры и форма окрашенной области заметно меняются во времени. Таким образом в опытах по импакту однородных капель с участием смешивающихся жидкостей картина течения *сложная и структурированная*.

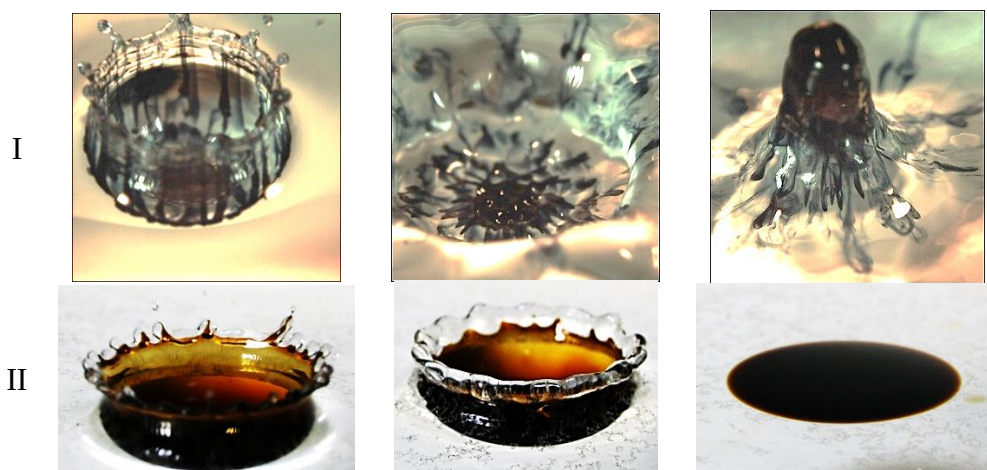


Рис. 1. Падение однородной капли в глубокую жидкость: ряд I – капля чернил погружается в воду; ряд II – капля нефти падает на запыленную поверхность воды.

При слиянии несмешивающихся жидкостей вещество капли, вначале равномерно распределенное по всей поверхности каверны и венца, постепенно начинает собираться в отдельные капельки, образующие линейные последовательности (линии четок) [2] или компактное пятно (рис.1, ряд II).

Наряду с однородными каплями, состоящими из одного вещества, в природе и в промышленных условиях встречаются капли, имеющие различный состав ядра и оболочки – составные капли. Последние, включающие несмешивающиеся жидкости, такие как вода (ядро) и масло (оболочка), существуют достаточно долго и играют важную роль в различных процессах, в том числе слиянии нефти и других масел с водой. Изучение гидродинамики составной капли представляет интерес для решения задач генерации и рассеяния электромагнитных волн, а также сохранения окружающей среды.

Картины распределения вещества составных капель исследовались методами макрофотосъемки и высокоскоростной видеосъемки на стендах ЭСП и ТБП, входящих в комплекс уникальных установок УНУ "ГФК ИПМех РАН" [3].

Размерные параметры задачи включают физические параметры четырех взаимодействующих сред (вместо трех в классической постановке задачи для однородной капли), которые характеризуются термодинамическими и кинетическими параметрами, а также условиями опытов.

К физическим параметрам задачи относятся: плотности (принимающей жидкости  $\rho_t$ , воздуха  $\rho_a$ , внутреннего ядра  $\rho_{di}$  и внешней оболочки капли  $\rho_{de}$ ); кинематические  $\nu_{t,a,di,de}$  и динамические  $\mu_{t,a,di,de}$  вязкости; полные  $\sigma_{t,a,di}^{a,de,di}$  и нормированные на плотность  $\gamma_{t,a,di}^{a,de,di}$  коэффициенты поверхностного натяжения; коэффициенты диффузии вещества капли  $\kappa_t^{di,de}$  и примеси  $\kappa_t^{md}$  в принимающей жидкости; температуры ( $T_t = T_a = T_{di} = T_{de}$ ). К числу важных размерных параметров можно отнести и так



называемую *капиллярную длину* (называемой иногда *капиллярной постоянной Лапласа*)  $\delta = \sqrt{\gamma/g}$ , определяющую характерный масштаб капель и газовых пузырей. К дополнительным параметрам задачи относятся: объем капли  $V$ ; площадь свободной поверхности  $S_d$ ; момент  $p$ ; кинетическая  $E_k$  и ДППЭ  $E_\sigma$  на контактных поверхностях, их плотности  $W_k$  и  $W_\sigma$ , а также их отношение между собой  $E_k/E_\sigma$  и  $W_k/W_\sigma$ .

Отношения размерных параметров задачи задают наборы безразмерных комбинаций – *чисел*, или *критериев подобия*. Среди всех чисел подобия, так или иначе имеющих отношение к импакту капель, можно выделить пять основных: Рейнольдса  $Re = UD/\nu$ , Фруда  $Fr = U^2/gD$ , Вебера  $We = U^2D/\gamma$ , Онезорге  $Oh = \nu/\sqrt{\gamma D}$ , Бонда  $Bo = gD^2/\gamma$ .

Различия в составах вещества капли и принимающей жидкости позволяют охарактеризовать протекающие процессы еще одной важной группой безразмерных комбинаций, включающей следующие отношения:

- относительную разность плотностей контактирующих сред (число Атвуда):  
 $R_\rho^{t,di} = \frac{\rho_t - \rho_{di}}{\rho_t + \rho_{di}}$ ;  $R_\rho^{t,de} = \frac{\rho_t - \rho_{de}}{\rho_t + \rho_{de}}$ ;  $R_\rho^{de,di} = \frac{\rho_{de} - \rho_{di}}{\rho_{de} + \rho_{di}}$

- относительную разность коэффициентов поверхностного натяжения на соответствующих поверхностях раздела:  $R_\sigma^1 = \frac{\sigma_t^a - \sigma_{de}^a}{\sigma_t^a + \sigma_{de}^a}$ ;  $R_\sigma^2 = \frac{\sigma_{di}^a - \sigma_t^a}{\sigma_{di}^a + \sigma_t^a}$ ;  $R_\sigma^3 = \frac{\sigma_{de}^a - \sigma_{di}^a}{\sigma_{de}^a + \sigma_{di}^a}$

- относительную разность дин. вязкостей:  $R_\mu^{de,t} = \frac{\mu_{de} - \mu_t}{\mu_{de} + \mu_t}$ ;  $R_\mu^{di,t} = \frac{\mu_{di} - \mu_t}{\mu_{di} + \mu_t}$ ;

$$R_\mu^{de,di} = \frac{\mu_{di} - \mu_{de}}{\mu_{di} + \mu_{de}}.$$

В опытах использовались составные капли, включающие внутреннее ядро – раствор ализариновых чернил, окруженное масляным слоем (рис. 2), а также капли с ядром из касторового масла в оболочке из чернил (рис. 3). Диаметр ядра  $D_i \cong 2,2$  мм, толщина наружного слоя  $\Delta r \cong 1$  мм; принимающая жидкость – вода: высота свободного падения  $H = 60$  см; глубина слоя принимающей жидкости  $h_w = 7$  см. Освещение: 2 светодиодных источника. Регистрация: фотоаппарат Canon EOS350D. Угол визуализации –  $75^\circ$ .

Появление дополнительных поверхностей раздела в опытах с составными каплями еще более усложняет картину течения (рис. 2 и 3). Детали картины распределения вещества составных капель по поверхности принимающей жидкости существенно отличаются от распределения однородных капель при погружении капли чернил с масляной оболочкой. Здесь сетчатая структура лигаментов сменяется секторальной с более толстыми периодическими линейчатыми элементами, соединенными радиальными ребрами.

При погружении капли масла с чернильной оболочкой (рис. 3) картина распределения вещества капли существенно усложняется: присутствуют войды сложной формы (участки, свободные от вещества капли), линейчатые и кольцевые элементы, вихревые структуры.

Периодические окрашенные структуры импакта капель, состоящих из ядра и оболочки несмешивающихся жидкостей, указывают на возбужденное состояние поверхности, вдоль которой движется вещество внутренней капли, при уничтожении поверхности оболочки и трансформации ее доступной поверхностной потенциальной энергии.



Рис.2. Распределение вещества составной капли в воде (ядро – чернила, оболочка – масло).

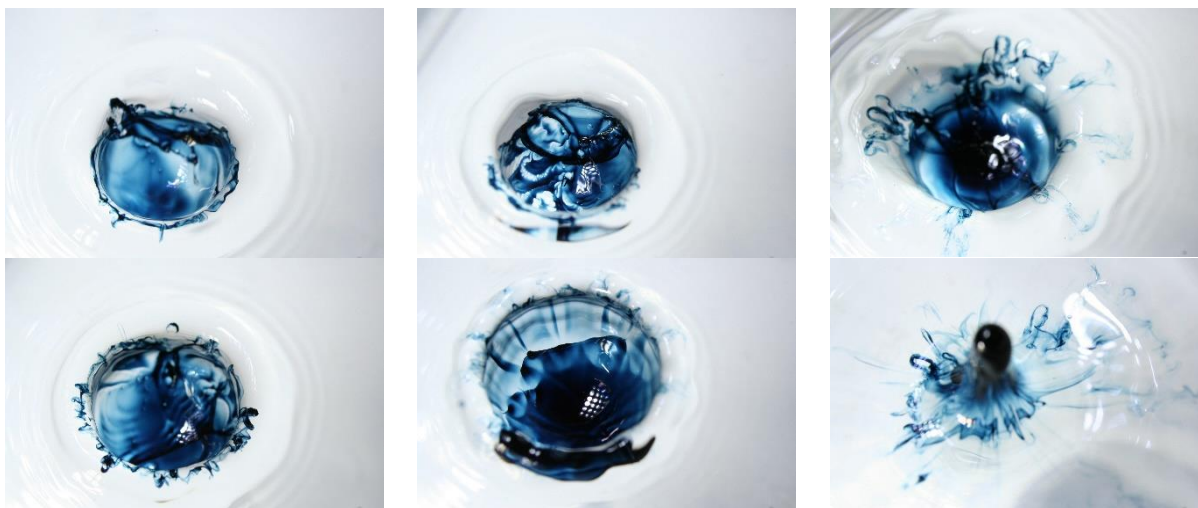


Рис.3. Растекание составной капли в воде (ядро – касторовое масло, оболочка – чернила).

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Эксперименты выполнены на стендах ЭСП и ТБП УИУ "ГФК ИПМех РАН" при финансовой поддержке РФФ (грант 19-19-00598-П).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю. Полосчатые структуры в картине распределения вещества капли по поверхности принимающей жидкости // Доклады РАН. 2018. Т. 481. № 2. DOI: 10.1134/S1028335818070066.
2. Ильиных А.Ю., Чашечкин Ю.Д. Гидродинамика погружающейся капли: несмешивающиеся жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2020. Т. 55. № 2. С. 169-176. DOI: 10.1134/S0015462820020056
3. УСУ "ГФК ИПМех РАН": <http://www.ipmnet.ru/uniquequip/gfk/#equip>

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

С.В.Ходырев<sup>1</sup>, А.А.Очиров<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное образовательное учреждение высшего образования «Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова», Ярославль

<sup>2</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Иилинского РАН, Москва

<sup>1</sup>[sv-khodyrev@mail.ru](mailto:sv-khodyrev@mail.ru), <sup>2</sup>[otchirov@mail.ru](mailto:otchirov@mail.ru)

## ВВЕДЕНИЕ.

Волны, распространяющиеся вдоль свободной поверхности жидкости, издавна вызывают интерес у исследователей из разных стран. Часто задача решается в плоской постановке для упрощения математических выкладок. При этом в классических описаниях поверхностных волн часть решений зачастую бывает утеряна. Основываясь на фундаментальной системе уравнений [1], была построена упрощенная модель для невязкой жидкости [2], в которой уравнение состояния заменяется выражением для плотности жидкости.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ.

Рассматривается полубесконечная неограниченная с краев идеальная жидкость плотности  $\rho$  и коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ . Ставится задача проанализировать распространение цилиндрических волн  $z = \zeta(r, \varphi, t)$  вдоль свободной поверхности в модели однородной и экспоненциально стратифицированной жидкости. Жидкость рассматривается в цилиндрической системе координат  $O r \varphi z$ , в которой ось  $Oz$  направлена вертикально против направления действия поля сил тяжести  $\mathbf{g}$ , а движение считается осесимметричным. Уравнения движения в принятых упрощениях запишутся следующим образом:

$$z < \zeta: \rho \partial_t \mathbf{u} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + \rho \mathbf{g} \quad (1)$$

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{u}$  – вектор скорости жидкости,  $P$  – давление, а  $\rho$  – плотность жидкости. В модели однородной жидкости плотность полагается константой, а в модели непрерывно стратифицированной среды будем считать, что плотность жидкости задается выражением:

$$\rho = \rho_{00}(R(z) + s(r, \varphi, z, t)) \quad (3)$$

Здесь  $\rho_{00}$  – значение плотности на равновесном уровне  $z = 0$ ,  $R(z)$  – функция, задающая исходную стратификацию жидкости, а  $s(r, \varphi, z, t)$  – функция, описывающая изменение плотности, связанное с распространением волны.

Задачу (1) – (2) необходимо дополнить граничными условиями на свободной поверхности жидкости и условием затухания движения с глубиной.

Были получены дисперсионные соотношения, описывающие распространяющиеся поверхностные цилиндрические волны.

**РЕЗУЛЬТАТЫ.** В результате исследования было получено и проанализировано дисперсионное соотношение, описывающее связь между частотой и длиной волны или волновым числом, а также другими параметрами рассматриваемой задачи. Получены выражения для фазовой и групповой скоростей волнового движения. Исследовано

влияние стратификации жидкости на распространение волны. Показано, что предельный переход к однородной жидкости выполняется.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598-П «Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью», <https://rscf.ru/project/19-19-00598/>).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chashechkin Yu.D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // Axioms. 2021. V. 10(4). 286.
2. А. А. Очиров, Чашечкин Ю.Д. Двумерные периодические волны в невязкой непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2022. Т. 58. № 5. С. 524–533.



## ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ МАГНИТНЫХ И НЕМАГНИТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ, ИЗМЕРЕННОЕ МЕТОДОМ КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН

*К. А. Хохрякова, И. А. Мизева, А. В. Шмыров*  
*Институт механики сплошных сред, филиал ПФИЦ УрО РАН, Пермь*  
[bca@icmm.ru](mailto:bca@icmm.ru)

### ВВЕДЕНИЕ.

В работе представлены результаты экспериментального исследования зависимости поверхностного натяжения МЖ от величины напряженности и ориентации постоянного магнитного поля методом капиллярных волн [1, 2]. Особенность метода капиллярных волн (МКВ) заключается в наложении периодических малоамплитудных возмущений немагнитной природы (акустической волны) и бесконтактной регистрации профиля субмиллиметровых цилиндрических капиллярных волн с помощью цифровой интерферометрии [2]. В случае использования метода капиллярных волн амплитуда качания плоскости межфазной границы не превосходит по величине 0.1 градуса, что меньше амплитуды качания под действием фоновых вибрационных колебаний. Таким образом, характеристики возбуждаемой волны оказываются нечувствительны к прямому воздействию магнитного поля, что позволяет измерить свойства межфазной поверхности, взаимная ориентация вектора нормали к которой и вектора напряженности магнитного поля в процессе измерения не нарушается.

### МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА.

В ходе опыта МЖ заливалась в стеклянную ячейку диаметром 6 см с толщиной слоя 2–3 мм и помещалась в область однородного магнитного поля в центре системы двух кольцевых катушек радиусом  $R = 8$  см и с числом витков  $n = 298$ , ориентированных симметрично относительно общей оси (система катушек Гельмгольца).

Измерение поверхностного натяжения МЖ в ортогонально направленном магнитном поле  $H \perp$  осуществлялось с помощью МКВ [1, 2], адаптированного для работы с непрозрачными средами с учетом влияния магнитного поля на ее структурные элементы (рис. 1).

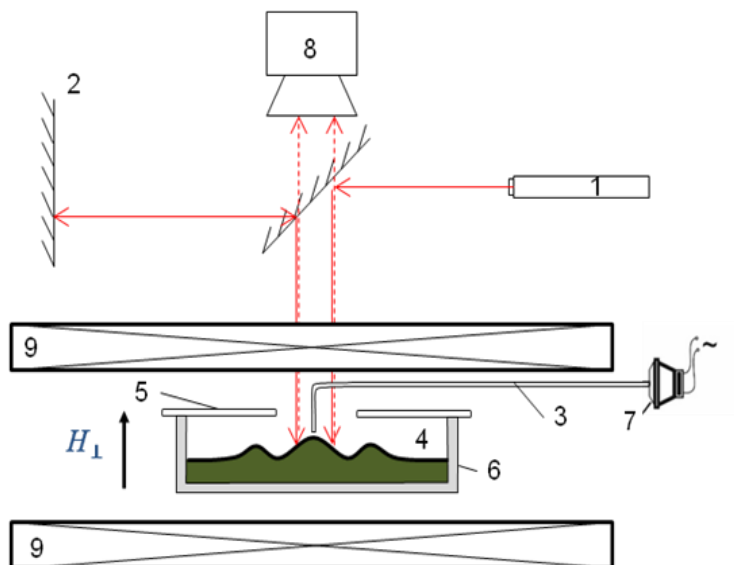


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: 1 – лазер, 2 – опорная поверхность, 3 – волновод, 4 – свободная поверхность МЖ, 5 – крышка кюветы, 6 – рабочая ячейка, 7 – динамик, 8 – оптическая система, 9 – катушки Гельмгольца.

Регистрация мгновенной карты рельефа межфазной поверхности проводилась методом оптической интерференции опорного и предметного пучков. Луч от He-Ne лазера 1, проходящий систему линз, преобразовывался в плоскопараллельный пучок диаметром  $\sim 1$  см. Опорный пучок, имеющий плоский волновой фронт, формировался при отражении исходного пучка от плоскопараллельной стеклянной пластины 2. Предметный пучок проходил сквозь пластину 2 и крышку кюветы 3, отражался от свободной поверхности МЖ 4, заполняющей рабочую ячейку 5, и интерферировал с опорным на матрице видеокамеры 6 (Baumer TXG50, Германия). Изображение с камеры передавалось на персональный компьютер, где в режиме реального времени с помощью программного пакета IntelliWave (Mahr GmbH, Германия) осуществлялась расшифровка интерферограмм и восстановление формы волнового фронта.

Капиллярные волны на свободной поверхности МЖ возбуждались акустическими колебаниями в диапазоне частот 300–700 Гц от миниатюрного динамика 7, который был подключён к генератору синусоидальных колебаний. Для локализации воздействия упругих волн от механически колеблющейся мембраны динамика использовалась медная трубка-волновод 8 с керамическим наконечником, который подводился к границе раздела на расстояние порядка 0.1 мм. Длина волновода 8 подбиралась таким образом, чтобы динамик располагался за пределами катушек Гельмгольца для уменьшения влияния магнитного поля на частоту колебаний мембраны.

Полученные в ходе экспериментов профили поверхности после предварительной обработки в IntelliWave (рис. 2) аппроксимировались уравнением цилиндрической волны в пакете Mathematica [1, 2]:

$$z(x, y) = \frac{A}{\sqrt{r}} e^{-\beta r} \Re[e^{-i(\omega t + \mathbf{k} \mathbf{r})}] + z_0; \quad (1)$$

что позволяло определить волновое число  $k$  (с точностью до 0.1%) и коэффициент затухания пространственных возмущений границы раздела  $\beta$ , характеризующий поверхностную реологию межфазной границы [3]. Т.к. амплитуда колебаний магнитной жидкости мала, то ее поверхность можно рассматривать как линейную систему, для кото-



рой выполняется принцип суперпозиции, т.е. алгебраическое сложение эффектов. В этом случае вязкие, магнитные и гравитационно-капиллярные эффекты алгебраически складываются как независимые друг от друга. Поскольку динамическая вязкость жидкости  $\eta$  влияет на скорость распространения капиллярной волны [4], то ее учитывать в итоговом дисперсионном соотношении. Для магнитной жидкости дисперсионное уравнение гравитационно-капиллярных поверхностных волн должно быть модифицировано с учетом вертикального однородного магнитного поля. В итоге получаем сумму независимых друг от друга слагаемых в дисперсионном соотношении, из которого далее поверхностное натяжение  $\sigma$  определялось по формуле:

$$\sigma = \frac{\rho}{k^3}(\omega^2 - gk) + \frac{\mu_0 H^2}{k} \left( \frac{\chi^2}{(1 + \chi_0)(2 + \chi_0)} \right) + \sqrt{\frac{8\omega\eta^3}{\rho}} - \frac{4k\eta^2}{\rho} \quad (2)$$

где  $\sigma$  – поверхностное натяжение,  $\omega = 2\pi\nu$  – угловая частота акустических колебаний;  $g$  – ускорение свободного падения. Измерения проводились при температуре окружающего воздуха  $(23 \pm 1)^\circ\text{C}$ .

### РЕЗУЛЬТАТЫ.

На рис. 2 представлена экспериментально определенная зависимость поверхностного натяжения магнитной жидкости на основе декана от напряженности перпендикулярного к поверхности слоя магнитного поля  $H_\perp$ , полученная методом капиллярных волн. Из графика видно, что рост напряженности поля приводит к уменьшению межфазного натяжения жидкость-газ. Относительное изменение величины при этом также не превышает 1%.

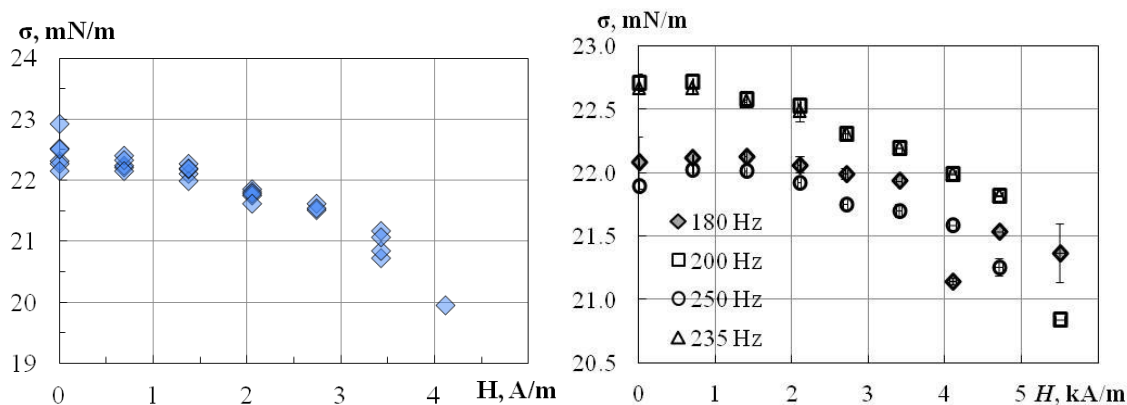


Рис. 2. Поверхностное натяжение магнитной жидкости на основе керосина (а) и декана (б) в вертикальном к слою магнитном поле

Поскольку магнитные жидкости изготовлены на немагнитной основе, чаще всего керосина или декана, а сами частицы покрыты молекулами вещества-стабилизатора, олеиновой кислоты, то определенный интерес представляет собой исследование как самих жидких немагнитных основ для МЖ, так и их растворов с добавлением вещества стабилизатора. Результаты исследования растворов олеиновой кислоты в керосине в зависимости от концентрации представлены на рис. 3.



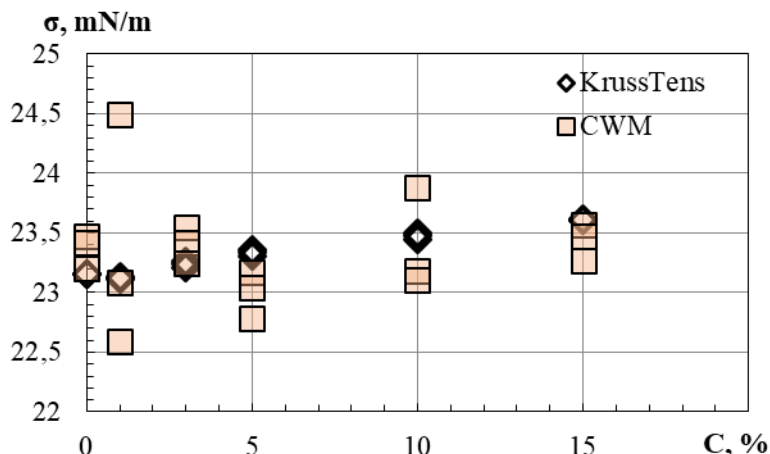


Рис. 3. Зависимость поверхностного натяжения растворов керосина в зависимости от концентрации в нем олеиновой кислоты методом отрыва кольца (Kruss Tensiometer) и методом капиллярных волн (CWM)

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 20-01-00648\_a.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шмырова А.И., Мизёва И.А., Артамонова П.А. Модификация метода капиллярных волн // Вестник Пермского Университета. Физика. 2018. № 3. Т. 41. С. 32–38.
2. Shmyrov A., Mizev A., Shmyrova A., Mizeva I. Capillary wave method: an alternative approach to wave excitation and to wave profile reconstruction // Physics of Fluids. 2019. Vol. 1, No. 31. P. 012101(8).
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Теоретическая физика: т. VI (3-е изд., перераб.) М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 736 с.
4. Behroozi F., Smith J., Even W. Stokes' dream: Measurement of fluid viscosity from the attenuation of capillary waves // Am. J. Phys. 2010. No. 78. Vol. 11. P.



## УСЛОВИЯ ВОЗНИКНОВЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ВОДА-ПАР В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОРОДАХ

Г.Г. Цыпкин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

[tsyppkin@ipmnet.ru](mailto:tsyppkin@ipmnet.ru)

Рассматриваются возможные типы переходов к неустойчивости при течениях с поверхностями разрывов в пористых средах. В качестве примера представлена задача о линейной устойчивости фронта кипения воды в геотермальном резервуаре. На плоскости параметров представлены нейтральные кривые, разделяющие области устойчивости и неустойчивости. Представлена оценка линейного масштаба наиболее неустойчивого возмущения и исследована зависимость от основных параметров течения.

### ВВЕДЕНИЕ.

Одна из наиболее перспективных технологий извлечения глубинного тепла Земли предполагает закачку холодной воды в высокотемпературные породы с после-

дующим извлечением перегретого пара. Если кипение воды происходит в пластах, то образуются области, насыщенные соответственно водой и паром. Образующаяся в начальный момент поверхность фазового перехода вода-пар может быть неустойчивой, что приводит к формированию водяных пальцев, движущихся в направлении добывающей скважины. В результате холодная вода прорывается к добывающей скважине и процесс извлечения глубинного тепла Земли становится малоэффективным.

Классическим примером задачи об устойчивости движения фронта в пористой среде является задач вытеснения нефти водой из пласта [1], когда неустойчивость возникает из-за различия вязкостей. В работе [2] представлены результаты экспериментального исследования устойчивости фронта кипения эфира, при его инъекции в слой песка. Показано, что увеличение температуры приводит к возникновению неустойчивости и образованию пальцев.

### **РЕШЕНИЕ ТИПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ**

Рассмотрим одномерный полубесконечный геотермальный пласт, насыщенный перегретым паром с температурой  $T_0$  и давлением  $P_0$ . Пусть в точке  $x=0$ , моделирующей закачивающую скважину, поступает вода при постоянном расходе. Тогда формируются две области, насыщенные водой и паром, разделенные фронтом фазового перехода.

Тепломассоперенос в обеих областях описывается законами сохранения массы, энергии, законом Дарси и уравнениями состояния воды и пара. Для вывода условий на поверхности фазового перехода используются балансовые соотношения и уравнение Клаузиуса–Клапейрона, представляющее собой связь между давлением и температурой. Ранее было показано, что в высокопроницаемых пластах скорость температурного фронта много меньше скорости жидкости и за фронтом образуется область постоянной температуры, значение которой определяется из условий на поверхности раздела. Поэтому конвективным переносом можно пренебречь и основные уравнения приводятся к уравнениям диффузии массы и энергии.

Если в одномерном плоском случае использовать условие постоянства скорости инъекции жидкости, то фронт будет двигаться с постоянной скоростью, а задача допускает решение типа бегущей волны, зависящее от координаты  $\xi = x - Vt$ .

### **ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ**

Для исследования устойчивости решения в виде бегущей волны воспользуемся методом нормальных мод. Пусть  $P = P(\xi, z, t) = P_{st} + \delta P$ ,  $T = T(\xi, z, t) = T_{st} + \delta T$ . Возмущения поверхности раздела имеет вид:  $\eta = \eta'(\xi) \exp(i\kappa z + \sigma t)$ ,  $\eta' = \text{const}$ , а возмущения давления и температуры в виде  $\delta P = P'(\xi) \exp(i\kappa z + \sigma t)$ ,  $\delta T = T'(\xi) \exp(i\kappa z + \sigma t)$ . Для возмущений такого вида определяем выражения для амплитуд возмущений, учитывая затухание возмущений на  $+\infty$  и  $-\infty$ . Находим решения для  $P'(\xi)$  и  $T'(\xi)$  и подставляем в соотношения на фронте. Из условия нетривиальности решения полученной однородной системы уравнений получаем дисперсионное соотношение  $D(K, \Sigma) = 0$ , которое исследовалось численно. Здесь  $K$  и  $\Sigma$  – приведенные к безразмерному виду волновое число  $\kappa$  и декремент  $\sigma$ .

На рис. 1 представлен характерный вид дисперсионной кривой при переходе физической системы к неустойчивому состоянию. Следует отметить, что переход к неустойчивости происходит при конечных значениях волнового числа.

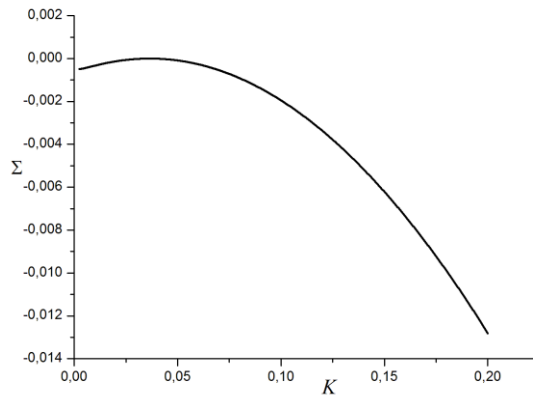


Рис. 1. Переход к неустойчивости при увеличении температуры, проницаемости и начального давления.

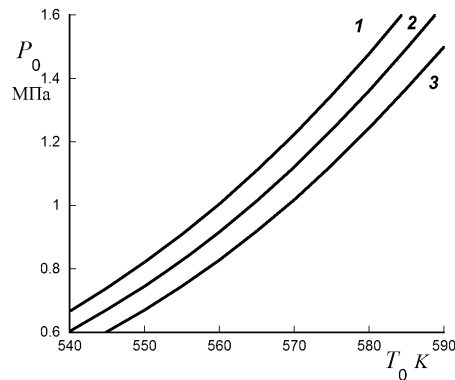


Рис. 2. Нейтральные кривые при различных значениях пористости (0.1, 0.2, 0.3)

На рис. 2 представлены нейтральные кривые, разделяющие область устойчивого (над кривыми) и неустойчивого (под кривыми) состояния. Видно, что увеличение начального давления и снижение начальной температуры стабилизируют движущийся фронт кипения.

Из найденных в рамках линейной теории устойчивости результатов, можно получить информацию о характерном размере наиболее неустойчивых возмущений. Введем безразмерное критическое волновое число  $K_{cr}$ , как волновое число  $K$ , при котором происходит касание дисперсионной кривой оси абсцисс и которое соответствует условию нейтральной устойчивости  $\Sigma = 0$ .

На рис. 3 представлены результаты расчетов критического волнового числа при различных значениях проницаемости. По известному значению безразмерного критического волнового числа можно определить характерный размер наиболее неустойчивого возмущения, которое находится из выражения  $L_{cr} = \pi / \kappa = \pi a / K_{cr} V$ . Характерный размер  $L_{cr}$  в данной формуле обратно пропорционален критическому волновому числу, но скорость сильно зависит от проницаемости, поэтому характерный размер также возрастает с уменьшением проницаемости, как и волновое число (рис. 4). Кривые 1 и 2 соответствуют двум скоростям инъекции воды в пласт  $\nabla P = 1$  и  $0.5$  атм/м.

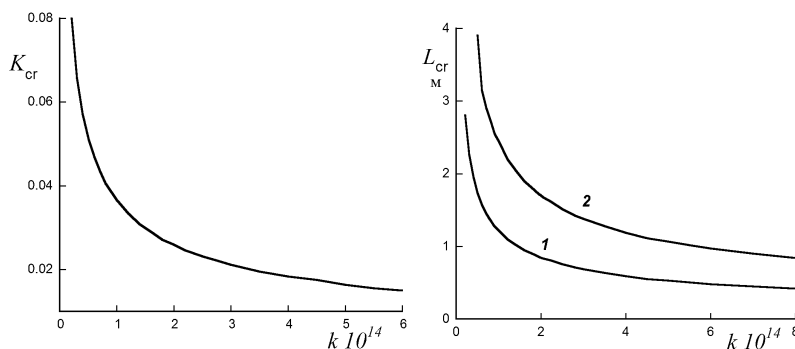


Рис. 3. Зависимость критического волнового числа  $K_{cr}$  и размера  $L_{cr}$  наиболее неустойчивого возмущения

Как показали численные эксперименты, в режиме конденсации фронт фазового перехода всегда устойчив, а в режиме испарения может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Переход к неустойчивости всегда реализуется при конечных волновых числах, значения которых зависят от проницаемости пород. Коротковолновые возмущения, как для устойчивых режимов, так и для неустойчивых быстро затухают при всех значениях физических параметров задачи.

Таким образом, переход от устойчивого к неустойчивому режиму происходит при увеличении скорости фронта из-за роста проницаемости пород и температуры геотермального резервуара, а также уменьшения начального давления пара. Полученные результаты на качественном уровне хорошо согласуются с результатами экспериментов [3].

#### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 21-11-00126.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Saffman P.G., Taylor G.I. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // Proc. Roy. Soc. London Ser. A, 1958. 245:1242 P. 312–329.
2. Fitzgerald S.D., Woods A.W. The instability of a vaporization front in hot porous rock // Nature. 1994. V. 367. P. 450–453.
3. Tsyarkin G.G., Il'ichev A.T. Superheating of water and morphological instability of the boiling front moving in the low-permeability rock // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2021. V. 167. 120820.



### ДЕМОНСТРАЦИОННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО СОВМЕЩЕННОМУ НАГРЕВУ СТРУЕЙ АЗОТНОЙ ПЛАЗМЫ И ЛАЗЕРНЫМ ПУЧКОМ

А.В. Чаплыгин, М.А.Котов, М.Ю. Якимов, И.В. Лукомский, С.С. Галкин,

А.Ф. Колесников, А.Н. Шемякин, Н.Г.Соловьев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

[kotov@ipmnet.ru](mailto:kotov@ipmnet.ru)

Плазмотроны широко используются в экспериментах по моделированию термохимического взаимодействия высокотемпературного газового потока с поверхностью

материала как в России (ЦНИИМаш, ЦАГИ, ИПМех РАН), так и за рубежом (США, Европа, Япония, Китай). Такие установки обеспечивают конвективный нагрев поверхности образцов. Но в некоторых случаях достигаемые значения тепловых потоков к поверхностям образцов являются недостаточными. Добавление источника лазерного излучения помогает расширить возможности плазмотрона в моделировании реальных условий входа в атмосферу за счет сочетания радиационного и конвективного нагрева. В данной работе демонстрируются новые комбинированные режимы нагрева установки ВГУ-4 ИПМех РАН [1]. Образец теплозащитного материала подвергался воздействию дозвуковой струи азотной плазмы и дополнительно нагревался излучением иттербиевого волоконного лазера.

Схема эксперимента показана на рис.1. Цилиндрический образец с затупленной кромкой был изготовлен из материала тепловой защиты космического корабля «Буран» с черным низкокаталитическим покрытием [2]. Эксперимент проводился при постоянной мощности анодного питания ВЧ-генератора плазмотрона 22 кВт. Такое относительно низкое значение было выбрано для предотвращения перегрева образца. Массовый расход азота через разрядный канал составлял 2.4 г/с. В испытательной камере поддерживалось постоянное давление 100 гПа. Образец был расположен на расстоянии 120 мм от выходного сечения разрядного канала. Для регистрации распределения температуры по поверхности образца использовался термовизор Тандем VS415U. Термовизионные изображения регистрировались при заданном значении спектральной излучательной способности поверхности 0.87 на длине волны 0.65 мкм (использовался узкополосный фильтр для этой длины волны для исключения влияния лазерного излучения на показания термовизора). В показания термовизора вносилась поправка на пропускание кварцевого оптического окна испытательной камеры (0.93). Использовалась калибровка термовизора по модели абсолютно черного тела в диапазоне температур от 800 до 1500 °С для длины волны 0.65 мкм.

Источник лазерного излучения – инфракрасный волоконный лазер YPLN-1-100-200-R с высокой направленностью луча и стабильностью излучения. Коротковолновый инфракрасный лазер (1.064 мкм) был выбран из-за высокого коэффициента поглощения излучения для широкого спектра материалов. Для экспериментов по нагреву материалов был выбран режим работы с высокой частотой следования импульсов. При частоте 1 МГц мощность импульса превышала среднюю мощность более чем в 10 раз. Для нагрева поверхности режим работы лазера с высокой частотой повторения импульсов практически не отличается от непрерывного режима.

Для транспортировки излучения от лазерной головки к поверхности образца вдоль оси потока индукционного плазмотрона была разработана внешняя оптическая система, формирующая пятно облучения с известным распределением интенсивности (рис. 1). Система транспортировки излучения включала поворотное зеркало, предназначенное для совмещения осей лазерного луча и плазменного потока. Положение зеркала и угол его наклона регулировались с помощью микрометрических винтов для точной настройки положения пятна облучения на поверхности образца. Размер пятна облучения определялся пространственными характеристиками лазерного луча и параметрами линзы, расположенной на оси системы транспортировки излучения. В экспериментах распределение облученности поверхности образца в пятне было близко к гауссову распределению с радиусом 10 мм. Лазерный луч вводился в вакуумный объем испытательной камеры через прозрачное кварцевое окно.

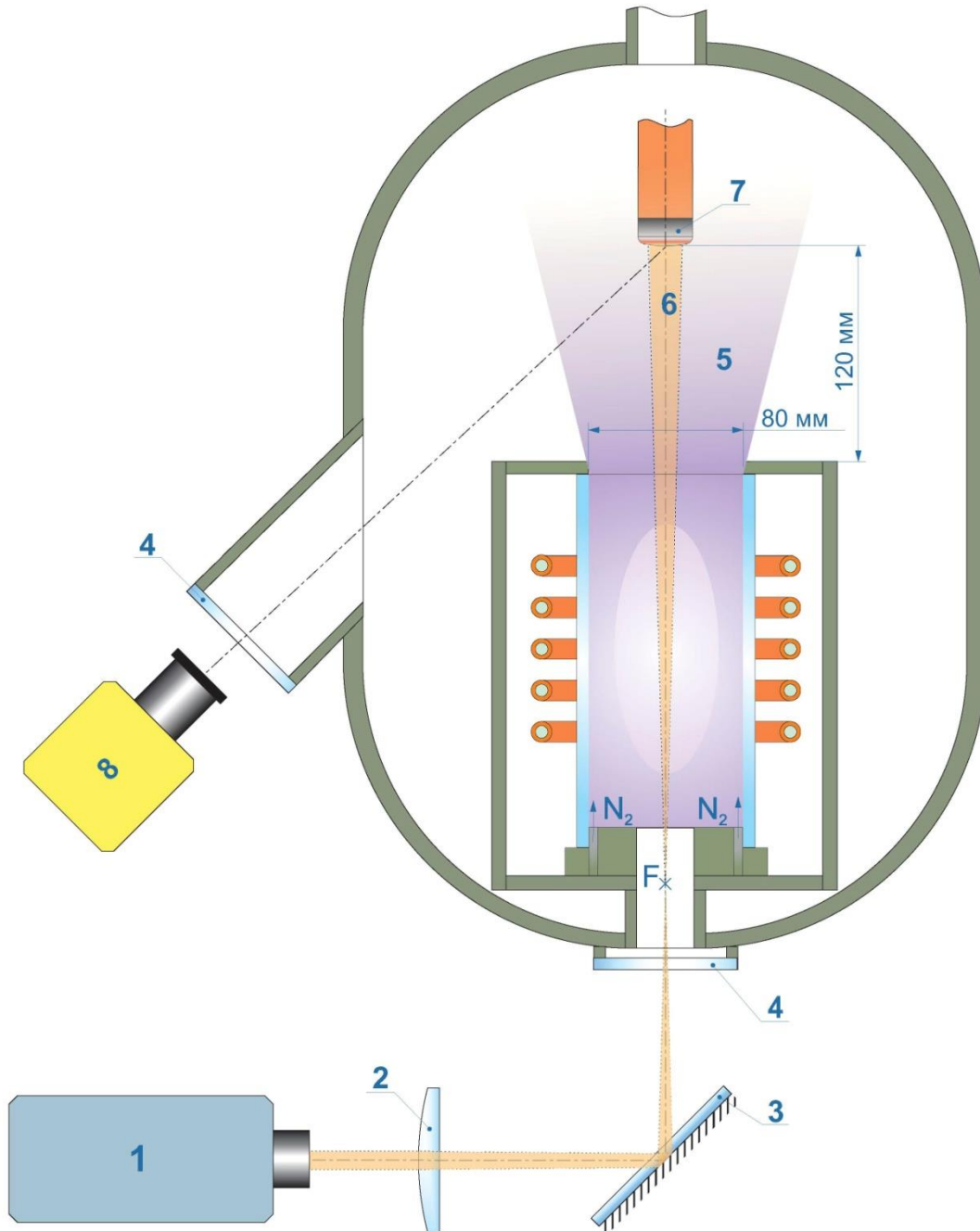


Рис. 1. Схема эксперимента по совмещенному нагреву: 1 – источник лазерного излучения, 2 – линза, 3 – зеркало, 4 – кварцевые окна, 5 – дозвуковая струя азотной плазмы, 6 – лазерный пучок, 7 – образец, 8 – термовизор.

В результате проведенных экспериментов была успешно продемонстрирована новая возможность комбинированного нагрева на плазмотроне ВГУ-4 ИПМех РАН. Максимальный тепловой поток, полученный в комбинированном режиме при мощности лазерного излучения 47 Вт и мощности ВЧ-генератора плазмотрона по анодному питанию 22 кВт, составил  $32.1 \text{ Вт/см}^2$ . Конвективный тепловой поток от струи азотной плазмы при той же мощности анодного питания составил  $12.6 \text{ Вт/см}^2$ . В дальнейших работах планируется сосредоточиться на задачах: получения сверхвысоких температур поверхности при максимальной мощности ВЧ-генератора плазмотрона ВГУ-4 и импульсного иттербиевого лазера, используемого в данной работе, а также интеграции в установку ВГУ-4 более мощного источника лазерного излучения.



## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена по теме гранта РФФИ 22-79-10083.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гордеев, А.; Колесников А. Индукционные плазмотроны серии ВГУ // Актуальные проблемы механики. Физико-химическая механика жидкостей и газов. М., Наука, 2010. С. 151-177.
2. Щетанов, Б. Материал плитки для внешнего высокотемпературного теплозащитного покрытия орбитального корабля «Буран» // Авиационные материалы и технологии. 2013. S1. С. 41-50.



## КАПИЛЛЯРНЫЕ И АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ ИМПАКТА КАПЛИ

*Ю.Д. Чашечкин*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

[yulidch@gmail.com](mailto:yulidch@gmail.com)

В последние годы все большее внимание уделяется одновременному изучению физических, гидродинамических и акустических процессов, сопровождающих слияние свободно падающей капли с покоящейся принимающей жидкости. Научный и практический интерес вызывают изменчивые и в то же время воспроизводимые картины течений, механизмы формирования течений и волн. Кольцевые капиллярно-гравитационные волны были замечены в конце XIX века. Акустические волны импакта капли вначале были зарегистрированы в воздухе в начале прошлого века, а с появлением гидрофонов – и в воде. В последние годы измерения шума дождя используются для определения интенсивности осадков в удаленных регионах океана. Одновременно развиваются теоретические и лабораторные исследования всех видов волн капельных течений.

Описание гидродинамических процессов проводится на основе определений жидкости как подвижной сплошной среды, равновесное состояние которой характеризуется распределением потенциала Гиббса [1], его производных – термодинамических величин (плотности, энтропии, давления, температуры, концентрации растворенных веществ и взвешенных частиц), коэффициентов молекулярного переноса – вязкости, температуропроводности и диффузии, параметрами распространения волн (скоростей звука, света), переноса зарядов (электропроводность) и электромагнитных полей. Течение жидкости определяется как внутренне присущий или вынужденный совместный перенос вещества, импульса и энергии. В капельных течениях наглядно проявляется действие всех механизмов переноса энергии – макроскопического с течением и волнами и медленного диффузионно-диссипативного и прямого быстрого атомно-молекулярного [2].

В обширном перечне элементов картины течений импакта капли, включающем каверну; венец с шипами, с вершин которых вылетают мелкие капельки; всплеск, выбрасывающий большие вторичные капли; газовые полости, трансформирующиеся в пузырьки, на этапах перестройки структуры наблюдаются гравитационно-капиллярные и акустические волны. В вязкой экспоненциально стратифицированной жидкости с вертикальным профилем плотности  $\rho = \rho_{00} \exp(-z/\Lambda)$  двумерные периодические течения вида

$\rho \sim \rho_{00} A_z e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)}$  в диапазоне капиллярно-гравитационных волн характеризуются дисперсионным соотношением, описывающим и традиционную волновую, и менее изученный тонкоструктурный компонент – лигамент [3]

$$\begin{cases} -N^2 k_x^2 + e^{z/\Lambda} (k_x^2 - k_{z,l}^2) \omega (ik_x^2 v - ik_{z,l}^2 v + \omega) = 0 \\ gk_x^2 - 3ik_x^2 k_{z,l} v \omega + k_{z,l} (ik_{z,l}^2 v - \omega) \omega + k_x^4 \gamma = 0, \quad \gamma = \sigma/\rho_{00} \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $N = \sqrt{g/\Lambda}$  – частота плавучести,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\gamma$  – нормированное на плотность значение коэффициента поверхностного натяжения,  $\omega, \mathbf{k} = (k_x, k_z)$  – частота и волновой вектор (без индекса характеризующий волновую компоненту, с индексом  $l$  – лигаментную (сингулярно возмущенную) часть решения,  $v$  – кинематическая вязкость.

Капиллярные волны, которые образуются на разных этапах эволюции импактного течения, играют важную роль в образовании газовых пузырьков, которые могут отрываться под действием быстрых течений – лигаментов, возникающих в тонких слоях при конверсии доступной энергии в процессе уничтожения свободной поверхности сливающихся жидкостей. Газовая полость, отрывающаяся с образованием тонкой перемычки, излучает пакеты акустических волн различной частоты и продолжительности. В дальнейшем будет анализироваться только регулярная часть традиционного дисперсионного соотношения для звуковых волн в однородной жидкости (уравнение вырождено по сингулярным компонентам [2])

$$\left( \mathbf{k}^2 \left( 1 - \frac{i\omega \tilde{v}}{c_s^2} \right) - \frac{\omega^2}{c_s^2} \right) (\omega + i\nu \mathbf{k}_l^2)^2 = 0 \quad (2)$$

Здесь  $c_s$  – скорость звук, индекс  $l$  характеризует лигаменты.

Типичные примеры картин капиллярных волн в капельных течениях приведены на Рис. 1. Короткие волны на донной части погружающейся капли возникают при ударе капельки, ранее вылетевшей с вершины шипа на пелене венца (Рис.1, а,б), Капиллярные волны на стенке венца в стадии роста и спадания, показаны на Рис. 1 в,г. Наиболее полно изучены кольцевые капиллярные волны, охватывающие венец или основание стримера. На больших удалениях от источника неоднородности фазовых поверхностей таких волн сглаживаются (Рис.1, д,е), наблюдения согласуются с расчетами [4].

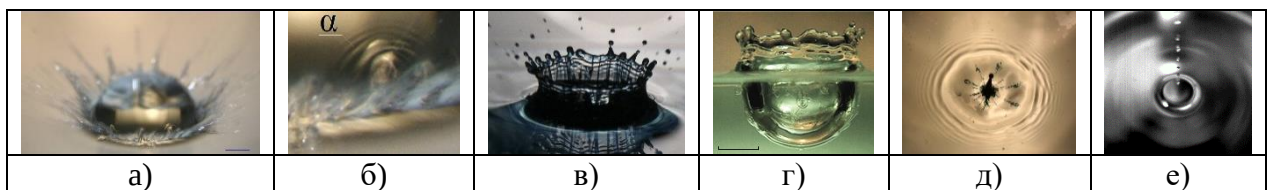


Рис. 1. Капиллярные волны в течениях импакта капли: а,б) – следы падения капелек на поверхности погружающейся капли (полное и часть изображения), в,г) – волны на стенках венца, д,е) – кольцевые волны вокруг венца и основания стримера.

Из анализа периодограмм волн на стенке каверны (Рис. 2) следует, что интенсивность  $I$  и длина волн  $\lambda$  со временем растут, частота  $f$  падает, дисперсионное соотношение выполняется достаточно точно.

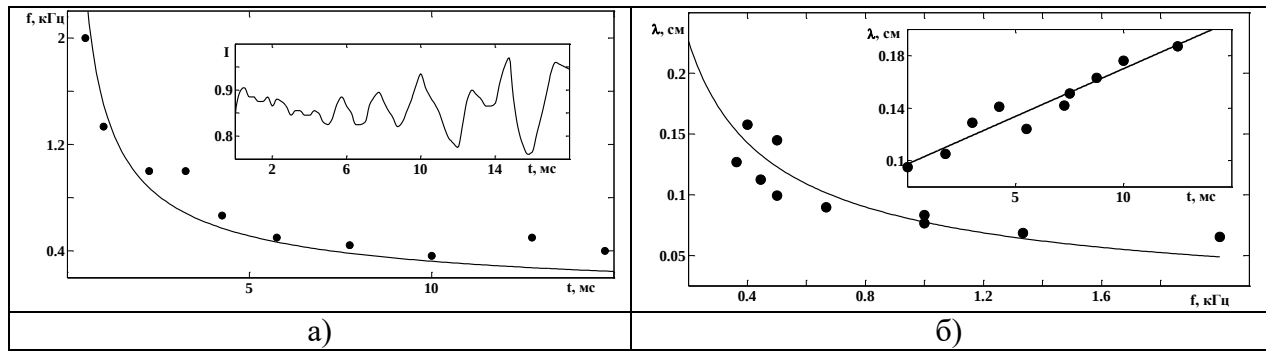


Рис. 2. Эволюция капиллярных волн на стенках венца: а) – временная изменчивость амплитуды  $I$  и частоты волны  $f$ , б) – зависимость длины волны  $\lambda$  от времени и частоты (кривая – дисперсионное соотношение).

В эксперименте короткие капиллярные и акустические волны излучаются пакетами во время резких изменений пространственной структуры течения. Капиллярные волны наблюдаются на границе области слияния падающей капли с жидкостью, вокруг основания всплеска, на стенках венца и каверн. Акустически волны образуются при отрыве газовых полостей с образованием разрывающейся перемычки [5].

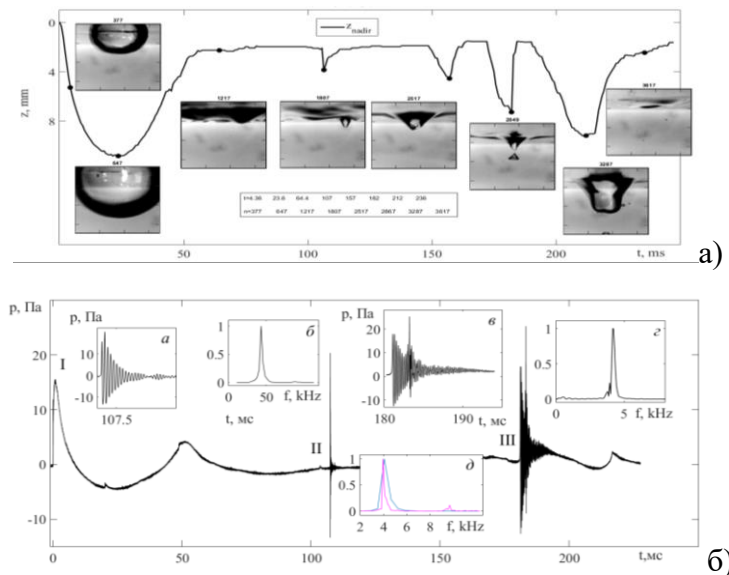


Рис. 3. Периодограмма изменения глубины каверн и фонограмма давления звуковых сигналов на общей временной шкале, на врезках – фотографии течения в отмеченные моменты времени, развертки и энергетические спектры акустических волн

Каверны последовательно образуются при погружении капли, основания и вершины венца, второй и первой вылетевших с его вершины капель (Рис. 3). С невозмущенной поверхностью жидкости капля соприкасается вершиной, каверна 1 имеет гладкие стенки. Возвращающаяся капля соприкасается со стенками каверны боковой поверхностью, что увеличивает долю передаваемой конвертируемой энергии при уничтожении свободной поверхности, и вызывает искажения формы стенок каверны, образование выступов и быстрых тонких течений. Отрывающиеся газовые полости излучают звуковые пакеты.

Многообразие компонентов, четкость тонких структур и воспроизводимость в целом картин течений, указывает на важную роль всех механизмов передачи энергии и необходимость развития теории течений на основе полной системы уравнений механи-

ки жидкостей с замыкающими уравнениями состояния для потенциала Гиббса и плотности.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598-П). Эксперименты проведены на стендах УИУ "ГФК ИПМех РАН".

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Feistel R. Thermodynamic properties of seawater, ice and humid air: TEOS-10, before and beyond // Ocean Sciences. 2018, 14, 471–502.
2. Chashechkin Y.D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // Axioms. 2021. V. 10. 286. <https://doi.org/10.3390/axioms10040286>.
3. Chashechkin Yu.D., Ochirov A.A. Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field // Axioms. 2022. V. 11(8). 402. doi: 10.3390/axioms11080402.
4. Zhu G.Z., Li Z.H., Fu D.Y. Experiments on ring wave packet generated by water drop. Chin. Scie. Bul., 2008, vol. 53, no. 11, pp. 1634-1638
5. Чашечкин Ю.Д. Пакеты капиллярных и акустических волн импакта капли // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. 2021. № 1(94). С. 73



### ОСНОВЫ ИНЖЕНЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТЕЙ

Ю.Д. Чашечкин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

[yulidch@gmail.com](mailto:yulidch@gmail.com)

При обсуждении роли механики жидкостей и газов в развитии промышленных технологий, методов анализа состояния и прогноза эволюции окружающей среды отмечается недостаточность научного описания ряда успешно работающих систем и технологий. Разобщенность подходов, отраженная в оглавлении основных трактатов, подчеркивает деление единого предмета на разделы – аэродинамику и гидродинамику, методы (аналитическое, численное или лабораторное моделирование), процессы (течения, волны, вихри, следы...), модели (фундаментальные, редуцированные, конститутивные,...), и большое число других градаций [1]. Следуя рекомендации Д.И. Менделеева «не отделять вопроса о сопротивлении воздуха от вопроса о сопротивлении воды» [2], развивается единый подход к описанию течений жидкостей и газов в рамках двух независимых взаимно дополняющих дисциплин – Инженерной математики – *Аксиоматического учения о принципах выбора содержания символов, правил операций и критериев контроля точности*, и Технической физики – *Эмпирио-аксиоматического учения о природе в целом, свойствах и структуре материи, всех видах изменений состояния с контролем погрешности*. Критерии выбора физических величин – наблюдаемость, т.е. возможность оценки погрешности в ходе измерений и соответствие по смысловому содержанию аналогичным символам инженерной математики [3]. Математическое описание базируется на понятиях вещественного или комплексного числа, времени, векторного пространства, инвариантов и движения – непрерывного ортогонального преобразования метрического пространства в себя с параметром  $t$  (временем) с сохранением состояний и взаимного расположения объектов.

Описание гидродинамических явлений проводится на основе определения жидкости как подвижной сплошной среды, равновесное состояние которой характеризуется распределениями потенциала Гиббса [3], его производных – термодинамических величин (плотности, энтропии, давления, температуры, концентрации растворенных веществ и взвешенных частиц), коэффициентов молекулярного переноса – вязкости, температуропроводности и диффузии, параметрами распространения волн (скоростей звука, света), переноса зарядов (электропроводность) и электромагнитных полей. Течение жидкости определяется как внутренне присущий или вынужденный совместный перенос импульса, энергии и вещества, который описывает система фундаментальных уравнений механики жидкостей. Анализ системы, впервые приведенной в 1944 г. в первом издании [1]. с учетом условия совместности определяет полные наборы функций, описывающих динамику и структуру течений реальных жидкостей и газов.

Классификация структурных компонентов течений проведена по результатам анализа полных решений линеаризованной системы фундаментальных уравнений для периодических течений, проведенного с учетом условия совместности. Классификация включает волны различного типа (акустические, инерциальные, внутренние гравитационные, гибридные) и сопутствующие лигаменты – прослойки и волокна, формирующие тонкую структуру среды [3]. Подробный анализ дисперсионных соотношений для поверхностных гравитационно-капиллярных волн в вязкой, экспоненциально стратифицированной жидкости выполнен в [4]. В нелинейном приближении взаимодействие волн между собой и с лигаментами расширяет сценарии эволюции течений [5]. Большое число одновременно представленных детерминированных компонентов с собственными пространственно-временными характеристиками объясняет сложный характер сигналов датчиков в реальном физическом эксперименте. Выполнение условий синхронизма для отдельных компонентов течений проявляется в формировании пространственной структуры потока, в котором, в зависимости от условий, могут быть выражены волны, вихри, струи и следы.

Теория течений жидкости создавалась и развивается в приближении сплошной среды. Реальные жидкости и газы состоят из атомов и молекул, которые образуют объединения различного состава и числа элементов – ассоциаты, комплексы, клатраты, кластраты, войды с отдельными атомами, кластеры и другие. Линейные масштабы объединений лежат в диапазоне от  $10^{-8}$  до  $10^{-6}$  см, временные – от  $10^{-12}$  до  $10^{-8}$  с. Каждый из компонентов структуры среды характеризуется собственной внутренней энергией, которая накапливается при его формировании и частично теряется при разрушении, обеспечивая свойство текучести жидкостей и газов.

Свободный обмен энергией между компонентами течений: кинетической энергией механического движения  $E_k = \rho \mathbf{u}^2 / 2$  и различными компонентами внутренней энергии, которую принято характеризовать потенциалом Гиббса  $dG = -s_e dT + V dP + S d\sigma + \mu dS_i$ , обеспечивает формирование быстрых тонких струек (ручейков, триклов) во всех видах течений, которые описываются лигаментами в полных решениях системы фундаментальных уравнений [3]. Обозначения стандартные:  $s_e$  – энтропия,  $T$  – температура,  $V = 1/\rho$  – удельный объем,  $P$  – давление,  $S$  – площадь поверхности раздела,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $\mu_i$  – химический потенциал  $i$ -ой компоненты,  $S_i$  – концентрация растворенного или взвешенного  $i$ -вещества.

Большая теплоемкость жидкостей позволяет в ряде задач пренебречь температурными эффектами и получать экспериментально проверяемые результаты решений редуцированной системы фундаментальных уравнений. При этом невозмущенный про-

филь плотности  $\rho(z) = \rho_0 \exp(-z/\Lambda)$  в направлении линии действия силы тяжести  $\mathbf{g} = (0, 0, g_z)$ , где  $\Lambda = |d \ln \rho / dz|^{-1}$  – масштаб плавучести, задаваемый распределением солёности  $S_i$ , заменяет уравнение состояния, и система уравнений принимает вид [3]:

$$\rho = \rho_{00} (\exp(-z/\Lambda) + s), \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho_{00}} + \nu \Delta \mathbf{v} - s \cdot \mathbf{g}, \quad \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = \kappa_s \Delta s + \frac{v_z}{\Lambda} \quad (1)$$

с граничными условиями прилипания для скорости и непротекания вещества на твердой поверхности [3] или кинематическим и динамическим условиями на свободной поверхности [1]. Здесь  $s$  – возмущение солёности, включающее коэффициент солевого сжатия,  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  – скорость,  $P$  – давление за вычетом гидростатического,  $\nu = 10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}$  и  $\kappa_s = 1.41 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{с}$  – коэффициенты кинематической вязкости и диффузии,  $t$  – время,  $\nabla$  и  $\Delta$  – операторы Гамильтона и Лапласа.

Регулярные решения линеаризованной системы (1) описывают волны, сингулярные – лигаменты, поперечный масштаб которых  $\delta_N^v = \sqrt{\nu/N}$ , а в поле плотности и ее градиента  $\delta_N^k = \sqrt{\kappa/N}$ ; или частотой волны  $\omega$   $\delta_\omega^v = \sqrt{\nu/\omega}$ ,  $\delta_\omega^k = \sqrt{\kappa/\omega}$ ; или скоростью течения  $U$   $\delta_U^v = \nu/U$ ,  $\delta_U^k = \kappa/U$  [3, 5]. В потоке все компоненты, и крупные (вихри и волны) и тонкие лигаменты нелинейно взаимодействуют между собой, порождая новые гармоники [6], и вырождаются под действием диссипативных факторов. В непосредственной окрестности тела важную роль играют процессы трансформации внутренней энергии, формирующие тонкие лигаменты.

Современные компьютеры и методы программирования позволяют находить решения системы (1) в широком диапазоне параметров задачи – размеров, формы и скорости тела, типа и величины стратификации, темпа формирования и продолжительности наблюдения течений. В силу сложности внутренней разномасштабной структуры все течения непрерывно эволюционируют и со временем не переходят в стационарное состояние даже при неизменных условиях внешних условиях. Результаты полного расчета 2D картины обтекания пластины, расположенной под произвольным углом к горизонту, начинающей равномерное движение из состояния покоя в стратифицированной (сильно и слабо) или однородной (потенциально и актуально) жидкости в широком диапазоне параметров  $1 < \text{Re} = UL/\nu < 10^5$ , включающем ползучие течения, индуцированные диффузией, и нестационарные вихревые режимы, приведены в [6]. Наблюдаемые и рассчитанные картины течения около наклонной полосы приведены на Рис. 1.

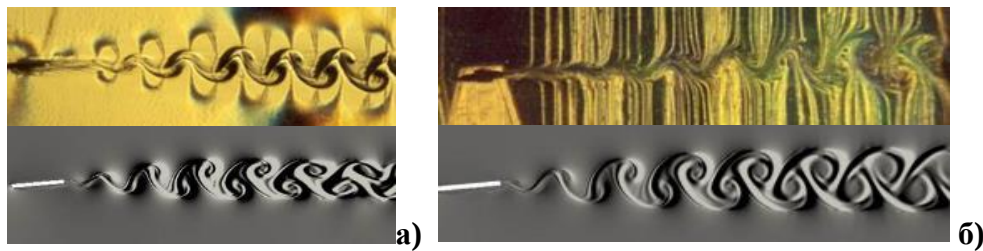


Рис. 1. Наблюдения (сверху) и расчет вихревых течений за наклонной тонкой пластиной длиной  $L = 2.5$  см, движущейся со скоростью  $U = 4.3$  см/с в стратифицированной

( $N = 0.83 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_b = 7.6 \text{ с}$ ) и потенциально однородной жидкости ( $T_b = 7.3$  дня)



Обсуждаются вытекающие из результатов опытов и расчетов рекомендации по совершенствованию методик измерения и процедур переноса результатов на природные и инженерные системы.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598-П). Эксперименты проведены на стендах УИУ "ГФК ИПМех РАН".

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика. М.: Наука. 1944. 646 с.
2. Менделеев Д.И. О сопротивлении жидкостей и о воздухоплавании. СПб, Тип. В.Демакова, 1880, 239 с.
3. Chashechkin Y.D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // Axioms. 2021. V. 10. 286. <https://doi.org/10.3390/axioms10040286>.
4. Chashechkin Yu.D., Ochirov A.A. Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field // Axioms. 2022. V. 11(8). 402. doi: 10.3390/axioms11080402.
5. Chashechkin Yuli D. Conventional partial and new complete solutions of the fundamental equations of fluid mechanics in the problem of periodic internal waves with accompanying ligaments generation // Mathematics. 2021. V. 9. No. 586. <https://doi.org/10.3390/math9060586>.
6. Chashechkin Yu. D., Zagumennyi I. V. 2D hydrodynamics of a plate: from creeping flow to transient vortex regimes // Fluids. 2021. V. 6(9). 310. <https://doi.org/10.3390>.



## ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В ВЯЗКОЙ НЕПРЕРЫВНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Ю.Д. Чашечкин<sup>1</sup>, А.А. Очиров<sup>1,2</sup>

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

<sup>2</sup>ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»,

Ярославль

[otchirov@mail.ru](mailto:otchirov@mail.ru)

Задачи распространения волн в неоднородных средах привлекают внимание исследователей в связи с большим количеством научных и практических приложений. Если речь идет о стратифицированных жидкостях, то чаще внимание наблюдателей обращено на изучение внутренних волн. Настоящая работа направлена на исследование распространения поверхностных волн.

Рассмотрим вязкую с кинематической вязкостью  $\nu$  в декартовой системе координат  $Oxyz$ , в которой ось  $Oz$  направлена вертикально вверх против направления действия сил тяжести  $\mathbf{g}$ , а плоскость  $Oxy$  совпадает с равновесным положением поверхности жидкости. Будем рассматривать движения независимые от горизонтальной координаты  $y$ . Будем считать, что жидкость стратифицирована по экспоненциальному закону  $\rho_0(z) = \rho_{00}e^{-z/\Lambda}$ . Стратифицированная жидкость характеризуется масштабом стра-

тификации  $\Lambda = |d \ln \rho / dz|^{-1}$ , частотой плавучести  $N = \sqrt{g / \Lambda}$  и периодом плавучести  $T_b = 2\pi / N$ . Ставится задача изучения волновых движений вида  $A = A_0 \exp(ikx - i\omega t)$  и сопутствующих тонких течений – лигаментов. В плоской постановке поле скоростей жидкости  $\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_z \mathbf{e}_z$  можно представить в виде частных производных функции тока  $\psi$

$$u_x = \partial_z \psi, \quad u_z = -\partial_x \psi \quad (1)$$

Математическая формулировка задачи с учетом сделанных упрощений запишется следующим образом:

$$z < \zeta : \quad \begin{cases} \rho = \rho_{00} (\exp(-z/\Lambda) + s(x, z, t)) \\ \rho \partial_t \mathbf{u} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \rho \nu \Delta \mathbf{u} = \rho \mathbf{g} - \nabla P \\ \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$z = \zeta : \quad \begin{cases} \partial_t (z - \zeta) + \mathbf{u} \cdot \nabla (z - \zeta) = 0 \\ \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{n} (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}) = 0 \\ P - P_0 - \sigma \nabla \cdot \mathbf{n} - 2\rho \nu \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla(z - \zeta)}{|\nabla(z - \zeta)|} = \frac{-\partial_x \zeta \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2}}, \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{e}_x + \partial_x \zeta \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2}}$$

Здесь функция  $s(x, z, t)$  описывает возмущение плотности, связанное с волновым движением,  $P$  – гидродинамическое давление,  $P_0$  – атмосферное давление,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения, а  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}$  – вектор внешней нормали и касательной к свободной поверхности соответственно.

Задача (1) – (3) содержит набор естественных параметров, задающих временные и пространственные масштабы. Временные масштабы задачи определяются периодом плавучести  $T_b = 2\pi / N$  и периодом волнового движения  $T_\omega = 2\pi / \omega$  (или соответственно частотой плавучести  $N$  и частотой волнового движения  $\omega$ ) и временем, которое тратится на свободный пробег расстояния, равного капиллярной постоянной жидкости  $T_{vg}^\gamma = \delta_g^\gamma / \nu = \sigma / \rho_{00} \nu g$ . Пространственные масштабы задачи определяются масштабом стратификации  $\Lambda$ , вязкими масштабами  $\delta_g^\nu = \sqrt[3]{\nu^2 / g}$ ,  $\delta_N^\nu = (\nu g)^{1/3} / N$ ,  $\delta_N^\nu = \sqrt{\nu / N}$  и капиллярной постоянной  $\delta_g^\gamma = \sqrt{\gamma / g} = \sqrt{\sigma / \rho_{00} g}$ .

Решение задачи ищется в виде бегущей волны

$$\psi = (A_+ e^{ik_x x - i\omega t} + A_- e^{-ik_x x - i\omega t}) (e^{k_z z} + \beta e^{k_l z}) \quad (4)$$

методом разложения по малому параметру, пропорциональному амплитуде волнового движения. В результате подстановки (4) получаются дисперсионные соотношения:

$$\begin{cases} -N^2 k_x^2 + e^{z/\Lambda} (k_x^2 - k_{z,l}^2) \omega (ik_x^2 \nu - ik_{z,l}^2 \nu + \omega) = 0 \\ g k_x^2 - 3ik_x^2 k_{z,l} \nu \omega + k_{z,l} (ik_{z,l}^2 \nu - \omega) \omega + k_x^4 \gamma = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Соотношения (5) удобно анализировать в безразмерном виде, используя в качестве параметров обезразмеривания собственные параметры задачи: частоту плавучести  $N$  и вязкий волновой масштаб  $\delta_N^{vg} = (\nu g)^{1/3} / N$ . Безразмерные соотношения (5) имеют вид:

$$\begin{cases} -k_{*x}^2 + ie^{z/\Lambda} (k_{*x}^2 - k_{*z,l}^2)^2 \varepsilon \omega_* + e^{z/\Lambda} (k_{*x}^2 - k_{*z,l}^2) \omega_*^2 = 0 \\ k_{*x}^2 + k_{*x}^4 \delta \varepsilon - 3ik_{*x}^2 k_{*z,l} \varepsilon^2 \omega_* + ik_{*z,l}^3 \varepsilon^2 \omega_* - k_{*z,l} \varepsilon \omega_*^2 = 0, \quad \delta = N\gamma/\nu g, \quad \varepsilon = N\nu^{1/3}/g^{2/3} \end{cases} \quad (6)$$

Здесь нижним индексом  $*$  обозначены соответствующие обезразмеренные величины. Уравнения (6) имеют регулярные и сингулярные решения. Регулярное решение описывают волновой компонент волнового движения и в предельном переходе малой вязкости сводится к решению дисперсионных соотношений для идеальной жидкости. Сингулярное решение в предельном переходе исчезает. Сингулярное решение описывает тонкое сопутствующее течение – лигамент.

Для волнового решения в линейном приближении по параметру  $\varepsilon$  получим для физически реализуемых корней:

$$\begin{aligned} k_{*x} &= -\frac{2^{1/3}}{\alpha} + \frac{\alpha}{3 \cdot 2^{1/3} \delta \varepsilon} \\ k_{*z} &= \frac{\sqrt{\omega_*^2 - e^{-z/\Lambda}}}{\omega_*} \left( -\frac{2^{1/3}}{\alpha} + \frac{\alpha}{3 \cdot 2^{1/3} \delta \varepsilon} \right) + \varepsilon \frac{ie^{-2z/\Lambda} \left( -\frac{2^{1/3}}{\alpha} + \frac{\alpha}{3 \cdot 2^{1/3} \delta \varepsilon} \right)^3}{2\omega_*^4 \sqrt{\omega_*^2 - e^{-z/\Lambda}}} \\ \alpha &= \left( 27\delta^2 \varepsilon^3 \omega_* \sqrt{\omega_*^2 - 1} + \sqrt{108\delta^3 \varepsilon^3 + 729\delta^4 \varepsilon^6 \omega_*^2 (\omega_*^2 - 1)} \right)^{1/3} \end{aligned} \quad (7)$$

Для лигаментного решения с точностью до слагаемых порядка  $O(\varepsilon^{3/2})$  для физически реализуемых корней справедливо:

$$\begin{aligned} k_{*x} &= \pm \sqrt{(\delta \varepsilon)^{-1} \left( ((1+i)(2\omega_*^2 - 1)/\sqrt{2\omega_*}) \varepsilon^{3/2} - 1 \right)} \\ k_{*l} &= \frac{(1-i)2\delta\omega_*^3 + (1+i)(e^{-z/\Lambda} + \omega_*^2) \left( ((1+i)(2\omega_*^2 - 1)/\sqrt{2\omega_*}) \varepsilon^{3/2} - 1 \right)}{2\sqrt{2}\omega_*^{5/2} \delta \sqrt{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (8)$$

На рисунке 1а представлена зависимость длины волны от частоты волнового движения для волнового решения для разных типов жидкостей с различными значениями частоты плавучести. На рисунке 1б представлены зависимости групповой (сплошные линии) и фазовой (пунктирные линии) скоростей от частоты волнового движения для этих жидкостей.

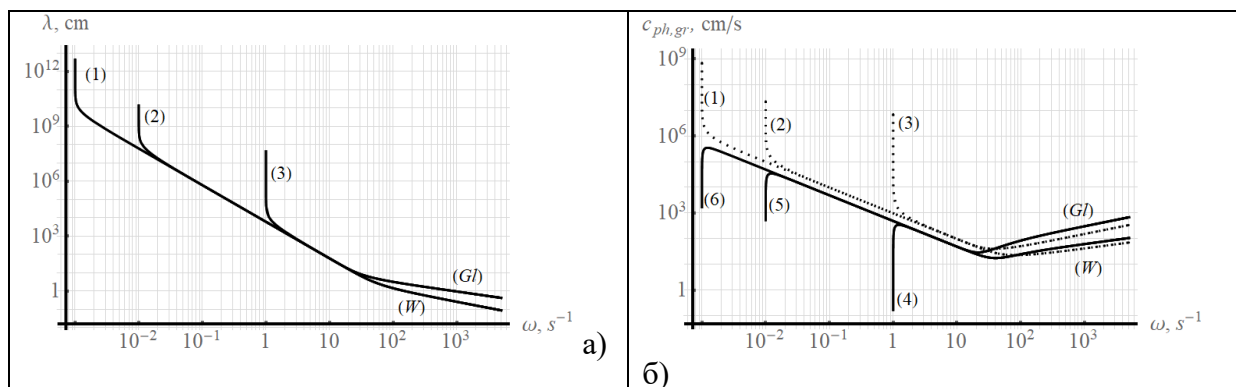


Рис. 1. Зависимость длины волны (а) и фазовой и групповой скорости (б) от частоты для жидкостей с параметрами воды (W) и глицерина (Gl). Индексы (1), (6) соответствуют частоте плавучести  $N = 0,001c^{-1}$ , индексы (2), (5) – частоте плавучести  $N = 0,01c^{-1}$ , индексы (3), (4) – частоте плавучести  $N = 1c^{-1}$ . Сплошными линиями обозначены групповые, пунктирными – фазовые скорости.

Были проанализированы дисперсионные соотношения, описывающие связь между частотой и длиной волны или волновым числом, а также другими параметрами задачи. Получены выражения для фазовой и групповой скоростей волнового движения и их аналоги для сопутствующих лигаментов. Также визуализированы потоки энергии и импульса на характерных масштабах волнового и лигаментного течения. Исследовано влияние стратификации жидкости на характеристики волн.

#### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598-П «Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью», <https://rscf.ru/project/19-19-00598/>).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chashechkin Yu.D., Ochirov A.A. Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field // Axioms. 2022. V. 11(8). 402. doi: 10.3390/axioms11080402.



### АНАЛИЗ КОДОМ WANA3 ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ КОНДЕНСАЦИОННЫХ ГИДРОУДАРОВ, ВЫПОЛНЕННЫХ В СИАНЬСКОМ ЦЗЯО ТУН УНИВЕРСИТЕТЕ

Чжан Ебин, В.И. Мелихов, О.И. Мелихов

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва

[ChzhanYeb@gmail.com](mailto:ChzhanYeb@gmail.com)

#### ВВЕДЕНИЕ.

В последние годы конденсационным гидроударам (КГУ) уделяется большое внимание в различных областях техники, в том числе, в оборудовании атомных электростанций (АЭС), например, в системе аварийного охлаждения, линиях питательной воды

и парогенераторах. Это явление может вызвать пик высокого давления за короткое время, что оказывает негативное воздействие на конструкции и угрожает безопасности эксплуатации АЭС. Согласно данным эксплуатационного опыта, КГУ происходит с частотой один раз в 4-5 лет на одной атомной электростанции.

Явление КГУ в основном изучалось для случая горизонтальной трубы. Основной процесс, определяющий возникновение КГУ, можно разделить на два этапа. (1) Рост межфазных возмущений в стратифицированном потоке пара и воды в горизонтальной трубе приводит к образованию и росту волны из-за неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, в результате чего пар отсекается водой и образуется изолированная паровая полость. (2) Вследствие конденсации пара в паровой области в ней падает давление, в результате начинается движение водяной пробки под действием перепада давления. Когда водяная пробка достигает препятствия (гиб трубы, клапан, масса воды), то происходит гидроудар и возникает пик высокого давления.

В настоящее время существует три вида инструментов для теоретических оценок величины давления при КГУ: 1) Расчеты на основе аналитических моделей для скорости схлопывания паровой полости с целью расчета пика давления с помощью уравнения Жуковского; 2) Одномерные теплогидравлические коды для моделирования переходных процессов двухфазных потоков в контурах АЭС. Эти коды обычно решают шесть уравнений сохранения для двух фаз и основаны на картах режима течения. 3) CFD коды для моделирования нестационарных процессов в многофазных течениях.

В настоящем исследовании используется теплогидравлический код WANA3 [1] для анализа экспериментов с КГУ, выполненных в Сианьском Цзяо Тун университете в 2020 году (КГУ-СЦ-2020) [2].

### ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ КГУ-СЦ-2020

На Рис. 1а показана схема экспериментальной установки [2]. Горизонтальная труба, показанная на Рис. 1б, состоит из прозрачной трубы из поликарбоната и трубы из нержавеющей стали, соединенные фланцами. В эксперименте использовались три трубы разной длины. Они все имеют внутренний диаметр 50 мм и длину 1000, 1400 и 2000 мм, соответственно. Горизонтальная труба соединялась с водяным баком на высоте 1/3 высоты водяного бака, а выход трубы располагался на расстоянии 300 мм от свободной поверхности воды.

Экспериментальная процедура была разделена на две части: подготовка и проведение эксперимента. Во время подготовки вода в парогенераторе была нагрета до состояния насыщения (110 °C) при давлении 0,15 МПа для получения пара и удаления воздуха из трубопровода. После получения чистого пара, давление в парогенераторе поднималось до величины 0,2 МПа и затем поддерживалось на постоянном уровне. Затем пар подавался в водяной бак для нагрева воды до 20 °C.

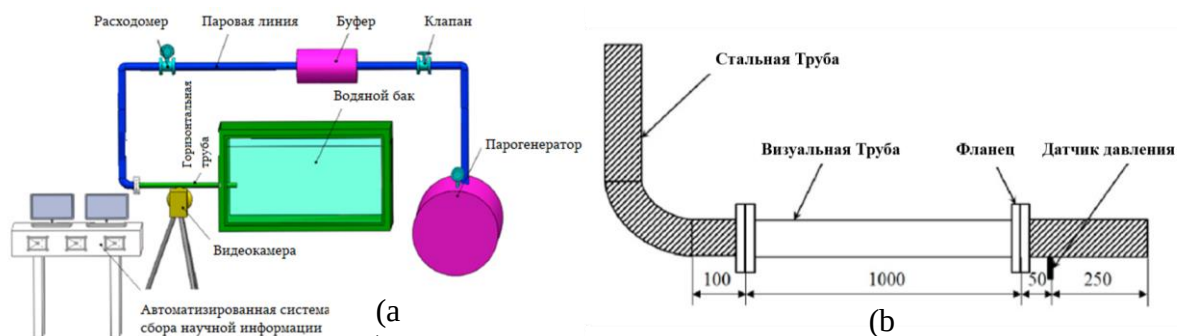


Рис. 1. Принципиальная схема экспериментальной установки (а) и горизонтальный участок (б) [2]

Когда вода нагревалась до 20 °С, начинался эксперимент. Во время эксперимента температура воды поддерживалась постоянной с помощью холодной воды, подаваемой в большой бак для поддержания постоянной температуры воды. 294 испытания были повторены с различными комбинациями массового потока пара и температуры воды. Параметры экспериментов приведены в таблице 1.

Таблица 1. Параметры экспериментов [2].

| Параметры                                        | Значения                     |
|--------------------------------------------------|------------------------------|
| Давление в парогенераторе в эксперименте, кПа    | 210.275                      |
| Массовый поток пара, кг/м <sup>2</sup> с         | 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5 |
| Температура воды, °С                             | 20, 30, 40, 50, 60, 75       |
| Длина горизонтальной испытательной трубы, L/D    | 20, 28, 40                   |
| Внутренний диаметр трубы, мм                     | 50                           |
| Материя для горизонтальных труб                  | Поликарбонатный материал     |
| Водяной бак, длина × ширина × высота, мм         | 1200 × 300 × 1200            |
| Уровень воды, мм                                 | 700                          |
| Глубина погружения выходного отверстия трубы, мм | 300                          |

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ И РАЗВИТИЯ КОНДЕНСАЦИОННОГО ГИДРОУДАРА.

Нодализация схема для кода WANA3, разработанная для моделирования экспериментов, показана на Рис. 2. Она была построена на основе нодализации схемы для кода RELAP [2]. Предварительно численно были рассмотрены более простые, чем в экспериментах, ситуации. Для проверки воспроизводимости состояния покоя был задан нулевой массовый расход пара на входе и системное давление 1 атм. Расчеты показывают, что данная нодализация схема воспроизводит состояние покоя. Затем были выполнены расчеты с подачей насыщенного пара при атмосферном давлении. Задавались различные температуры воды (насыщенная вода, 363 К, 343 К), при этом массовой расход пара равнялся  $G=1.0$  кг/м<sup>2</sup>с. Число Куранта, определяющее временной шаг численного интегрирования, составляло 0,4.

На Рис. 3 показаны расчетные результаты моделирования КГУ для различных температур воды в расчетных ячейках 87, 94, 95 и 104, расположенных в горизонтальной и подъемной частях трубы. Все три расчета показывают, что входящий пар частично выталкивает воду, частично смешивается с водой, образуя стратифицированный поток. При насыщенной воде и воде с температурой 363 К больших пиков давления в расчетах не возникало. При температуре воды 343 К были получены четыре значительных пика давления.

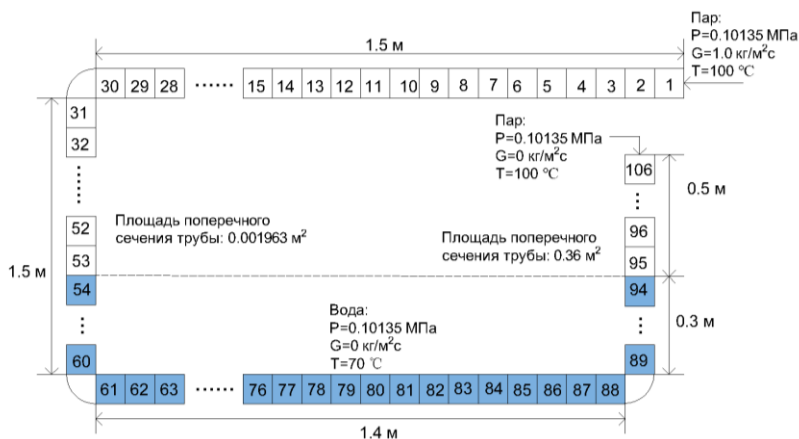


Рис. 2. Нодализация схема для кода WANA3



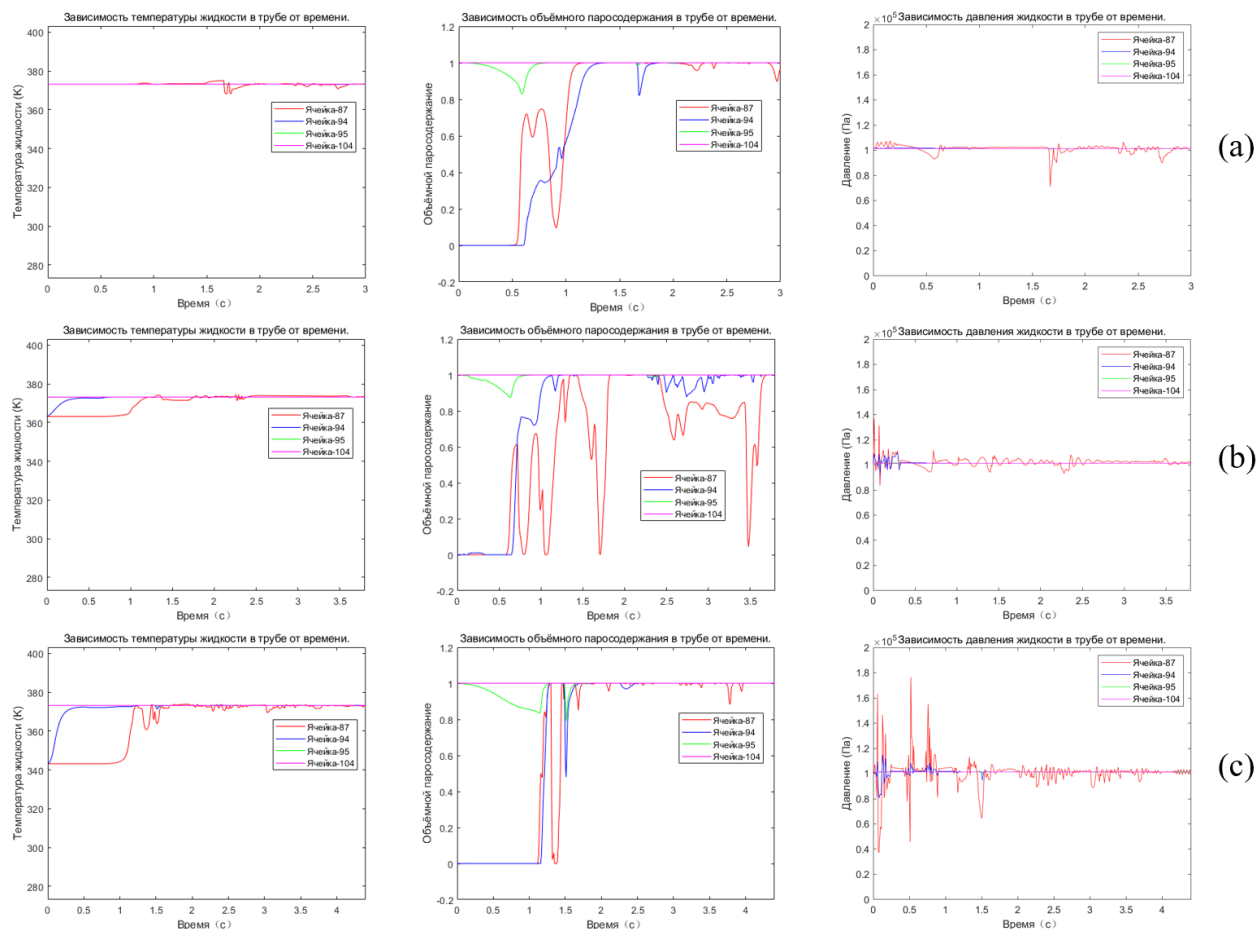


Рис. 3. Изменение температуры жидкости, объемного паросодержания и давления жидкости при (a) насыщенной воде; (b) 363 K; (c) 343 K

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ.** Разработанная схема нодализации экспериментальной установки [2] для кода WANA3 позволила воспроизвести в расчетах качественные особенности выполненных экспериментов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tiselj *et al.*, "WANA3 code manual," 2004.
2. T. Hibiki *et al.* "Modeling and simulation of onset of condensation-induced water hammer," Progress in Nuclear Energy, vol. 130, p. 103555, 202



### ИССЛЕДОВАНИЕ ОСАЖДЕНИЯ АЭРОЗОЛЯ В ЗАКРЫТОЙ ТРУБЕ С КОНУСНОЙ НАСАДКОЙ

Л.Р. Шайдуллин, С.А. Фадеев

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, Казань  
[shaidullin@imm.knc.ru](mailto:shaidullin@imm.knc.ru), [fadeev.sergei@mail.ru](mailto:fadeev.sergei@mail.ru)

В настоящее время сохраняется интерес к возникающим нелинейным явлениям и резонансным режимам в акустике [1]. Резонаторы переменного сечения, широко ис-

пользуются в технических системах таких как звуковые компрессоры и термоакустические системы, где необходимы высокоамплитудные колебания давления. Известно, что геометрия акустического резонатора влияет на его резонансную частоту и нелинейную амплитуду давления [2, 3]. В [4-6] рассмотрены резонаторы сложных форм и обнаружены большие амплитуды звукового давления при безударно-волновых режимах колебаний. В работе [7] аналитически получены решения резонансных колебаний политропного газа в закрытых трубах разной геометрии, качественно совпадающих с результатами экспериментов, где наиболее сильные колебания наблюдаются в коническом резонаторе, чем в колбе. Выявлено, что труба косинусоидальной формы больше подходит для создания высокой степени сжатия, чем трубы других форм [8]. Воздуховоды с изменением сечения часто используются для улучшения характеристик на более низких частотах (рупор), тогда как резонаторы с концентрическими трубами часто используются для обеспечения затухания на относительно высоких частотах. Комбинация этих двух приводит к коническим резонаторам с концентрическими трубами [9]. В связи с этим представляется важным исследование колебаний газа в трубе с конусной насадкой.

Экспериментально и теоретически рассмотрены колебания газа в трубах, которые возбуждаются гармоническими колебаниями поршня радиусом  $R = 0.01825$  м. Длина однородной трубы с прямым закрытым концом  $L = 1.06$  м, длина трубы с конусной насадкой может принимать различные значения. Численно решается уравнение Гельмгольца с учетом вязкости и теплопроводности. Получены амплитудно-частотные характеристики для труб с плоским закрытым концом и с конусной насадкой. Выявлено, что наличие сложной геометрии на закрытом конце трубы ведет к дисперсии резонансной частоты. Получено удовлетворительное согласие теоретических и опытных данных. Экспериментальные исследования осаждения аэрозоля показали, что начальная числовая концентрация капель, монотонно уменьшается со временем для всех частот колебаний и этот процесс происходит быстрее, чем при естественном осаждении.

#### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-79-00302).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зарембо Л.К. Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука. 1966. С. 519
2. *Feng H., Peng Y., Zhang X., Li X.* Influence of tube geometry on the performance of standing-wave acoustic resonators // J. Acoust. Soc. Am. 2018. V. 144. P. 1443.
3. *Hamilton M.F., Ilinskii Y.A., Zabolotskaya E.A.* Linear and nonlinear frequency shifts in acoustic resonators with varying cross sections // J. Acoust. Soc. Am. 2001. V. 110. P. 109.
4. *Cervenka M., Soltes M., Bednarik M.* Optimal shaping of acoustic resonators for the generation of high-amplitude standing waves // J. Acoust. Soc. Am. 2014. V.136. P. 1003–1012.
5. *Lawrenson C.C., Lipkens B., Lucas T.S., Perkins D.K., VanDoren T.W.* Measurements of macrosonic standing waves in oscillating closed cavities // J. Acoust. Soc. Am. 1998. V. 104 P. 623–636.
6. *Amundsen D.E., Mortel, M.P., Seymour B. R.* Resonant radial oscillations of an inhomogeneous gas in the frustum of a cone // Z.A.M.P., Journal of Applied Math & Physics. 2015. V. 66. P. 2647 - 2663.

7. *Mortell, M. P., Seymour, B. R.* Nonlinear resonant oscillations in closed tubes of variable cross-section // *J. Fluid Mech.* 2004. 519. P. 183–199.
8. *Chun Y.-D., Kim Y.-H.* Numerical analysis for nonlinear resonant oscillations of gas in axisymmetric closed tubes // *J. Acoust. Soc. Am.* 2000. V. 108. 2765.
9. *Kar T., Munjal M. L.* Analysis and design of conical concentric tube resonators // *J. Acoust. Soc. Am.* 2004. V. 116. P. 74.



## МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНО-ВОЛНОВЫХ И ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР В СВЕРХЗВУКОВОЙ ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУЕ ГАЗА

*И. А. Широков<sup>1</sup>, Т. Г. Елизарова<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва*

<sup>2</sup>*ИИПМ им. М.В.Келдыша РАН, Москва*

[ivanshirokov@inbox.ru](mailto:ivanshirokov@inbox.ru), [telizar@mail.ru](mailto:telizar@mail.ru)

В представленной работе приведены предварительные результаты применения численного алгоритма, основанного на регуляризованных, или квазигазодинамических (КГД) уравнениях, к моделированию ударно-волновых и вихревых структур, возникающих в перерасширенной струе газа при ее втекании в область, заполненную газом.

Диаметр (поперечный размер) струи на входе  $D = 0.04267$  м. Длина расчетной области 1.49 м, высота 1.06 м. Задача рассматривается в двумерной постановке. Струя горизонтальна и направлена в сторону положительных значений абсциссы. Газ считаем идеальным, постоянная адиабаты  $\gamma = 1.4$ . В соответствии с экспериментами [1] число Маха составляет  $Ma = 1.5$ . В качестве газа берется азот, газовая постоянная  $R = 288$  Дж/(кг·К), число Прандтля  $Pr = 0.737$ . Газодинамические параметры струи на входе: плотность  $\rho_0 = 1.18189$  кг/м<sup>3</sup>, давление  $p_0 = 68781.5$  Па, температура  $T_0 = 202.07$  К, скорость звука  $c_0 = 285.28$  м/с. В невозмущенной области плотность  $\rho_1 = 1.20015$  кг/м<sup>3</sup>, давление  $p_1 = 101325$  Па, температура  $T_1 = 293.15$  К.

В качестве математической модели используем КГД уравнения [2], реализованные на равномерной квадратной сетке с шагом  $h_x = h_y = h = 0.00106675$  м, при этом число узлов  $N_x = 1400$  и  $N_y = 1002$ , на поперечный размер струи на входе приходится 40 узлов. Используем явную схему с центральными разностями по пространству, на равномерной пространственной сетке аппроксимация будет иметь второй порядок точности. По времени схема имеет первый порядок точности. Коэффициент сдвиговой вязкости определим через температурную зависимость:  $\mu = \mu_0 (T/T_0)^\omega$ , где  $\mu_0 = 1.371 \cdot 10^{-5}$  кг/(м·с) – вязкость газа при начальной температуре потока  $T_0$ ,  $\omega = 0.74$  – показатель межмолекулярного взаимодействия. Число Рейнольдса, вычисленное по начальной вязкости  $\mu_0$ , размеру сопла  $D$  и начальной скорости  $Ma \cdot c_0$ , составляет  $Re = 1.6 \cdot 10^6$ .

Коэффициент  $\tau$ , определяющий дополнительную диссипацию в КГД алгоритме, вычисляется как  $\tau = \alpha h / c$  и обеспечивает устойчивость КГД алгоритма при моделировании сверхзвуковых течений плотных газов. Величина искусственной добавки опре-

деляется настроечным параметром  $\alpha = 0.3$ ,  $h$  – шаг пространственной сетки,  $c$  – локальная скорость звука.

Сделано 318000 шагов явной схемы, что соответствует физическому времени 0.0237689 с (отметим, что частица газа при начальной скорости звука за это время успела бы пройти более 6 м, т. е. в 4 раза больше длины расчетной области). Расчет требует около 12 часов машинного времени при использовании 128 процессоров комплекса К-100 [3] (реализованы параллельные вычисления на основе стандарта MPI).

В эксперименте [1] наблюдается от 5–6 ударно-волновых структур («бочек»). Сложность численного моделирования задачи заключается в том, что разностные алгоритмы, как правило, не позволяют в полученном сильно нестационарном течении разрешить наблюдаемое в эксперименте число «бочек». Примененный в данной работе алгоритм позволяет приблизить численный расчет к данным эксперимента.

Ниже показаны мгновенные при 0.0237689 с (рис. 1) и осредненные от 0.001 с до 0.0237689 с (рис. 2) распределения плотности и линии тока. В дальнейшем мгновенные и осредненные величины относятся к этим же моментам времени. Видно образование сложных нестационарных структур в мгновенных полях и регулярный характер поля после его осреднения. Заметим, что в эксперименте определяются осредненные значения газодинамических величин.

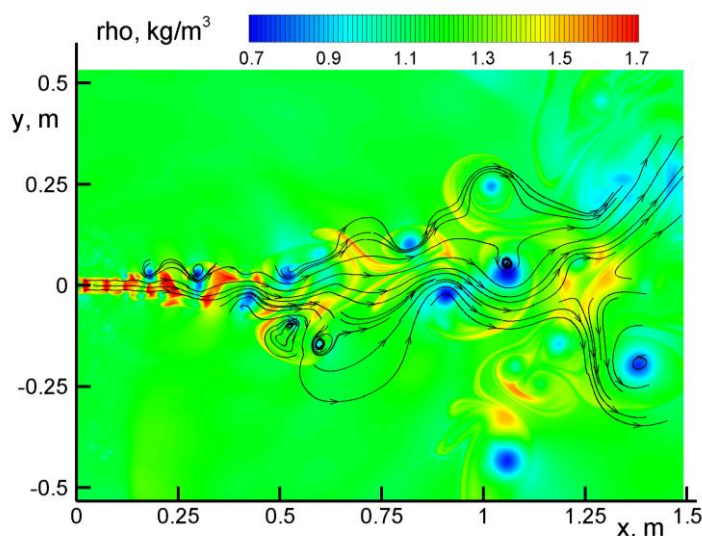


Рис. 1. Мгновенные распределения плотности и линии тока.

На рис. 3 показано распределения давления вдоль оси струи в зависимости от продольной координаты, нормированной на поперечный размер струи: черная линия – мгновенное распределение, цветная линия – осредненное. Давление нормировано на значение давления в невозмущенной области. Видно, что число ударно-волновых структур («бочек») около 5, и значение давления приближается к невозмущенному давлению примерно при  $x/D = 7$ . Осредненный осевой профиль давления на рис. 3 имеет качественно сходный характер с экспериментальными профилями давления из работы [1].

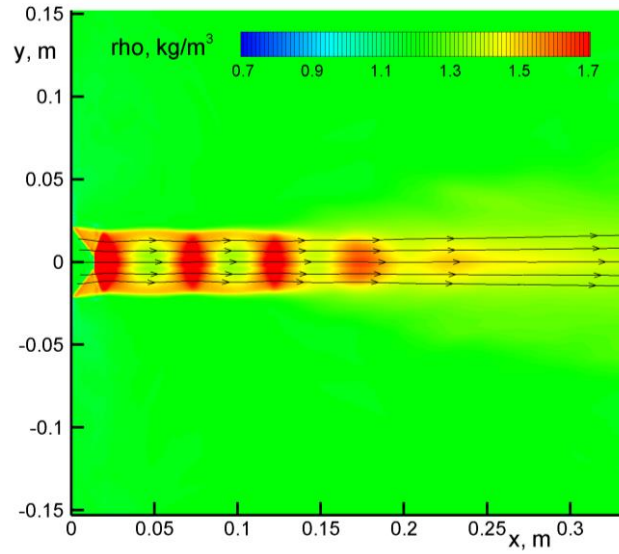


Рис. 2. Осредненные распределения плотности и линии тока.

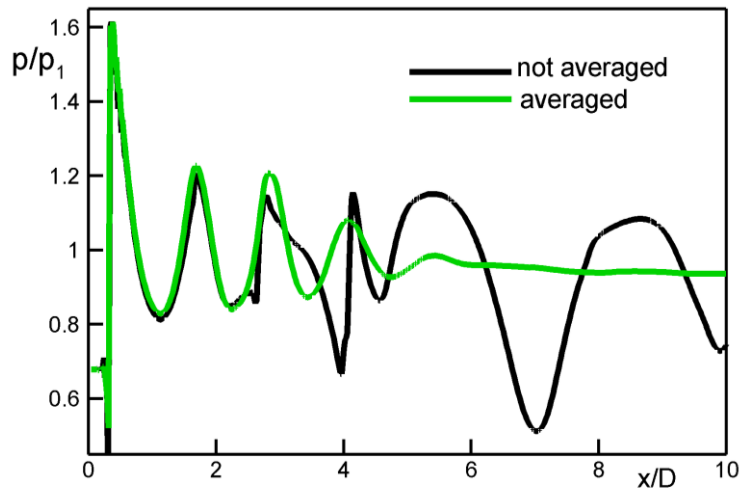


Рис. 3. Осевые профили нормированной плотности.

На рис. 4 показаны осевые распределения числа Маха, также в зависимости от продольной координаты, нормированной на поперечный размер струи. Черная линия – мгновенное распределение, цветная линия – осредненное. Как и профиль давления, осредненный профиль числа Маха имеет качественно сходный характер с экспериментальными профилями [1].

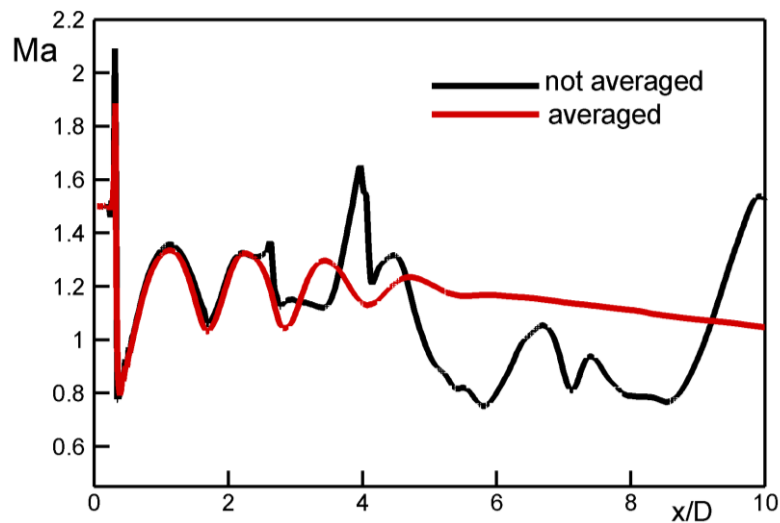


Рис. 4. Осевые профили числа Маха.

#### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Авторы выражают благодарность М. В. Крапошину за помощь в постановке задачи.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Seiner J.M., Norum T.D. Experiments of shock associated noise on supersonic jets // AIAA 12<sup>th</sup> fluid and plasms dynamic conference. July 23-25, 1979. <https://doi.org/10.2514/6.1979-1526>
2. Елизарова Т.Г., Широков И.А. Регуляризованные уравнения и примеры их использования при моделировании газодинамических течений. М.:–МАКС Пресс, 2017. 136 с.
3. K-100 System, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow; Available at <http://www.kiam.ru/MVS/resources/k100.htm>



### АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО ГИДРОДИНАМИКЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ПАРОГЕНЕРАТОРА С ПОМОЩЬЮ КОДА STEG

Шисян Лю<sup>1</sup>, Фэй Инь<sup>1</sup>, В.И. Мелихов<sup>2</sup>, О.И. Мелихов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский университет «МГТУ им. Н.Э.Баумана», Москва

<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва  
[sxliu98@gmail.com](mailto:sxliu98@gmail.com)

Представлены результаты валидации кода STEG на экспериментах по течению двухфазной смеси сквозь горизонтальные пучки труб [1-3]. Эксперименты проводились на модели, состоящей из прозрачного сосуда, внутри которого находился пучок труб, дырчатый лист и закраина, отделяющая подъемный участок движения циркуляционного контура модели от опускного. Объемные паросодержания и скорости воды измерялись в различных точках модели. Представлено краткое описание кода STEG, основанного на 3D двухжидкостной модели [4]. Установлены особенности пространственных



двухфазных течений и проведено количественное сравнение с экспериментальными данными. Получено хорошее соответствие между расчетными и экспериментальными данными. Около 90% экспериментальных данных как для объемных паросодержаний, так и для скорости воды определяются кодом STEG с точностью до 10%.

### КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ КОДА STEG.

Математическая модель кода STEG основана на двухжидкостной модели. Каждая фаза (вода и пар/газ) рассматривается как отдельная непрерывная среда (континуум), для которой справедливы уравнения сохранения массы, импульса и энергии. Для замыкания этой системы уравнений её необходимо дополнить соотношениями, описывающими силовое и тепловое межфазное взаимодействие, а также взаимодействие фаз со стенками, дырчатыми листами, трубным пучком и т.п. Гидравлическое сопротивление при обтекании пучка труб двухфазным потоком в коде STEG описывается моделью Колбасникова [3].

### ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ.

Экспериментальная модель показана на рис.1. Корпус модели имел остекление со всех четырех сторон, что позволяло визуально контролировать процессы, происходящие в модели. Рабочий участок состоял из шахматного трубного пучка, погруженного дырчатого листа (ПДЛ) и опускного канала.

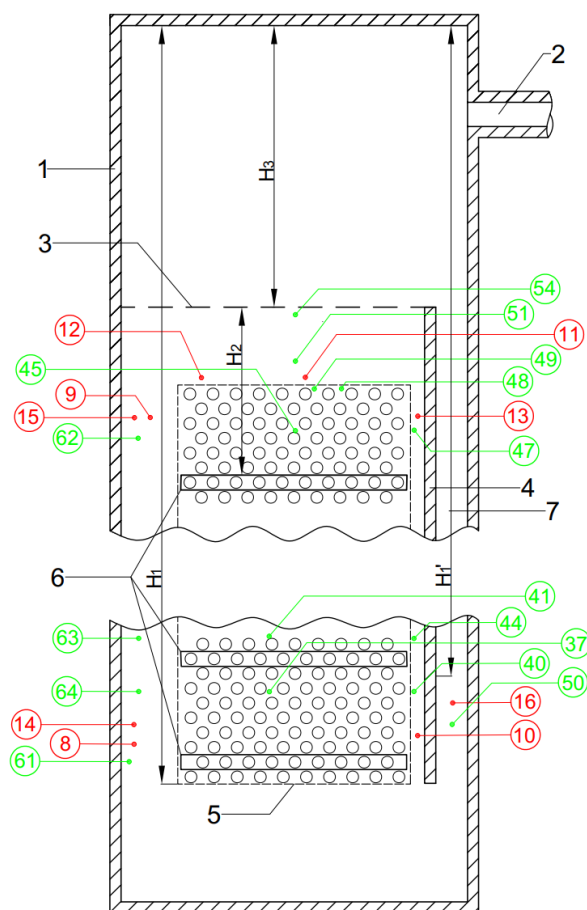


Рис. 1. Экспериментальная установка (поперечное сечение) 1 - корпус, 2 - выход воздуха, 3 - ПДЛ, 4 - закраина, 5 - трубный пучок, 6 - подвод воздуха, 7 - опускной канал, 8 – 16 - измерения скорости, 41 – 64 - измерения газосодержания,  $H_1$ ,  $H_1'$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  - измерения уровня воды

Геометрические характеристики трубного пучка (диаметр труб, шаги по горизонтали и вертикали) соответствовали параметрам натурального парогенератора ПГВ-1000. Количество рядов труб по ширине пучка 10, по высоте 53, длина трубы в пучке 0,5 м. Расстояние от ПДЛ до трубного пучка 0,25 м, перфорация дырчатого листа изменялась от 3 до 20%. Приведенная скорость воздуха к зеркалу испарения в модели могла изменяться в пределах 0 - 1,5 м/с. Направление движения среды и её скорость измерялись девятью турбинными расходомерами, установленными над пучком, в свободных и опускных каналах. Подвод воздуха осуществлялся в трех сечениях по высоте пучка через перфорированные трубки. Измерение газосодержания в 15 различных точках проводилось методом  $\gamma$ -просвечивания. Было выполнено 34 эксперимента, получены 442 экспериментальных значения газосодержания и 291 экспериментальное значение скорости воды.

### АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТОВ КОДОМ STEG.

Все эксперименты моделировались с помощью кода STEG. Установлены особенности пространственных двухфазных течений и проведено количественное сравнение с экспериментальными данными.

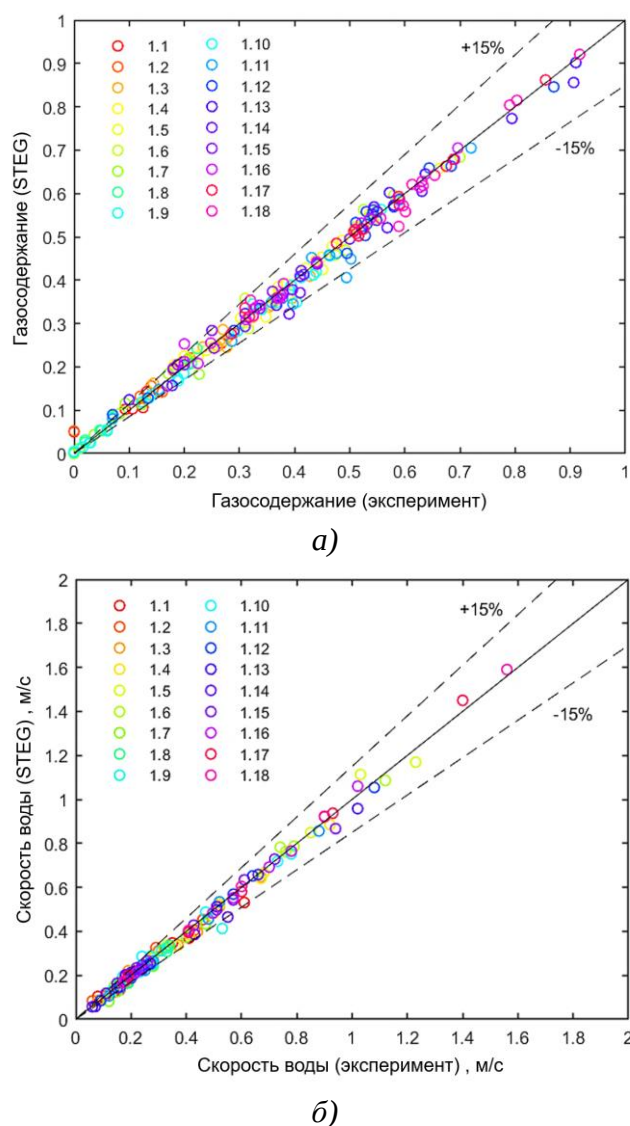


Рис. 2. Сравнение экспериментальных и расчетных значений. а) газосодержание, б) скорость воды

Средние абсолютные отклонения MAD и максимальные абсолютные ошибки MAXE 15 датчиков газосодержания и 9 датчиков скорости воды использовались в качестве меры расхождения между экспериментальными и расчетными результатами для каждого теста. Погрешности расчета варьируются следующим образом: 1) газосодержание MAD=1,57–13,27% и MAXE=3,31–55%; 2) скорость воды MAD=1,72–10,49%, MAXE=2,78–40%. Средние значения MAD газосодержания для 32 из 34 тестов составляют менее 8%, средние значения MAD скорости воды для всех 34 тестов составляют менее 10,5%. Несмотря на то, что в некоторых тестах наблюдаются большие максимальные значения, количество точек, в которых наблюдаются большие отклонения расчетных значений от экспериментальных, невелико. Около 90% всех экспериментальных точек для доли пустот и скорости воды предсказываются кодом STEG с точностью 10%, т.е. в пределах погрешности экспериментального измерения этих величин. В качестве примера на рис.2 приведено сравнение расчетных и экспериментальных значений объемного газосодержания и скорости воды.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-19-00793, <https://rscf.ru/project/22-19-00793/>.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колбасников А.В., Шварц А.Л., Галецкий Н.С. Исследование гидродинамики пароводяной среды в межтрубном пространстве поверхностей нагрева с целью усовершенствования парогенераторов АЭС с ВВЭР // Электрические станции, 1991, № 8, С. 44-48.
2. Колбасников А.В., Шварц А.Л., Галецкий Н.С. Исследование гидродинамики двухфазной среды в свободно погруженных поверхностях нагрева применительно к парогенераторам АЭС // Теплоэнергетика, 1992, №4, С. 62-66.
3. Колбасников А.В. Разработка методов расчета гидродинамики двухфазной среды и теплообмена в поперечноомываемых поверхностях нагрева парогенераторов на основе экспериментальных исследований: дисс. на соиск. уч. ст. канд. техн. наук. – М.: ОАО ВТИ. – 2000. 216 с.
4. Мелихов В.И., Мелихов О.И., Ле Т.Т. Экспериментально-расчетные исследования гидродинамических процессов в горизонтальном парогенераторе — М.: Наука, 2022. 213 с.



## ФОКУСИРОВКА ВНУТРЕННИХ ВОЛН ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЧИСЛАХ СТОКСА

Н. Д. Шмакова<sup>1</sup>, Б. Вуазен<sup>2</sup>, Ж. Соммерия<sup>2</sup>, Я.-Б. Флёр<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090, Новосибирск

<sup>2</sup>Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels, Grenoble

[shmakova@hydro.nsc.ru](mailto:shmakova@hydro.nsc.ru)

Внутренние волны в океане, возникающие благодаря взаимодействию приливных течений с рельефом океанического дна, играют важную роль в динамике океана. Потенциальное перемешивание стратификации, вызванное обрушением внутренних волн, приводит к изменению распределения тепла в океане и, таким образом, связывает динамику внутренних волн с прогнозированием климата [1]. В лаборатории внутренние

волны в стратифицированной жидкости могут моделироваться колебаниями объекта, т.е. рассматриваются в системе отсчета приливных течений. В качестве модели изолированной горы в океане обычно используются цилиндр или сфера. Подобные задачи были детально исследованы на протяжении последних трех десятилетий [2–4]. Концентрация волновой энергии может возникать вблизи изогнутых горных хребтов благодаря фокусировке внутренних волн. В модельной постановке фокусирующиеся внутренние волны генерируются горизонтальными колебаниями тора в стратифицированной жидкости. В отличие от колеблющихся сферы или цилиндра, тор генерирует сходящиеся волны, амплитуда которых растет в направлении зоны фокусировки, где наблюдаются нелинейные эффекты и обрушение волн [5–8].

Строение волн определяется числом Стокса

$$St = \omega_0 a^2 / \nu,$$

где  $\omega_0$  – частота колебания тора,  $a$  – радиус сечения тора,  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости, и варьируется от унимодального при малых и средних числах Стокса (сильные эффекты вязкости) с волновыми лучами шириной равной диаметру сечения тора до бимодального при больших числах Стокса (слабые эффекты вязкости) с тонкими волновыми лучами, имеющими форму слоев сдвига, касательных к сечению тора (рис. 1) [3]. При фокусировке унимодальные волны сходятся в зоне с одним максимумом амплитуды, в то время как бимодальные волны образуют зону фокусировки с четырьмя локальными максимумами: два на «полюсах» и два на «экваторе» (рис. 1) [7, 8].

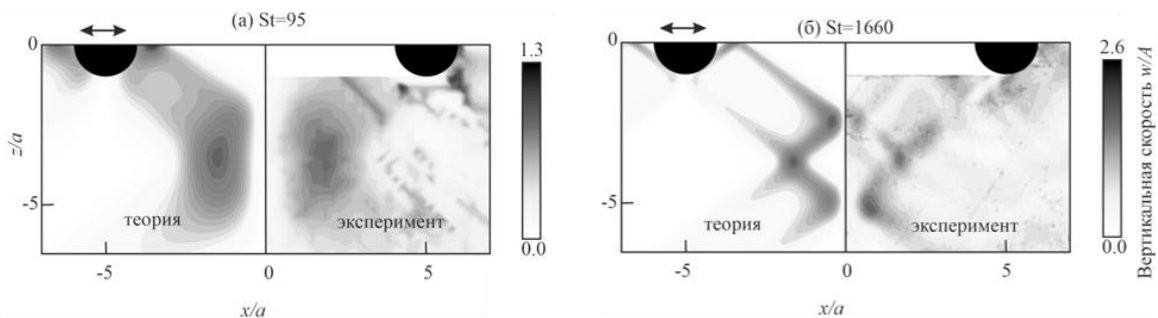


Рис. 1. Фокусировка (а) унимодальных ( $St < 250$ ) и (б) бимодальных ( $St > 250$ ) внутренних волн. Тор изображен черным цветом, градиент серого демонстрирует вертикальную компоненту скорости. Слева показаны трехмерные теоретические расчеты, справа – экспериментальные данные в линейном режиме (при малых амплитудах колебаний).

В данной работе представлено экспериментальное исследование влияния эффектов вязкости на фокусировку внутренних волн. При малых амплитудах колебания проведено сравнение с линейной трехмерной теорией, учитывающей влияние вязкости. Исследовано развитие триадного резонанса при различных числах Стокса и амплитудах колебания. Рассмотрено среднее течение в зоне фокусировки и противопоставленный ему дрейф Стокса.

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА.

Эксперименты проводились в резервуаре  $1500 \times 1500 \times 900$  мм<sup>3</sup>, заполненном линейно стратифицированной по солености жидкостью с вязкостью  $\nu = 1.1$  мм<sup>2</sup>/с. Плотность  $\rho(z)$  и частота плавучести  $N = \sqrt{-(g/\rho)(d\rho/dz)}$ , где  $g$  – ускорение свободного падения (противоположно направлено  $z$ ), были измерены путем сбора образцов жидкости на разной глубине. Внутренние волны генерировались горизонтальными колебаниями тора с амплитудой  $A$  и частотой  $\omega_0$  при помощи шагового двигателя. Для вариации числа Стокса использовались четыре тора с радиусами сечений  $a = 2$  см

( $St = 100$ ), 4 см ( $St = 420$ ), 6 см ( $St = 1000$ ) и 8 см ( $St = 1800$ ). Соотношение радиуса тора к радиусу сечения тора сохранялось постоянным  $\epsilon = 5$ .

Для вычисления скоростей использовался стандартный particle image velocimetry (PIV) метод [9]. Жидкость была засеяна полиамидными сферическими частицами диаметром 60 нм и просвечивалась вертикальным лазерным ножом через дно резервуара. Таким образом, лазерный нож освещал вертикальную плоскость, проходящую через центр тора (два круглых цилиндра в сечении). Обработка данных проводилась в приложениях PIVLab [10] и UVMAT [11] среды MATLAB.

### ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

Проведено сравнение экспериментальных данных с трехмерными аналитическими расчетами в вязкой жидкости [8]. При малых амплитудах колебания наблюдается отличное согласование теории с экспериментом. Наблюдается зависимость возникновения нелинейных эффектов от числа Стокса и амплитуды колебания. При малых амплитудах колебаний и при малых числах Стокса преобладают волны на фундаментальной чистоте. При увеличении амплитуды колебания, также как и при увеличении числа Стокса, возникает триадный резонанс. При большой амплитуде колебаний и при больших числах Стокса наблюдается волновая турбулентность.

Для детального исследования среднего течения, экспериментальные данные были усреднены по 10 периодам колебаний, что позволило исключить волновой сигнал. При малых числах Стокса поток образует четко определенную дипольную структуру в зоне фокусировки, направленную вверх вдоль оси тора и вниз по бокам, с максимумом около  $1/10$  от максимальной вертикальной скорости фундаментальной волны. С увеличением  $St$  поток образует четыре диполя в вертикальной плоскости, в каждой зоне фокусировки бимодальных волновых пучков: два на оси симметрии и два между ними с обеих сторон (рис. 2в). Чтобы обосновать происхождение среднего течения были произведены теоретические и экспериментальные расчеты вертикального дрейфа Стокса (рис. 2а и 2б, соответственно).

Хорошее соответствие между теоретическими и экспериментальными скоростями дрейфа наблюдается для  $St = 100$ , 420 и 1000. Дрейф Стокса почти точно противостоит среднему течению, тем самым подтверждая его невязкое происхождение. Для  $St = 1800$  волновые пучки, отраженные от свободной поверхности, нарушают генерацию среднего потока в верхней зоне фокусировки, тем самым ослабляя его амплитуду. При малых амплитудах колебания связь между средним течением и дрейфом Стокса сохраняется с течением времени. На больших амплитудах значения расходятся ввиду триадного резонанса и волновой турбулентности в системе.

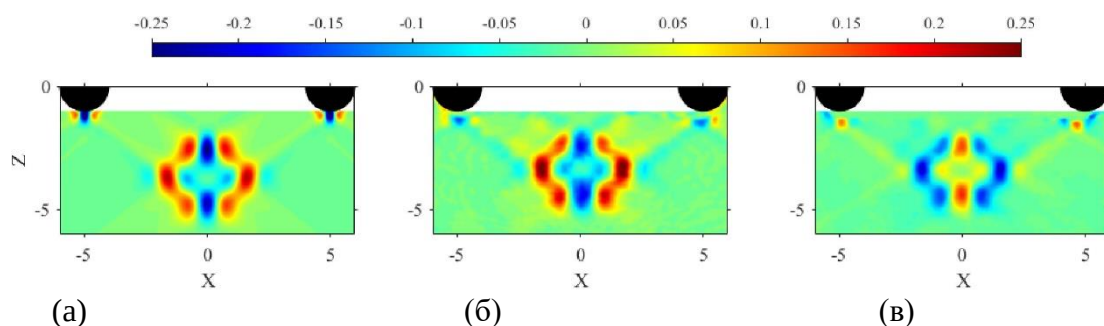


Рис. 2. Вертикальный дрейф Стокса вычисленный теоретически (а) и из экспериментальных данных (б); (с) Вертикальное поле скорости, усредненное по 10 периодам колебаний. Параметры:  $a = 2$  см,  $St = 420$ .



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ferrari R. What goes down must come up // Nature (London). 2014. Vol. 513. P. 179.
2. Voisin B. Limit states of internal wave beams // J. Fluid Mech. 2003. Vol. 496. P. 243.
3. Voisin B., Ermanyuk E. V., Flór J.-B. Internal wave generation by oscillation of a sphere, with application to internal tides // J. Fluid Mech. 2011. Vol. 666. P. 308
4. Voisin B., Near-field internal wave beams in two dimensions // J. Fluid Mech. 2020. Vol. 900, A3.
5. Bühler O., Muller C. J. Instability and focusing of internal tides in the deep ocean // J. Fluid Mech. 2007. Vol. 588. P. 1.
6. Ermanyuk E. V., Shmakova N. D., Flór J.-B. Internal wave focusing by a horizontally oscillating torus // J. Fluid Mech. 2017. Vol. 813. P. 695.
7. Shmakova N. D., Flór J.-B. Nonlinear aspects of focusing internal waves // J. Fluid Mech. 2019. Vol. 862, R4.
8. Shmakova N. D., Voisin B., Sommeria J., Flór J.-B. Internal and inertia-gravity wave focusing at large Stokes numbers // Phys. Rev. Fluids. 2021. Vol. 6, 114804
9. Westerweel, J. Fundamentals of digital particle image velocimetry // Measurement science and technology. 1997. Vol. 8. P. 1379.
10. Thielicke, W., Sonntag, R. Particle Image Velocimetry for MATLAB: Accuracy and enhanced algorithms in PIVlab // Journal of Open Research Software. 2021. Vol. 9, 12.
11. UVMAT/CIVx – free code for image velocimetry, URL: <http://www.legi.cnrs.fr/web/spip.php?article763>



## ИССЛЕДОВАНИЕ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ МИКРОГРАВИТАЦИИ

Юй Чжаокай

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва

[yuzhaokai933@mail.ru](mailto:yuzhaokai933@mail.ru)

### ВВЕДЕНИЕ.

Явление плескания топлива в ракетах при больших эффективных силах тяготения и последствия этого явления широко известны и вполне изучены в монографиях [1-2]. В настоящее время в связи с созданием орбитальных станций и разгонных блоков важную роль приобретает проблема плескания топлива в условиях микрогравитации ( $10^{-6}$ - $10^{-4}g_0$ , где  $g_0=9.81$  м/сек<sup>2</sup>), когда существенно проявляется влияние силы поверхностного натяжения.

В монографиях [3-4] обобщены результаты исследования статики и динамики жидкости в условиях, близких к невесомости. Но до сих пор только получены результаты для осесимметричных сосудов простой формы (сфера, круговой цилиндр и эллипсоид). Следует отметить, что в последнее время стали использоваться топливные баки более сложной формы – в виде коаксиального цилиндра и тороидальные, однако в них поведение жидкости с учётом капиллярного эффекта недостаточно исследовано.

### ЗАДАЧА СТАТИКИ.

Топливный бак, частично заполненный жидкостью, представляет собой механическую систему газ-жидкость-твёрдая стенка (рис. 1). Данная система находится в равновесии тогда, когда её потенциальная энергия имеет минимальное значение. Из выражения для вариации потенциальной энергии системы и используя метод Лагранжа по-



лучены уравнения равновесия рассматриваемой системы. Задача статики в этом случае может быть сведена к решению дифференциального уравнения на свободной поверхности при граничных условиях на линиях трёхфазного контакта. Вывод условий равновесия гидромеханической системы и алгоритм решения задачи статики подробно описаны в статье [5].

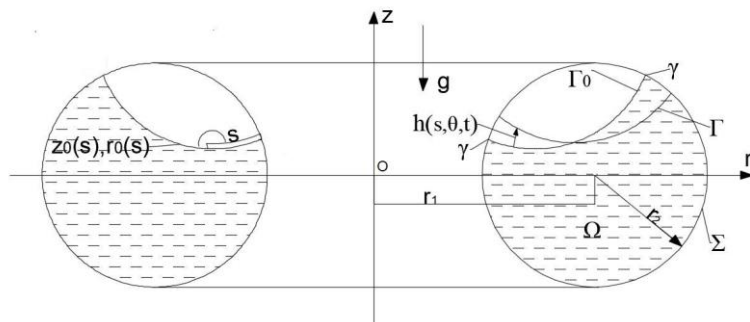


Рис. 1. Основные обозначения параметров жидкости:

$z_0(s)$  и  $r_0(s)$  – равновесная свободная поверхность;  $h(s, \theta, t)$  – отклонение возмущённой поверхности  $\Gamma$  от равновесной  $\Gamma_0$  по нормали;  $\gamma$  – линия смачивания;  $\Sigma$  – смоченная поверхность сосуда;  $\Omega$  – область, которую занимает жидкость;  $r_1$  – радиус осевой окружности тора;  $r_2$  – радиус окружности меридиана тора.

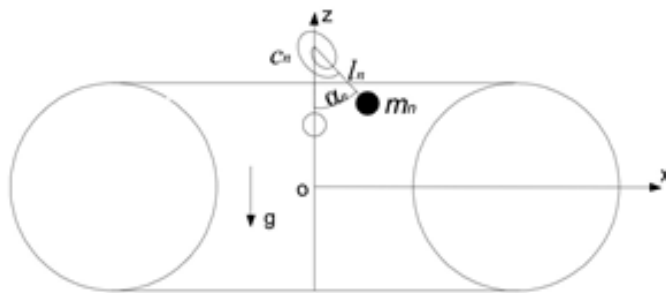


Рис. 2. Основные обозначения параметров маятника со спиральной пружиной:

$m_n$  и  $l_n$  – масса и длина стрелы маятника,  $c_n$  – жёсткость спиральной пружины,  $\alpha_n$  – обобщённая координат маятника.

**ЗАДАЧА ДИНАМИКИ.** На основе решений задачи статики можно поставить задачу о малых колебаниях жидкости в условиях микрогравитации. Капиллярная специфика проявляется в динамическом условии на свободной поверхности и в граничном условии на линии контакта. Динамическое условие было записано из уравнения Эйлера и условия Лапласа на свободной поверхности жидкости с учётом искривления поверхности. Так как жидкость идеальная, в процессе скольжения частицы жидкости на твёрдой стенке сосуда угол смачивания считался постоянным.

В данной работе исследованы только антисимметричные колебания, соответствующие  $m=1$ , где  $m$  число волн в окружном направлении сосуда. Именно в данном случае возникает результирующее давление в поперечном направлении сосуда. Рассмотрены вариационные постановки задачи о малых колебаниях капиллярной жидкости и вспомогательной задачи Неймана, реализованные методом Галеркина. Предположены зависимости потенциала скоростей жидкости и поля смещения свободной поверхности от переменных времени  $t$  и угла  $\theta$ , и получена двухмерная задача на определение собственных частот и форм колебаний жидкости с учётом капиллярного эффекта. Выбран треугольный элемент для дискретизации правого сечения жидкости на рис.

1 и вычислены матрицы жёсткости и инерции задачи. Алгоритмы определения матриц жёсткости  $K$  и инерции  $M$  жидкости на основе численного метода интегрирования Гаусса приведены в статье [6].

### МЕХАНИЧЕСКИЙ АНАЛОГ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ.

В инженерной практике часто применяются маятниковые модели или осцилляторы типа масса-пружина для моделирования движения жидкости. Механический аналог колебаний жидкости в условиях микрогравитации предлагается в виде маятника со спиральной пружиной (рис. 2). Маятник моделирует воздействие массовой силы как в условиях гравитации, так и в условиях микрогравитации, а действие капиллярной силы учитывает спиральная пружина. Параметры механического аналога выбраны из принципов равенства по кинетической и потенциальной энергии капиллярной жидкости и её аналога [7].

### ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ.

Так как сосуд осесимметричный и вектор ускорения параллельный оси сосуда, равновесная свободная поверхность представляет собой поверхность вращения. На рис. 3 показан только её контур. С уменьшением числа Бонда, характеризующего соотношение массовой и капиллярной сил, свободная поверхность более искривлена и её ориентация изменяется в сторону меньшего радиуса кривизны. На рис. 4 показана схема дискретизации области жидкости и видно, что около линии трёхфазного контакта требуется большая степень дискретизации для точного моделирования поведения жидкости в условиях микрогравитации. На рис. 5 показаны собственные формы колебаний жидкости в условиях микрогравитации.

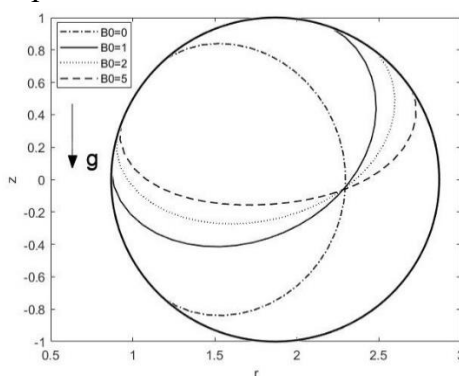


Рис. 3. Формы равновесия свободной поверхности в разных числах Бонда  $B_0$  при  $r_1 = 1.87$ ,  $\alpha_0 = 5^\circ$ ,  $\beta = 50\%$

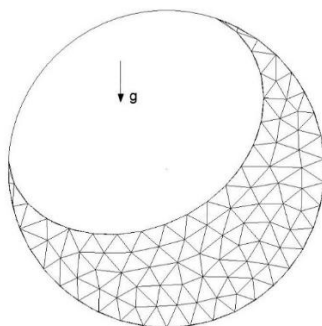


Рис. 4. Схема дискретизации области правого сечения жидкости в тороидальном сосуде

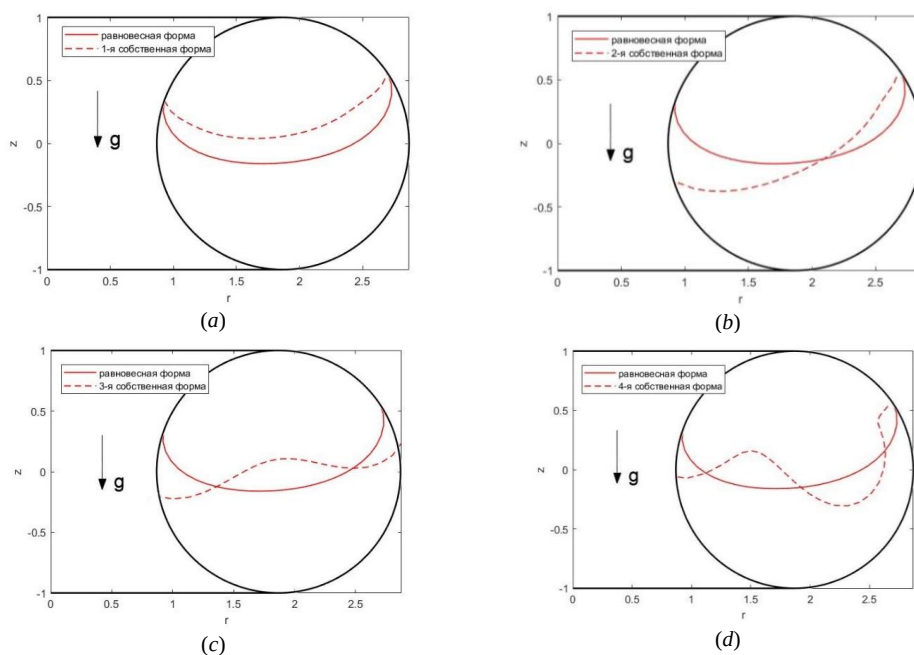


Рис. 5. Собственные формы колебаний жидкости при  $r_1=1.87$ ,  $B_0=5$ ,  $\alpha_0=5^\circ$ ,  $\beta=50\%$

(a)-первая, (b)-вторая, (c)-третья, (d)-четвертая

**ВЫВОДЫ.** Задача о нахождении положения равновесия жидкости в условиях микрогравитации может быть сведена к решению нелинейного дифференциального уравнения на свободной поверхности при граничных условиях на линиях трёхфазного контакта. При решении задачи о малых колебаниях капиллярной жидкости основное внимание уделяется динамическому условию на свободной поверхности и граничному условию на линиях смачивания. В данной статье предлагается спиральная пружина для моделирования воздействия силы поверхностного натяжения. В тороидальных сосудах проявлены явление изменения ориентации равновесной свободной поверхности и сложные формы колебаний капиллярной жидкости.

#### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Автор выражает благодарность научным руководителем доц. А.Н. Темнову за помощь в формулировке задачи и плодотворные обсуждения результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по стипендиям Китая.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abramson H. N. The dynamic behavior of liquids in moving containers. NASA SP-106. 1966. 467 p.
2. Мусеев Н. Н., Петров А. А. Численные методы расчёта собственных частот колебаний ограниченного объёма жидкости. М: Вычислительный центр АН СССР. 1966. 272 с.
3. Мышкис А. Д., Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Копачевский Н.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Методы решения задачи гидромеханики для условий невесомости. Киев: Наукова Думка. 1992. 592 с.
4. Dodge F. T. The new "Dynamic behavior of liquids in moving containers". NASA SP-106. 2000. 202 p.

5. Юй Чжаокай, Темнов А. Н. Исследование равновесной свободной поверхности капиллярной жидкости в тороидальном сосуде // Инженерный журнал: наука и инновации. 2021. вып. 3. С. 1–11.
6. Юй Чжаокай. Волновые движения жидкого топлива в тороидальных сосудах с учётом капиллярного эффекта // Вестник Томского государственного университета. Математика и Механика. 2022. № 78. С. 151–165.
7. Юй Чжаокай, Темнов А. Н. Механический аналог малых колебаний жидкости в условиях, близких к невесомости // Труды МАИ. 2022.



## ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ ПАРОВЫХ ВЗРЫВАХ

С.Е. Якуш

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

[yakush@ipmnet.ru](mailto:yakush@ipmnet.ru)

### **ЯВЛЕНИЕ ПАРОВОГО ВЗРЫВА.**

Взрывное взаимодействие высокотемпературных расплавов с водой или другими вскипающими жидкостями, известное как паровой взрыв, встречается в энергетике, металлургии, вулканологии, однако наиболее пристальное внимание оно привлекает в атомной энергетике при рассмотрении возможных последствий тяжелых аварий на атомных реакторах с плавлением активной зоны [1, 2]. Паровые взрывы относятся к так называемым физическим взрывам [3], в которых выделение энергии не связано с химическими превращениями, а происходит за счет преобразования внутренней энергии вещества, находящегося под большим давлением или при высокой температуре, в механическую работу (распространение волн давления, разлет продуктов взаимодействия).

Описание явления парового взрыва включает стадию предварительного перемешивания, инициирование (триггеринг), распространение волны термической детонации и разлет продуктов взаимодействия. На стадии предварительного перемешивания центральную роль играет фрагментация расплава с образованием окруженных паровой пленкой капель размером несколько миллиметров (так называемая грубая фрагментация). Во взрывной волне происходит дальнейшее дробление капель (тонкая фрагментация), увеличивающая скорость передачи энергии от расплава к воде за счет увеличения площади поверхности теплообмена. Скорость волны парового взрыва может достигать сотен метров в секунду, давление – десятки бар, так что паровой взрыв представляет собой один из основных факторов опасности для реакторов с водяным теплоносителем [1,2,4]. Этим продиктован неослабевающий интерес к данной проблеме, как с экспериментальной, так и с теоретической точек зрения (см., например, обзоры [1,2,5]).

В настоящее время достаточно хорошо известно, что характеристики волны парового взрыва весьма чувствительны к параметрам трехфазной области предварительного перемешивания – размерам капель, доле расплава, пара и воды, перегреву расплава по отношению к температуре плавления и недогреву воды до температуры насыщения. Поэтому изучение стадии предварительного перемешивания с точки зрения протекающих теплофизических и гидродинамических процессов остается актуальным. В полной мере это относится к случаю стратифицированного парового взрыва, который наблюдается при попадании струи расплава в мелкий бассейн, глубина которого недостаточна для существенной фрагментации струи. В этом случае возникает стратифицированная конфигурация, в которой растекающийся по дну бассейна слой тяжелого расплава отделен тонкой паровой пленкой от находящейся выше более легкой воды. Эксперимен-

ты [6] показали, что возникающие в такой конфигурации взрывы достаточно мощные, говорит о существовании механизма развития зоны предварительного перемешивания над поверхностью расплава.

### **ВСПЛЕСКИ РАСПЛАВА ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ВОДОЙ**

Эксперименты [6] показывают, что растекание расплава сопровождается его спорадическими выбросами на высоту нескольких сантиметров, создающими область предварительного перемешивания. Однако причины этих всплесков до сих пор неясны – их трудно отследить в интегральных экспериментах, а измерение характеристик всплесков трудноосуществимо (как правило, в экспериментах измеряются пиковые давления и коэффициента конверсии – доля тепловой энергии расплава, переходящей в механическую работу). Для представления о физических механизмах возникновения возмущений расплава представляет интерес рассмотрение удара струи воды о поверхность горячего расплава – отдельного эффекта, раскрывающего детали взаимодействия. Причина возникновения такой струйки может заключаться как в схлопывании пузырьков горячего пара, захваченных холодной водой [7], так и развитие неустойчивости Рэлея-Тейлора на межфазной границе пар-вода.

Задача о всплеске и разбрызгивании расплава при ударе водяных капель и струй напоминает классическую задачу об ударе капель воды о поверхность жидкости [8], где хорошо известно образование глубокой каверны с выбрасываемой из ее края цилиндрической жидкой пленкой с характерным венцом, а затем – всплеск жидкости над центром кратера (струя Рэлея, или кумулятивная струя) – см., например, [9]. В условиях парового взрыва, однако, температура расплава значительно превышает точку кипения воды и при контакте жидкостей происходит интенсивное испарение. Кроме того, отношение плотностей (около 10:1) значительно выше, чем в случае вода-вода (1:1).

В [10,11] проведены экспериментальные исследования по взаимодействию небольшого количества воды (около 1 мл) с расплавленным металлом Розе при 200–280°C. Были проведены две серии испытаний: с ударом водяной капли с ускорением под действием силы тяжести и с принудительным кратковременным ударом струи. Установлено, что капли воды диаметром 4–4,5 мм, падающие с высоты 58 см, не способны вызвать заметный всплеск расплава, хотя при взаимодействии образуется множество мелких капель металла, часть которых выбрасывается с поверхности расплава в виде микровыбросов, дополняя сложную картину первичных и вторичных брызг [11]. Наоборот, вертикальные импульсные струи вызывали значительно более сильные возмущения, приводящие к первичным (коронообразным) и вторичным (центральная струя) всплескам расплава.

В предыдущих работах [12,13] численное моделирование брызг расплава при воздействии импульсной струи воды проводилось в осесимметричной постановке, при этом струйка воды создавалась в воздухе, заполняющем пространство над расплавом. Трехмерное моделирование взаимодействия капли расплава с водой проведено в [14].

В данной работе рассматривается соответствующая условиям стратифицированного парового взрыва трехфазная конфигурация со слоем горячего расплава, над которым находится слой недогретой воды, отделенный от расплава тонкой паровой пленкой. В отличие от работ [12,13], численные расчеты проводятся в трехмерной постановке, апробированной в [14].

Используемый расчетный код основан на методе объема жидкости (Volume of Fluid, VOF), в котором для описания многофазной системы вводится эффективная жидкость, свойства которой зависят от объемных долей фаз. Численное моделирование проводилось с помощью набора инструментов CFD с открытым исходным кодом OpenFOAM-v2012 [15]. Для решения требуемых задач на основе существующих рас-

четных модулей был разработан и реализован новый вычислительный модуль *FCIfloat*, учитывающий как сжимаемость фаз, так и фазовые переходы. Данный модуль был верифицирован на аналитическом решении задачи Стефана и валидирован на экспериментальных данных.

### РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе проводились расчеты взаимодействия расплава с водой для условий, близких к экспериментам [6], где экспериментально изучались стратифицированные паровые взрывы при растекании расплава  $\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-WO}_3$  в заполненном водой мелком бассейне глубиной 20 см. Расплав  $\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-WO}_3$  часто используется в подобных экспериментах для моделирования реального кориума, он имеет следующие свойства: плотность  $\rho_m = 7811 \text{ кг/м}^3$ , удельная теплоемкость  $c_m = 413 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ , динамическая вязкость  $\eta_m = 0.9 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$ , теплопроводность  $\lambda_m = 16.3 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$ , коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma_m = 0.18 \text{ Н/м}$ .

Рассмотрим более подробно всплеск расплава при ударе струйки воды со скоростью  $v_j = 8 \text{ м/с}$  по горизонтальной поверхности слоя расплава глубиной  $H_m = 14 \text{ мм}$ , отделенной от занимающей остальное пространство воды тонким слоем насыщенного пара толщиной  $H_v = 2 \text{ мм}$ . Диаметр струйки воды составлял  $D_j = 3 \text{ мм}$ , длина  $L_j = 34 \text{ мм}$ . Температура воды  $T_l = 348 \text{ К}$  (недогрев до кипения 25 К), а температура расплава задавалась в соответствии с работой [6] и равнялась  $T_m = 1400 \text{ К}$ . Общий размер расчетной области составляет  $50 \times 25 \times 70 \text{ мм}$ , в ней вводится декартова сетка размером  $200 \times 100 \times 220$  ячеек, равномерная по  $x$  и  $y$ , с частичным разрежением по координате  $z$  в верхней части области.

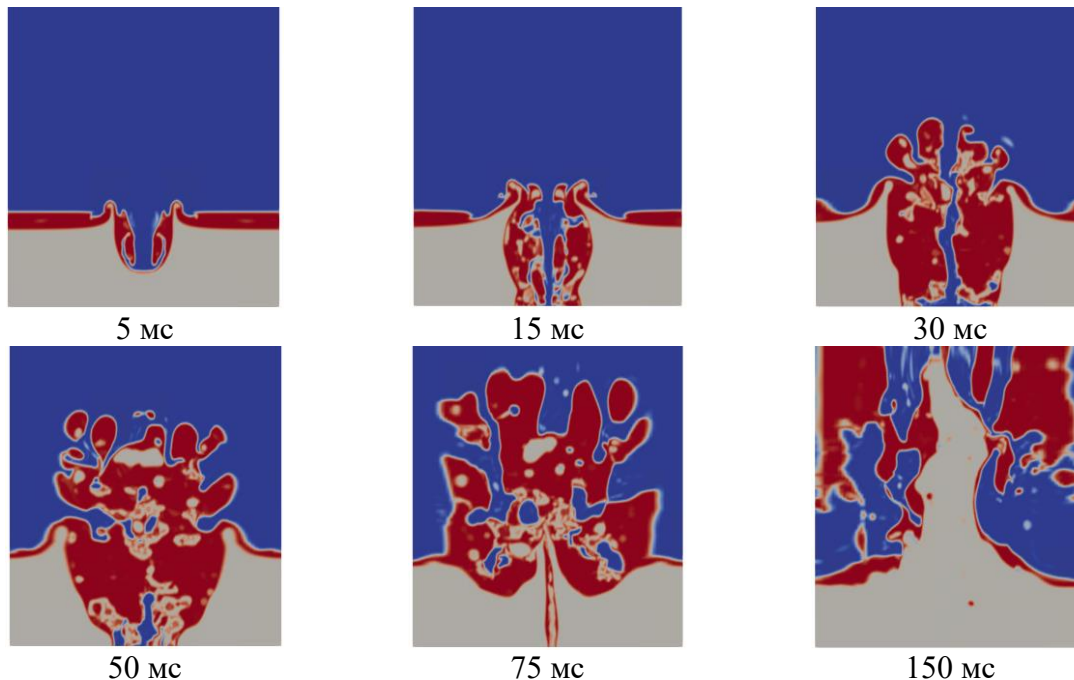


Рис. 1. Структура трехфазного течения в плоскости симметрии



На рисунке 1 показано взаимодействие цилиндрической струйки воды с расплавом  $\text{Bi}_2\text{O}_3\text{-WO}_3$ . Представлены распределения объемных долей фаз в плоскости симметрии в шесть моментов времени, позволяющие проследить процесс проникновения струйки воды в расплав и формирование ответного всплеска. На рисунке 2 в те же моменты времени построены изоповерхности объемной доли расплава, позволяющие воспроизвести форму межфазной границы расплав-пар.

При ударе струи воды по расплаву происходит формирование каверны на поверхности расплава ( $t = 5$  мс), при этом в передней части струя воды, окруженная паровой пленкой, приобретает характерную грибовидную форму. Края каверны в виде тонкой пленки расплава поднимаются вверх, образуя «венец» вследствие капиллярной неустойчивости свободного края (рис. 2, моменты времени 5–50 мс). Хорошо видно возникновение множества микроструек расплава, которые наблюдались в работе [10], а также отрыв отдельных капель, движущихся в паровом пузыре неправильной формы.

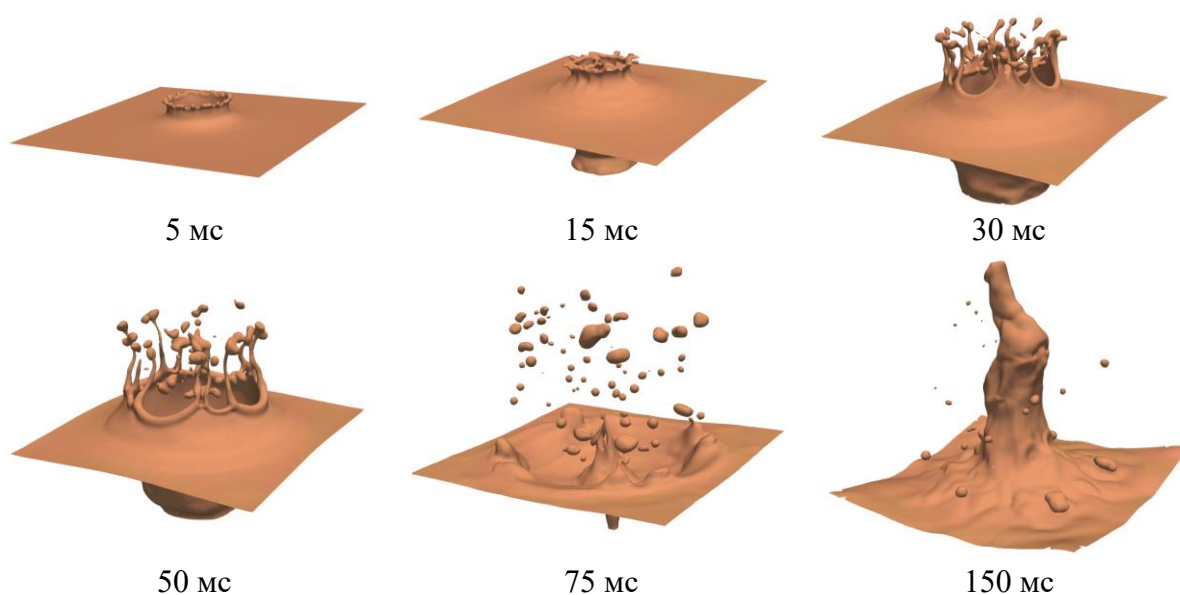


Рис. 2. Форма поверхности расплава после удара водяной струйки

Струя воды пробивает слой расплава и достигает дна расчетной области к моменту  $t = 10$  мс, при этом неиспарившаяся часть воды собирается на дне, окруженная пузырями пара. За счет начального импульса, преобразующегося в радиальное течение жидкости при ударе о дно, а также за счет дальнейшего выделения пара, происходит увеличение размеров каверны, хорошо видимое на рис. 2 в моменты времени 15 и 30 мс.

Далее следует стадия радиального схлопывания каверны с возникновением вертикальной кумулятивной струйки расплава (см. рис. 1 и 2,  $t = 75, 150$  мс). Максимальная высота подъема струи расплава достигается в момент 150 мс и составляет 5.2 см, что сравнимо с высотой всплесков в экспериментах [6].

Видно, что, в целом, струя расплава обладает симметрией, хотя и не идеальной (имеется искривление в верхней части). Однако, несмотря на полную симметрию начальных условий (плоская поверхность расплава, цилиндрическая струйка воды) течение в расплаве содержит трехмерные вихри разных масштабов, во многом стохастические. Сложное взаимодействие возникающих внутренних волн, по-видимому, и объясняет наблюдающиеся в экспериментах [10,11] спорадические всплески расплава разных масштабов, продолжающиеся гораздо дольше, чем время первичного всплеска и вторичного выброса кумулятивной струи.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Явление парового взрыва, несмотря на достаточно долгую историю изучения, до сих пор представляет значительный научный интерес с точки зрения гидродинамики и теплофизики протекающих сложных взаимосвязанных процессов. В настоящей работе рассмотрена стадия предварительного перемешивания в трехслойной системе «расплав-пар-вода», характерной для стратифицированных паровых взрывов. Даже на относительно медленной стадии предварительного перемешивания возникают достаточно сложные многомасштабные гидродинамические течения, приводящие к формированию трехфазной смеси. Расчет волны термической детонации требует моделирования эффектов, связанных с тонкой фрагментацией капель расплава при внезапном повышении давления, с учетом взаимодействия вкладов отдельных капель.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-19-00289). Автор выражает глубокую благодарность своим коллегам по исследованиям О.И.Мелихову, В.И.Мелихову (МЭИ), Ю.Д.Чашечкину, Н.С.Сивакову (ИПМех РАН) за плодотворные обсуждения и проведение численных расчетов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мелихов В.И., Мелихов О.И., Якуш С.Е. Теплофизика и гидродинамика паровых взрывов. М., ИПМех РАН, 2020, 276 с.
2. Мелихов В.И., Мелихов О.И., Якуш С.Е. Термическое взаимодействие высокотемпературных расплавов с жидкостями // Теплофизика высоких температур. 2022. Т. 60. № 2. С. 280–318.
3. Гельфанд Б.Е., Сильников М.В. Химические и физические взрывы. М., Полигон, 2003, 416 с.
4. Berthoud, G. Vapor Explosions // Annu. Rev. Fluid Mech. 2000, V. 32. P. 573–611.
5. Shen P., Zhou W., Cassiaut-Louis N., Journeau C., Piluso P. and Liao Y. Corium behavior and steam explosion risks: A review of experiments // Annals of Nuclear Energy. 2018. V. 121. P. 162–176.
6. Kudinov P., Grishchenko D., Konovalenko A., Karbojian A. Premixing and steam explosion phenomena in the tests with stratified melt-coolant configuration and binary oxidic melt simulant materials // Nucl. Eng. Design, 2017. V. 314. P. 182–197.
7. Melikhov, V.I., Melikhov, O.I., Yakush, S.E., Le, T.C. Evaluation of energy and impulse generated by superheated steam bubble collapse in subcooled water // Nucl. Eng. Design, 2020, V. 366, 110753.
8. Worthington A. M. A Study of Splashes. Longmans, Green, and Company. London. 1908
9. B. Ray B., Biswas G., Sharma A. Regimes during liquid drop impact on a liquid pool // J. Fluid Mech. 2015. V. 768 P. 492–523.
10. Yakush S.E., Chashechkin Y.D., Ilinykh A.Y., Usanov V.A. The splashing of melt upon the impact of water droplets and jets // Appl. Sci., 2021, V. 11. 909.
11. Chashechkin Y.D., Yakush S.E., Ilinykh A.Y. Groups of sprays of a water drop free falling into the melted metal impact // Dokl. Phys. 2021. V. 66. P. 164–168.
12. Yakush, S.E., Sivakov, N.S., Melikhov, V.I., Melikhov, O.I. Hot melt splash upon impingement of a water jet // J. Phys. Conf. Ser., 2020, V. 1666. 012060.
13. Yakush, S.E., Sivakov, N.S., Melikhov, V.I., Melikhov, O.I. Modelling of water jet impact on molten metal // J. Phys. Conf. Ser., 2021, V. 2119. 012073.
14. Yakush S.E., Sivakov N.S., Melikhov V.I., Melikhov O.I. Numerical modelling of melt droplet interaction with water // J. Phys. Conf. Ser., 2021, V. 2057. 012057.
15. OpenFOAM. The open source CFD toolbox, 2021 URL <https://www.openfoam.com>

## НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Ян Наинг У

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва

[yuo64528@gmail.com](mailto:yuo64528@gmail.com)

В линейной постановке рассматриваются задачи о свободных колебаниях идеальной стратифицированной вращающейся несжимаемой жидкости, полностью заполняющей неподвижную жесткую полость. Для описания вихревого движения вращающейся однородной жидкости обычно применяют метод функций состояния С.Л. Соболева или метод обобщенных потенциалов Ф.Л. Черноушко. Развитие метода С.Л. Соболева на случай неоднородной жидкости с произвольным изменением плотности оказывается трудновыполнимой задачей. Метод обобщенных потенциалов, использующий некоторое ограничение на изменение переменных от времени, в этом смысле является более удобным. Метод Ф.Л. Черноушко позволяет наиболее полным образом выделить гидродинамическую задачу из общей задачи механики системы тело-жидкость. Следуя методу Ф.Л. Черноушко положим, что все переменные по времени изменяются пропорционально  $e^{\lambda t}$ , где  $\lambda$  – комплексное число.

### НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ МАЛОЙ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ.

Изучим далее подробно задачу о колебаниях вращающейся стратифицированной жидкости при действии однородного силового поля с силовой функцией  $\Pi_0 = -gx_3$ . Пусть в невозмущенном движении вектор градиента плотности и вектор угловой скорости вращения коллинеарны. Рассмотрим случай, когда угловая скорость вращения  $\omega_0$  мала и выполняется условие  $\frac{\omega_0^2 l}{g} \ll 1$ . Это будет означать, что в невозмущенном состоянии изгиб поверхностей равной плотности мал и им можно пренебречь. В этом случае, используя исходные уравнения возмущенного движения, вектор скорости  $\bar{V}(x_1, x_2, x_3)$  запишется в виде:

$$\bar{V} = -\lambda L \left( \frac{1}{\rho_0} \nabla P \right),$$

где

$$L = \frac{1}{\lambda^2 + 4\omega_0^2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2\omega_0}{\lambda} & 0 \\ -\frac{2\omega_0}{\lambda} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^2 + 4\omega_0^2}{\lambda^2 + N_{33}^2} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Будем считать, что  $\rho_0(x_3)$  удовлетворяет больцмановскому распределению плотности жидкости в невозмущенном состоянии, т.е.  $\rho_0(x_3) = e^{-\beta_0 x_3}$ , а  $N^2 = g\beta_0$ . Используя преобразование (1.1), сведем исходную систему уравнений к краевой задаче.

Определим сначала собственные числа и собственные функции задачи о нормальных колебаниях жидкости в случае, когда  $\tau$  есть цилиндрическая область, ограниченная

плоскостями:  $x_3 = \pm h$ . В цилиндрических координатах  $(x_3, r, \eta)$  краевая задача запишется в виде:

$$\frac{F_r^2 - q^2}{1 - q^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0 \quad (2)$$

с граничным условием

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{x_i}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0, \quad r = 1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0, \quad x_3 = \pm h. \quad (3)$$

В рассматриваемом частном случае задача (2), (3) допускает разделение переменных

$$\varphi(r, \eta, x_3) = y(r) e^{-im\eta} \cos K_l x_3, \quad m, l = 0, 1, 2, \dots$$

и может быть записана в виде

$$-q^2 \left[ (ry')' - \left( \frac{m^2}{r} + K_l^2 r \right) y \right] + F_r^2 \left[ (ry')' - \frac{m^2}{r} + K_l^2 r \right] - K_l^2 r y = 0, \quad (4)$$

$$qy' = -my, \quad y' = \frac{\partial}{\partial r}, \quad q = \frac{\omega}{2\omega_0}, \quad \lambda = i\omega. \quad (5)$$

Определим теперь собственные функции задачи (2), (3). Принимая во внимание физическое условие на оси полости, имеем:

$$\varphi_{nml} = J_m(\xi_n r) e^{-im\eta} \sin \frac{(2l+1)\pi}{2h} x_3, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (6)$$

здесь  $J_m(\xi_n r)$  – функция Бесселя первого рода;  $\xi_n$  –  $n$ -ый корень характеристического уравнения

$$\xi \frac{J_{m-1}(\xi)}{J_m(\xi)} - m = \mp m \chi \quad (7)$$

при фиксированных значениях  $m, l, F_r^2$

$$K_l = \frac{(2l+1)\pi}{2h}, \quad \chi = \sqrt{\frac{\xi^2 + K_l^2}{\xi^2 F_r^2 + K_l^2}}, \quad F_r^2 = \frac{N^2}{4\omega_0^2}. \quad (8)$$

### КОЛЕБАНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ БОЛЬШОЙ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ.

В качестве примера, отличного от предыдущих случаев, рассмотрим колебания стратифицированной жидкости при большой угловой скорости вращения, т.е.  $\frac{\omega_0^2 l}{g} \gg 1$ .

Тогда можно считать, что  $\Pi_0 = \frac{\omega_0^2 \Gamma^2}{2}$  и оператор  $L$  имеет вид

$$L = \frac{1}{\lambda^2 + 4\omega_0^2 + N_{11}^2} \begin{pmatrix} \lambda & 2\omega_0 & 0 \\ -2\omega_0 & \frac{\lambda^2 + N_{11}^2}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^2 + 4\omega_0^2 + N_{11}^2}{\lambda} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где  $N_{11} = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} \frac{d\Pi_0}{dr}$ .

Используя представление

$$\bar{V} = -\lambda L \left( \frac{1}{\rho_0} \nabla p \right), \quad \rho_0 = \text{const}, \quad (10)$$

и предполагая, что  $N_{11}^2 = \text{const}$ ,  $\lambda = i\omega$ , получаем следующую краевую задачу о нормальных радиально-стратифицированной вращающейся жидкости, полностью заполняющей круговой цилиндр высотой  $2h$ :

$$q^2 \Delta p + F_r^2 \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{i}{q} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0, \quad r=1, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0, \quad x_3 = \pm h. \quad (12)$$

Здесь  $F_r^2 = \frac{N_{11}^2}{4\omega_0^2}$ .

Собственные числа задачи (11), (12) могут быть найдены из характеристического уравнения, аналогичного (7)

$$\xi \frac{J_{m-1}(\xi)}{J_m(\xi)} - \frac{\xi}{k_l} m = \pm \bar{m} \sqrt{\frac{\xi^2 - \mu_l^2}{(F_r^2 + 1)\mu_l^2}}, \quad (13)$$

$$k_l = \mu_l \sqrt{\frac{F_r^2 + 1 - q^2}{q^2 - F_r^2}}, \quad \mu_l = \frac{\xi}{k_l} m, \quad l, m = 0, 1, 2, \dots,$$

а собственные функции имеют вид

$$p_{nl}^{(m)}(r, \eta, x_3) = J_m(\xi, r) \sin \mu_l x_3 e^{-im\eta},$$

где  $m$  – действительное (не целое) число.

Для случая стоячих волн ( $m = 0$ ) частоты легко находятся из формулы

$$\omega_{0, nl} = \mu_l \sqrt{\frac{N_{11}^2 + 4\omega_0^2}{\xi_n^2 + \mu_l^2}},$$

где  $\xi_n$  –  $n$ -ый корень функции  $I_1(\xi)$ .

В докладе также приведены численные результаты определения собственных частот в виде таблиц и графиков.

## БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Автор благодарит научного руководителя доцента каф. Теоретическая механика МГТУ им. Н.Э. Баумана А.Н. Темнова за содействие при выполнении работы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Темнов А.Н. Динамика неоднородной жидкости в подвижном твердом теле. – Деп. в ВИНТИ 16.05.86 №3567-B86, 25 с.
2. Темнов А.Н. Колебания стратифицированной жидкости в ограниченном объеме: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – М.: МВТУ, 1984.
3. Краусс В. Внутренние волны. – Л.: Гидрометеиздат, 1968. 270 с.
4. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. – Л.: Гидрометеиздат, 1975. 304 с.
5. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высшая школа, 1977. 430 с.

6. *Габов С.А.* О спектре и базисах из собственных функций одной задачи, связанной с колебаниями вращающейся жидкости. – Математический сборник, 1981, №2 (10). С. 245-252.
7. *Копачевский Н.Д., Радякин Н.К.* О малых колебаниях идеальной капиллярной жидкости, вращающейся в осесимметричном сосуде. – В кн.: Вопросы вычислительной математики и техники. – К.: Наукова Думка, 1976. С. 3-25.



## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПЛАСТИНЫ ОТ ДВУХ ИМПУЛЬСНЫХ ИСТОЧНИКОВ

*А.А. Яцких, Л.В. Афанасьев, В.Л. Кочарин, Н.В. Семенов, А.Д. Косинов*  
*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,*  
*Новосибирск*  
[yatskikh@itam.nsc.ru](mailto:yatskikh@itam.nsc.ru)

Ламинарно-турбулентный переход пограничного слоя является сложным комплексным явлением для теоретического описания и экспериментального изучения. Турбулизация течения в пограничном слое происходит благодаря возникновению и эволюции возмущений различного типа, их роста и взаимодействия друг с другом. Сложность развития возмущений в пограничном слое затрудняет создание методов предсказания и теоретического описания ламинарно-турбулентного перехода. Для понимания и описания процесса эволюции возмущений в пограничном слое необходимы подробные экспериментальные исследования.

Можно выделить два основных подхода экспериментального исследования возникновения турбулентности в пограничных слоях. Первый подход заключается в изучении эволюции естественных возмущений в сдвиговом слое. В этом случае обычно рассматриваются их интегральные характеристики и анализируются спектры мощности, поскольку сложно определить волновые характеристики пульсаций и количественно сравнить их с результатами расчетов. Другим подходом является эксперимент в контролируемых условиях, когда в поток вводятся возмущения с фиксированными начальными параметрами, что позволяет определять волновые характеристики возмущений в пограничном слое и напрямую сопоставлять экспериментальные данные с расчетами.

В экспериментах при сверхзвуковых скоростях набегающего потока наиболее эффективным методом возбуждения контролируемых возмущений является тлеющий разряд. В случае периодического зажигания разряда в пограничном слое формируется возмущение, обладающее узким частотным и широким волновым спектром (волновые поезда) [1]. В случае импульсного воздействия в пограничном слое формируется локализованное в пространстве и времени возмущение (волновой пакет) [2].

Естественные возмущения, наблюдаемые в экспериментах, имеют сплошной частотный спектр, а фазы на разных частотах не связаны. Поэтому когерентные структуры, генерируемые локализованным одиночным воздействием, не могут полностью описать естественный сценарий перехода ламинарного течения в турбулентное состояние. Новые научные данные по ламинарно-турбулентному переходу в пограничных слоях могут быть получены в исследованиях по развитию возмущений, порожденных не-



сколькими источниками, разнесенными в пространстве. Такие исследования являются логичным развитием существующих подходов.

Изучение развития возмущений в пограничных слоях от нескольких источников проводилось на дозвуковых скоростях потока. Например, в работе [3] показана возможность сложения и вычитания контролируемых возмущений от разных источников. Сегодня в экспериментах при малых дозвуковых скоростях потока успешно используются многосоставные источники, позволяющие генерировать сложные контролируемые возмущения, параметры которых близки к естественным возмущениям. Примером такого подхода также являются работы [4, 5]. Многокомпонентным источником контролируемых возмущений удастся вводить в пограничный слой пульсации, параметры которых близки к пульсациям турбулентного пограничного слоя.

В 2018-2019 гг. в ИТПМ СО РАН для случая сверхзвуковых скоростей были проведены расчетно-экспериментальные исследования по развитию контролируемых периодических возмущений с узким частотным спектром, генерируемые в сверхзвуковом пограничном слое пластины двумя изолированными точечными источниками. Изучалось развитие периодических возмущений как от одного источника, так и для двух источников, работающих в синхронном режиме и со сдвигом фаз. В случае синхронной работы двух источников в волновых спектрах наблюдается увеличение амплитуды, по сравнению со случаем одиночного источника, и образование узлов и пучностей. Наблюдаемая картина развития возмущений в пограничном слое (увеличение амплитуды, узлы и пучности в волновом спектре) соответствует интерференции волн, порожденных разнесенными источниками возмущений. При наличии сдвига фаз в работе источников наблюдалось смещение положения узлов и пучностей в волновом спектре, что также хорошо описывается интерференцией. Таким образом, впервые расчетным и экспериментальным образом была показана интерференция возмущений двумерного пограничного слоя для случая сверхзвуковых скоростей потока. Основные результаты работы опубликованы в статье [6].

В данной работе впервые представляются данные экспериментов по формированию возмущений от двух импульсных источников в ламинарном пограничном слое пластины при числе Маха  $M = 2$ . Эксперименты выполнены в сверхзвуковой аэродинамической трубе Т-325 ИТПМ СО РАН на модели пластины с острой передней кромкой. В качестве источника возмущений использовался импульсный тлеющий разряд, зажигающийся между двумя изолированными электродами, выведенными вровень к поверхности модели. Энергия одного разряда в экспериментах составляла приблизительно 0,3 мДж. Два источника располагались параллельно передней кромке пластины на расстоянии 6 мм друг от друга в 30 мм от кромки. Пульсации в пограничном слое измерялись с помощью ниточного датчика термоанемометра постоянного сопротивления. Запись пульсационного сигнала термоанемометра производилась синхронно с зажиганием разрядов, что позволяет выделить возмущения сгенерированных источником от фона случайных естественных пульсаций пограничного слоя. Анализируется пространственная структура и частотно-волновой состав генерируемых возмущений. На рис. 1 представляются экспериментальные данные в виде изолиний пульсаций массового расхода в плоскости  $(z, t)$ , измеренные на расстоянии 80 мм от передней кромки при работе одного, двух синхронных источников и в случае работы источников с временной задержкой.

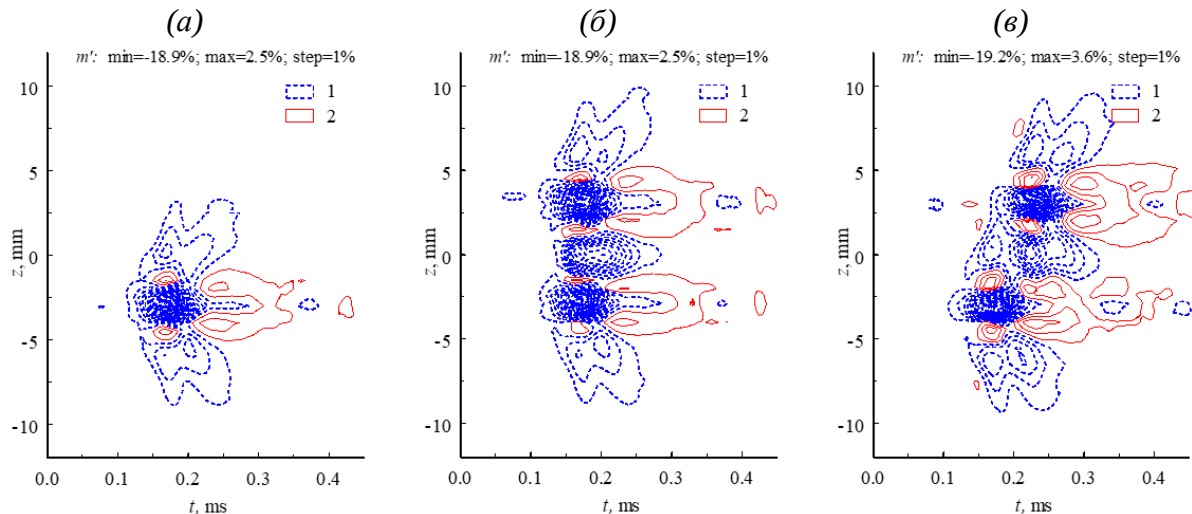


Рис. 1. Контролируемые возмущения в случаях одиночного (а) и двух источников, работающих синхронно (б) и с задержкой во времени 60 мкс (в).

В случае одиночного источника в центральной области возмущения наблюдается высокоинтенсивный дефект течения. На фронтах этого дефекта сформированы наклонные пульсации. Такая картина возмущения от импульсного тлеющего разряда в сверхзвуковом пограничном слое пластины наблюдалась ранее, например, в работе [2], однако амплитуда центрального дефекта значительно отличается, что связано с большей энергией разряда в настоящей работе. Характерный масштаб возмущения в области измерения составляет приблизительно 10 мм в поперечном потоку направлении. В случае двух источников в центральной области (между источниками,  $z = 0$  мм) амплитуда пульсаций значительно превышает амплитуду пульсаций в случае одиночного разряда. При этом на внешней границе возмущения амплитуда и форма пульсаций неизменна, т.е. взаимодействие не наблюдается.

В волновых спектрах возмущений обнаружено, что в случае двух источников наблюдается формирование узлов и пучностей. Положение узлов и пучностей определяется расстоянием между источниками и временной задержкой. Таким образом, для случая сверхзвукового пограничного слоя экспериментально показана возможность изменения частотно-волнового состава искусственного возмущения используя многосоставные источники.

### БЛАГОДАРНОСТИ И ССЫЛКИ НА ГРАНТ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-79-00097, <https://rscf.ru/project/21-79-00097/>.

Работа выполнена на базе ЦКП «Механика» ИТПМ СО РАН.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kosinov A.D., Maslov A.A., Shevelkov S.G. Experiments on stability of supersonic boundary layers // J. Fluid Mech. 1990. V. 219. P. 621-633.
2. Яцких А.А., Ермолаев Ю.Г., Косинов А.Д., Семенов Н.В. Эволюция волновых пакетов в сверхзвуковом пограничном слое плоской пластины // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22, № 1. С. 17-28.
3. Гилев В.М., Козлов В.В. Влияние периодического вдува-отсоса на процесс перехода в пограничном слое // Ученые записки ЦАГИ. 1986. Т.17, №3. С. 27-33.
4. Borodulin V.I., Kachanov Y.S. Experimental evidence of deterministic turbulence // Eur.J.Mech.B/Fluids. 2013. Vol. 40, pp. 34-40.

5. *Borodulin V.I., Kachanov Yu.S.* On properties of the deterministic turbulence and reproducibility of its instantaneous and statistical characteristics // Theoretical and Applied Mechanics Letters. 2014. Vol. 4, No 6, 062004.
6. *Kolosoov G.L. Kosinov A.D., Semenov A.N., Yatskikh A.A.* Experimental and numerical investigation of controlled disturbances development from two sources in supersonic boundary layer // Advances in Aerodynamics. -2019. -Vol. 1. -14.



## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                                                                                                     |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Chashechkin Yuli D.</i> Capillary and acoustic waves of a droplet impact .....                                                                                                                                   | 7  |
| <i>Chashechkin Yuli D.</i> Fundamentals of engineering mathematics of fluid flows .....                                                                                                                             | 9  |
| <i>Chashechkin Yuli D., Ochirov Artem A.</i> Surface waves in a viscous continuously stratified fluid .....                                                                                                         | 12 |
| <i>Ermakov S.A., Khazanov G.E.</i> Double-resonance damping of gravity-capillary waves on water covered with a viaco-elastic film of finite thickness .....                                                         | 15 |
| <i>Fraunié P., Bourras D.</i> Exchanges of kinetic energy at the ocean atmosphere interface .....                                                                                                                   | 17 |
| <i>Fukumoto Y.</i> Okabe & inoue's contribution to formation and metamorphoses of a vortex ring .....                                                                                                               | 17 |
| <i>Аганин А.А.</i> Удар струи жидкости по жидкости и смоченной стенке .....                                                                                                                                         | 18 |
| <i>Агеев А.И., Осипцов А.Н.</i> Вычисление теплового потока на полосчатой супергидрофобной поверхности .....                                                                                                        | 21 |
| <i>Агишева У.О., Галимзянов М.Н.</i> Волны давления в трубе заполненной жидкостью, содержащий пузырьковую область конечных размеров .....                                                                           | 24 |
| <i>Агишева У.О., Вдовенко И.И., Галимзянов М.Н.</i> Акустическая устойчивость перегретой жидкости с парогазовыми пузырьками .....                                                                                   | 27 |
| <i>Аллилуева А.И.</i> Распространение узких пакетов в средах со скачкообразными параметрами. Асимптотические решения волнового уравнения .....                                                                      | 30 |
| <i>Бардаков Р.Н.</i> Теневая картина течений жидкости, вызванных падением капли в стратифицированную жидкости .....                                                                                                 | 31 |
| <i>Белоножко Д.Ф., Садриева Н.М.</i> . О ряби Фарадея на поверхности стратифицированной жидкости .....                                                                                                              | 33 |
| <i>Богомолов С.В., Кувшинников А.Е.</i> Решение задачи о косом скачке уплотнения разрывным методом частиц .....                                                                                                     | 35 |
| <i>Бородин Ю.Н., Губанова И.А., Курилов В.Б., Слитинская А.Ю., Цыганов А.П.</i> Исследования по определению оптимальных положений элементов адаптивной механизации задней кромки крыла пассажирского самолета ..... | 38 |
| <i>Булатов В.В.</i> Амплитудно-фазовая структура полей внутренних гравитационных волн в океане с реальными сдвиговыми течениями .....                                                                               | 39 |
| <i>Бырдин В.М.</i> Обратноволновой радиоимпульс .....                                                                                                                                                               | 41 |
| <i>Бырдин В.М.</i> Метод раздвоения-факторизации и голоморфная квадратура неопределённых функциональных уравнений и систем .....                                                                                    | 45 |
| <i>Бырдин В.М., Пузакина А.К.</i> Трансцендентные плоские осевые спирали и циклические шлемовидные кривые на базе синусоиды, с петлями, пиками и крестами .....                                                     | 47 |
| <i>Вдовин М.И., Сергеев Д.А., Трошкая Ю.И., Кандауров А.А.</i> Лабораторное исследование влияния пены на поверхности на характеристики поверхностного волнения .....                                                | 51 |

|                                                                                                                                                                                                                          |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Верезуб Н.А., Простомолотов А.И.</i> Управление вихрями в нагретом тигле с помощью вращения диска.....                                                                                                                | 53  |
| <i>Вертгейм И.И., Сагитов Р.В., Шарифулин А.Н.</i> Развитие малых трёхмерных возмущений двумерного дважды периодического течения с прокачкой.....                                                                        | 57  |
| <i>Веснин В.Р., Скрябин А.С., Цыганков П.А.</i> Исследование процессов синтеза биоактивных покрытий электрофоретическим осаждением.....                                                                                  | 60  |
| <i>Вигдорович И.И., Агеев А.И., Манаенкова Т.А.</i> Законы подобия для скорости и температуры в сверхзвуковом турбулентном пограничном слое .....                                                                        | 63  |
| <i>Волков Г.Ю., Мелихов В.И., Мелихов О.И., Якуш С.Е.</i> Численное исследование фрагментации струи методом VOF .....                                                                                                    | 65  |
| <i>Гайдуков Р.К., Данилов В.Г., Фонарева А.В.</i> Моделирование фазовых переходов при обтекании малой неровности .....                                                                                                   | 68  |
| <i>Гайфуллин А.М., Щеглов А.С.</i> Моделирование закрученных трехмерных пристенных ламинарных и турбулентных струй.....                                                                                                  | 71  |
| <i>Голубкина И.В., Осипцов А.Н.</i> Режимы и структура течения при взаимодействии волн уплотнения с плоской стенкой в газокapельном потоке .....                                                                         | 73  |
| <i>Гончаров Д.А., Пожалостин А.А.</i> Динамические модели посадки возвращаемых модулей ракет-носителей.....                                                                                                              | 76  |
| <i>Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О.</i> Об источнике энергии, идущей на излучение осциллирующей каплей электромагнитных и акустических волн.....                                                              | 77  |
| <i>Григорьев А.И., Ширяева С.О.</i> Расчет параметров элетродиспергирования электропроводной жидкости при реализации неустойчивости Тонкса-Френкеля .....                                                                | 79  |
| <i>Губайдуллин Д.А.</i> Волновая динамика и акустика парогазожидкостных сред.....                                                                                                                                        | 82  |
| <i>Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Р.</i> Взаимодействие акустических волн с многофазными смесями с полидисперсными включениями при учете фазовых превращений.....                                                           | 85  |
| <i>Губайдуллин Д.А., Ткаченко Л.А., Фадеев С.А., Шайдуллин Л.Р.</i> Резонансные колебания газа в закрытой трубе при наличии неоднородного температурного поля .....                                                      | 86  |
| <i>Гущин В.А., Смирнова И.А.</i> Математическое моделирование цепочки пятен с разрывами в стратифицированной жидкости .....                                                                                              | 88  |
| <i>Демид М.С., Закирова Д.Р., Хисматуллина Ф.С.</i> О влиянии высокочастотного электромагнитного поля на процессы смешивающегося неизотермического течения многокомпонентной многофазной жидкости в сложных средах ..... | 91  |
| <i>Дмитренко А.В., Колосова М.А., Колпаков М.И., Закутнов С.А., Бойченко Д.А.</i> Теплообмен при кризисе кипения в турбулентных течениях на основе стохастической теории турбулентности.....                             | 95  |
| <i>Егорова В.М., Соколовский М.А.</i> Моделирование гидродинамических особенностей системы кипрских вихрей в рамках трехслойной модели океана.....                                                                       | 98  |
| <i>Елкин Д.Н., Зацепин А.Г., Шварцман Д.Р.</i> Лабораторные исследования неустойчивости и затухания бароклинных вихрей в двухслойной вращающейся жидкости над гладким и шероховатым дном.....                            | 103 |
| <i>Епифанов В.П., Лычев С.А.</i> Волновые явления при ударе жёсткого индентора о лёд..                                                                                                                                   | 105 |
| <i>Есина Е.В., Ильиных А.Ю.</i> Эволюция тонкой структуры распределения вещества капли                                                                                                                                   |     |

|                                                                                                                                                                                                                 |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| в принимающей жидкости.....                                                                                                                                                                                     | 108 |
| <i>Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э.</i> Вихревые структуры неустойчивых течений, вызванных вращательными колебаниями жидкости.....                                                                                | 111 |
| <i>Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э.</i> Имитационное моделирование спектров атмосферной турбулентности в численных и лабораторных экспериментах .....                                                             | 114 |
| <i>Зацепин А.Г., Герасимов В.В.</i> Закономерности турбулентного массообмена в стратифицированной жидкости и ее тонкоструктурного расслоения .....                                                              | 117 |
| <i>Зотова А.Н., Кандауров А.А., Троицкая Ю.И., Сергеев Д.А.</i> Моделирование динамики всплывающего пузырька .....                                                                                              | 118 |
| <i>Ивочкин Ю.П., Юдин С.М.</i> Вихреобразование и жидкометаллическая эмиссия капель при высокочастотном индукционном нагреве металлов .....                                                                     | 121 |
| <i>Ильиных А.Ю.</i> Быстрый перенос вещества падающей капли в толщу жидкости.....                                                                                                                               | 124 |
| <i>Ильиных А.Ю.</i> Формирование каверн и пузырей погружающимся в жидкость всплеском .....                                                                                                                      | 127 |
| <i>Калиниченко В.А.</i> Частотные характеристики стоячих изгибно-гравитационных волн в прямоугольном сосуде .....                                                                                               | 130 |
| <i>Киселева С.В., Тепляков И.О., Ивочкин Ю.П., Михайлов Е.А.</i> Исследование влияния деформации свободной поверхности на электровихревое течение в полусферическом объеме .....                                | 133 |
| <i>Кожурина П.И., Горкунов С.В., Долуденко А.Н.</i> Исследование устойчивости контактной границы жидкость-газ в рамках сетевой модели пористой среды .....                                                      | 136 |
| <i>Колбнева Н.Ю.</i> Акустическое излучение нелинейно осциллирующей незаряженной капли, находящейся во внешнем электростатическом поле .....                                                                    | 138 |
| <i>Колесниченко Е.В., Хохрякова К.А., Краков М.С. ..</i> Стационарные волны на поверхности жидкости, возникающие при обтекании точечного препятствия.....                                                       | 141 |
| <i>Колчанов Н.В., Сидоров А.С.</i> Экспериментальное определение теплофизических и фильтрационных свойств искусственных волокнистых пористых сред с внутренним тепловыделением и низкой теплопроводностью ..... | 145 |
| <i>Кривоносова О.Э., Жиленко Д.Ю.</i> Структуры волн в течениях, вызванных вращательными колебаниями жидкости с двумя независимыми частотами .....                                                              | 148 |
| <i>Куликовский А.Г., Чугайнова А.П.</i> О структуре разрывов в решениях гиперболических систем уравнений. Волны в стержнях. Особые разрывы .....                                                                | 151 |
| <i>Куприянова А.Е., Гриценко В.А.</i> Геометрия поля давления при взаимодействии погружающихся пятен конвективной природы .....                                                                                 | 151 |
| <i>Лопато А.И.</i> Математическое моделирование инициирования детонации при отражении ударной волны от профилированного торца канала .....                                                                      | 155 |
| <i>Маленко Ж.В., Ярошенко А.А.</i> Трехмерные изгибно-гравитационные волны в плавающем ледяном покрове от движущегося источника возмущений .....                                                                | 157 |
| <i>Малышев К.Ю.</i> О дальнейшем усилении сходимости рядов в задачах об электровихревом течении в полусферическом сосуде .....                                                                                  | 161 |
| <i>Мамлеев А.А., Ильиных А.Ю.</i> Картины течений импакта капли воды в жидкий металл при комнатной и высокой температуре .....                                                                                  | 164 |



|                                                                                                                                                                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Марков А.А.</i> О вихреобразовании при синтезе микрочастиц за волной горения углерода в реакторе с каналом для подвода газа .....                                                                      | 167 |
| <i>Маркова Н.В., Дымова О.А.</i> Влияние региональной вихревой и бассейновой динамики на формирование противотечений в северо-восточной части Черного моря .....                                          | 170 |
| <i>Марчевский И.К., Сокол К.С., Измайлова Ю.А.</i> Схема моделирования обтекания профиля с острыми кромками и угловыми точками в вихревых методах .....                                                   | 173 |
| <i>Матюшин П.В.</i> Визуализации «БЕТА ПЛЮС» (двухцветная) и «БЕТА МИНУС» пространственных вихревых структур течений жидкости и газа. Сравнение с визуализацией «ЛЯМБДА ДВА» .....                        | 176 |
| <i>Мелихов В.И., Мелихов О.И., Салех Башар</i> Волна термической детонации в системе «расплавленный свинец – водяной пар – вода» .....                                                                    | 180 |
| <i>Могилевский Е.И., Оганесян Л.Р.</i> Полигональные гидравлические прыжки как результат развития гофрировочной неустойчивости .....                                                                      | 183 |
| <i>Мухутдинова А.А., Киреев В.Н., Урманчеев С.Ф.</i> Влияние диаметра внутреннего цилиндра на распределение гидродинамических параметров течения аномально термовязкой жидкости в кольцевом канале .....  | 186 |
| <i>Мухутдинова А.А., Киреев В.Н., Урманчеев С.Ф.</i> Численное моделирование блокирующего эффекта термообратимой композиции в канале испытательного стенда .....                                          | 188 |
| <i>Некрасов О.О., Смородин Б.Л.</i> Электроконвективные волны слабопроводящей жидкости в плоском конденсаторе при наличии инжекции с катода .....                                                         | 191 |
| <i>Нестеров С.В., Байдулов В.Г.</i> Использование метода ускоренной сходимости в сингулярных задачах Штурма-Лиувилля .....                                                                                | 194 |
| <i>Низамова А.Д., Урманчеев С.Ф., Киреев В.Н.</i> Исследование спектров собственных значений и собственных функций в задаче об устойчивости течения термовязкой жидкости в кольцевом канале .....         | 195 |
| <i>Овсянников В.М.</i> Описание волн неустойчивости высокотемпературной плазмы действием членов высокого порядка малости уравнения неразрывности Эйлера .....                                             | 197 |
| <i>Очиров А.А., Лапина К.Ю.</i> О визуализации течений в невязких стратифицированных и однородных средах .....                                                                                            | 200 |
| <i>Павлов Д.Г., Стегайлов В.В.</i> Моделирование образования вихрей в потоке жидкости методами молекулярной динамики .....                                                                                | 202 |
| <i>Пахомов М.А.</i> Влияние дисперсной фазы на структуру вихревого течения и турбулентность при течении газокapельного потока в оребренном канале .....                                                   | 204 |
| <i>Прохоров В.Е.</i> Механизм запуска объемных осцилляций газовых пузырей при столкновении капли с водной поверхностью .....                                                                              | 206 |
| <i>Прохорчук К.В., Котов М.А., Соловьев Н.Г., Шемякин А.Н., Якимов М.Ю.</i> О вопросах реализации трехмерного моделирования термогравитационной конвекции оптического разряда в газоразрядной лампе ..... | 209 |
| <i>Пью Ко Ко, Байдулов В.Г.</i> Влияние параметров резонатора Гельмгольца периодического сечения на характеристики собственных колебаний газа .....                                                       | 213 |
| <i>Рудая Я.Е., Шмакова Н.Д., Чеботников А.В., Бойко О.А., Ерманюк Е.В., Сибгатуллин И.Н.</i> Экспериментальное исследование аттракторов внутренних волн, генерируемых                                     |     |

|                                                                                                                                                                                         |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| угловыми колебаниями пластины в линейно стратифицированной жидкости .....                                                                                                               | 215 |
| <i>Руденко А.И.</i> Первый метод Стокса в задаче о волнах на поверхности жидкости конечной глубины .....                                                                                | 218 |
| <i>Рулева Л.Б.</i> О рабочем времени бездиафрагменной ударной трубы .....                                                                                                               | 221 |
| <i>Сиваков Н.С., Якуш С.Е.</i> Численное исследование взаимодействия движущейся капли высокотемпературного расплава с водой .....                                                       | 223 |
| <i>Слюняев А.В.</i> ... Когерентные нелинейные группы волн на поверхности воды: динамика, статистика, обнаружение.....                                                                  | 228 |
| <i>Снытников В.Н., Пескова Е.Е., Стояновская О.П.</i> ... Численная модель теплопереноса в двухтемпературной среде газ- наночастицы при лазерной конверсии метана .....                 | 231 |
| <i>Соболева Е.Б.</i> Развитие неустойчивости Рэлея-Тейлора в пористой среде при наличии конечных флуктуаций плотности .....                                                             | 232 |
| <i>Стояновская О.П., Маркелова Т.В.</i> Звуковые волны в газопылевой среде без диссипации с межфазным обменом импульсом и тепловой энергией .....                                       | 235 |
| <i>Стрижаков Е.А., Хисматуллина Ф.С.</i> Математическое моделирование движения флюида в неоднородной среде с учётом изменения PVT свойств.....                                          | 236 |
| <i>Сысоева Е.Я., Чашечкин Ю.Д.</i> Тонкая структура и симметрии стратифицированного течения за горизонтально движущейся сферой .....                                                    | 239 |
| <i>Талалов С.В.</i> Об одном методе квантования вихревого кольца.....                                                                                                                   | 242 |
| <i>Тарариев С.Р., Поляков Д.В.</i> Оптимизация интегрированного расчета процесса движения флюида на месторождениях нефти и газа в системе «скважина-наземная инфраструктура».....       | 244 |
| <i>Тепляков И.О., Малышев К.Ю., Кубриков К.Г., Виноградов Д.А.</i> . Наблюдение линейного режима электровихревого течения в жидком металле в полусферическом сосуде .....               | 248 |
| <i>Томашева А.М., Шаргатов В.А.</i> Исследование структуры множества решений обобщённого уравнения Кортевега-де Вриза-Бюргерса в случае функции потока с четырьмя точками перегиба..... | 251 |
| <i>Тукмаков Д.А.</i> Численное моделирование колебаний газа с частицами в акустическом резонаторе для газа с монодисперсными частицами .....                                            | 253 |
| <i>Уточкин В.Ю., Брацун Д.А.</i> Эволюция и структура движений в системе реагирующих растворов с межфазной границей .....                                                               | 256 |
| <i>Федоров Ю.В.</i> Волновая динамика капель октафторпропана в упруго-вязкой жидкости .....                                                                                             | 258 |
| <i>Федюшкин А.И., Иванов К.А.</i> Решение задач о высокочастотной вибрационной конвекции в областях различной геометрии .....                                                           | 260 |
| <i>Хайирбеков Ш. Х., Ильиных А.Ю.</i> Тонкая структура распределения вещества составной капли в принимающей жидкости в режиме формирования всплеска.....                                | 263 |
| <i>Ходырев С.В., Очиров А.А.</i> Распространение цилиндрических волн на поверхности стратифицированной жидкости .....                                                                   | 267 |
| <i>Хохрякова К.А., Мизева И.А., Шмыров А.В.</i> Поверхностное натяжение магнитных и немагнитных жидкостей, измеренное методом капиллярных волн.....                                     | 268 |

|                                                                                                                                                                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Цыпкин Г.Г.</i> Условия возникновения неустойчивости поверхности раздела вода-пар в высокотемпературных породах .....                                                                                                     | 271 |
| <i>Чаплыгин А.В., Котов М.А., Якимов М.Ю., Лукомский И.В., Галкин С.С., Колесников А.Ф., Шемякин А.Н., Соловьев Н.Г.</i> Демонстрационные эксперименты по совмещенному нагреву струей азотной плазмы и лазерным пучком ..... | 274 |
| <i>Чашечкин Ю.Д.</i> Капиллярные и акустические волны импакта капли .....                                                                                                                                                    | 277 |
| <i>Чашечкин Ю.Д.</i> Основы инженерной математики течений жидкостей .....                                                                                                                                                    | 280 |
| <i>Чашечкин Ю.Д., Очиров А.А.</i> Поверхностные волны в вязкой непрерывно стратифицированной жидкости .....                                                                                                                  | 283 |
| <i>Чжан Е., Мелихов В.И., Мелихов О.И.</i> Анализ кодом WANA3 экспериментов по исследованию конденсационных гидроударов, выполненных в Сианьском ЦЗЯО ТУН Университете .....                                                 | 286 |
| <i>Шайдуллин Л.Р., Фадеев С.А.</i> Исследование осаждения аэрозоля в закрытой трубе с конусной насадкой .....                                                                                                                | 289 |
| <i>Широков И.А., Елизарова Т.Г.</i> Моделирование ударно-волновых и вихревых структур в сверхзвуковой затопленной струе газа.....                                                                                            | 291 |
| <i>Шисян Лю, Фэй Инь, Мелихов В.И., Мелихов О.И.</i> Анализ экспериментов по гидродинамике горизонтального парогенератора с помощью кода STEG .....                                                                          | 294 |
| <i>Шмакова Н.Д., Вуазен Б., Соммерия Ж., Флёр Я.-Б.</i> Фокусировка внутренних волн при различных числах Стокса .....                                                                                                        | 297 |
| <i>Юй Чжоакай</i> Исследование малых колебаний жидкости в условиях микрогравитации .....                                                                                                                                     | 300 |
| <i>Якуш С.Е.</i> Гидродинамические явления при паровых взрывах.....                                                                                                                                                          | 304 |
| <i>Ян Наинг У.</i> Нормальные колебания вращающейся стратифицированной жидкости ..                                                                                                                                           | 309 |
| <i>Яцких А.А., Афанасьев Л.В., Кочарин В.Л., Семенов Н.В., Косинов А.Д.</i> Экспериментальное исследование формирования возмущений в сверхзвуковом пограничном слое пластины от двух импульсных источников .....             | 312 |

13-Я МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ –  
ШКОЛА МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ  
ВОЛНЫ И ВИХРИ В СЛОЖНЫХ СРЕДАХ  
Москва, Россия, 30 ноября – 02 декабря 2022

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ ШКОЛЫ



Подписано к печати 12.12.2022 Тираж 250 экз.

119034, Москва, Лопухинский пер., д. 3, стр. 2.

Отпечатано в ООО фирма «ИСПО-ПРИНТ»