РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ
ИМ. А.Ю. ИШЛИНСКОГО

*На правах рукописи*

Иванов Михаил Игоревич

# ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В СЛОЖНЫХ ОБЛАСТЯХ С УЧЕТОМ ВРАЩЕНИЯ

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2008

Работа выполнена в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор С.В. Нестеров

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор В.А. Самсонов
Институт механики МГУ
им. М.В. Ломоносова

доктор физико-математических наук,
профессор С.Я. Секерж-Зенькович
Институт проблем механики
им. А.Ю. Ишлинского РАН

Ведущая организация: Московский государственный
технический университет им. Н.Э. Баумана

Защита состоится 25 сентября 2008 г. в 15.00
на заседании Диссертационного совета Д 002.240.01
при Институте проблем механики Российской академии наук по адресу:
119526, Москва, проспект Вернадского, д. 101, корп. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПМех РАН

Автореферат разослан 6 июня 2008 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета
Д 002.240.01 при ИПМех РАН
кандидат физико-математических наук Е.Я. Сысоева

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Анализ метеорологических, океанологических и пр. данных показывает, что главенствующую роль в крупномасштабных процессах в атмосфере и гидросфере играют периодические процессы, важнейшим классом которых являются собственные колебания. Исследование таких колебаний представляет значительную сложность в связи как с большим числом воздействующих факторов (сила тяжести, центробежная и кориолисовы силы, сферическая геометрия Земли или исследуемой планеты и др.), так и с непотенциальностью изучаемых течений. В связи с этим посвящённые данной теме работы хотя и многочисленны, но большей частью фрагментарны, а некоторые важные вопросы и вовсе не освещены. Необходимо также отметить, что с исследуемыми задачами тесно связана задача об океанских и атмосферных приливах, имеющая многочисленные приложения в геофизике, метеорологии, океанологии и т.д.

Первая часть диссертации (гл. 1-2) посвящена решению задачи о собственных гармонических колебаниях поверхности жидкости, заключённой в плоском бассейне (т.е. таком, в котором поверхность невозмущённой жидкости имеет нулевую кривизну). Изучение таких колебаний привлекало внимание многих исследователей в связи с задачей о сейшах в озёрах и внутренних морях, а также задачей о приливах. В зависимости от периода сейши производится учёт или неучёт вращения Земли. Для простейших форм бассейнов (круг, круговое кольцо) имеется аналитическое решение. Решение выражается через цилиндрические функции. Для эллиптического бассейна точное решение существует только при отсутствии вращения. Решение даётся функциями Матье. Сейши в эллиптических бассейнах при наличии вращения исследовались С. Гольдштейном (S. Goldstein), причём проводилось сравнение аналитических результатов с експериментальными, полученными автором статьи в лаборатории Л. Прандтля в Гёттингене. Также исследовались прямоугольные и полукруглые бассейны (G.R. Goldsbrough, A. Pnueli, C.L. Pekeris, D. Rao и др.). Некоторые работы были посвящены исследованию сейш в бассейнах, имеющих форму правильного n-угольника (H. Safwat) или кругового сектора (A. Pnueli, C.L. Pekeris).

Значительное число работ посвящено численному исследованию сейш и приливных волн в реальных акваториях, таких как озеро Байкал, Красное море, Чёрное море, Мексиканский залив, Великие озёра в Северной Америке, Каспийское море (S.F. Grace, G.W. Platzman, D. Rao, D.J. Schwab, Б.И. Рабинович, А.С. Левянт и др.).

Также изучались бассейны непостоянной глубины. Были получены решения для бассейна, имеющего форму параболической чаши (параболоида вращения, H. Lamb), полукруглого бассейна с таким же законом изменения глубины (половина параболоида вращения, G.R. Goldsbrough) и эллиптического параболоида (F.K. Ball, H. Hukuda). В случае, когда глубина бассейна не является постоянной, в нём существуют гармонические колебания с периодом, большим чем период вращения самого бассейна, называемые топографическими волнами Россби.

Из приведённого обзора можно видеть, что в настоящее время в гидродинамике имеется разрыв между бассейнами простой конфигурации (круговой, кольцеобразный, прямоугольный) и бассейнами, аппроксимирующими реальные асимметричные акватории с их сложной береговой линией.

Вторая часть диссертации (гл. 3-4) посвящена решению приливного уравнения Лапласа (ПУЛ). В 1775 году при исследовании динамических приливов Лаплас получил дифференциальное уравнение, описывающее собственные гармонические колебания тонкого слоя жидкости, покрывающего вращающийся шар, в настоящее время носящее его имя. Выведенное для океана постоянной глубины, это уравнение, однако, применимо к более широкому классу задач, в частности, к нему сводятся задача метеорологии о приливах в атмосфере Земли или исследование колебаний вращающихся звёзд.

Вид и поведение решений ПУЛ зависят от величины безразмерного параметра $\beta = 4\omega^2 a^2 / gh$ (варианта числа Фруда, названного в диссертации гироскопическим числом (ГЧ)), где $\omega$ – угловая скорость вращения шара, $a$ – его радиус, $g$ – ускорение свободного падения, $h$ – глубина океана. В случае исследования вынужденных колебаний или колебаний атмосферы ГЧ является неизвестным и определяет значение $h$, которое в этом случае называется эквивалентной глубиной и не обязательно равно действительной глубине океана или атмосферы.

ПУЛ представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение с сингулярными коэффициентами. С их наличием и связана основная сложность задачи. В XIX веке наибольшего продвижения в решении задачи достигли Маргулес (M. Margules) и Хаф (S.S. Hough). Маргулес искал решения в виде разложения по тригонометрическим функциям, Хаф – в виде разложения по присоединённым сферическим функциям. Этими исследователями было установлено, что ПУЛ имеет решения двух родов. К первому роду были отнесены короткопериодические колебания, ко второму роду были отнесены долгопериодные колебания, переходящие в пределе в установившиеся течения на неподвижном шаре. Эти течения аналитически получены Гаурвицем (B. Haurwitz) и называются волнами Гаурвица. Колебания первого рода в пределе $\beta \to 0$ исчезают. Колебания первого рода могут распространяться как по направлению вращения планеты, так и против; колебания второго рода распространяются только против направления вращения планеты. Хафом была выведена формула для приближённого вычисления собственных частот. Сравнение приближённых частот с частотами, вычисленными более точными методами, показывает очень высокую точность формулы Хафа при $\beta$ порядка единицы-двух, что соответствует условиям Земли как при исследовании океана, так и атмосферы в баротропном приближении.

Колебаниям второго рода отвечают медленные волны, движущиеся против направления вращения планеты с периодами больше суток. Первоначально их существование было выявлено лишь математически. Однако в 1939 году Россби с сотрудниками (C.-G. Rossby et coll.) при анализе метеорологических данных установил существование в атмосфере Земли крупномасштабных медленно перемещающихся областей высокого и низкого давления, названных им центрами действия атмосферы и дал простейшую теорию этого явления в предположении нулевой кривизны земной поверхности. Гаурвиц рассмотрел более реалистичную модель сферической Земли и обнаружил, что эти волны представляют собой колебания второго рода ПУЛ. Они получили название планетарных волн или волн Россби. Эти волны в некотором роде аналогичны топографическим волнам Россби, о которых говорилось выше.

В дальнейшем исследованию собственных функций ПУЛ (получившим название функций Хафа (ФХ)) было посвящено значительное число работ. Чаще всего использовался метод Хафа разложения искомого решения по присоединённым сферическим функциям (Г.С. Голицын, А.Л. Дикий, Н.Е. Кочин, S. Chapman, R.S. Lindzen, G.R. Goldsbrough). Отдельные решения ПУЛ можно найти в многочисленных работах, посвящённых решению тех или иных метеорологических задач (A. Kasahara, S. Kato, R.S. Lindzen, R. Sawada, H. Volland).

Исследовались также колебания в зональном океане (океане, ограниченном кругами широты) (Л.Д. Акуленко, С.В. Нестеров, А.М. Шматков, G.R. Goldsbrough), полярном океане (океане, покрывающем один из полюсов и ограниченном кругом широты, G.R. Goldsbrough), океане, ограниченном двумя меридианами (G.R. Goldsbrough, D.C. Colborne, P.W. O'Connor). Первая задача не представляет математической трудности, т.к. здесь ПУЛ не имеет особенностей. Голдсброу была подробно исследована задача о полусуточных колебаниях в океане, глубина которого меняется по закону $h = h_0 \sin^2\theta$, где $\theta$ - коширота.

Математические сложности, связанные с тем, что на полюсах сферы коэффициенты ПУЛ становятся сингулярными, привели к возникновению приближения β-плоскости, смысл которого заключается в замене криволинейной геометрии сферы плоской с одновременной линеаризацией параметра Кориолиса. Приближению β-плоскости посвящена обширная литература (R.S. Lindzen, M.S. Longuet-Higgins, R. Sawada, G. Veronis, Z. Wu, D. W. Moore).

Пожалуй, наиболее подробные исследования были проведены Лонге-Хиггинсом (M.S. Longuet-Higgins), а также Шварцтраубером и Касахарой (P.N. Schwarztrauber, A. Kasahara). Лонге-Хиггинс использовал для интегрирования ПУЛ как метод Хафа (разложение по сферическим гармоникам), так и метод Маргулеса (разложение по тригонометрическим функциям) и вычислил ФХ для широкого диапазона ГЧ (в том числе и для отрицательных). Однако, в силу сложности задачи, во многих случаях автору пришлось ограничиться построением асимптотических форм. Другое асимптотическое исследование было проведено Диким, который независимо исследовал случай больших положительных и отрицательных ГЧ, но получил значительно менее полные результаты, чем Лонге-Хиггинс. В работе Шварцтраубера и Касахары построены обширные таблицы частот ФХ для различных положительных ГЧ вплоть до $10^5$. Аналогичных вычислений для отрицательных ГЧ не проводилось.

Особые точки ПУЛ регулярны и поэтому к нему может быть применена теория Фукса. Это было сделано Эккартом (C. Eckart) и рядом других авторов (L. Bildsten, G. Ushomirsky, C. Cutler, U. Lee, H. Saio). Однако полное решение задачи не было получено – Эккарт ограничился только аналитическим исследованием некоторых свойств ФХ, а прочие авторы получили лишь решения, интересные им с точки зрения астрофизики, к тому же предложенный ими метод отличается громоздкостью и приводит к появлению большого числа искусственно введённых свободных неизвестных, что весьма затрудняет сходимость к истинному решению.

Можно видеть, что полное решение ПУЛ до сих пор не получено. В частности, неясен вопрос о пределах применимости асимптотик, предложенных Диким и Лонге-Хиггинсом. Кроме того, остаётся неизвестным характер изменения формы мод (и числа их нулей) при изменении частоты. Краевая задача для ПУЛ (при заданном ГЧ) представляет собой обобщённую задачу Штурма-Лиувилля, квадрат искомой собственной частоты входит в коэффициенты уравнения нелинейным образом. В связи с этим изменение числа нулей ФХ при изменении частоты не сводится к обычному для линейных задач Штурма-Лиувилля увеличению числа нулей на единицу при переходе к следующей по номеру моде и в спектре могут присутствовать различные моды с явно различными частотами, имеющие одно и то же азимутальное волновое число.

Целью работы является исследование свободных гармонических колебаний в бассейнах сложной формы и установление зависимостей между конфигурацией бассейна и характером волнового движения в нём, а также исследование решений ПУЛ на всей сфере для широкого диапазона ГЧ (в особенности – отрицательных). Одной из целей диссертации являлось сравнение полученных численных решений с известными из литературы асимптотиками с целью определения диапазона их применимости, а также исследование влияния определяющих параметров ПУЛ – ГЧ, собственной частоты, широтного и азимутального волнового числа – на вид соответствующих мод.

Научная новизна.

1. Для задачи с косой производной модифицирован метод численного интегрирования Бабенко.

2. Исследованы сейшевые колебания в односвязных бассейнах с двумя, тремя и четырьмя осями симметрии (вращающихся и невращающихся), а также в кольцеобразном бассейне. Установлен характер влияния числа осей симметрии бассейна, площади и контура береговой линии на собственные частоты и характер волнового движения в бассейне.

3. Разработан метод численного интегрирования ПУЛ.

4. Получены неосесимметричные гармоники ПУЛ (ФХ) и изучены их свойства при различных значениях определяющих параметров. Задача решена как для положительных, так и для отрицательных ГЧ. Предложена классификация ФХ в обоих случаях, основанная на универсальном (для ГЧ одного и того же знака) характере следования мод при изменении собственной частоты.

5. Получены частоты и моды (ФХ) в широком диапазоне изменения эквивалентной глубины. Проверены известные в литературе асимптотические формулы. Сделаны выводы о диапазоне их применимости.

Практическая ценность. Результаты диссертационной работы могут быть применены для численных расчетов сейш в озерах и внутренних морях, а также для вычисления гравитационных и термических приливов в атмосфере Земли и других планет. Разработанный метод интегрирования приливного уравнения Лапласа может быть применен для интегрирования подобных ему уравнений, содержащих сингулярные коэффициенты.

Достоверность полученных результатов вытекает из корректности постановок решаемых задач, применении строгих математических методов и сопоставлении полученных результатов, где это возможно, с известными в научной литературе.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались

- на семинаре ИПМех РАН «Проблемы механики сплошной среды» (руководители – проф. С.В. Нестеров и проф. Д.В. Георгиевский)
- на семинаре лаборатории механики прочности и разрушения материалов и конструкций (руководитель – проф. Р.В. Гольдштейн)
- на семинаре кафедры механики композитов МГУ им. М.В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» (руководители – проф. Д.В. Георгиевский и проф. М.В. Шамолин)
- на семинаре кафедры общей математики факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова (руководитель – член-корр. РАН И.А. Шишмарев)
- на Всероссийской конференции «Современные проблемы механики сплошной среды», посвящённой 100-летию со дня рождения Л.И. Седова (Москва, 2007)

Публикации. Основное содержание диссертации изложено в шести публикациях автора (из них четыре – в реферируемых журналах), список которых приведён в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы, содержащего 114 наименований. Объём диссертации – 111 страниц вместе с таблицами и графиками.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность темы исследования, дан обзор наиболее значительных работ в исследуемой области, сформулирована цель работы, определена её научная новизна и практическая ценность, представлено краткое содержание диссертации.

В первой главе рассматривается распространение гармонических гравитационных поверхностных волн во вращающихся бассейнах. Жидкость считается идеальной, нелинейными членами пренебрегаем. Поток жидкости через границу бассейна полагаем нулевым. Исследование проводится в приближении теории мелкой воды, изучаемые волны считаются пологими. На жидкость действуют сила тяжести (притом ускорение свободного падения считается постоянным ввиду малой толщины гидросферы Земли), центробежная сила и сила Кориолиса. Соответствующие уравнения имеют вид:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt}+\frac{1}{\rho}\nabla p+g\nabla\chi+\nabla\Pi+\Omega\times\mathbf{u}=0 \qquad (1)$$

$$\mathrm{div}\mathbf{u}=0,\ \frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}\nabla \qquad (2)$$

Здесь $\mathbf{u}$ - вектор скорости, $p$ - удельное давление, $\rho$ - плотность, $g\chi$ - потенциал силы тяжести, $g$ - ускорение свободного падения, считающееся постоянным ввиду малой толщины гидросферы Земли, $\chi$ - динамическая высота, $\Omega$ - вектор Кориолиса, направленный по оси вращения Земли к Северному полюсу мира, $\Pi$ - потенциал центробежной силы.

Задача должна быть дополнена граничным условием непротекания на твёрдой поверхности и двумя условиями на свободной поверхности:

$$\mathbf{nu}=0 \qquad (3)$$

$$p=p_0=\mathrm{const.},\ \frac{D\xi}{Dt}=\mathbf{nu} \qquad (4)$$

где $\mathbf{n}$ - единичная нормаль к поверхности, $\xi(x,y,t)$ - координата свободной поверхности.

Выводятся уравнения, описывающие распространение волн в плоских бассейнах, т.е. таких, где в отсутствие возмущающих сил поверхность жидкости имеет нулевую кривизну. Данное приближение оправдано при рассмотрении столь крупных бассейнов, как, например, Чёрное море. Кориолисово ускорение полагаем постоянным, что отвечает случаю сравнительно некрупных бассейнов (единицы градусов), расположенных вне высоких широт. В такой постановке задача моделирует распространение сейш в замкнутых бассейнах.

Вводя цилиндрическую систему координат, записывая $z_0+\zeta_1\cos\sigma t+\zeta_2\sin\sigma t=\xi(x,y,t)$ и выражая $Z=\zeta_1+i\zeta_2$, имеем для бассейна постоянной глубины

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}+k^2 Z=0,\ k^2=\frac{\sigma^2-4\omega^2}{gh}$$
$$\frac{\partial Z}{\partial n}=-\frac{2\omega}{\sigma i}\frac{\partial Z}{\partial s},\ (x,y)\in\partial\Gamma \qquad (5)$$

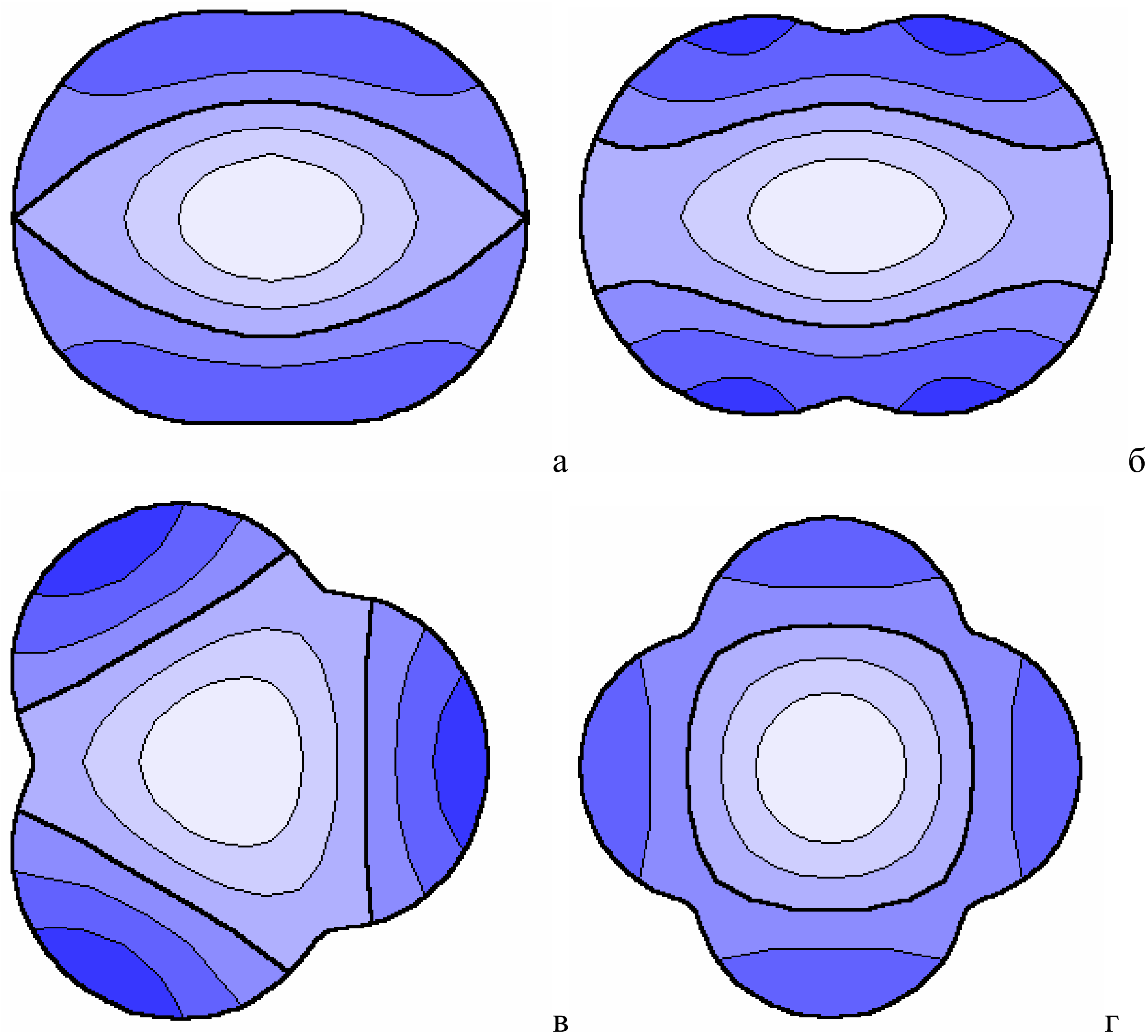
где $\omega$ – угловая скорость вращения Земли, $dn$ - дифференциал внутренней нормали, $ds$ - дифференциал длины контура, отсчитываемый в положительном направлении, $\partial\Gamma$ - граница бассейна.

Числами подобия для краевой задачи (5) являются безразмерные величины: $\alpha=4\omega^2 S/\pi gh$, где $S$ – площадь бассейна, представляющее аналог ГЧ, определяющего характер собственных колебаний в задаче о вращающемся шаре, и безразмерная собственная частота $K=k\sqrt{S/\pi}=\sigma\sqrt{S/\pi gh}$. Безразмерное число $\alpha$ для реальных бассейнов обычно порядка 0.1 (например, Чёрное море) и увеличивается в несколько раз для мелких бассейнов с большой площадью (типа Аральского моря).

В ряде случаев простой геометрии бассейна задача допускает точные решения, приведённые автором. К главе прилагаются таблицы, содержащие вычисленные автором частоты и моды для кольцеобразных бассейнов с различным отношением радиусов внутреннего и внешнего колец.

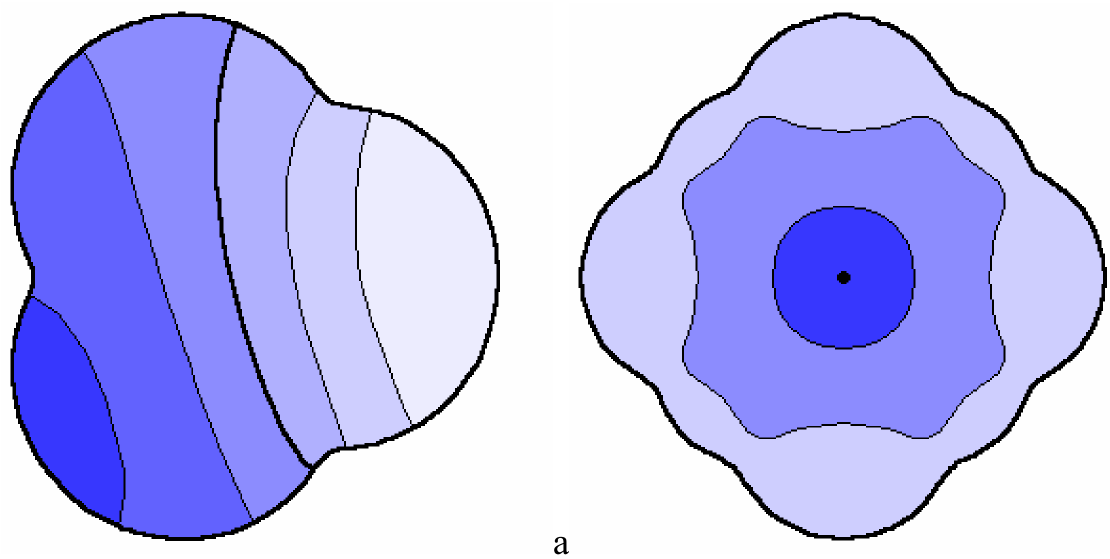
Во второй главе строится метод интегрирования задачи о сейшах в плоских бассейнах постоянной глубины, являющийся модификацией метода Бабенко. Бассейн должен допускать конформное отображение на круг. Чтобы оценить качество метода, рассматриваются задачи, имеющие точное решение, которое сравнивается с численным. Далее строятся конформные отображения для бассейнов сложной формы и изучаются сейшевые колебания как в случае невращающихся, так и в случае вращающихся бассейнов.

Показано, что характер волнового движения зависит главным образом от числа осей симметрии (ОС) бассейна. В частности, узловая линия стоячей моды (в невращающемся бассейне), представляющая окружность в случае круглого бассейна, при отдалении формы бассейна от круговой характерным образом деформируется и в дальнейшем размыкается, причём характер деформирования и размыкания узловой линии для бассейна с двумя ОС отличен от случая бассейнов с большим числом ОС (фиг. 1).




Фиг. 1. Изовысоты стоячей моды $E^1$ в бассейнах, имеющих форму эпитрохоиды с $n$ ОС: а – $n$=2, $K$=4.015; б – $n$=2, $K$=4.116; в – $n$=3, $K$=3.558; г – $n$=4, $K$=3.724.

Установлено существование сильно асимметричных мод в невращающихся бассейнах, возникающих при особом соотношении между числом ОС бассейна и числом ОС кругового прообраза моды (фиг. 2,а). Такие волны входят в спектр парами, обе волны пары имеют одну и ту же собственную частоту, а сами моды являются энантиоморфами (т.е., линии изовысот одной волны пары представляют зеркальное отражение линий изовысот другой волны). Исследовано свойство расщепления собственных частот. Выявлены и другие эффекты, связанные с геометрией бассейна. В случае вращения бассейна линии равных амплитуд ведут себя подобно узловым линиям стоячих мод невращающихся бассейнов (фиг. 2,б, ср. с фиг. 1,в,г).



а б

Фиг. 2. а - Карта изовысот асимметричной моды $A_1$ в бассейне, имеющем форму трёхосной эпитрохоиды, $K$=1.674; б - Карта изовысот амплитудной поверхности моды $C_1$ во вращающейся «усложнённой» эпитрохоиде с четырьмя ОС, $\alpha = 0.201$, $K$=1.776.

В третьей главе ставится задача о собственных гармонических колебаниях тонкого слоя жидкости, покрывающей вращающийся шар, и выводится ПУЛ. Кориолисово ускорение уже не является постоянным и зависит от широты. Будем рассматривать Землю как сферу, покрытую слоем воды, постоянная глубина которого $h$ много меньше радиуса Земли $a$. Эллиптичность Земли считаем малой (1/289). Вводим сферическую систему координат $\{\theta, \varphi, r\}$, вращающуюся вокруг земной оси с постоянной угловой скоростью $\omega$. Выразим возвышение поверхности жидкости над уровнем равновесного эллипсоида, определяющегося действием гравитационной и центробежной сил, как $\zeta = Y(\mu)e^{-i(\sigma t - n\varphi)}$. ПУЛ имеет вид:

$$f\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1-\mu^2}{f^2-\mu^2}\frac{\partial Y}{\partial\mu}\right)+\left(\frac{n\left(f^2+\mu^2\right)}{\left(f^2-\mu^2\right)^2}-\frac{n^2 f}{\left(1-\mu^2\right)\left(f^2-\mu^2\right)}+\beta f\right)Y=0 \quad (6)$$

где $\mu = \cos\theta$, $f = \sigma / 2\omega$, $\beta = 4\omega^2 a^2 / gh$. Здесь $\theta$ - коширота, $\sigma$ - угловая скорость волны, $n$ – широтное волновое число (число волн на параллели), $g$ – ускорение свободного падения. Краевыми условиями являются условия ограниченности решений на полюсах:

$$\left| Y\left(\pm 1\right) \right| < \infty \tag{7}$$

В частном случае $\beta = 0$ ПУЛ допускает точные решения – волны Гаурвица:

$$\begin{gathered} f_n^s = -\frac{n}{\left(n+s+1\right)\left(n+s+2\right)} \\ Y_n^s = \frac{s+2}{\left(2n+2s+3\right)\left(n+s+2\right)^2} P_{n+s+2}^n\left(\mu\right) + \\ + \frac{2n+s+1}{\left(2n+2s+3\right)\left(n+s+1\right)^2} P_{n+s}^n\left(\mu\right) \end{gathered} \tag{8}$$

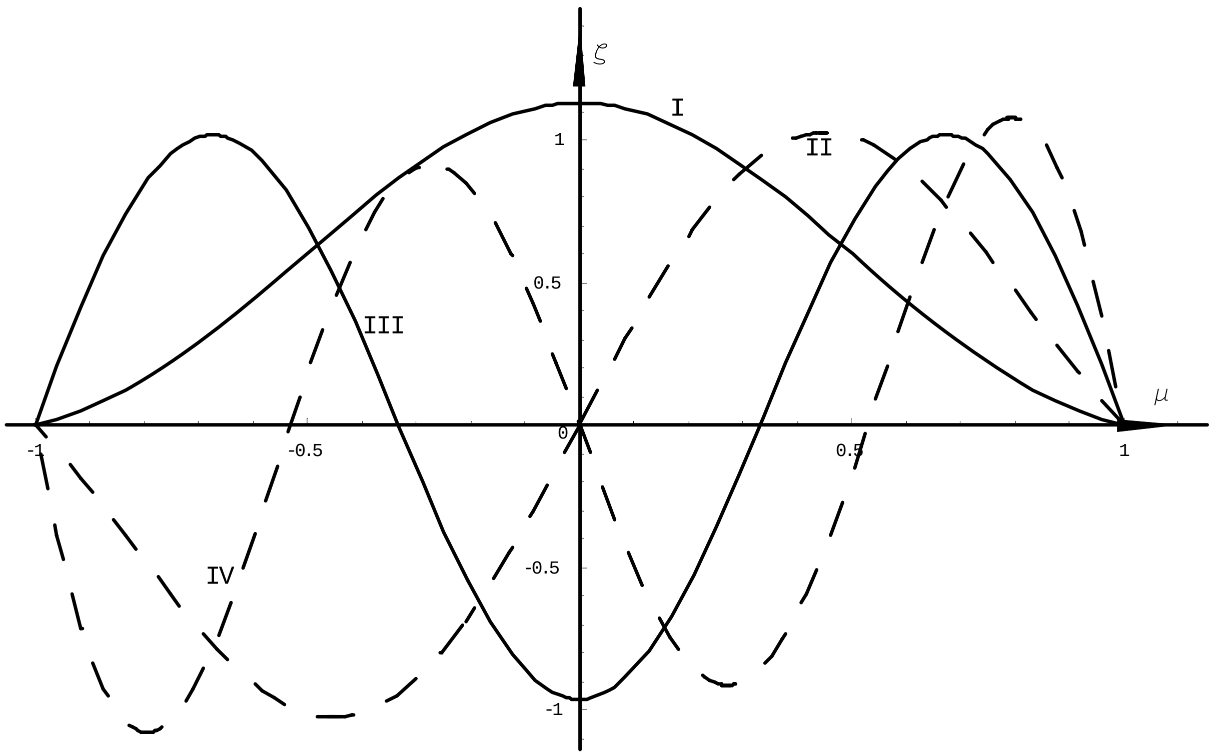
Здесь $s \geq -1$ - номер моды (азимутальное волновое число), $P_s^n\left(\mu\right)$ - присоединённые (ненормированные) функции Лежандра.

На основании формулы Хафа рассмотрено качественное поведение собственных частот.

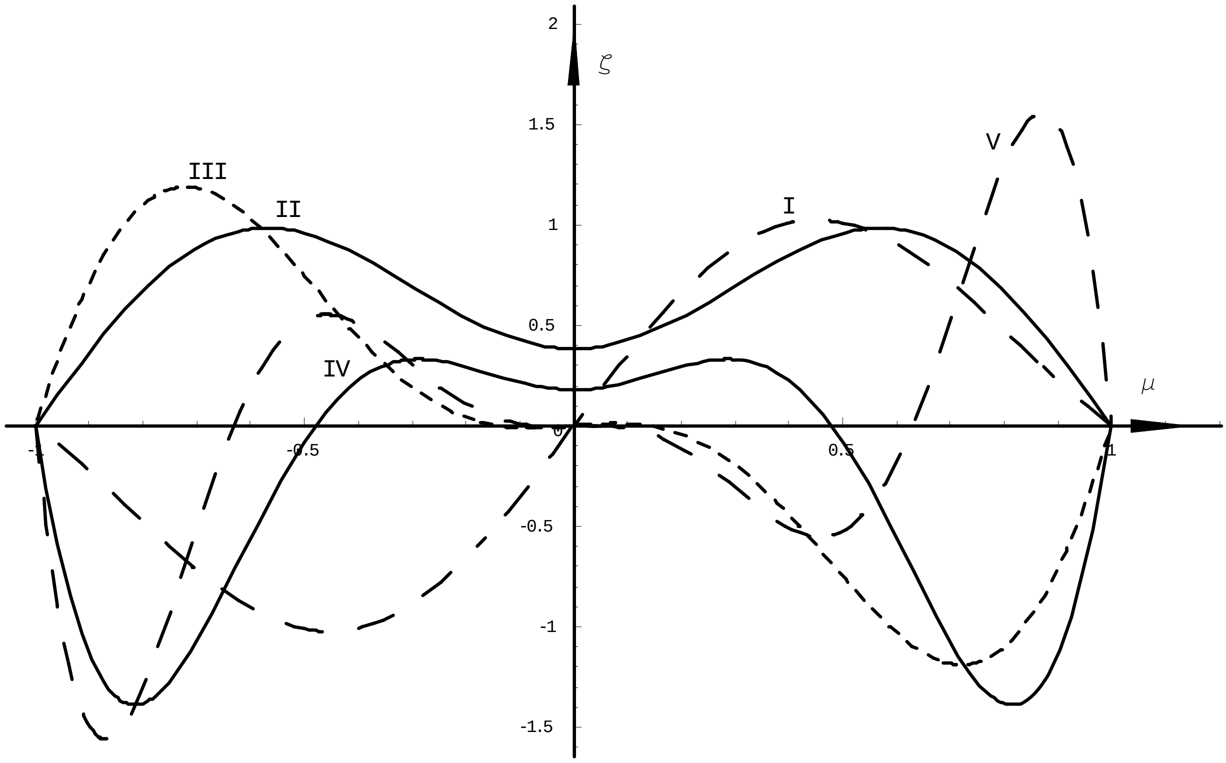
В четвёртой главе строится метод численного интегрирования ПУЛ, заключающийся в замене искомого решения (ФХ) в малой окрестности особой точки $\mu = \pm 1$ старшими членами ряда Фукса голоморфного решения и последующем решении обобщённой задачи Штурма-Лиувилля со сшиванием полученного решения с укороченным рядом Фукса в окрестностях особых точек по нулевой и первой производной. В особых точках $\mu = \pm f$ оба фундаментальных интеграла ограничены, поэтому эти точки не создают проблем при численном интегрировании.

С помощью данного метода получены неосесимметричные решения ПУЛ для различных значений определяющих параметров и исследованы их свойства. Задача решена как для положительных, так и для отрицательных ГЧ в широком диапазоне значений. Для найденных ФХ разработана система классификации, основанная на универсальном (для ГЧ одного и того же знака) характере следования мод при изменении собственной частоты. ФХ разделены на три класса: положительные (P), отрицательные (N) волны и волны Россби (R) – в случае положительных ГЧ; и волны (R) и антиволны Россби (aR) и ультрадолгопериодные волны (L) – в случае отрицательных ГЧ. При этом волны последних трёх классов неотличимы друг от друга по виду и их разделение на классы всецело основано на характере следования собственных значений. Наиболее характерные моды показаны на фиг. 3-9.

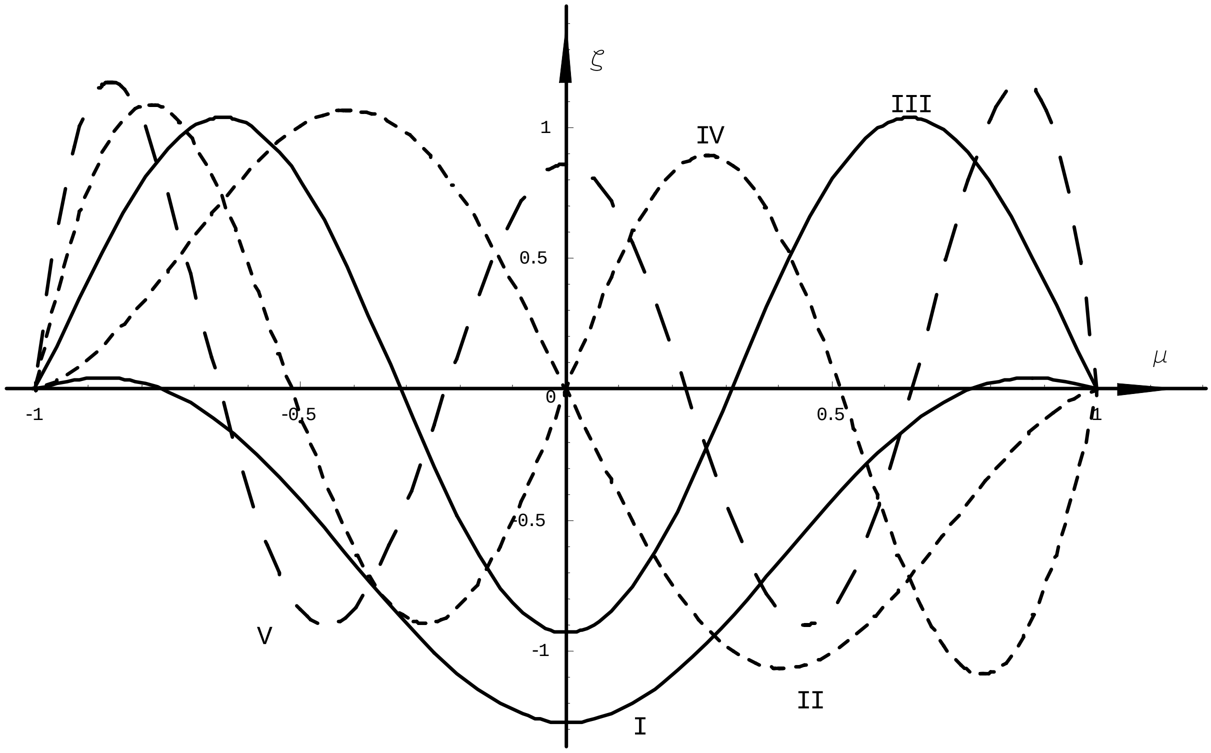
Исследован характер влияния различных определяющих параметров (ГЧ, собственной частоты, широтного и азимутального чисел) на ФХ. Проведено сравнение численных результатов при больших ГЧ с известными в литературе асимптотическими формулами.



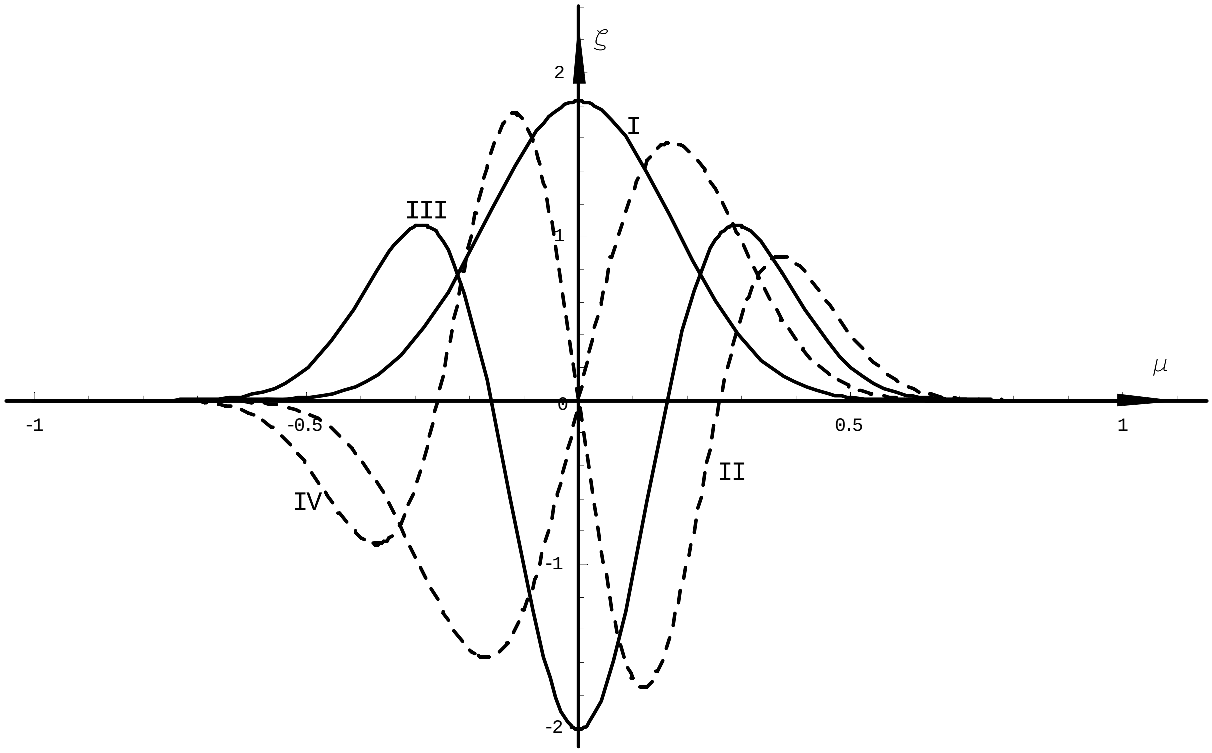

Фиг. 3. Положительные волны $P_i$ $\{i, f\}$ для $\beta = 19.648$, $n = 2$ (I – {0, 0.478}, II – {1, 0.835}, III – {2, 1.112}, IV – {3, 1.353}).



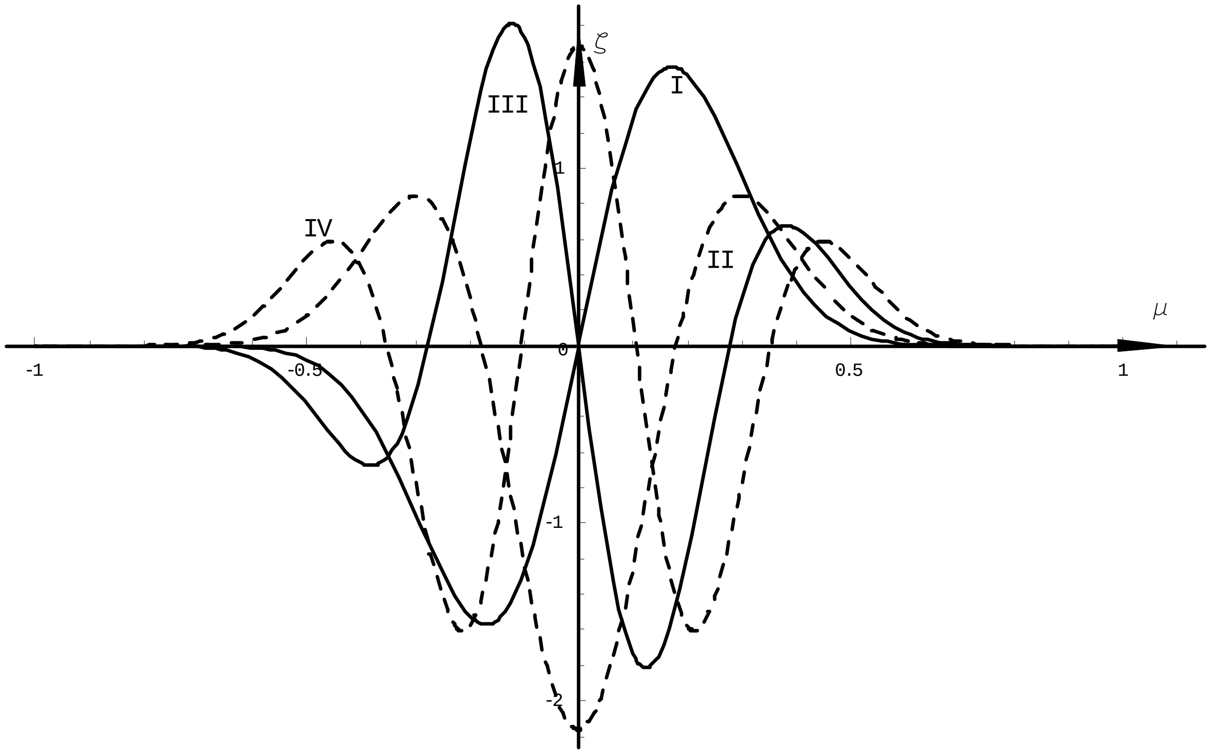

Фиг. 4. Волны Россби $R_i$ $\{i, f\}$ для $\beta = 19.648$, $n = 2$ (I – {-1, -0.288}, II – {0, -0.110}, III – {1, -0.071}, IV – {2, -0.051}, V – {3, -0.039}).



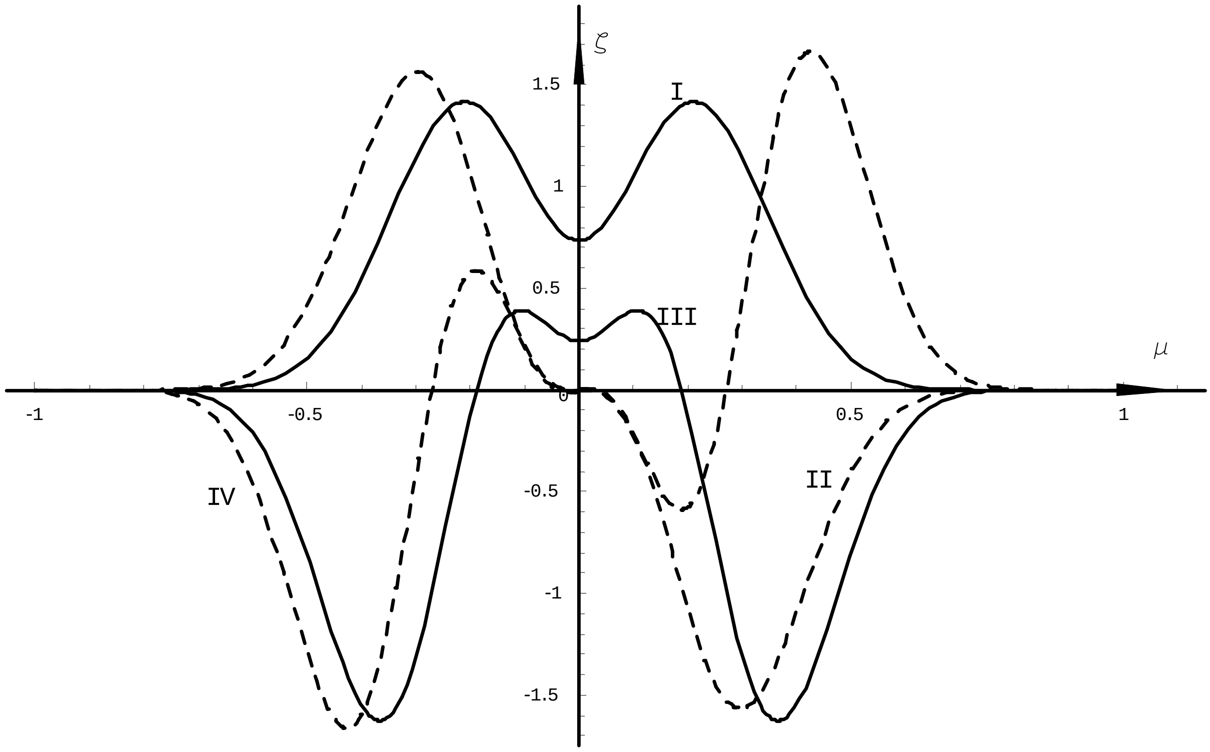

Фиг. 5. Отрицательные волны для $\beta = 19.648$, $n = 2$ (I – {$SN_2$, -0.836}, II – {$FN_1$, -1.059}, III – {$FN_2$, -1.250}, IV – {$FN_3$, -1.440}, V – {$FN_4$, -1.638}).



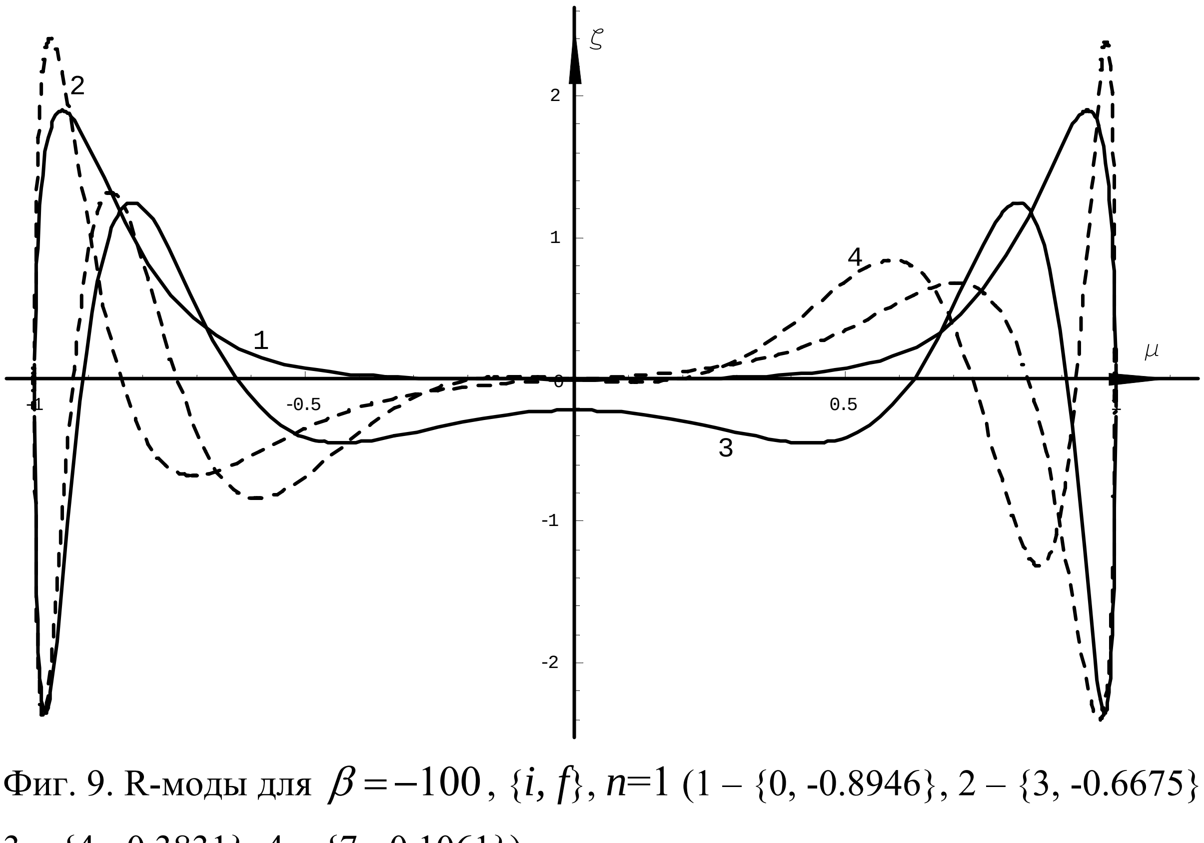

Фиг. 6. Положительные волны $P_i$ {i, *f*} для $\beta = 1200$, $n = 1$ (I – {0, 0.0281}, II – {1, 0.1859}, III – {2, 0.2999}, IV – {3, 0.3814}).




Фиг. 7. Промежуточная волна и отрицательные волны для $\beta = 1200$, $n = 1$ (I – {$R_{-1}$, -0.156}, II – {$N_2$, -0.289}, III – {$N_3$, -0.375}, IV – {$N_4$, -0.443}.




Фиг. 8. Волны Россби $R_i$ $\{i, f\}$ для $\beta = 1200$, $n = 1$ (I – {0, -0.0096}, II – {1, -0.0058}, III – {2, -0.0042}, IV – {3, -0.0033}).




Фиг. 9. R-моды для $\beta = -100$, $\{i, f\}$, $n$=1 (1 – {0, -0.8946}, 2 – {3, -0.6675}, 3 – {4, -0.3831}, 4 – {7, -0.1061}).

Все числовые данные, приведённые в диссертации, округлены; численные расчёты были проведены с более высокой точностью, доходившей (при исследовании ФХ отрицательных ГЧ) до 15 значащих цифр.

В заключении приведены основные результаты и выводы, полученные в работе:

1. Исследованы сейшевые колебания в односвязных бассейнах с двумя, тремя и четырьмя ОС (вращающихся и невращающихся), а также в кольцеобразном бассейне. Установлен характер влияния числа ОС бассейна, площади и контура береговой линии на собственные частоты и характер волнового движения в бассейне. Последнее имеет значение для более адекватной аппроксимации реальных бассейнов математическими контурами.

2. Разработан метод численного интегрирования ПУЛ. Использование построенного метода, по мнению автора диссертации, предпочтительнее, чем использование обычных методов разложения по сферическим или тригонометрических функциям, в силу его значительно большей простоты и универсальности.

3. Получены неосесимметричные гармоники ПУЛ (ФХ) и изучены их свойства при различных значениях определяющих параметров. Задача решена как для положительных, так и для отрицательных ГЧ в широком диапазоне значений. Предложена классификация ФХ в обоих случаях, основанная на универсальном (для ГЧ одного и того же знака) характере следования мод при изменении собственной частоты. В трудных для вычисления случаях (большие отрицательные ГЧ) предлагается комбинированное использование численного алгоритма и асимптотических формул Лонге-Хиггинса, сравнение которых с численными решениями показало их хорошее схождение уже для относительно небольших по абсолютной величине ГЧ. Решения, полученные этим методом, могут рассматриваться как эталонные в задачах метеорологии, климатологии и т.д.

Автор выражает благодарность своему руководителю С.В. Нестерову и Л.Д. Акуленко за поддержку и внимание к работе. Автор также благодарит А.А. Бармина и В.Г. Байдулова, высказавших замечания, позволившие

улучшить изложение результатов работы, С.Д. Алгазина – за предоставленные материалы, своих руководителей по лаборатории Р.В. Гольдштейна и А.Л. Попова, проявивших понимание во время подготовки рукописи диссертации. Автор также выражает благодарность заведующей отделом аспирантуры ИПМех РАН Г.Н. Агашиной за постоянное участие.

Публикации по теме диссертации. По результатам диссертации написаны следующие работы:

1. Иванов М.И. О колебаниях жидкости под действием силы Кориолиса в плоских бассейнах постоянной глубины // Тез. докл. межд. научн. конф. «Современные проблемы механики, математики, информатики». Тула: ТГУ, 2003. С. 145-146.

2. Иванов М.И. О свободных приливах в плоских бассейнах постоянной глубины // Изв. РАН. МЖГ. 2004. №5. С. 119-130.

3. Иванов М.И. Собственные гармонические колебания гравитирующей жидкости в бассейнах сложной формы // Изв. РАН. МЖГ. 2006. №1. С. 131-148.

4. Иванов М.И. Неосесимметричные решения приливного уравнения Лапласа и волны Россби // Изв. РАН. МЖГ. 2007. №4. С. 151-161.

5. Иванов М.И. Функции Хафа. Собственные колебания жидкости на вращающемся шаре // Тез. докл. Всеросс. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», посв. 100-летию Л.И. Седова. М.: МИАН, 2007. С. 68-69.

6. Иванов М.И. О горизонтальной структуре приливных колебаний атмосферы // Изв. РАН. МЖГ. 2008. №3. С. 125-139.

Иванов Михаил Игоревич

Волновые движения жидкости
в сложных областях с учетом вращения

Автореферат диссертации на соискание
ученой степени кандидата физико-математических наук

Подписано к печати 13.05.2008 Заказ № 16-2008 Тираж 70 экз.

Отпечатано на ризографе Института проблем механики
им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук
119526, Москва, проспект Вернадского, 101, корп. 1