На правах рукописи

Пивоваров Дмитрий Евгеньевич

ПОРОГ УСТОЙЧИВОСТИ И ТРЕХМЕРНЫЕ СТРУКТУРЫ КОНВЕКЦИИ В ЗАМКНУТЫХ НАКЛОННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОБЪЕМАХ

Специальность 01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2013 г.

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН).

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор $\boxed{\text{В.И. Полежаев}}$
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук А.В. Гетлинг кандидат физико-математических наук М.К. Ермаков
Ведущая организация:	Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Защита состоится 24 октября 2013 года в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 002.240.01 при ИПМех РАН по адресу: 119526, г. Москва, проспект Вернадского, д. 101, корп. 1, ИПМех РАН.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПМех РАН.

Автореферат разослан 23 сентября 2013 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.240.01
кандидат физико-математических наук Е.Я. Сысоева

1. Общая характеристика работы

Актуальность темы. Замкнутые прямоугольные объемы являются составными элементами большого количества технических устройств и конструкционных элементов. Их ориентация может быть произвольно задана согласно техническим требованиям (изоляционные прослойки, стеклопакеты) или может выбираться из расчета оптимальных параметров теплообмена (солнечные коллекторы). В теплопроводной жидкости, заполняющей объем, в зависимости от условий теплоотдачи на ограничивающих поверхностях возникают естественно-конвективные течения. Рассмотренный частный случай разной температуры двух противоположных сторон прямоугольного объема является обобщением классических задач о конвекции между двумя горизонтальными или вертикальными параллельными плоскостями, нагретыми до различной температуры.

Эти задачи представляют собой два разных типичных случая тепловой гравитационной конвекции, в настоящее время хорошо изученных. Они имеют свою специфику и отличаются по структуре. В горизонтальном слое возможно состояние механического равновесия, даже если нижняя граница более нагрета, чем верхняя. При определенном «пороговом» значении температурного градиента в результате потери устойчивости возникает циркуляционное движение в виде ячеек Бенара. В вертикальном слое любая малая температурная неоднородность ведет к развитию крупномасштабного движения, а неустойчивость носит «гидродинамический» характер.

При произвольной ориентации области происходит взаимодействие рассмотренных типов течения, что порождает многообразие режимов конвективного теплообмена [14]. Актуальность задачи о структуре и теплопереносе в конвективном течении при различной ориентации области обусловлена рядом технологических проблем, в частности, необходимостью управления характеристиками температурного расслоения и перемешивания [15]. С теоретической точки зрения потеря устойчивости характерного для данной задачи ламинарного подъемно-опускного течения позволяет детально исследовать процесс ламинарно-турбулентного перехода [16].

Цели работы:

- Разработка и реализация алгоритма расчета ламинарного и турбулентного режимов конвекции на базе уравнений Навье-Стокса.
- Исследование тепловых характеристик и структуры течения в замкнутом объеме в случае продольных слоев и обнаружение гистерезиса трехмерных течений при изменении угла наклона.
- Разработка и реализация трехмерного псевдоспектрального метода решения задачи устойчивости конвективного течения в рамках линейной теории.
- Определение порога устойчивости и вторичных структур конвекции в замкнутом объеме и бесконечно длинном канале.

Научная новизна. Впервые произведен анализ течения гистерезисного типа на основе решения трехмерных уравнений движения на базе уравнений Навье-Стокса. Впервые произведен расчет на устойчивость трехмерного конвективного движения внутри полностью замкнутой полости на основе псевдоспектрального метода.

Метод исследования. Рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости, описываемое системой уравнений Навье-Стокса и уравнения теплопроводности в приближении Буссинеска. Для получения решения используется конечно-разностный метод, а для анализа устойчивости в линейном приближении — псевдоспектральный метод. Расчеты по обоим методам проведены на компьютере.

Достоверность результатов. Для количественной оценки результатов решения нелинейных уравнений было произведено сопоставление с данными других авторов на примере задачи о конвекции в кубической полости. Также получено качественное совпадение структуры течения в наклонных слоях с известными экспериментальными наблюдениями. Достоверность расчетов на устойчивость подтверждена результатами сравнения с аналитическими решениями линейной теории устойчивости. Для численных решений произведено сопоставление с результатами других авторов, использующих отличные методы, а также с экспериментальными работами. Все результаты повторно подтверждены реализованными в работе методами.

Практическая значимость. Реализованный алгоритм решения нелинейных уравнений может быть использован для моделирования турбулентных конвективных течений вязкой жидкости. Метод расчета устойчивости течения может быть использован как для определения порога конвективной устойчивости, так и для выяснения характера и вида вторичных структур трехмерного течения, возникающего внутри замкнутого объема, на границах которого задаются граничные условия I, II и III рода.

Личный вклад автора. Программы расчета написаны самостоятельно автором. Проведены многопараметрические расчеты с детальным разрешением по углу наклона. Предложена приближенная формула определения основного течения в канале бесконечной длины. Проведен анализ полученных результатов.

Апробация работы. Результаты, полученные в диссертации, докладывались на семи международных и российских научных конференциях: на 2-ой всероссийской конференции ученых, молодых специалистов и студентов «Информационные технологии в авиационной и космической технике» (Москва, 2009); на XVII школе-семинаре молодых ученых и специалистов под руководством академика А.И. Леонтьева «Проблемы газодинамики и тепломассообмена в аэрокосмических технологиях» (Жуковский, 2009); на международной конференции «Авиация и космонавтика» (Москва, 2009,2010); на XVIII школе-семинаре молодых ученых и специалистов под руководством академика А.И. Леонтьева «Проблемы газодинамики и тепломассообмена в новых энергетических технологиях» (Звенигород, 2011); на международной школе-семинаре «НеЗаТеГиУс» (Звенигород, 2012; работа отмечена грамотой конкурса молодых ученых); на VI всероссийском межотраслевом молодежном научно-техническом форуме «Молодежь и будущее авиации и космонавтики» (Москва, 2012; работа отмечена дипломом первой степени).

Работа обсуждалась на семинаре «Тепломассообмен и механика невесомости» ИПМех РАН (2012, 2013; руководители д.ф.-м.н. В.И. Полежаев и д.ф.-м.н. В.В. Сазонов).

Публикации. Результаты работы опубликованы в двух журналах из перечня ВАК [1,2], в двух сборниках трудов конференций [3,4], в восьми тезисах конференций [5–12] и препринте ИПМех РАН [13].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы в количестве 174 наименований. Материал содержит 35 иллюстраций, 7 таблиц и изложен на 110 страницах.

2. Содержание работы

Во **введении** представлен подробный обзор отечественных и зарубежных работ по теоретическому, экспериментальному и численному исследованию конвективных течений, возникающих в слоях вязкой жидкости, заполняющей пространство между двумя изотермическими плоскостями. Ориентация плоскостей задается величиной угла наклона нормали к вектору силы тяжести. Показана актуальность решаемой задачи и сформулированы цели работы.

Большая часть теоретических работ посвящена бесконечно протяженным слоям [17, 18], где исследуется устойчивость ламинарного течения с кубическим профилем скорости или течений типа пограничного слоя и устойчивость вторичных течений [19, 20].

Случай замкнутых слоев приковывал большое внимание экспериментаторов, разрабатывающих эффективные солнечные коллекторы [21]. На ограничивающих слой боковых сторонах устанавливали близкие к идеальным условия теплоизоляции или абсолютной теплопроводности. Если при горизонтальном положении короткой грани слоя задавали угол наклона длинной стороны, то слой называли продольным. В противном случае — поперечным.

Исследованию структуры течения и характеристик теплообмена в продольных слоях посвящены работы лишь по двумерному моделированию, не считая трехмерного решения [22], моделирующего эксперимент [23]. В последнем показано, что продольные слои лучше подавляют конвекцию. Анализ устойчивости продольного слоя произведен только в [24], где основное решение получалось численно из нелинейных уравнений тепловой конвекции.

В **главе 1** дается физико-математическая постановка задачи. Рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости внутри прямоугольного объема размером $L \times W \times H$, ограниченного твердыми неподвижными стенками (рис. 1). Две противоположные границы поддерживаются при разных постоянных температурах с разницей ΔT. Остальные границы теплоизолированы. В качестве масштабов длины, времени, скорости, температуры и давления приняты соответственно величины H, H^2/ν, ν/H, ΔT, $\rho\nu^2/H^2$, а уравнения движения несжимаемой теплопроводной жидкости в приближении Буссинеска записываются

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\mathbf{u} = -\nabla p + \nabla^2\mathbf{u} + \mathrm{Gr}T\boldsymbol{\gamma} \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla T = \frac{\nabla^2 T}{\mathrm{Pr}} \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0, \tag{3}$$

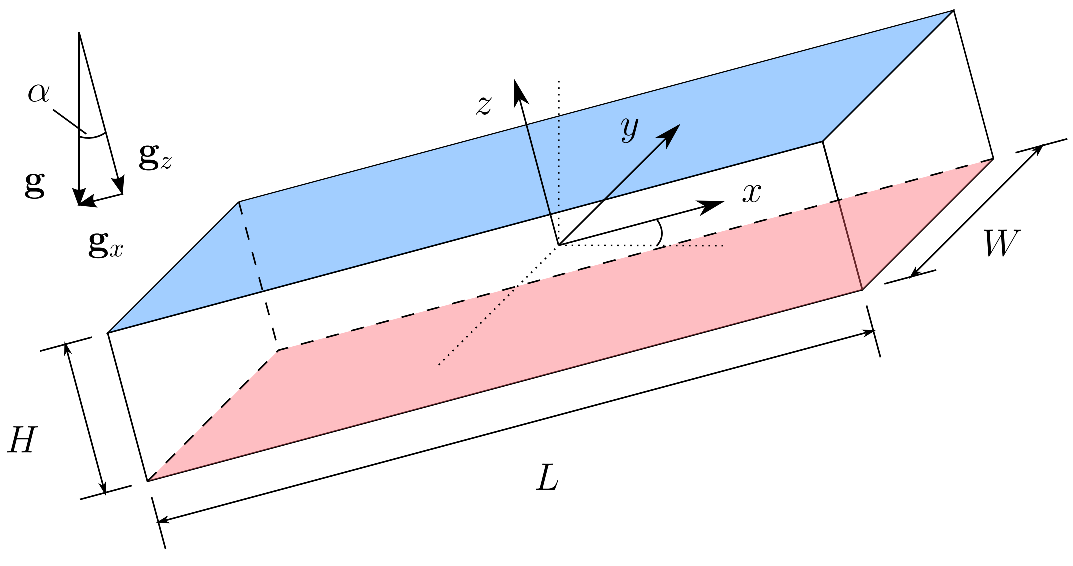


Рис. 1. Геометрия задачи

где $\mathbf{u}, T, p$ – безразмерные вектор скорости, температура, добавка к гидростатическому давлению; $\boldsymbol{\gamma} = (\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$ – единичный вектор, противоположный силе тяжести; $\mathrm{Gr} = g\beta\Delta T H^3/\nu^2$ – число Грасгофа; $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ – число Прандтля; ν, χ – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности; g – модуль ускорения силы тяжести; β – коэффициент объемного расширения. Произведение $\mathrm{Ra} = \mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr}$ определяет число Рэлея.

Геометрия области задается двумя параметрами $A_L = L/H$ и $A_W = W/H$. Граничные условия для скорости и температуры принимают вид

$$\mathbf{u}|_{\partial Q} = 0 \tag{4}$$

$$T|_{z=\pm 0.5} = \mp 0.5, \quad \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=\pm A_L/2} = \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=\pm A_W/2} = 0 \tag{5}$$

В качестве основной характеристики течения выступает среднее число Нуссельта на горячей стенке

$$\mathrm{Nu} = \frac{1}{A_L A_W} \iint\limits_S \frac{\partial T}{\partial z} dx dy$$

Глава 2 посвящена описанию конечно-разностного метода решения нелинейных уравнений движения и результатам тестирования вычислительной программы. Используемая ранее для проведения двумерных расчетов [3] программа COMGA [25] заменяется трехмерной программой, реализованной на основе схемы [26]. Ее описание, отличающееся учетом теплопроводности жидкости, дается в **параграфе 2.1**.

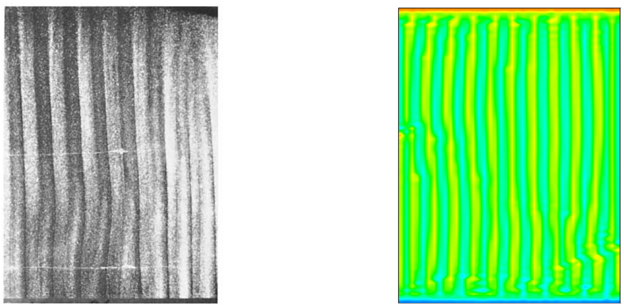
В **разделе 2.1.1** проводится дискретизация задачи. Уравнения движения записываются через скорость и завихренность. Вводятся сеточные функции, определенные на смещенных сетках. В центре расчетных ячеек задаются значения температуры и давления. Значения компонент вектора скорости определяются в центре граней расчетных ячеек по соответствующим направлениям, а компоненты завихренности — в центре ребер, параллельных соответствующим осям. Оператор дифференцирования аппроксимируется центральными разностями, а для вычисления произведений в нелинейных членах используется осреднение по соседним узлам.

Задача для давления формулируется и решается в **разделе 2.1.2**. Проекция уравнения движения с вычисленными нелинейными, вязкими членами и членами с подъемной силой на пространство бездивергентных векторов приводит к постановке задачи Неймана для уравнения Пуассона. Решение задачи осуществляется методом двумерного преобразования Фурье по двум направлениям в сочетании с одномерной прогонкой по третьему направлению. Быстрое преобразование Фурье реализовано с помощью библиотеки FFTW3 [27].

В **разделе 2.1.3** приводится 3-шаговый алгоритм интегрирования по времени. На каждом шаге интегрирования осуществляется расчет нелинейных и конвективных членов, членов с подъемной силой, давления и неявного шага по времени. Неявность задается только относительно вязких членов. Неявный оператор вычисляется по алгоритму приближенной факторизации, после чего применяется метод прогонки по каждому из направлений.

Раздел 2.1.4 дает описание алгоритма оценки локальной погрешности [28] с учетом дополнительной скалярной величины (температуры).

Тестированию реализованного метода посвящен **раздел 2.2**. Иллюстрируются результаты расчета конвективного течения в наклонных слоях (рис. 2) и дается таблица сравнения результатов, полученных для тестовой задачи о конвекции в кубической полости. Дополнительно осуществлен расчет двумерной турбулентной конвекции для задачи описанной в [29]. Фильм, демонстрирующий результаты расчета настоящим методом и по методу [30], размещен на странице `http://www.ipmnet.ru/~pivovar/film.mp4`.



эксперимент [18]   настоящий расчет

Рис. 2. Вид сверху в плоскости xy на конвективные валы (изотермы) для $\mathrm{Pr} = 6.7, \alpha = 30^\circ, A_L = 36, A_W = 17$ при $\mathrm{Ra} = 4232$

В **главе 3** методом прямого моделирования изучается трехмерная структура конвективного течения и интенсивность теплообмена в воздушной прямоугольной полости с отношениями $A_L = 4, A_W = 0.5$.

Вычислительный процесс был построен следующим образом. Для фиксированного числа Ra вычислялось стационарное движение при горизонтальном положении полости. Начальные данные соответствовали положению равновесия. Затем полость ступеньчато наклонялась с шагом $1°$, и для каждого положения вычислялось стационарное движение из начальных данных, соответствующих полю скорости и температуры, полученных при предыдущем значении угла наклона. Достигнув значения угла $\alpha = 90°$, процесс повторялся в обратную сторону из вертикального положения в горизонтальное. Число Ra охватывало диапазон от 10^4 до 10^5 с шагом 10^3.

Для всех расчетных данных наблюдалось несовпадение числа конвективных ячеек, полученных в горизонтальной полости из положения равновесия, и при уменьшении угла из вертикального положения (рис. 3). Ранее подоб-

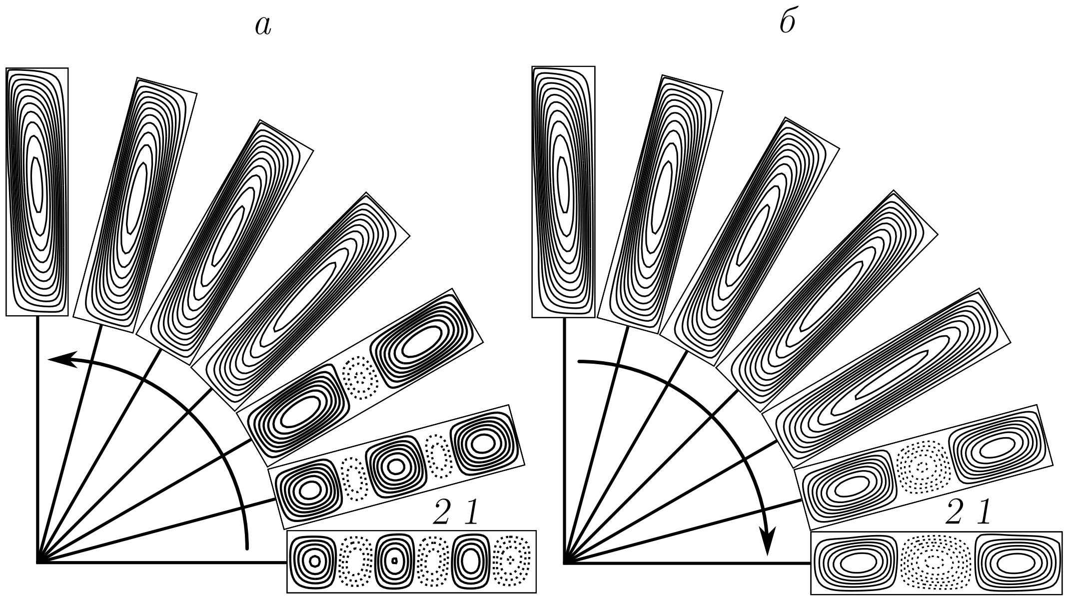


Рис. 3. Изолинии функции тока в плоскости $y = 0$ при увеличении (a) и уменьшении ($б$) угла наклона для $\mathrm{Pr} = 0.71, \mathrm{Ra} = 1.5 \times 10^4$; шаг по углу $15°$: *1, 2* – положительные и отрицательные значения функции тока

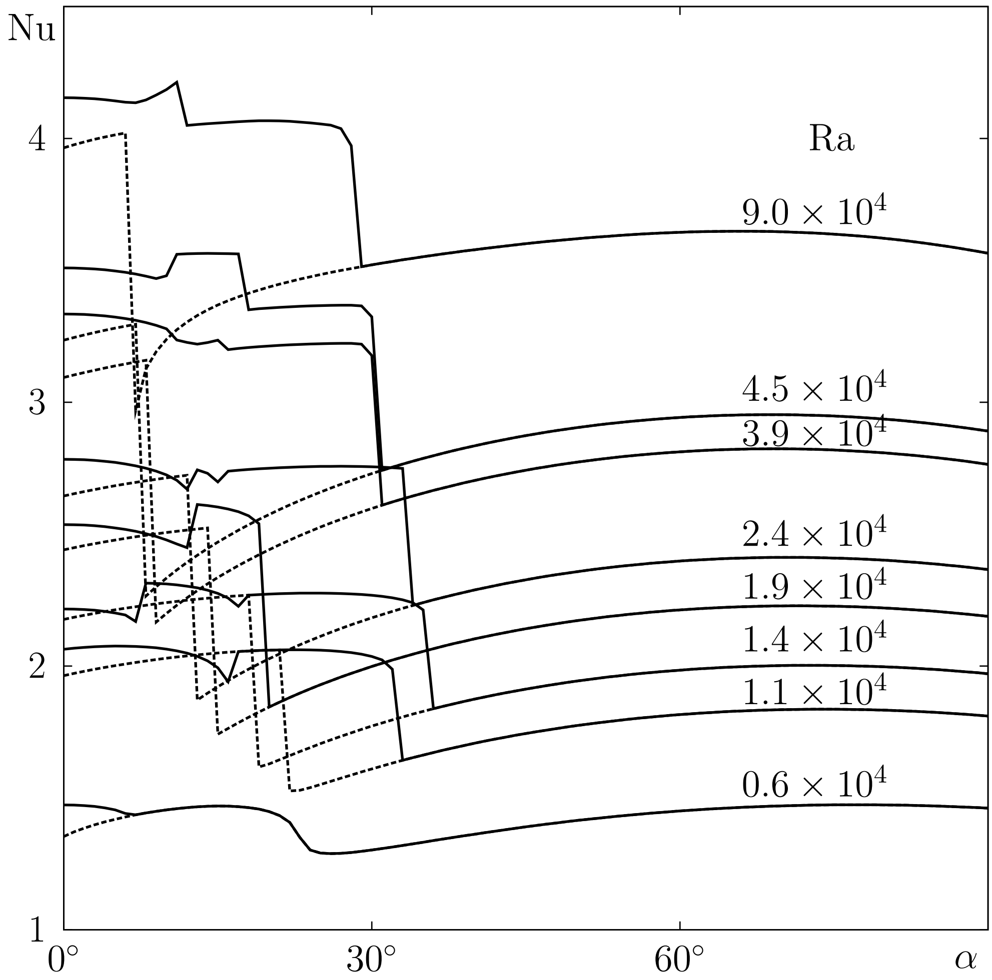
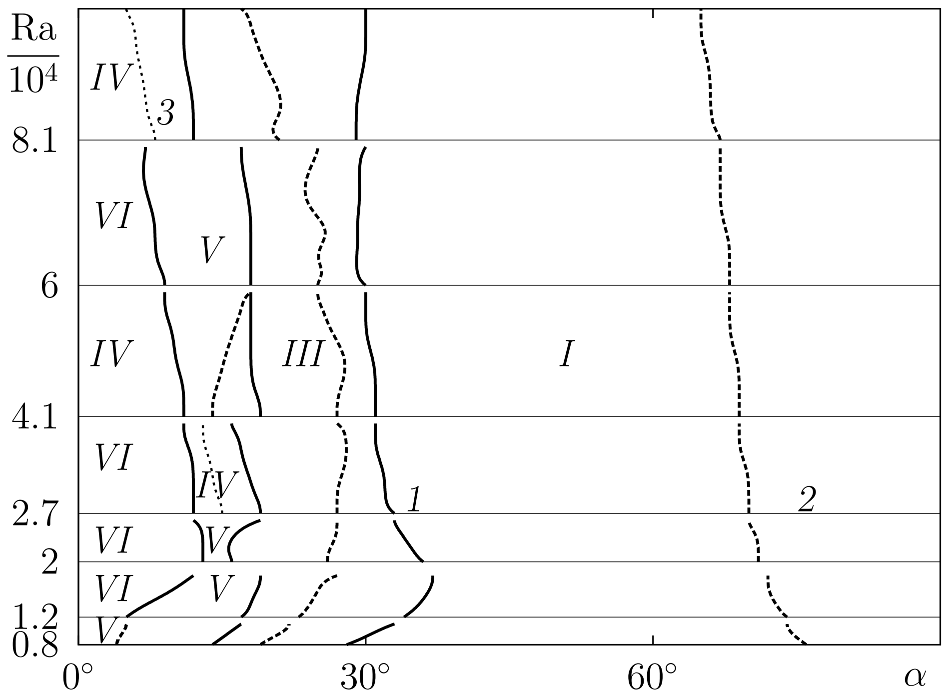


Рис. 4. Зависимость интенсивности теплообмена при увеличении (сплошные линии) и уменьшении (пунктирные линии) угла наклона при различных числах Ra при Pr = 0.71

ное поведение обнаруживалось лишь при двумерном моделировании [3], не считая экспериментальной работы [23].

Для каждого значения числа Ra получена зависимость интенсивности теплообмена от угла наклона (рис. 4). Точки разрыва соответствуют бифуркациям, проявляющимся в изменении числа конвективных ячеек. График $\mathrm{Nu}_\alpha(\mathrm{Ra})$ при фиксированном значении угла α также имеет разрывы, однако после постановки расчетов при ступеньчатом изменении числа Ra при заданном угле α подобное поведения обнаружено не было.

По данным рис. 4 построена диаграмма режимов в плоскости (Ra, α) с учетом локальных экстремумов. Анализ диаграммы показал, что возможно *а*



б

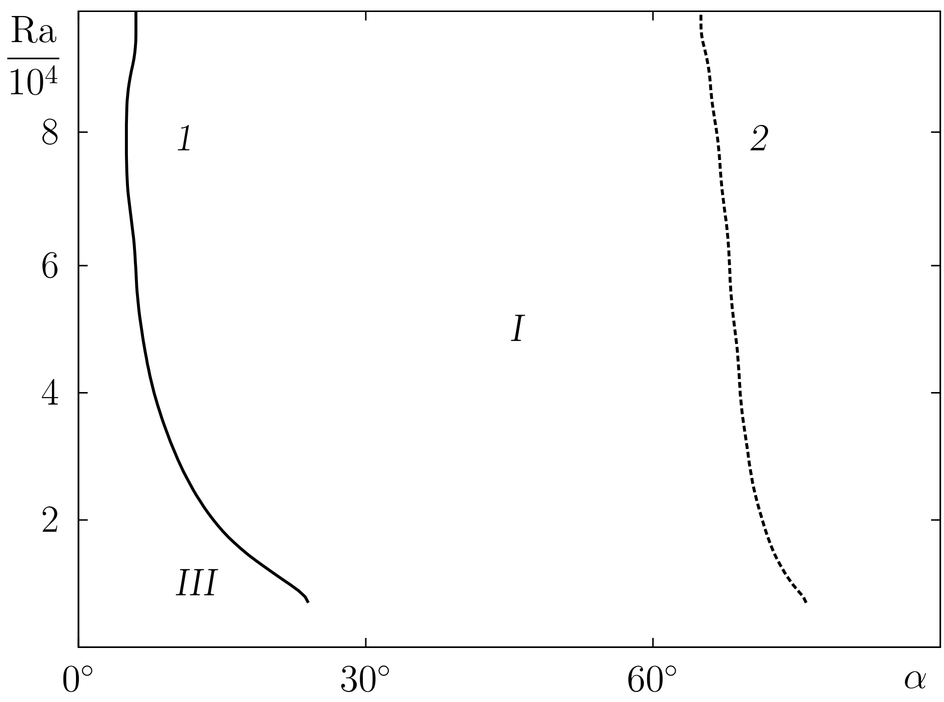


Рис. 5. Карта конвективных режимов при увеличении (*а*) и при уменьшении (*б*) угла наклона слоя: *1* – бифуркации, *2* – локальные максимумы, *3* – локальные минимумы; *I*-*VI* – 1-6 ячеек

два вида конвективного взаимодействия. В одном случае механизм образования бенаровских ячеек усиливается подъемно-опускным течением, а в другом случае, подъемно-опускное течение подавляет возникновение конвективных ячеек.

В **главе 4** формулируется линейная задача устойчивости конвективного движения (**параграф 4.1**) и дается описание псевдоспектрального метода решения этой задачи [31], отличающегося учетом ограничений по трем размерностям пространства вместо одной, и применением нотации, связанной с использованием дифференциальной матрицы (**параграф 4.2**).

Накладывая на стационарное решение $\mathbf{u}_0, T_0, p_0$ уравнений (1)-(3) бесконечно малые нейтральные возмущения $\mathbf{u}, T, p$, получаем после подстановки $\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}, T_0 + T, p_0 + p$ в (1)-(3) линейные уравнения возмущенного движения в скалярной форме

$$\left(\mathbf{u}_0\nabla - \nabla^2 + \frac{\partial u_0}{\partial x_1}\right) u + \frac{\partial u_0}{\partial x_2} v + \frac{\partial u_0}{\partial x_3} w + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \mathrm{Gr} T \gamma_1 \tag{6}$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial x_1} u + \left(\mathbf{u}_0\nabla - \nabla^2 + \frac{\partial v_0}{\partial x_2}\right) v + \frac{\partial v_0}{\partial x_3} w + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \mathrm{Gr} T \gamma_2 \tag{7}$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial x_1} u + \frac{\partial w_0}{\partial x_2} v + \left(\mathbf{u}_0\nabla - \nabla^2 + \frac{\partial w_0}{\partial x_3}\right) w + \frac{\partial p}{\partial x_3} = \mathrm{Gr} T \gamma_3 \tag{8}$$

$$\mathrm{Pr}\left(\frac{\partial T_0}{\partial x_1} u + \frac{\partial T_0}{\partial x_2} v + \frac{\partial T_0}{\partial x_3} w\right) + \left(\mathrm{Pr}\, \mathbf{u}_0\nabla - \nabla^2\right) T = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial x_3} = 0 \tag{10}$$

Для возмущений задаются однородные граничные условия того же рода (4)-(5), что и для решения

$$\mathbf{u}|_{\partial Q} = 0 \tag{11}$$

$$T|_{z=\pm 0.5} = 0, \quad \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=\pm A_L/2} = \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=\pm A_W/2} = 0 \tag{12}$$

Основной идеей метода выступает представление пробной функции $\mathbf{q} = (u, v, w, T, p)^T$ решения задачи (6)-(10) в виде интерполяционного многочлена

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^{N_1 N_2 N_3} \mathbf{q}_r \tilde{L}_r(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{k=1}^{N_3} \mathbf{q}_{ijk} \tilde{L}_i(x) \tilde{L}_j(y) \tilde{L}_k(z) \tag{13}$$

с узлами в нулях полинома Чебышева

$$\mathbf{x}_r = \left(-\cos\frac{(i-1)\pi}{2N_1}, -\cos\frac{(j-1)\pi}{2N_2}, -\cos\frac{(k-1)\pi}{2N_3}\right)$$

$$r = (iN_2 + j)N_3 + k, \quad i = \overline{1, N_1}, \quad j = \overline{1, N_2}, \quad k = \overline{1, N_3}$$

Базисные полиномы $\tilde{L}_i, \tilde{L}_j, \tilde{L}_k$ являются модифицированными классическими полиномами Лагранжа $L_i(x), L_j(y), L_k(z)$, удовлетворяющими граничным условиям задачи

$$\tilde{L}_i(x) = [(x - x_i)(c_i x + d_i) + 1]L_i(x)$$
$$\tilde{L}_j(y) = [(y - y_j)(c_j y + d_j) + 1]L_j(y)$$
$$\tilde{L}_k(z) = [(z - z_k)(c_k z + d_k) + 1]L_k(z),$$

где неизвестные коэффициенты $c_i, c_j, c_k, d_i, d_j, d_k$ определяются из линейной системы, получаемой после подстановки решения (13) в граничные условия (11)-(12).

Коэффициенты разложения $\mathbf{q}_r$ принимают конкретный физический смысл и задают значения решения в узловых точках $\mathbf{x}_r$. Уравнения (6)-(10) с подставленным в них решением (13) выполняются тождественно в точках коллокации, совпадающих с нулями полинома Чебышева. Таким образом, для решения исходной задачи требуется решить алгебраическую обобщенную спектральную задачу вида $A\mathbf{q}_r = \mathrm{Gr}B\mathbf{q}_r$.

Преимуществами данного подхода являются простота реализации метода по сравнению с методом Галеркина [24], применимость метода в отсутствии априорных данных о структуре возмущенного движения и существенная разреженность матриц A и B (рис. 6). Дискретная спетральная задача решалась с помощью процедуры из библиотеки LAPACK [32].

В **параграфе 4.3** проводится тестирование реализованного метода нахождения порога устойчивости течения для различных размерностей и ориентаций области. Повторены решения задачи Рэлея для трех видов граничных условий, налагаемых на скорость, получен порог устойчивости в вертикальном слое. Определены зависимости порога устойчивости течения в вертикальном и горизонтальном каналах от ширины канала, найдены критические числа Рэлея Ra_* положения равновесия в вертикальном прямоугольном

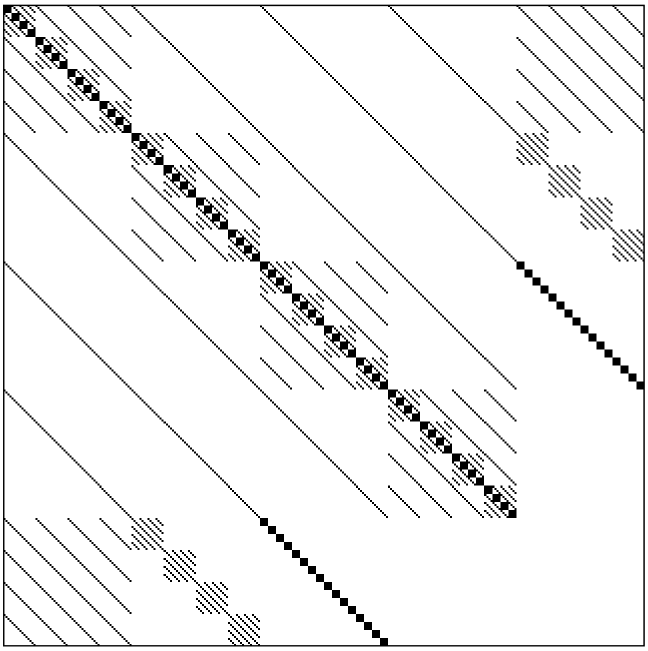


Рис. 6. Структура матрицы $||A - \mathrm{Gr}B||$ при $N_1 = N_2 = N_3 = 4$

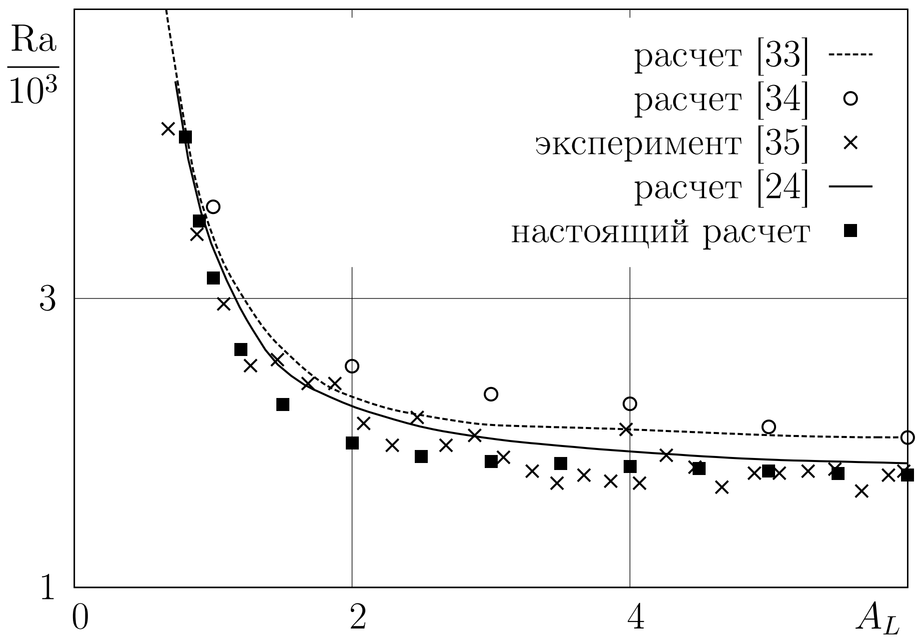


Рис. 7. Зависимость критического числа Ra_* от удлинения горизонтальной полости для $\mathrm{Pr} = 0.71$ при $A_W = 2$

канале. Повторно определен порог устойчивости в замкнутой области и проведено сравнение с результатами других работ (рис. 7). Получено хорошее совпадение результатов расчета с известными аналитическими решениями, данными теоретических работ и экспериментальным материалом.

В **главе 5** реализованный в четвертой главе метод анализа устойчивости применяется для поиска порога устойчивости конвективного течения в замкнутом объеме, найденного по методу, изложенному во второй главе. Также решена задача устойчивости основного течения для бесконечно длинного прямоугольного канала.

Глобальное подъемно-опускное течение в замкнутой полости зависит от числа Ra. Для нахождения порога его устойчивости необходимо решить спектральную задачу (6)-(12) для основного течения при числе Ra близком к критическому. Для этого при фиксированном угле α проводился численный расчет основного течения при ступеньчатом увеличении числа Ra. Решение спектральной задачи для каждого вычисленного основного течения задавало приближение Ra_*. На рис. 8 представлен фрагмент критической кривой $\mathrm{Ra}_*(\alpha)$. В области, лежащей выше кривой, основное течение теряет устойчивость, а возмущения приобретают вид поперечных конвективных валов.

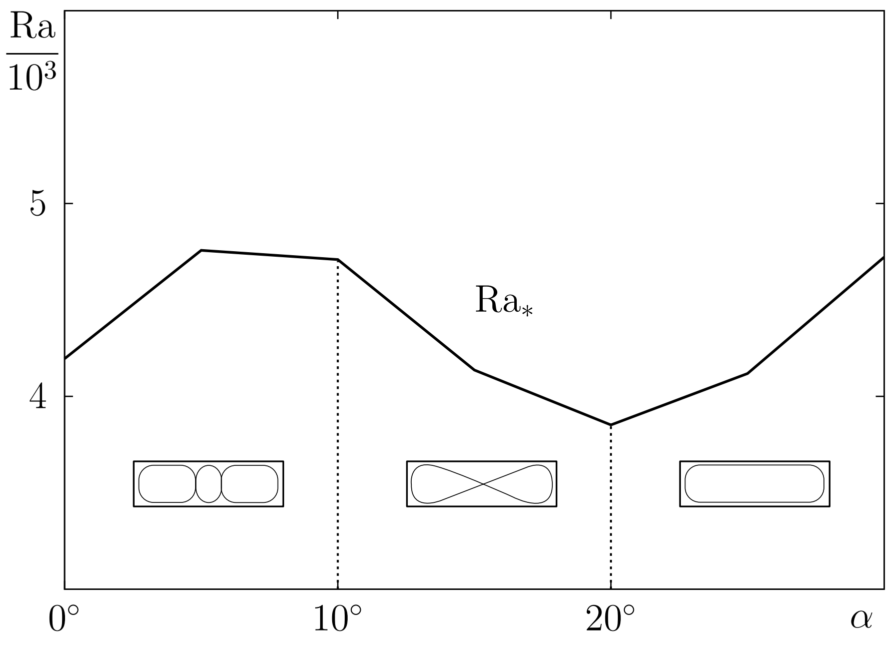


Рис. 8. Критическая кривая $\mathrm{Ra}_*(\alpha)$ для $\mathrm{Pr} = 0.71, A_L = 4, A_W = 0.5$

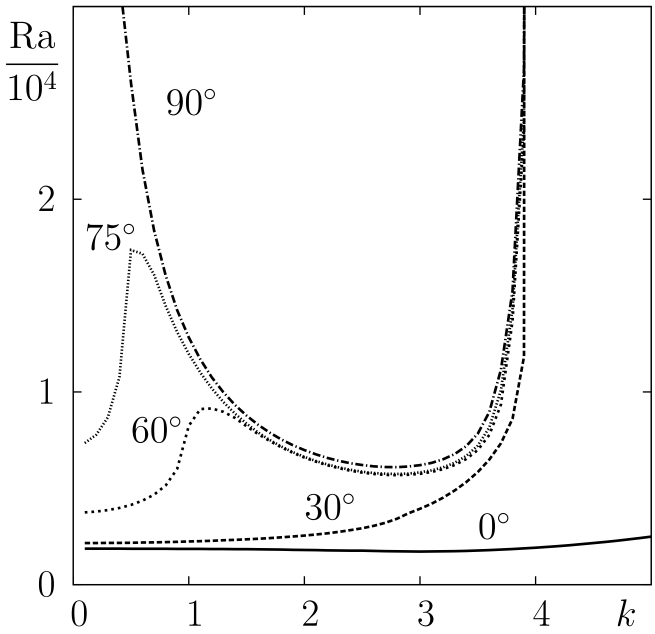


Рис. 9. Нейтральные кривые при $\mathrm{Pr} = 0.71, A_W = 4, A_L \to \infty$

Ниже кривой устойчивости схематично показаны конфигурации основных течений, устанавливающихся в полости до потери устойчивости.

Аналитическую формулу основного течения в прямоугольном канале можно приближенно получить из кубического профиля основного течения в бесконечном слое. Для этого необходимо ввести степенную поправку на ширину канала и нормировочный коэффициент, отличный от единицы в случае достаточно узких каналов

$$\frac{A}{6}\left(|Bz|^m \operatorname{sign} z - \frac{Bz}{4}\right)(1 - |y|^n)\sin\alpha, \quad B = 2^{\frac{m-3}{m-1}} \tag{14}$$

Порог устойчивости основного течения (14) вычислялся для различных значений A_W. По кривым устойчивости, изображенным на рис. 9, определялось направление критических возмущений. Если минимальное значение числа Ra соответствует волновому числу $k \to 0$, то более критичны продольные возмущения. При $k \gg 0$ критичны поперечные возмущения с длиной волны $2\pi/k$. Найдено, что граница перехода между поперечным и продольными конвективными валами слабо зависит от ширины канала (рис. 10), а волновое число больше для узких каналов при малых углах наклона (рис. 11).

В **заключении** приведены основные результаты и выводы по работе.

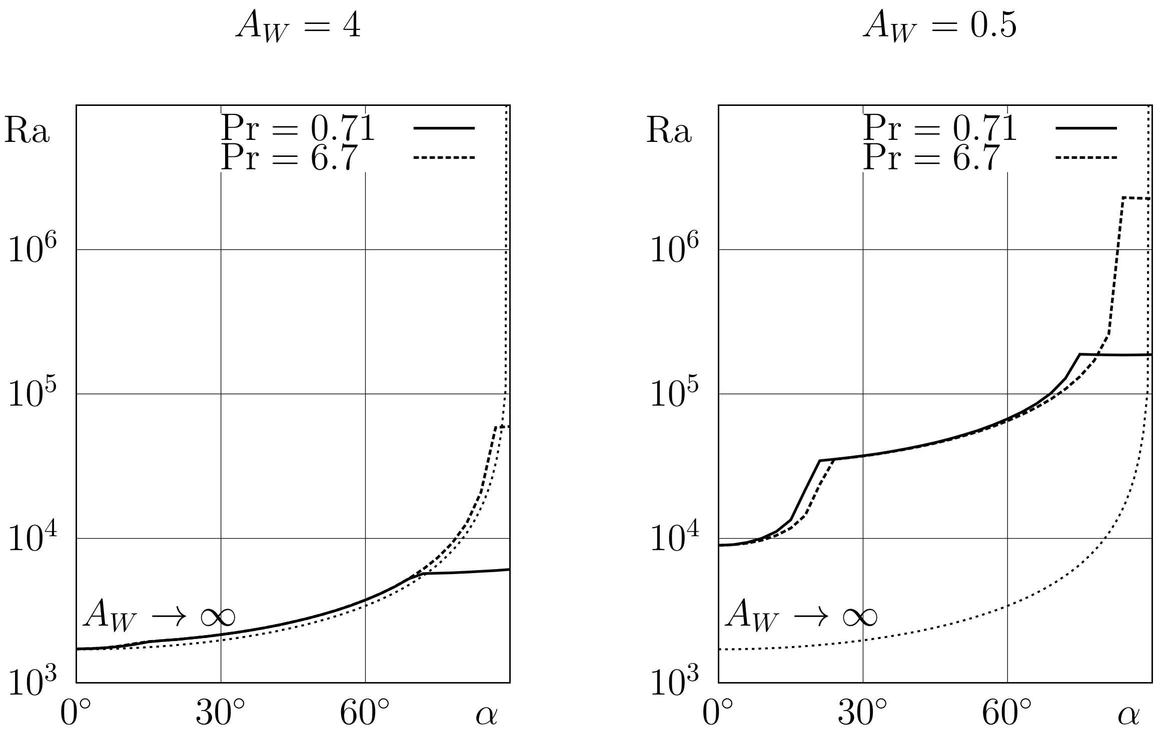


Рис. 10. Критические кривые при $A_L \to \infty$

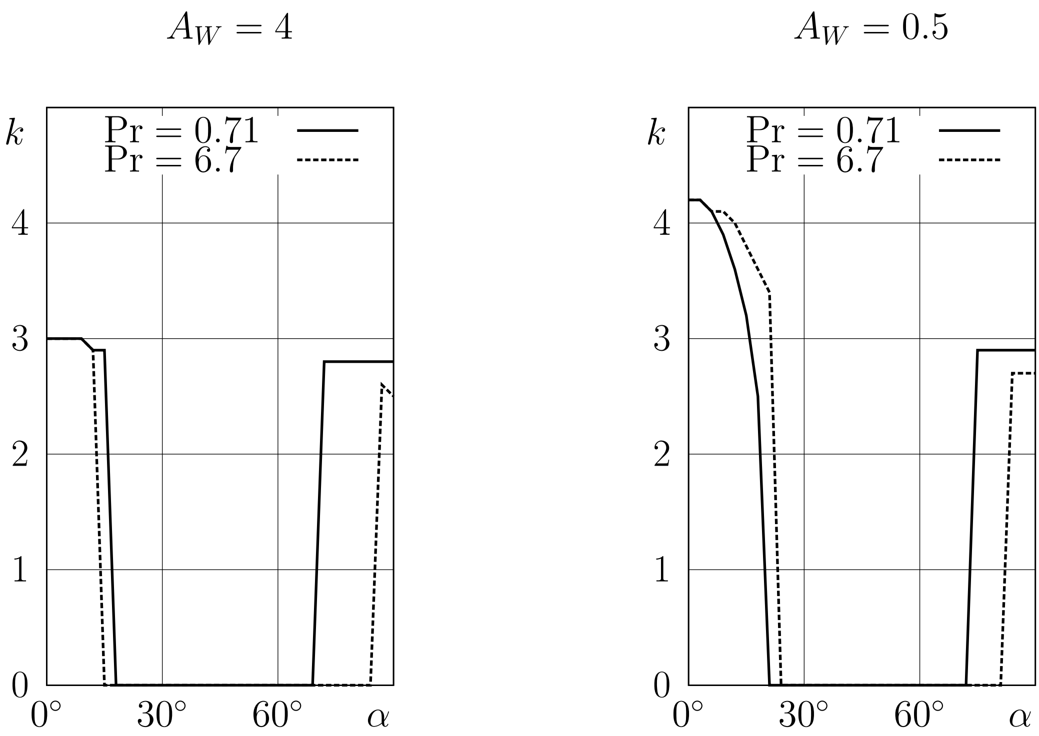


Рис. 11. Критические волновые числа при $A_L \to \infty$

3. Основные результаты и выводы

1) Реализован и протестирован численный метод решения трехмерных уравнений конвекции, записанных в приближении Буссинеска, для моделирования ламинарных, переходных и турбулентных режимов естественной конвекции в замкнутых прямоугольных объемах при произвольной ориентации вектора массовых сил.

2) Численно решена задача о тепловой гравитационной конвекции в трехмерной прямоугольной области при различной ориентации силы тяжести и обнаружен гистерезис в структуре течения и теплопереносе в зависимости от направления изменения вектора силы тяжести.

3) На основе полученных структур течения построена карта конвективных режимов по числу конвективных ячеек.

4) Получены зависимости числа Nu от угла наклона при различных начальных условиях и дана их интерпретация.

5) Реализован псевдоспектральный метод решения спектральной задачи для системы линейных уравнений в частных производных. Метод протестирован на примере решения задачи для амплитудных уравнений возмущенного конвективного движения. В зависимости от характера замкнутости объема использовались возмущения с периодичностью в разных направлениях. Получены хорошие совпадения как с точными решениями, так и с численно-аналитическими результатами других работ и экспериментальными данными. Произведено сравнение результатов расчета критического числа Рэлея по методу малых возмущений и прямым моделированием.

6) Решена задача линейной устойчивости конвективного движения в замкнутой области при характерных соотношениях $A_H = 4, A_W = 0.5$ для различных углов наклона полости относительно силы тяжести.

7) Предложена формула для аппроксимации решения уравнений естественной конвекции в режиме теплопроводности в наклонном канале.

8) Исследована устойчивость течения в наклонном канале при различных ориентациях для разных величин ширины канала. Обнаружена слабая зависимость критического угла смены направления более опасных конвективных возмущений.

Выражаю **благодарность** заведующему лаборатории механики сложных жидкостей ИПМех РАН и ее сотрудникам, принявшим участие в моей работе и оказавшим всяческое содействие. Я особенно признателен Николаю Васильевичу Никитину и Олегу Аркадьевичу Бессонову за ценные замечания и рекомендации в реализации численных методов, а также своему учителю и руководителю Вадиму Ивановичу Полежаеву, заинтересовавшему меня тематикой настоящей работы.

Работы автора по теме диссертации

1. ***Пивоваров Д.Е.*** **Трехмерные конвективные взаимодействия в наклонном продольном слое воздуха // МЖГ. 2013. № 3. С. 43–52.**

2. ***Пивоваров Д.Е.*** **Численное исследование конвективного теплообмена в наклонном продольном слое воздуха // Электронный журнал «Труды МАИ». 2013. № 68.**

3. *Пивоваров Д.Е.*, *Полежаев В.И.* Структуры течения и особенности теплообмена при свободной конвекции в наклонных слоях // Труды XVII Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева «Проблемы газодинамики и тепломассообмена в аэрокосмических технологиях». М.: Издательский дом МЭИ, 2009. С. 113–116.

4. *Пивоваров Д.Е.*, *Полежаев В.И.*, *Пунтус А.А.* Применение функций Бесселя для решения уравнения Пуассона в цилиндре с кусочно-непрерывными граничными условиями на торцах // Проектно-

конструкторские и производственные вопросы создания перспективной авиационной техники. М.: МАИ-ПРИНТ, 2009. С. 233–240.

5. *Пивоваров Д.Е.*, *Полежаев В.И.*, *Пунтус А.А.* Организация расчетов в задачах гидродинамики и последующая обработка результатов // 2-ая Всероссийская конференция ученых, молодых специалистов и студентов «Информационные технологии в авиационной и космической технике – 2009»: Тезисы докладов. М.: МАИ-ПРИНТ, 2009. С. 87.

6. *Пивоваров Д.Е.*, *Полежаев В.И.*, *Пунтус А.А.* Применение функций Бесселя для решения уравнения Пуассона в цилиндре с заданными кусочно-непрерывными граничными условиями // 8-ая международная конференция «Авиация и космонавтика – 2009»: Тезисы докладов. М.: МАИ-ПРИНТ, 2009. С. 81–82.

7. *Пивоваров Д.Е.* Реализация алгоритма численного решения уравнений Навье-Стокса для задач конвективного теплообмена // 9-ая Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2010»: Тезисы докладов. СПб.: Мастерская печати, 2010. С. 324–325.

8. *Пивоваров Д.Е.* Численное решение системы трехмерных уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска для задач конвективного теплообмена // II Международная научно-практическая конференция «Научно-техническое творчество молодежи – путь к обществу, основанному на знаниях»: Сборник научных докладов. М.: МГСУ, 2010. С. 436–437.

9. *Пивоваров Д.Е.* Моделирование трехмерных внутренних конвективных течений // Проблемы газодинамики и теплообмена в новых энергетических технологиях: Тезисы докладов XVIII Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством акад. РАН А.И. Леонтьева. М.: Издательский дом МЭИ, 2011. С. 79–80.

10. *Емелькин А.И.*, *Лебедев М.А.*, *Никитин С.А.*, *Пивоваров Д.Е.*, *Полежаев В.И.* Сетевая компьютерная лаборатория в задачах конвективного

теплообмена: разработка и первые применения // Проблемы газодинамики и теплообмена в новых энергетических технологиях: Тезисы докладов XVIII Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством акад. РАН А.И. Леонтьева. М.: Издательский дом МЭИ, 2011. С. 347–348.

11. *Пивоваров Д.Е.* Численное исследование гистерезиса и бифуркаций конвективных течений в наклонных прямоугольных слоях разного удлинения при различных параметрах Рэлея и Прандтля // Материалы международной конференции «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность». М.: НИИ механики МГУ, 2012. С. 176–177.

12. *Пивоваров Д.Е.* Численное исследование конвективного теплообмена в наклонном продольном слое воздуха // IV Всероссийский межотраслевой молодежный научно-технический форум «Молодёжь и будущее авиации и космонавтики»: Аннотация работ. М.: МАИ, 2012. С. 156–157.

13. *Лебедев М.А.*, *Никитин С.А.*, *Пивоваров Д.Е.*, *Полежаев В.И.* Сетевая компьютерная лаборатория в задачах конвективного теплообмена. Разработка и первые применения. Препринт № 992. М.: ИПМех, 2011. 39 с.

Список используемой литературы

14. *Daniels K.E.*, *Plapp B.B.*, *Bodenschatz E.* Pattern Formation in Inclined Layer Convection // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. № 23. P. 5320–5323.

15. *Polezhaev V.I.*, *Myakshina M.N.*, *Nikitin S.A.* Heat transfer due to buoyancy-driven convective interaction in enclosures: Fundamentals and applications // Int. J. Heat Mass Transfer. 2012. V. 55. № 1–3. P. 156–165.

16. *Bodenschatz E.*, *Pesch W.*, *Ahlers G.* Recent developments in Rayleigh-Benard convection // Annu. Rev. Fluid Mech. 2000. V. 32. P. 709–778.

17. *Гершуни Г.З.*, *Жуховицкий Е.М.* Об устойчивости плоскопараллельного конвективного движения относительно пространственных возмущений // ПММ. 1969. Т. 33. № 5. С. 855–860.

18. *Hart J.E.* Stability of the flow in a differentially heated inclined box // J. Fluid Mech. 1971. V. 47. № 3. P. 547–582.

19. *Clever R.M.*, *Busse F.H.* Instabilities of longitudinal convection rolls in an inclined layer // J. Fluid Mech. 1977. V. 81. № 1. P. 107–127.

20. *Ruth D.W.*, *Raithby G.D.*, *Hollands K.G.T.* On the secondary instability in inclined air layers // J. Fluid Mech. 1980. V. 96. № 3. P. 481–492.

21. *Buchberg H.*, *Catton I.*, *Edwards D.K.* Natural Convection in Enclosed Spaces—A Review of Application to Solar Energy Collection // J. Heat Transfer. 1976. V. 98. № 2. P. 182–188.

22. *Yang H.Q.*, *Yang K.T.*, *Lloyd J.R.* Laminar natural-convection flow transitions in tilted three-dimensional longitudinal rectangular enclosures // Int. J. Heat Mass Transfer. 1987. V. 30. № 8. P. 1637–1644.

23. *Symons J.G.*, *Peck M.K.* Natural Convection Heat Transfer Through Inclined Longitudinal Slots // J. Heat Transfer. 1984. V. 106. № 4. P. 824–829.

24. *Kirchartz K.R.*, *Oertel J.H.* Three-dimensional thermal cellular convection in rectangular boxes // J. Fluid Mech. 1988. V. 192. P. 249–286.

25. *Ермаков М.К.*, *Никитин С.А.*, *Полежаев В.И.* Система и компьютерная лаборатория для моделирования конвективного тепло- и массообмена // МЖГ. 1997. № 3. P. 22–38.

26. *Nikitin N.* Finite-difference method for incompressible Navier-Stokes equations in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates // J. Comput. Phys. 2006. V. 217. № 2. P. 759–781.

27. *Frigo M.*, *Johnson S.G.* The Design and Implementation of FFTW3 // Proc. of the IEEE. 2005. V. 93. № 2. P. 216–231.

28. *Nikitin N.* Third-order-accurate semi-implicit Runge-Kutta scheme for incompressible Navier-Stokes equations // Int. J. Num. Methods in Fluids. 2006. V. 51. № 2. P. 221–233.

29. *Дайковский А.Г.*, *Полежаев В.И.*, *Федосеев А.И.* Численное моделирование переходного и турбулентного режимов конвекции на основе нестационарных уравнений Навье-Стокса. Препринт № 101. М.: ИПМех, 1978. 65 с.

30. *Бессонов О.А.* Эффективный метод расчета течений несжимаемой жидкости в областях регулярной геометрии. Препринт № 1021. М.: ИПМех, 2012. 59 с.

31. *Павловский Д.С.* Решение задачи конвективной устойчивости многокомпонентных жидкостей. Препринт № 416. М.: ИПМех, 1989. 37 с.

32. *Anderson E.*, *Bai Z.*, *Bischof C.*, *Blackford S.*, *Demmel J.*, *Dongarra J.*, *Du Croz J.*, *Greenbaum A.*, *Hammarling S.*, *McKenney A.*, *Sorensen D.* LAPACK Users' Guide. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.

33. *Davis S.H.* Convection in a box: linear theory // J. Fluid Mech. 1967. V. 30. P. 465–478.

34. *Catton I.* Convection in a Closed Rectangular Region: The Onset of Motion // J. Heat Transfer. 1970. V. 92. № 1. P. 186–188.

35. *Stork K.*, *Möller U.* Convection in boxes: experiments // J. Fluid Mech. 1972. V. 54. P. 599–611.

Пивоваров Дмитрий Евгеньевич

ПОРОГ УСТОЙЧИВОСТИ И ТРЕХМЕРНЫЕ СТРУКТУРЫ КОНВЕКЦИИ В ЗАМКНУТЫХ НАКЛОННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОБЪЕМАХ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Подписано к печати 20 сентября 2013 г. Заказ 29-2013. Тираж 80 экз.

Отпечатано на ризографе
Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской академии наук
119526, Москва, пр-т Вернадского 101, к.1