

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ ИМ. А.Ю. ИШЛИНСКОГО
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

КОСТИН Георгий Викторович

ВАРИАЦИОННЫЕ ПОДХОДЫ
К МОДЕЛИРОВАНИЮ И ОПТИМИЗАЦИИ
ДВИЖЕНИЙ УПРАВЛЯЕМЫХ
МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Д и с с е р т а ц и я
на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук
(специальность 01.02.01 — теоретическая механика)

Москва — 2013

Содержание

Введение 5

Глава 1. Вариационные формулировки задач динамики упругих механических систем

§1.1. Вариационные постановки задачи об управляемых движениях колебательной механической системы 30

§1.2. Метод интегро-дифференциальных соотношений в задаче о продольных движениях упругого стержня 41

§1.3. Вариационные подходы к решению начально-краевых задач в линейной теории упругости 48

§1.4. Вариационные формулировки задачи о поперечных перемещениях упругой балки 64

Глава 2. Интегро-дифференциальные подходы к расчету вынужденных движений колебательных систем

§2.1. Метод Ритца и вариационные постановки начально-краевых задач о движении механических систем 79

§2.2. Метод конечных элементов в задаче о продольных перемещениях упругого стержня 99

§2.3. Численное моделирование вынужденных движений упругого тела 117

§2.4. Вариационный подход к пространственной дискретизации уравнений движения упругой балки 130

§2.5. Модификация метода Галеркина в задачах о движении упругих конструкций 144

Глава 3. Вариационные и проекционные подходы к анализу собственных колебаний механических систем

§3.1. Регулярные подходы к построению собственных частот и форм колебаний упругих тел балочной формы 166

§3.2. Модели свободных продольных и поперечных колебаний упругих балок 186

§3.3. Моделирование и анализ собственных колебаний упругой призматической балки 202

Глава 4. Параметрическая оптимизация управляемых процессов в распределенных системах

§4.1. Алгоритм оптимизации поперечных перемещений упругой балки 224

§4.2. Вариационный подход к оптимизации продольных перемещений призматической балки 239

§4.3. Оптимизация управления с регуляризацией решения на основе МКЭ в задаче о движении упругого стержня 259

§4.4. Проекционный подход в задачах оптимального управления упругими системами 271

Глава 5. Прикладные задачи управления динамическими объектами с распределенными элементами

§5.1. Оптимальный поворот нагруженного упругого звена с электроприводом 281

§5.2. Моделирование и оптимизация движений мачтового автопогрузчика с вязкоупругими элементами.....	301
§5.3. Управление потоком вязкой сжимаемой жидкости в протяженном элементе трубопровода.....	319
Заключение	336
Литература	339

Введение

Одним из актуальных направлений в решении прямых и обратных задач динамики для физических систем с распределенными параметрами является разработка специальных подходов к эффективному моделированию динамических процессов и оптимальному выбору законов управления этими процессами. Для этого активно используются теория и методы математической физики, которые в настоящее время активно применяются и в других областях науки, например, в химии, биологии, экономике и т.д. Они также широко представлены в технике для моделирования различных систем и устройств.

Цели математической физики тесно связаны с исследованием управляемых процессов в системах с распределенными элементами, которые обычно занимают некоторую область пространства (сплошные среды, конструкции и т.п.). Величины, характеризующие состояние динамической системы и ее поведение, зависят обычно от пространственных координат и времени.

Модели, которые описывают поведение таких систем, можно разделить на три иерархических уровня: описание влияния на распределенные элементы внешней среды, характеристика взаимодействия элементарных объемов системы и свойства одного элемента объема. Отношения на первом уровне определяются внешними факторами, включая, в общем случае, граничные и начальные условия. Второй уровень соответствует взаимодействию элементарных объемов в соответствии с законами состояния и учитывает, например, перенос материальных частиц в пространстве, что дает возможность получить уравнения процессов межэлементного взаимодействия. Наконец, третий уровень определяет свойства среды в элементарном объеме.

Системы с распределенными параметрами, как правило, описываются уравнениями в частных производных, или уравнениями матема-

тической физики (УМФ), а в некоторых случаях, интегральными или интегро-дифференциальными соотношениями. Эти модели могут включать функционалы от неизвестных переменных. В вариационных подходах часто требуется, чтобы такие функционалы достигали своего стационарного значения на допустимом множестве функций, что соответствует некоторой стационарной точке, иными словами, искомому решению задачи. Это, как правило, связано с постановкой задачи, основанной на соответствующем вариационном принципе, который имеет определенный физический смысл. В некоторых случаях решение может соответствовать экстремуму функционала. Классификация систем уравнений в частных производных и их связи с вариационным исчислением можно найти в классических книгах Крылова [59], Куранта и Гильберта [60], Михлина [67], Соболева [78], Релея [79], а также Морса и Фешбаха [159].

Разнообразие природных явлений порождает широкий спектр подходов к решению задач математической физики. Подробное описание разработанных методов и подходов в области вычислительной механики представлены в [59, 180]. Среди этих методов, следует обратить особое внимание на три направления, которые получили, особенно в последние годы, значительное развитие, а именно, вариационное исчисление, проекционные методы и метод наименьших квадратов (МНК). Эти подходы имеют как свои преимущества, так и некоторые недостатки, которые хотелось бы обсудить.

Вариационные принципы и их применение во многих областях физики имеют давнюю историю. Тем не менее, значение этих принципов стало более понятно только благодаря достижениям в методе конечных элементов (МКЭ), который восходит к работам Крылова [59], Куранта [110], Турнера [187]. С тех пор были получены неоднократные подтверждения того, что теория вариационного исчисления является надежным инструментом в математическом обосновании методов МКЭ.

И наоборот, быстрое развитие этого метода стимулировало совершенствование вариационных подходов. Основные идеи МКЭ можно найти, например, в книгах [98, 167, 182, 189].

В последнее время интенсивно развиваются численные алгоритмы моделирования на основе вариационных подходов. В [30, 67] рассматриваются приложения этих методов в различных областях механики, физики и техники. Описываемые авторами вариационные подходы позволили эффективно и с весьма высокой точностью получить ряд новых численных результатов.

Итак, в приложениях все более значимую роль играет МКЭ, тесно связанный с вариационным исчислением. Другие подходы, например метод Петрова–Галеркина [97, 102] или метод наименьших квадратов [148], также активно развиваются в настоящее время для численного моделирования динамических процессов. Для повышения эффективности и достоверности расчетов применяются различные априорные и апостериорные оценки качества получаемых решений [179].

Среди вариационных постановок УМФ следует выделить принципы минимума полной потенциальной энергии и дополнительной энергии, принцип Гамильтона–Остроградского (см., например [25]). Альтернативный подход к решению начально-краевых задач математической физики, основывается на преобразованиях Лапласа [146]. Следует отметить систематический подход к выводу вариационных формулировок, основанный на преобразовании Фридрикса.

Важной особенностью вариационных принципов является то, что основные уравнения, описывающие поведение системы, непосредственно следуют из необходимых условий стационарности соответствующего функционала. Кроме того, вариационные формулировки имеют ряд преимуществ по сравнению с постановками задач, описываемых дифференциальными уравнениями в обыкновенных или частных производных.

Во-первых, вариационное исчисление подходит для преобразования задачи, изначально заданной в производных, к эквивалентной, которая чаще решается проще, чем исходная. В вариационной формулировке при дополнительных ограничениях это преобразование обычно осуществляется с помощью метода множителей Лагранжа, который является очень эффективной и регулярной процедурой. С ее помощью можно получать семейства вариационных принципов, которые являются эквивалентными друг к другу [116].

Во-вторых, если точное решение задачи не может быть найдено, то вариационный метод часто приводит к различным конечномерным формулировкам для нахождения приближенного решения.

В-третьих, реализация вариационных принципов обычно гарантирует стабильность численных алгоритмов и оптимальность приближенных решений. При этом матрицы, определяющие конечномерную систему уравнений, как правило, оказываются симметричными и положительно определенными.

Среди недостатков вариационного подхода, можно отметить, что не все задачи математической физики порождают вариационные принципы. Следует подчеркнуть при этом, что постоянно предлагаются способы расширения области применимости вариационного исчисления. Например, в [178] обоснованы минимизационные постановки задач для некоторых нестандартных краевых условий в линейной теории упругости. Как правило, возникают также определенные математические трудности при построении оценок качества получаемых аппроксимаций [183]. При нахождении приближенных решений вариационной задачи, которая формулируется с помощью множителей Лагранжа, например, на основе принципа Ху-Васидзу в теории упругости [25], задача теряет свойство положительной определенности и симметрии.

Проекционные методы, такие как методы Бубнова–Галеркина [102], Петрова–Галеркина [97], и т.д., лишены некоторых недостатков, прису-

щих вариационным подходам. Во-первых, эти методы применимы для задач, для которых вариационные принципы еще не сформулированы. Во-вторых, проекционные методы являются более гибким аппаратом при составлении системы определяющих уравнений. Недавнее исследование и обзор, касающийся модификаций метода Галеркина, основанных на разнообразных способах выбора пробных и тестовых функций, можно найти в [117].

У проекционных подходов, безусловно, тоже есть свои недостатки. В частности, выбор тестовых и пробных функций представляет собой процедуру, которая не всегда однозначна и проста. Иногда бывает трудно обеспечить устойчивость численных алгоритмов и их сходимости, особенно в нелинейных задачах. Так же как и для вариационных подходов, зачастую довольно трудно построить надежные оценки качества приближенного решения.

Третий подход, который также можно отнести к методам математической физики, — это метод наименьших квадратов. Общий обзор развития МНК, включая процедуры, разработанные на основе МКЭ, представлены в [104]. Действительно, выглядит довольно привлекательным составить неотрицательный функционал следующим образом: все уравнения, описывающие изучаемое явление, возводятся в квадрат, суммируются и интегрируются в пространстве и времени. Кроме того, заранее известно, что глобальный минимум этого интеграла равен нулю. Обычные стратегии МКЭ могут быть применены в МНК для нахождения приближенных решений.

При этом, соответственно могут быть построены неявные двусторонние оценки качества решения. Нижняя грань функционала известна, а значение функционала на приближенном решении всегда может быть выбрано в качестве верхней границы.

Тем не менее, следует отметить, что уравнения Эйлера–Лагранжа (необходимые условия стационарности) для получаемых таким образом

задач минимизации, в общем случае, отличаются от системы уравнений в частных производных, которая порождает этот функционал. Иными словами, задача, полученная согласно МНК, является вариационным принципом для другой краевой или начально-краевой задачи. Таким образом, вопросы существования и единственности решения этой системы требуют детального исследования.

Одной из общих характерных черт, присущей всем вышеупомянутым методам, является некоторая неоднозначность в формулировке конечномерных аппроксимаций решения. Не ясно, какие из соотношений нужно ослаблять, а какие должны быть выполнены точно.

В качестве примера рассмотрим уравнения линейной теории упругости. В первоначальной постановке присутствуют 15 переменных, а именно, 12 компонент тензоров напряжений и деформаций, а также три компоненты вектора перемещений, которым соответствуют 9 уравнений в частных производных (уравнения равновесия и кинематические соотношения) и 6 алгебраических, определяющих соотношения состояния (закон Гука).

Если все уравнения, включая граничные условия, учитываются в интегральной (слабой) форме, это приводит к принципу Ху–Васидзу, формулировка которого содержит 18 переменных (добавлены три множителя Лагранжа) и на неизвестные функции не накладываются никакие ограничения. Физический смысл множителей Лагранжа следует из условий стационарности соответствующего функционала. Если потребовать локального выполнения некоторых определяющих уравнений, число независимых переменных в вариационной формулировке может быть уменьшена. Например, можно вывести принцип Хеллингера–Рейсснера, в котором присутствует 12 неизвестных функций. После последовательного исключения переменных получается классический принцип минимума полной потенциальной энергии, в котором остаются только три переменные, компоненты вектора перемещений. Экви-

валентность этих принципов была теоретически обоснована, например в [25, 103]. Однако с практической точки зрения понятно, что существенно легче решать задачу относительно только трех переменных вместо пятнадцати.

Подобная неопределенность характеризует и проекционные подходы (метод Галеркина). При составлении интегральных проекций уравнений системы большое значение имеет соответствующий выбор пространств пробных и тестовых функций.

В дополнение к ограничениям, которые были отмечены выше, метод МНК весьма чувствителен к выбору весовых коэффициентов. Наличие таких факторов обусловлено тем, что определяющие соотношения имеют различную размерность. Уравнения равновесия, например, имеют физическую размерность силы, отнесенной к единице объема, соотношения закона Гука могут быть, например, безразмерными, как и кинематические условия, граничные условия могут быть даны в единицах длины либо силы на единицу площади. Отметим, что определение соответствующих весовых коэффициентов для данной системы уравнений является не простой задачей.

Подход, в котором сохраняется ряд преимуществ и учитываются недостатки, присущие упомянутым вариационным и проекционным методам, а также технике МНК, обсуждается в этой работе. Будем ссылаться на него, как на метод интегро-дифференциальных соотношений (МИДС) [43].

Суть этого подхода заключается в том, что часть определяющих уравнений должна быть выполнена точно, а другие соотношения учитываются в интегральном виде. Соотношения, которые должны быть ослаблены, определяются априори, часто с физической точки зрения.

Например, в задачах теплопроводности, только закон Фурье учитывается интегрально, в то время как первый закон термодинамики, начальные и граничные условия выполняются точно [172]. При числен-

ном моделировании линейных задач теории упругости, приближенные поля напряжений и перемещений строго выполняют уравнения равновесия, кинематические соотношения и граничные условия. В то время как соотношения закона Гука ослаблены, т.е. выполнены в некотором интегральном смысле [43] или спроектированы на некоторое конечномерное подпространство функций [56].

Приближенное решение интегро-дифференциальной задачи находится в этом подходе путем минимизации соответствующего квадратичного функционала при дифференциальных ограничениях в виде уравнений равновесия, кинематических соотношений и граничных условий. Значение функционала на допустимом приближенном решении может быть напрямую использовано для оценки качества полученных аппроксимаций, в то время как подынтегральное выражение служит в качестве локальной квадратичной невязки решения. Подобная формулировка полностью согласуется с идеями МНК метода, но при этом она одновременно является, как показано, и вариационным принципом. Таким образом, вариационные методы и МНК в этом случае объединяются.

Исследования показали, что существуют и другие положительно определенные квадратичные формы, представляющие закон Гука, которые не обязательно являются полными квадратами, но тоже могут составить основу для вариационных принципов. Таким образом был построен функционал энергетической ошибки, который позволяет разделить интегро-дифференциальную задачу, первоначально сформулированную в терминах напряжений и перемещений, на две независимые подзадачи: одну в перемещениях (принцип минимума полной потенциальной энергии), другую в напряжениях (принцип минимума полной дополнительной энергии) [49, 122].

Для вариационных формулировок, следующих из МИДС, были получены двусторонние энергетические оценки качества приближенного решения [122]. Были разработаны конечноэлементные алгоритмы, ко-

торые позволяют не только вычислить величину интегральной ошибки, но и разработать стратегии адаптивного уточнения сетки, для того чтобы улучшить качество решения [130].

В соответствии с идеями МИДС был разработан проекционный подход, как модификация метода Петрова–Галеркина. При использовании полудискретных полиномиальных аппроксимаций и проекционной техники с высокой точностью могут решаться трехмерные статические и динамические задачи теории упругости [55, 76, 142].

Среди упрощенных моделей, предложенных для приближенных решений задач о движении протяженных упругих систем, особое место занимает теория балок, основанная на интуитивных гипотезах, выдвинутых Я. Бернули [31]. Несмотря на то, что эта теория применима для широкого класса задач, она не учитывает влияние на напряженно-деформированное состояние упругой балки сдвиговых перемещений, деформации поперечного сечения, связи продольных и поперечных движений, обусловленной величиной коэффициента Пуассона, и т. п.

Были предложены уточняющие формулы, позволяющие учесть сжатие–растяжение поперечных сечений при продольных перемещениях (поправка Релея [79, 155]), а также сдвиги и повороты сечений при упругом изгибе (модель балки Тимошенко [81, 82]). В классической модели кручения балки, рассмотренной, например в [83], учитывается деформация, которая находится из решения плоской задачи Пуассона. В модели [168], предложенной Райсснером, используется вариационный подход для вывода уравнений, описывающих упругий изгиб тонкой пластины (балки), для определенного заранее распределения полей перемещений в поперечном направлении. Вариационные формулировки применяются для вывода совместных балочных уравнений более высокого порядка, различным образом учитывающих пространственное распределение перемещений и напряжений в упругом теле [153]. Предложены балочные

модели для конструкций составленных из анизотропных или композиционных материалов [101, 166]

Локальные соотношения закона Гука могут быть ослаблены не только интегрально, но и путем применения асимптотического подхода [47]. Такой подход дает возможность работать уточняющие балочные модели, которые могут служить надежным инструментом для анализа сложных конструкций [52]. Раздельные аппроксимации, включая конечномерные представления по части координат и переменные коэффициенты от одной выделенной координаты, были применены в МИДС, чтобы свести исходную систему УМФ к конечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [48, 50, 137].

Отметим, что МИДС направлен прежде всего на разработку более эффективных численных процедур, основанных на идеях вариационного исчисления и дискретных аппроксимаций искомых функции. Подходы, обсуждаемые в этой работе, были применены не только к статическим и спектральным задачам теории упругости, а также к прямым и обратным начально-краевым задачам механики деформируемого твердого тела [54], гидро- и термодинамики [175].

В последние десятилетия активно разрабатываются разные стратегии управления системами, динамика которых может быть описана в рамках математических моделей с распределенными параметрами. Управляемые процессы, такие как колебания, теплопроводность, диффузия и т.п., проявляются в различных областях науки и техники. Различные постановки задач управления динамическими системами и методы их решения обсуждаются, например, в [23, 58, 90].

При теоретическом исследовании функционирования сложных технических объектов, таких как манипуляционные роботы, крупногабаритные космические аппараты и др., возникает ряд задач динамики и управления движением систем связанных упругих и твердых тел. Стремление повысить эффективность системы приводит к необходимо-

сти облегчения конструкции, что может вызвать существенную упругую податливость и, как следствие, нежелательные колебания, ухудшающие показатели качества динамического процесса (точности, быстродействия, энергозатрат и т.п.) [18, 21, 62, 160].

Теоретическая основа для теории оптимального управления, в применении к динамическим системам в частных производных заложена в [63, 118, 154, 186]. Эта теория распространена на случай гиперболических уравнений в работах [24, 94, 106]. Расширенное введение и обзор по теории управления колебаниями в системах с распределенными параметрами можно найти в [145]. Регулирование биений в упругих сетях исследовалось в [115, 149, 151]. В [77] рассматриваются вопросы классического вариационного исчисления и теории оптимального управления систем с распределенными параметрами: принцип максимума, метод функций Ляпунова в сочетании с методом динамического программирования, задача аналитического конструирования регуляторов и метод распределенных моментов.

Моделирование таких процессов обычно проводится с использованием систем дифференциальных уравнений в частных производных. Практическое построение законов управления осуществляется, как правило, через различные способы дискретизации этих уравнений. Одним из классических методов построения решений и анализа уравнений математической физики (УМФ) является метод разделения переменных [60, 69, 84]. В этом подходе решение обычно представляется в виде бесконечного ряда, члены которого — это произведение функций, одна из которых зависит только от времени, а другие от пространственных координат. Подобное разложение требует построения ортонормированного базиса, составленного из собственных функций, которые могут быть получены только для простейших задач. Даже для одномерного случая с однородным распределением параметров не всегда можно выразить базисные функции (коэффициенты Фурье) в аналитическом

виде. Требуется эффективные численные методы решения краевых задач на собственные значения [95].

В [85] излагаются основные принципы построения и методы синтеза бесконечномерных систем регулирования с разрывными управляющими воздействиями. На основе преднамеренного введения скользящих режимов разработана процедура синтеза управления, обеспечивающего в бесконечномерной системе желаемые динамические свойства и инвариантность к внешним возмущениям и вариациям параметров объекта. Математические методы решения задач оптимизации процессов (динамическое программирование, принцип максимума, проблема моментов) тепло- и массообмена рассмотрены в [22, 32]. Основное внимание уделяется различным математическим методам решения таких задач. Книга [35] представляет собой систематизированное изложение и дальнейшее исследование общих математических постановок, решений и анализа задач об оптимальном управляемом демпфировании или возбуждении колебаний упругих стержней и пластин на основе принципа максимума Л.С.Понтрягина.

Для построения приближенных законов управления часто используются асимптотические методы. Так, для колебательных систем можно применять квазистационарное приближение, если время процесса гораздо меньше характерного периода колебаний [2, 38]. В противоположность этому, используются методы осреднения в случае, когда необходимо управлять динамическими системами с достаточно высокими собственными частотами [2, 38].

Как уже было сказано выше, для построения законов управления системами с распределенными параметрами чаще используются численные подходы или методы «ранней дискретизации» (вначале проводится дискретизация системы, и лишь затем строится управление). В этом случае начально-краевая задача сводится, например, к системе ОДУ с помощью методов Рэлея–Ритца, Бубнова–Галеркина, метода

конечных разностей [152], МКЭ или других подходов теории аппроксимации [99, 109]. Известны также и методы прямой дискретизации, в которых исходная система сводится к системе алгебраических уравнений (см., например [150]).

Часто для решения задач об управлении и оптимизации динамическими процессами в колебательных системах используется приближенная математическая модель в виде конечного набора упругосвязанных материальных точек [14, 34].

В отличие от «ранней дискретизации», в подходах так называемой «позней дискретизации» вначале строится закон управления напрямую для системы с распределенными параметрами и лишь затем численно находятся неизвестные функции. Отметим, что стратегии «бесконечномерного» управления часто опираются на специальные методы спектрального анализа линейного оператора исследуемой системы [100, 111]. Подобные подходы используются в задачах стабилизации конструкций с податливыми элементами [61]. В [114] эти подходы к решению задач управления системами УМФ с ограничениями был расширен на случай гиперболических уравнений.

В [190] на основе метода Галеркина было определено семейство приближенных решений уравнения, описывающего изгибы однородной упругой балки, и выведены достаточные условия устойчивости поперечных движений для полученных конечномерных систем уравнений. Дополнительно было доказано, что равновесие найденных приближений может быть обеспечено управлением по обратной связи на основе наблюдений, и предложен явный синтез управления.

Иногда необходимо учитывать стохастический характер внешних воздействий на управляемые системы. Локальные решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана используются в задаче управления поперечными колебаниями упругих систем, находящихся под действием гауссовского белого шума переменной интенсивности, для минимизации

ции математического ожидания полной энергии системы [156]. Изучены способы управления при помощи актуаторов, сосредоточенных в заданных точках системы, или с помощью распределенного по системе управления.

Подход, рассмотренный в [88, 89, 107, 108], позволяет в замкнутой форме построить распределенные ограниченные управления, которые переводят систему УМФ в заданное состояние за фиксированное время. Этот метод основан на сведении исходной системы к счетной системе независимых уравнений на основе Фурье-разложения. Вопросы о нахождении законов управления упругими и вязкоупругими системами с помощью граничных воздействий на основе этого подхода рассмотрены в [75].

В связи с оптимальным управлением и автоматическим регулированием большое внимание ученых и инженеров привлекают задачи о перемещении по заданной траектории. Обещающим направлением для эффективного решения задач подобного типа для систем с бесконечным числом степеней свободы является использование свойств дифференциальной «плоскостности», или плоского морфизма. Основная идея этого подхода заключается в том, что в некоторых частных случаях управляющая функция динамической системы может быть выражена через какую-либо из фазовых переменных и ее производные. Например, в [156] предложен рекурсивный алгоритм управления по обратной связи в комбинации с программным планированием траектории с использованием свойств плоскостности системы, описывающей процессы диффузии, конвекции и химической кинетики с переменными коэффициентами и нелинейным граничным управляющим воздействием.

В [188] для эффективного описания в режиме реального времени управляемых процессов в тепловой топке предложены две стратегии отслеживания траектории на основе свойств плоского морфизма. В этом варианте, УМФ сводятся с помощью метода характеристик к системе,

в которой каждой точке измерения объема подачи потребляемого материала соответствует обыкновенное дифференциальное уравнение.

Управления, выраженное как функция от выходной переменной и ее производных, строится в [113, 119, 157] посредством дискретизации УМФ с помощью метода разделения переменных. Соответствующие аппроксимации неизвестных функций описывают профиль температур в теплопроводящей системе.

В приложениях к распределенным динамическим системам все большую роль играют методы адаптивного управления. Основную сложность составляет реализация разработанных стратегий в режиме реального времени при наличии неопределенностей внутренних параметров и внешних возмущений. В [185] рассмотрены некоторые общие подходы к построению алгоритмов адаптивного управления, включающие: адаптивное управление с эталонной моделью, контроллеры с настраиваемой моделью, системы с обучением, идентификацией, и др.

В книге [147] рассматриваются основные теоретические и прикладные вопросы и дается обзор литературы в связи с проблемами адаптивного управления динамическими системами с неизвестными распределенными параметрами, которые описывают процессы кинетики, диффузии, конвекции, возникающие в таких областях, как химия, биология, медицина, энергетика, аэрокосмическая техника и т.п.

Вышеупомянутые подходы могут быть распространены и на другие классы обратных задач, например, оптимизации геометрических или механических параметров систем и конструкций [15, 16].

Одним из важных направлений развития МИДС является приложение к различным обратным задачам динамики. В [45, 51, 131, 134] разработаны алгоритмы параметрической оптимизации управления движением упругих систем балочного типа. Главная идея в этом подходе — две последовательных процедуры минимизации. После дискретизации параметров системы и управления находится минимум функционала

качества решения для произвольных констант управляющей функции. После этого оптимальное управление находится из условия экстремальности целевой функции. На основе МИДС развивались также и проекционные подходы, модификации метода Бубнова–Галеркина, для эффективного моделирования и оптимизации управляемых динамических процессов [96, 139, 162].

Разработка различных стратегий управления процессом теплопередачи в системе с распределенными параметрами была осуществлена в [161, 163]. Было предложено программное управление нагревом металлического стержня на основе метода конечных объемов, что позволило свести исходную систему УМФ к системе дифференциально-алгебраических уравнений. Для решения полученной системы и нахождения управляющего воздействия для задачи о следовании по температурной траектории в заданной позиции применялся пакет программ численной и интервальной арифметики VALENCIA-IVP. Кроме того с помощью разработанных интервальных процедур были получены гарантированные оценки тех внутренних параметров системы, которые не измерялись или не могли быть напрямую измерены в процессе нагрева.

В [164] интервальные методы использовались при анализа чувствительности и наблюдаемости, а также для нахождения областей достижимости при заданных законах управления. Метод интегро-дифференциальных соотношений был распространен для задач управления системами, описываемыми параболическими УМФ [96, 162]. В этом случае строго выполняются первый закон термодинамики, начальные и краевые условия, в то время как закон Фурье дается в слабой, интегральной формулировке.

Данная работа представляет результаты исследований, полученные в течение последних десяти лет в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук в области моделирования и оптимизации управляемых динамических систем с распределенными и сосредоточенными параметрами. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы.

В главе 1 в основном рассматриваются динамические системы с распределенными инерционными и упругими параметрами, определяемые линейными уравнениями в частных производных с начальными и граничными условиями. Наиболее известными примерами таких систем являются модели, описывающие в рамках линейной теории упругие движения тела, балки, струны, мембраны, пластины и т.п.

Приложение развиваемых подходов не ограничено лишь перечисленными моделями, поэтому в начале этой главы в §1.1 предлагаются две вариационные постановки задачи об управляемых движениях линейной упругой системы с конечным числом степеней свободы. Первая из этих задач сводится к условной минимизации неотрицательного квадратичного функционала, который представляет собой энергетическую невязку уравнений состояний, связывающих импульсы и скорости системы, а также упругие силы и перемещения. Из второй формулировки при задании определенных краевых условий по времени напрямую следует классический принцип Гамильтона–Остроградского. Показаны вариационные свойства обеих постановок исходной задачи Коши для рассмотренного типа механических систем и способы оценки точности приближенных решений.

В §1.2 на основе МИДС дается вариационная формулировка задачи о продольных движениях тонкого прямолинейного упругого стержня. Соотношения состояния связывающие нормальные силы в поперечном сечении стержня с его продольными деформациями и линейную плотность импульса со скоростями точек стержня заменяются интеграль-

ным равенством. Уравнение изменения импульса, начальные и краевые условия рассматриваются как локальные ограничения. Интегрально-дифференциальная формулировка сводится к вариационной. Исследуются свойства стационарности минимизируемого функционала энергетической ошибки.

Цель §1.3 — развитие МИДС, основанного на интегральном представлении локальных уравнений состояния механической системы, на случай многомерных динамических задач линейной теории упругости. Одним из преимуществ этого подхода по сравнению с классическими вариационными методами в динамике является то, что исходная задача сводится к минимизации неотрицательного функционала. На основе МИДС вводится семейство квадратичных функционалов, определяющих состояние упругого тела, и даются вариационные формулировки начально-краевой задачи динамики. Из условий стационарности функционалов получены уравнения Лагранжа–Эйлера и соответствующие им естественные граничные и терминальные соотношения. Показана связь между предложенными формулировками и вариационным принципом Гамильтона–Остроградского в случае краевых и периодических по времени задач динамики.

В §1.4 развиваемый вариационный подход применяется для моделирования вынужденных изгибных движений упругой балки Эйлера–Бернулли для ряда линейных краевых условий. Предложено семейство квадратичных функционалов, связывающих поля поперечных перемещений точек балки с функциями изгибающего момента в сечении и плотности импульса. Даны вариационные формулировки исходной начально-краевой задачи о движении балки и проанализированы необходимые условия стационарности введенных функционалов. Определены интегральные и локальные характеристики качества допустимых приближенных решений. Показана связь сформулированных для модели балки вариационных задач с классическими принципами механики.

В главе 2 на основе предложенных обобщенных формулировок динамических задач для упругих систем и конструкций приводятся и сравниваются различные численные процедуры построения приближенных решений, которые описывают вынужденные движения механических систем с распределенными параметрами.

В §2.1 на основе интегро-дифференциальной постановки и полиномиальных представлений неизвестных функций предлагается модификация метода Рунге для приближенного решения задач о продольных и поперечных движениях тонкого упругого стержня. Даются явные локальные и интегральные оценки качества аппроксимаций и исследуется сходимость приближенных решений к точному при увеличении размерности аппроксимаций. Найденные решения сравниваются с результатами, полученными с помощью метода разделения переменных.

Алгоритм, который основан на методе Рунге и МКЭ и предназначен для численного решения задачи о продольных перемещениях упругого стержня, описан в §2.2. В матричной форме дается кусочно-полиномиальное представление неизвестных полей перемещений точек стержня, силы в поперечном сечении и плотности импульса, заданных на треугольной сетке. Дается анализ сходимости конечно-элементной процедуры при увеличении числа элементов и степени полиномов.

В §2.3 предложенная модификация метода Рунге распространяется на случай движений упругих тел. Разработан численный алгоритм нахождения деформаций протяженного тела (балки) на основе кусочно-полиномиальных аппроксимаций и предложен критерий оценки качества приближенных решений. Для трехмерной модели приведен пример расчета и анализа вынужденных поперечных движений прямолинейной балки с квадратным сечением.

В §2.4 на примере задачи о изгибных движениях упругой балки описан вариационный подход к пространственной дискретизации уравнений движения упругих конструкций для заданного класса линейных

краевых условий. Рассмотрен класс линейных краевых воздействий. Разработан алгоритм построения приближенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой доставляет стационарные (минимальные) значения введенным энергетическим функционалам невязки на заданном множестве полей перемещений, моментов и импульсов. Приведены примеры расчетов перемещений упругой балки и анализа качества полученных численных решений.

Проекционный подход (модификация метода Петрова–Галеркина) к численному решению задач о вынужденных движениях упругой балки рассмотрен в §2.5. Разработанные численные процедуры основаны на интегро-дифференциальной постановке, в которой приравниваются нулю интегральные проекции функций состояния, связывающих кинематические и динамические распределенные параметры системы. Используется МКЭ для пространственной дискретизации неизвестных функций. В результате исходная система, описываемая уравнениями в частных производных, сводится к системе ОДУ. Проводится частотный анализ аппроксимирующих уравнений и сравнение проекционного подхода с классическим методом Галеркина и вариационным алгоритмом на основе МИДС.

В главе 3 разработан проекционный подход к построению математических моделей, описывающих в рамках линейной теории упругости собственные движения прямолинейной балки. С использованием интегральной формы уравнений состояния, связывающих напряжения и деформации, а также скорости и импульсы, система уравнений в частных производных сводится к счетной системе ОДУ с постоянными коэффициентами. Для этой цели применяются полиномиальное представление неизвестных функций напряжений, перемещений и импульсов относительно поперечных координат. Ищутся нулевые проекции уравнений состояния тела на пространство полиномиальных тестовых функций.

Для двумерного случая в §3.1 исследованы собственные колебания

прямоугольной упругой пластины, жестко закрепленной с одной или с двух сторон. С использованием семидискретизации разработан вариационный и проекционный подходы к нахождению собственных частот и форм колебаний упругой балки в рамках рассмотренной модели. Проведен частотно-волновой анализ свободных продольных и поперечных движений с учетом свойств симметрии задачи.

В §3.2 исследовано влияние геометрических и упругих характеристик на частоты и формы собственных движений свободной балки. Учитывая специальный случай граничных условий в напряжениях (задача Неймана), с помощью модификации проекционного подхода удалось получить более точные модели собственных колебаний. Эти модели, не смотря на относительно низкий дифференциальный порядок приближенной системы ОДУ, позволяют провести достоверный анализ низших мод свободных колебаний. Для продольных движений показано существование разных типов собственных перемещений и внутренних напряжений балки. Для поперечных колебаний выявлено наличие частотных зон, соответствующих разным видам решений характеристического уравнения, полученного для предложенной модели.

В рамках трехмерных уравнений линейной упругости и проекционного подхода в §3.3 выведены системы дифференциально-алгебраических уравнений, описывающих с различной степенью точности свободные продольные, поперечные, «дышащие» и крутильные колебания упругой балки прямоугольного поперечного сечения. Исследовано влияние геометрических и механических параметров системы на частоты и формы собственных колебаний. Показано существование разных типов собственных перемещений и внутренних напряжений балки.

В главе 4 исследуются различные задачи оптимального управления динамическими системами с распределенными параметрами. Описываются подходы к параметрической оптимизации движений этих систем и способы регуляризации полученных численных решений.

В §4.1 исследуются возможности построения решения, отвечающего заданным критериям качества, и оптимизации движений упругих систем. Для однородного прямолинейного упругого стержня рассмотрен случай полиномиального закона поперечного перемещения одного из его концов. Разработан алгоритм построения оптимального управления, которое приводит систему за заданное время в состояние с минимальной механической энергией. Исследованы задача оптимального перевода системы из состояния покоя в заданное терминальное положение и задача максимального гашения начальных колебаний за фиксированное время.

В §4.2 для продольных движений упругого тела призматической формы рассмотрен случай полиномиального управления перемещением его торца. Разработан алгоритм построения оптимального управления, которое переводит систему в состояние с минимальной механической энергией в конечный момент времени. Проведен анализ и сравнение результатов, полученных с помощью метода интегро-дифференциальных соотношений для одномерной модели тонкого упругого стержня и предложенной приближенной трехмерной модели призматической балки.

Оптимизация управления и регуляризация решения на основе МКЭ проводится в §4.3 для задачи о продольном перемещении упругого стержня. В матричной форме представлен алгоритм нахождения кусочно-полиномиального закона изменения положения конца стержня. Предложенное управление минимизирует механическую энергию в конце процесса с учетом средней энергии, запасаемой телом во время движения, и ошибки приближенного решения. Конечно-элементные аппроксимации, заданные на треугольной сетке находятся согласно алгоритму, описанному в §2.2. Исследуется влияние весовых коэффициентов в функционале управления на качество получаемого приближения.

Развитие проекционного подхода в задачах оптимального управления упругими системами обсуждается в §4.4. Предложен алгоритм про-

странственной дискретизации уравнений движения упругой балки на основе МКЭ и параметрической оптимизации управления с учетом качества приближенного решения.

В главе 5 рассматриваются прикладные задачи моделирования и управления для динамических систем, которые содержат как сосредоточенные, так и элементы с распределенными параметрами. Эти параметры могут иметь различную природу и описывать разнообразные геометрические или физические характеристики системы, например перемещение точек среды, напряжения, давление, массовый расход, температуру и т.п. Для построения приближенных решений и оптимизации используются подходы, предложенные в предыдущих главах.

В §5.1 рассматриваются плоские вращательные движения упругого нагруженного стержня (звена манипулятора) с электроприводом, расположенным в шарнирно закрепленном конце звена. Эта постановка задачи часто возникает при рассмотрении управления более сложными электромеханическими системами, к которым предъявляются высокие требования позиционирования. На основе механической модели слабого изгиба тонких прямолинейных стержней исследуется динамика вращений управляемого электроприводом последнего нагруженного звена манипулятора с учетом распределенной упругости и инерционности стержня.

Проводится математическое моделирование динамики жесткого и податливого звена, строится оптимальное по быстродействию управление движением в предельной модели абсолютно жесткого звена с учетом электромагнитных процессов в приводе. Исследуются различные допустимые законы управления. Эти рациональные управляющие воздействия применяются в упругой модели звена, дается оценка точности и амплитуды остаточных колебаний. Строится оптимальное управление движением на основе проекционного подхода и проводится численное моделирование процесса поворота стержня.

Мачтовые подъемные механизмы играют важную роль в различных автоматизированных конвейерных системах. В §5.2 предложены математические модели экспериментальной установки, которая представляет собой характерную структуру такого подъемника. На основе этих моделей строится программное управление движением механизма. Мачтовый подъемник рассматривается как вязкоупругая конструкция, которая состоит из двух одинаковых балок, прикрепленных к подвижному основанию. Верхние части балок жестко соединены с полиспастом, предназначенным для подъема полезной нагрузки.

Для построения алгоритма управления подъемником в режиме реального времени проведен частотный анализ исходной двухбалочной конструкции. На основе этого анализа предложена упрощенная балочная модель с краевыми условиями специального типа. Цель управления — перемещение податливой балочной конструкции за фиксированное время в заданное состояние, в котором минимизируется запасенная механическая энергия. Для описания вязкоупругих колебаний исследуемого механизма и построения оптимальных законов управления предложена модификация метода Галеркина, основанная на интегро-дифференциальном подходе и соответствующем алгоритме метода конечных элементов. Представлены результаты численных расчетов, которые сравниваются с экспериментальными данными измерений.

В §5.3 проводится моделирование, частотный анализ и оптимизация процессов управления потоком жидкости в трубопроводе. Разработана математическая модель управляемой системы с распределенными параметрами, описывающая динамическое поведение вязкой сжимаемой жидкости, которая подается насосом и перемещается в длинной жесткой трубе. С использованием вспомогательных функций, описывающих силы в поперечном сечении трубы и эффективные перемещения жидкости, а также линейной аппроксимации сопротивления, исходная задача с неоднородными параметрами сводится к системе уравнений в

частных производных с постоянными коэффициентами и однородными начальными и граничными условиями.

Для эффективного численного моделирования динамики элемента трубопровода используется МИДС, основанный на слабой формулировке уравнений состояния системы. В вариационном подходе начально-краевая задача сводится к минимизации функционала невязки, что обеспечивает возможность явных оценок качества решения. Оптимизация управления осуществляется с помощью проекционного подхода на основе метода Петрова–Галеркина в сочетании с МИДС.

Для нахождения программного управления используются конечно-элементные аппроксимации давления и массового расхода жидкости в трубе. Ставится задача перевода трубопровода за фиксированное время в заданный стационарный режим и минимизации остаточных колебаний в жидкости. Сравняются численные результаты, полученные для акустической модели идеальной и вязкой сжимаемой жидкости.

Заключение содержит основные результаты диссертации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [6]–[11], [37]–[42], [44]–[46], [51], [54]–[56], [70], [120], [123]–[125], [127]–[129], [131]–[136], [138]–[144], [162], [165], [169]–[176], [181]. Основные результаты, выносимые на защиту и опубликованные в указанных работах, получены автором диссертации.

Количество страниц в диссертации — 359, в том числе иллюстраций — 111, таблиц — 17.

Автор выражает свою глубокую признательность академику РАН Ф.Л. Черноусько, а также члену-корр. РАН Н.Н. Болотнику и д.ф.-м.н. Л.Д. Акуленко за постоянное внимание и поддержку. Особую благодарность автор приносит к.т.н. В.В. Саурину за научное сотрудничество и конструктивное обсуждение диссертационной работы.

Глава 1.

Вариационные формулировки задач динамики упругих механических систем

§1.1. Вариационные постановки задачи об управляемых движениях колебательной механической системы

1.1.1. Классическая формулировка задачи Коши о движении упругой системы. Рассмотрим механическую систему с конечным числом степеней свободы, в которой возникают упругие силы и заданы внешние управляющие воздействия. Пусть движение системы описывают линейные дифференциальные уравнения, представленные в векторной форме

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (1.1.1)$$

Здесь вводится неизвестный вектор обобщенных координат $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^n$, вектор внешних воздействий $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, положительно определенные матрицы $\mathbf{A}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, а также постоянная матрица $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

В начальный момент времени заданы также значения обобщенных координат и скоростей

$$t = 0 : \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_0. \quad (1.1.2)$$

Ставится задача нахождения на заданном интервале $t \in [0, T]$ вектора $\mathbf{q}^*(t)$, который является решением задачи Коши (1.1.1), (1.1.2).

Введем вектор обобщенных импульсов и сил соответственно как

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{f} = -\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

и выразим равенство (1.1.1) через новые переменные в эквивалентной форме

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}. \quad (1.1.3)$$

Учитывая закон изменения импульса (1.1.3), можно исключить вектор сил и свести исходную задачу Коши к системе ОДУ первого порядка

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{s} = \mathbf{C}^{-1}(\dot{\mathbf{p}} - \mathbf{B}\mathbf{u}) + \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (1.1.4)$$

с начальными условиями

$$t = 0: \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 = \mathbf{A}^{-1}\dot{\mathbf{q}}_0. \quad (1.1.5)$$

Здесь введены вектор-функции состояния $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{s}(t) \in \mathbb{R}^n$, определяющие соотношения соответственно между скоростями и импульсами, а также координатами и силами.

1.1.2. Вариационная постановка задачи. Чтобы перейти к вариационной формулировке задачи о движении механической системы (1.1.4), (1.1.5), введем квадратичную форму от функций состояния, выраженную в энергетических единицах:

$$\varphi_+(t) = \frac{1}{2} (\mathbf{r}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{r} + \mathbf{s}^T \mathbf{C} \mathbf{s}) \geq 0. \quad (1.1.6)$$

Интегрируя это выражение, получим функционал

$$\Phi_+ = \int_0^T \varphi_+(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}}) dt \geq 0, \quad (1.1.7)$$

который определяет энергетическую норму невязки для уравнений состояния системы (1.1.4) и равен нулю на действительном движении.

Так как интеграл Φ_+ достигает своего минимального значения на точном решении системы уравнений (1.1.4), (1.1.5), можно сформулировать следующую минимизационную задачу. Необходимо найти такие функции координат $\mathbf{q}^*(t)$ и импульсов $\mathbf{p}^*(t)$, что

$$\Phi_+[\mathbf{q}^*, \mathbf{p}^*] = \min_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} \Phi_+[\mathbf{q}, \mathbf{p}] = 0 \quad (1.1.8)$$

при выполнении ограничений (1.1.5).

Чтобы показать, что предложенная постановка является вариационной формулировкой исходной задачи, вычислим первые вариации введенного функционала

$$\begin{aligned}\delta\Phi_+ &= \int_0^T (\mathbf{r}^T \mathbf{A}^{-1} \delta \mathbf{r} + \mathbf{s}^T \mathbf{C} \delta \mathbf{s}) dt = \\ &= \int_0^T (\mathbf{r}^T \delta \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{r}^T \mathbf{A}^{-1} \delta \mathbf{p} + \mathbf{s}^T \delta \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{s}^T \mathbf{C} \delta \mathbf{q}) dt.\end{aligned}$$

Пусть функция внешних воздействий $\mathbf{u}(t)$ непрерывна на интервале $t \in [0, T]$. Интегрируя это выражение по частям с учетом начальных условий (1.1.5), получим необходимое условие стационарности

$$\begin{aligned}\delta\Phi_+ &= \int_0^T (\mathbf{s}^T \mathbf{C} - \dot{\mathbf{r}}^T) \delta \mathbf{q} dt - \int_0^T (\mathbf{r}^T \mathbf{A}^{-1} + \dot{\mathbf{s}}^T) \delta \mathbf{p} dt + \\ &+ [\mathbf{r}^T \delta \mathbf{q} + \mathbf{s}^T \delta \mathbf{p}]_{t=T} = 0.\end{aligned}$$

Из равенства нулю первой вариации следуют уравнения Эйлера с терминальными условиями трансверсальности:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C} \mathbf{s}, \quad \dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}(T) = \mathbf{s}(T) = \mathbf{0}. \quad (1.1.9)$$

Выражая одну из функций через производную от другой, например $\mathbf{r} = -\mathbf{A} \dot{\mathbf{s}}$, получаем однородную систему ОДУ второго порядка

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{C} \mathbf{s} = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{s}}(T) = \mathbf{s}(T) = \mathbf{0}. \quad (1.1.10)$$

Из решения (1.1.10) следует, что $\mathbf{s}(t) \equiv \mathbf{0}$ и $\mathbf{r}(t) \equiv \mathbf{0}$ для рассматриваемого интервала времени $t \in [0, T]$. Это и означает, что необходимые условия стационарности с начальными ограничениями вариационной задачи эквивалентны исходной системе уравнений (1.1.1), (1.1.2).

Если функция $\mathbf{u}(t)$ имеет конечное число точек разрыва первого рода в фиксированные моменты времени $t = t_i$, $t_i > t_{i-1}$ ($i = 1, \dots, k$,

$t_0 = 0$), то необходимо добавить условия Вейерштрасса–Эрдмана

$$\mathbf{r}(t_i - 0) = \mathbf{r}(t_i + 0), \quad \mathbf{s}(t_i - 0) = \mathbf{s}(t_i + 0).$$

Покажем, что функции \mathbf{r} и \mathbf{s} — это сопряженные переменные соответственно обобщенных координат \mathbf{q} и импульсов \mathbf{p} . Действительно, с учетом (1.1.4), (1.1.6) по определению [26, 65] имеем

$$\frac{\partial \varphi_+}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{r} = \mathbf{r}, \quad \frac{\partial \varphi_+}{\partial \dot{\mathbf{p}}} = \frac{\partial \mathbf{s}^T}{\partial \dot{\mathbf{p}}} \mathbf{C} \mathbf{s} = \mathbf{s}.$$

Построим гамильтониан для вариационной задачи (1.1.5), (1.1.8) согласно

$$H(t, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}) = \mathbf{r}^T \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{p}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{s}) - \varphi_+(\mathbf{r}, \mathbf{s}),$$

где значения производных находятся из обратимых линейных соотношений, введенных в (1.1.4):

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{r} + \mathbf{p}), \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{C}(\mathbf{s} - \mathbf{q}) + \mathbf{B}\mathbf{u}. \quad (1.1.11)$$

Учитывая выражения для функции энергетической невязки φ_+ из (1.1.6), окончательно получаем

$$H = \frac{1}{2} (\mathbf{r}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{r} + \mathbf{s}^T \mathbf{C} \mathbf{s}) + \mathbf{r}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{p} - \mathbf{s}^T \mathbf{C} \mathbf{q} + \mathbf{s}^T \mathbf{B} \mathbf{u}(t). \quad (1.1.12)$$

Непосредственное дифференцирование гамильтониана (1.1.12) подтверждает, что система уравнений Гамильтона

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{s}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{s}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}$$

эквивалентна системе (1.1.9), (1.1.11).

1.1.3. Связь с классическими вариационными принципами.

Рассмотрим еще один квадратичный интеграл

$$\Phi_- = \int_0^T \varphi_-(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}}) dt, \quad \varphi_-(t) = \frac{1}{2} (\mathbf{r}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{r} - \mathbf{s}^T \mathbf{C} \mathbf{s}).$$

В отличие от Φ_+ , функционал Φ_- не является знакоопределенным и поэтому для него можно сформулировать только задачу на стационарные значения. Необходимо найти функции $\mathbf{q}^*(t)$ и $\mathbf{p}^*(t)$, которые приравняют нулю первую вариацию

$$\delta\Phi_- = \int_0^T (\dot{\mathbf{s}}^T - \mathbf{r}^T \mathbf{A}^{-1}) \delta\mathbf{p} dt - \int_0^T (\mathbf{s}^T \mathbf{C} + \dot{\mathbf{r}}^T) \delta\mathbf{q} dt + \\ + [\mathbf{r}^T \delta\mathbf{q} - \mathbf{s}^T \delta\mathbf{p}]_{t=T} = 0.$$

Соответствующая система уравнений Эйлера и терминальных условий записывается в виде

$$\dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{C}\mathbf{s}, \quad \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}(T) = \mathbf{s}(T) = \mathbf{0},$$

что эквивалентно системе (1.1.10). Это доказывает вариационный характер и данной постановки задачи.

Интеграл Φ_- имеет интересную структуру, позволяющую связать его с классическими функционалами действия:

$$\Phi_- = \Theta_1 - 2\Theta_0 + \Theta_2 + \frac{1}{2} \int_0^T \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u} dt,$$

$$\Theta_0[\mathbf{q}, \mathbf{p}] = \int_0^T L_0 dt, \quad L_0 = \frac{1}{2} (\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q}^T \dot{\mathbf{p}}),$$

$$\Theta_1[\mathbf{q}] = \int_0^T L_1 dt, \quad \Theta_2[\mathbf{p}] = \int_0^T L_2 dt,$$

$$L_1 = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q} + 2\mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{q}),$$

$$L_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{p} - \dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{C}^{-1} \dot{\mathbf{p}} + 2\mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C}^{-1} \dot{\mathbf{p}}).$$

Здесь Θ_k , $k = 0, 1, 2$, — функционалы, имеющие размерность действия, L_1 и L_2 — квадратичные формы либо от координат, либо от импульсов и соответствующих первых производных, L_0 — билинейная форма,

которая не зависит от механических параметров системы. Последнее слагаемое в выражении для Φ_- не влияет на решение задачи, т.к. не включает фазовые переменные. Для системы (1.1.1) функции L_1 и L_2 представляют собой лагранжиан, выраженный через координаты \mathbf{q} или импульсы \mathbf{p} , соответственно.

Если проинтегрировать по частям функционал Θ_0 , то получим

$$\Theta_0 = [\mathbf{q}^T \mathbf{p}]_{t=0}^{t=T} .$$

В рассматриваемом случае, когда задаются начальные значения фазовых переменных (1.1.5), Θ_0 зависит от терминальных значений как координат, так и импульсов.

Предположим, что для механической системы (1.1.1) заданы согласно табл. 1.1.1 либо некоторые краевые условия по времени (строки 1–4), либо периодические условия (последняя строка таблицы). В этих случаях функционал Φ_- может быть представлен как сумма двух слагаемых, одно из которых зависит только от координат \mathbf{q} , а другое только от импульсов \mathbf{p} :

$$\Phi_- = \Theta_1[\mathbf{q}] + \Xi_1[\mathbf{q}] + \Theta_2[\mathbf{p}] + \Xi_2[\mathbf{p}] - \Xi_0 .$$

Здесь использованы выражения Ξ_1 и Ξ_2 , введенные в табл. 1.1.1 для разных типов условий в начальный и конечный момент времени. Член Ξ_0 зависит только от краевых значений фазовых координат и вектора внешних воздействий $\mathbf{u}(t)$, т.е. не влияет на решение задачи.

Из структуры Φ_- следует, что для всех указанных в табл. 1.1.1 условий задача на стационарные значения сводится к двум независимым подзадачам в перемещениях и импульсах

$$\delta\Phi_- = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta\Theta_1[\mathbf{q}] + \delta\Xi_1[\mathbf{q}] = 0, \quad \delta\Theta_2[\mathbf{p}] + \delta\Xi_2[\mathbf{p}] = 0 .$$

Первая из этих подзадач представляет собой классический принцип Гамильтона–Остроградского [26, 33] на нахождение стационарных зна-

Таблица 1.1.1: Типы краевых задач.

Условие А	Условие В	Ξ_1	Ξ_2
$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$	$\mathbf{q}(T) = \mathbf{q}_1$	0	$\mathbf{q}_0^T \mathbf{p}(T) - \mathbf{q}_1^T \mathbf{p}(0)$
$\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$	$\mathbf{p}(T) = \mathbf{p}_1$	$\mathbf{p}_0^T \mathbf{q}(T) - \mathbf{p}_1^T \mathbf{q}(0)$	0
$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$	$\mathbf{p}(T) = \mathbf{p}_1$	$\mathbf{p}_0^T \mathbf{q}(T)$	$-\mathbf{q}_1^T \mathbf{p}(0)$
$\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$	$\mathbf{q}(T) = \mathbf{q}_1$	$-\mathbf{p}_1^T \mathbf{q}(0)$	$\mathbf{q}_0^T \mathbf{p}(T)$
$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}(T)$	$\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}(T)$	0	0

чений расширенного функционала действия, а вторая — дополнительный (двойственный) принцип [184], сформулированный относительно обобщенных импульсов.

Все проведенные выше рассуждения можно обобщить на случай линейных механических систем с переменными параметрами $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{C}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, а также на случай, когда $\text{rank } \mathbf{C} < \text{rank } \mathbf{A} = n$ при $\mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q}^T \geq 0$ для любых \mathbf{q} .

1.1.4. Численный пример. Пусть механическая система представляет собой несколько материальных точек, соединенных между собой последовательно одна за другой упругими невесомыми пружинами. Первая точка присоединена к подвижному основанию, которое может перемещаться по выбираемому закону $u(t)$.

Пусть $x_i(t)$ — абсолютная координата i -ой массы, $i = 1, \dots, N$, и в положении равновесия при $u(t) \equiv 0$ эта точечная масса находится в точке $x_i = x_i^0 = LiN^{-1}$, где L — длина упругой цепи. В качестве обобщенных координат выберем отклонение точечных масс от этого равновесного положения $q_i = x_i(t) - x_i^0$. Тогда уравнения движения системы запишутся в виде

$$m_i \ddot{q}_i + c_i(q_{i-1} - 2q_i + q_{i+1}) = 0, \quad q_{N+1} = q_N, \quad q_0 = u(t). \quad (1.1.13)$$

Введем обобщенные импульсы и силы согласно

$$p_i = m_i \dot{q}_i, \quad f_i = -c_i(q_{i-1} - 2q_i + q_{i+1}).$$

Ставится задача перевода системы за фиксированное время из состояния покоя

$$q_i(0) = 0, \quad p_i(0) = 0, \quad u(0) = 0 \quad (1.1.14)$$

в покой

$$q_i(T) = u_T, \quad p_i(T) = 0, \quad u(T) = u_T. \quad (1.1.15)$$

Управление u выбирается из пространства полиномиальных функций

$$u = \frac{u_T}{T^3}(3T - 2t)t^2 + (t - T)^2 \sum_{i=2}^{2N+1} u_{i-1}t^i, \quad (1.1.16)$$

где параметры u_i определяются так, чтобы удовлетворить терминальные условия (1.1.15).

Аппроксимации координат $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^N$ и импульсов $\mathbf{p}(t) \in \mathbb{R}^N$ при численном решении также ищутся в виде полиномов заданной степени

$$\tilde{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^K \mathbf{q}_i t^i, \quad \tilde{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^K \mathbf{p}_i t^i, \quad \mathbf{f} = \dot{\tilde{\mathbf{p}}}, \quad (1.1.17)$$

которые автоматически удовлетворяют начальные условия (1.1.14).

Объединим векторы \mathbf{q}_i и \mathbf{p}_i из (1.1.17) в один вектор проектных параметров \mathbf{y} . Тогда задача минимизации функционала Φ_+ сводится к минимизации квадратичной функции от этих параметров

$$\Phi_+(\mathbf{y}, \mathbf{v}) \rightarrow \min_{\mathbf{y}},$$

где $\mathbf{v} = \{u_i\}$ — вектор параметров управления. Эта задача эквивалентна решению линейной алгебраической системы размерности $2KN$.

Полученный в результате минимизации вектор $\mathbf{y}^*(\mathbf{v})$ определяет приближенные фазовые траектории $\tilde{\mathbf{q}}^* = \tilde{\mathbf{q}}(t, \mathbf{y}^*)$ и $\tilde{\mathbf{p}}^* = \tilde{\mathbf{p}}(t, \mathbf{y}^*)$. Отно-

сительную ошибку численного решения можно определить через значение функционала Φ_+ и интеграл от полной энергии системы

$$\Delta = \Phi_+(\mathbf{y}^*)\Psi^{-1}(\mathbf{y}^*), \quad \Psi(\mathbf{y}) = \int_0^T E dt,$$

$$E = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{p}}^T \mathbf{A}^{-1} \tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{q}}).$$

Для численного решения задачи управления аппроксимации (1.1.17) и управление (1.1.16) подставляются в функционал (1.1.7), ищется его минимальное значение относительно \mathbf{u} для произвольного вектора параметров управления \mathbf{v} . После этого определяется вектор $\tilde{\mathbf{v}}$, удовлетворяющий терминальные условия (1.1.15), и соответствующая функция $\tilde{u}(t) = u(t, \tilde{\mathbf{v}})$.

Выберем следующие параметры задачи:

$$N = 3, \quad T = 4, \quad u_T = 0.1, \quad m_i = 1, \quad c_i = 16, \quad i = 1, 2, 3.$$

Для данного набора параметров удается получить аналитическое решение $\mathbf{q}^*(t)$ и $\mathbf{p}^*(t)$ задачи управления (1.1.13)–(1.1.16) для найденного \tilde{u} . Поэтому можно определить энергетическую ошибку полиномиальной аппроксимации в виде

$$\Delta_0 = \Upsilon[\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}]\Psi^{-1}[\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}],$$

$$\Upsilon = \frac{1}{2} \int_0^T ((\tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{p}^*)^T \mathbf{A}^{-1} (\tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{p}^*) + (\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}^*)^T \mathbf{C} (\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}^*)) dt.$$

Относительную ошибку управления $\tilde{u} = u(t, \tilde{\mathbf{v}})$, зададим как

$$\Delta_u = \|\tilde{u} - u^*\|_2^2 \|u^*\|_2^{-2}, \quad \|u\|_2^2 = \int_0^T u^2 dt.$$

где $u^*(t)$ — управление, приводящее механическую систему (1.1.13) в положение (1.1.15), $\tilde{u}(t)$ — полином, полученный в результате численного решения.

Точные функции управления $u^*(t)$ и соответствующие абсолютные перемещения $x_i^*(t)$, $i = 1, 2, 3$, выведены на рис. 1.1.1 (кривые 0–3). Для наглядности на рис. 1.1.2 отдельно представлены функция управления u^* , ее первая и вторая производные по времени \dot{u}^* , \ddot{u}^* (сплошная, штриховая и штрихпунктирная кривая). Для выбранных параметров системе удастся перевести из начального в конечное состояние, не вызывая больших колебаний.

Ошибки Δ , Δ_0 и Δ_u относительно степени аппроксимации K показаны на рис. 1.1.3 (сплошная, штриховая и штрихпунктирная кривая). Как видно из расчетов, все ошибки быстро стремятся к нулю для выбранного типа аппроксимаций и управления. Для более точных и эффективных расчетов, как будет показано в дальнейшем, можно применять другие конечномерные представления неизвестных функций, например кусочно-полиномиальные сплайны.

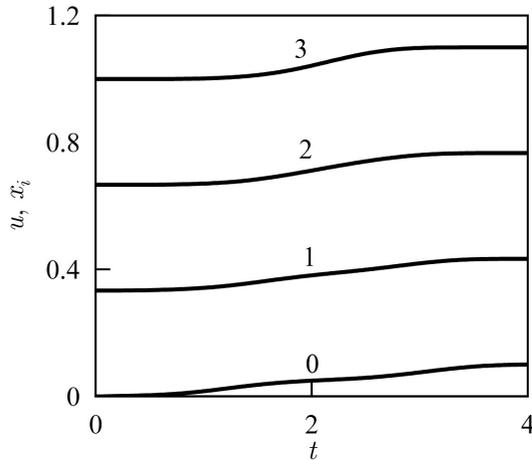


Рис. 1.1.1. Перемещение основания и точечных масс в системе.

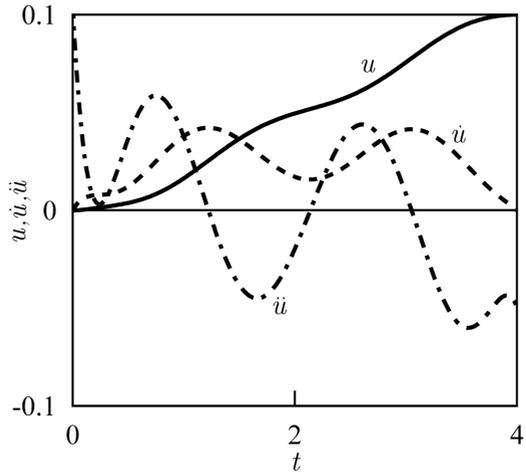


Рис. 1.1.2. Функция управления, ее первая и вторая производная по времени.

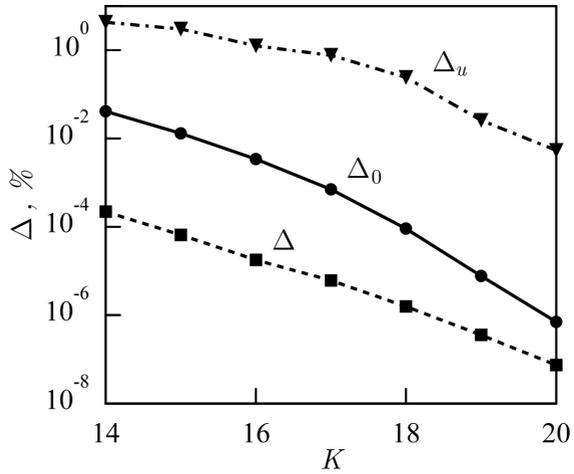


Рис. 1.1.3. Относительные значения минимизируемого функционала (Δ), энергетической ошибки (Δ_0) и ошибки управления (Δ_u).

§1.2. Метод интегро-дифференциальных соотношений в задаче о продольных движениях упругого стержня

1.2.1. Классическая формулировка начально-краевой задачи. В качестве примера задач о вынужденных движениях механических систем с распределенными параметрами рассмотрим продольные перемещения тонкого прямолинейного упругого стержня. Условия, при которых рассматриваемые далее малые колебания линейного упругого континуума обладают осцилляционными свойствами, обсуждаются, например, в [27].

Пусть один конец стержня A_1 свободен от нагрузок. Введем инерциальную систему координат Ox , направленную вдоль оси стержня, с началом в точке O , относительно которой положение другого конца стержня A_0 задается некоторой функцией времени $u_0(t)$. Без ограничения общности выбором системы координат можно добиться того, чтобы положение концевой точки A_0 и ее скорость в начальный момент времени t_0 равнялись нулю, т.е.

$$u_0(t_0) = \left. \frac{du_0}{dt} \right|_{t=t_0} = 0. \quad (1.2.1)$$

Пусть $L = |A_0A_1|$ — длина стержня, $E(x) > 0$ — модуль упругости материала, $S(x) > 0$ — площадь поперечного сечения, $\rho_v(x) > 0$ — объемная плотность стержня, T — заданное время процесса.

Одномерное линейное уравнение движения точек стержня, выраженное через частные производные от неизвестной функции перемещений $u(t, x)$ в инерциальной системе координат, имеет вид

$$\rho(x)u_{tt} - (\kappa(x)u_x)_x = f(t, x). \quad (1.2.2)$$

Здесь для сокращения записи введены параметры жесткости $\kappa = SE$ и линейной плотности $\rho = S\rho_v$, функция f задает внешние распределенные нагрузки, приложенные к стержню. Нижними индексами t и x

обозначены соответствующие частные производные. Временная и пространственная координаты заданы соответственно на интервалах

$$t \in (t_0, t_0 + T), \quad x \in (0, L) .$$

В силу линейности модели всегда можно задать начальный момент времени равным нулю: $t_0 = 0$.

Абсолютное положение U произвольной точки стержня в неподвижной системе координат Ox задается функцией перемещений u , как

$$U(t, x) = x + u(t, x),$$

где x — лагранжева координата. Краевые условия на концах записываются в этих предположениях следующим образом

$$u(t, 0) = u_0(t), \quad u_x(t, L) = 0 . \quad (1.2.3)$$

Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ известны упругие деформации и скорости точек стержня

$$u(t_0, x) = u^0(x), \quad u_t(t_0, x) = v^0(x) . \quad (1.2.4)$$

Следует учитывать условия совместности начальных и краевых условий, вытекающих из (1.2.1), а именно

$$u^0(0) = v^0(0) = 0 .$$

1.2.2. Динамические и кинематические переменные. Решение $u^*(t, x)$ начально-краевой задачи (1.2.2)–(1.2.4) может принадлежать различным классам функций в зависимости от свойств распределенных параметров $\kappa(x)$, $\rho(x)$, $u^0(x)$, $v^0(x)$, $f(t, x)$ и $u_0(t)$.

Уравнение (1.2.2) описывает деформацию в каждой точке упругого стержня. Для того, чтобы существовало классическое решение начально-краевой задачи, перемещения и скорости внутренних точек должны

непрерывно переходить к начальным распределениям (1.2.4). Таким же образом значения перемещений и сил для внутренних поперечных сечений непрерывно переходят в граничные значения (1.2.3). При этом неявно предполагается непрерывность перехода модуля упругости E и объемной плотности ρ_v , определенных для внутренних точек, на края стержня.

Однако, необходимо принять во внимание, что, например, граничные условия (1.2.3) задаются с учетом физических факторов, которые порождают эти соотношения. Некоторые внутренние сечения стержня также могут быть границами раздела различных материалов. Любое такое сечение одновременно принадлежит частям упругого тела с разными механическими свойствами. Это означает, что модуль упругости E и плотность ρ_v в этих точках, вообще говоря, не определены.

Для того, чтобы учесть такого рода неопределенности, в статических задачах линейной теории упругости используются вариационные подходы, например принципы минимума полной потенциальной и дополнительной энергии [25]. В динамике вариационные принципы сформулированы для краевых задач, например, принцип Гамильтона–Остроградского. В предлагаемом подходе, в отличие от классических формулировок, вместо локальных уравнений состояния упругой системы вводится одно интегральное соотношение, связывающее импульсы и скорости, а также упругие силы и деформации [44].

Для демонстрации возможностей такого подхода на выбранном примере введем функции упругих сил $s(t, x)$ и линейной плотности импульса $p(t, x)$, которые связаны с деформацией и скоростями точек стержня через следующие уравнения состояния

$$s = \kappa(x)u_x, \quad p = \rho(x)u_t. \quad (1.2.5)$$

В дальнейшем для удобства записи вводятся две вспомогательные

функции состояния, определяющие соотношения (1.2.5):

$$\xi(t, x) = u_x - \frac{s}{\kappa(x)}, \quad \eta(t, x) = u_t - \frac{p}{\rho(x)}. \quad (1.2.6)$$

Функции деформаций и скоростей (1.2.6) на действительных перемещениях должны тождественно равняться нулю для всех точек стержня. Уравнение движения можно переписать в тождественном виде, выразив его через функции силы в поперечном сечении s и линейной плотности импульса p , как

$$p_t - s_x = f(t, x). \quad (1.2.7)$$

В отличие от уравнения движения (1.2.2), определим для краткости равенство (1.2.7), представляющее собой запись второго закона Ньютона, как уравнение изменения импульса. Неизвестные перемещения u назовем кинематической переменной, а распределение сил s и импульсов p вдоль длины стержня — динамическими переменными.

Граничные условия переписываются через эти переменные в виде

$$u(t, 0) = u_0(t), \quad s(t, L) = 0, \quad (1.2.8)$$

а начальные распределения как

$$u(t_0, x) = u^0(x), \quad p(t_0, x) = p^0(x), \quad (1.2.9)$$

где начальные импульсы $p^0 = \rho(x)v^0(x)$ определяются через функцию начальных скоростей $v^0(x)$ согласно (1.2.4).

Тогда задачу о движении тонкого упругого стержня (1.2.2)–(1.2.4) можно переопределить в новых терминах. Найти такие распределения перемещений $u^*(t, x)$, сил $s^*(t, x)$ и импульсов $p^*(t, x)$, которые удовлетворяют уравнения состояния (1.2.5) и изменения импульса (1.2.7), а также краевые и начальные условия (1.2.8), (1.2.9).

1.2.3. Интегро-дифференциальная формулировка. Основная идея МИДС состоит в том, что вместо локальных соотношений состояния (1.2.5) вводится некоторое интегральное уравнение, а уравнение

изменения импульса и начально-краевые условия выполняются в локальном смысле.

Дадим следующую обобщенную постановку начально-краевой задачи о движении упругого стержня (1.2.5), (1.2.7)–(1.2.9): найти такие неизвестные поля перемещений u^* , сил s^* и плотности импульса p^* , которые удовлетворяют интегральному соотношению

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_0^T \int_0^L \varphi(u, s, p) dx dt = 0, \\ \varphi &= \frac{\rho}{2} \eta^2(u_t, p) + \frac{\kappa}{2} \xi^2(u_x, s),\end{aligned}\tag{1.2.10}$$

при соблюдении уравнения изменения импульса, граничных и начальных условий (1.2.7)–(1.2.9). Здесь η и ξ — функции невязки по скорости и деформации, введенные в (1.2.6); Φ — функционал энергетической ошибки, имеющий размерность действия; φ — функция квадратичной невязки уравнений состояния.

Заметим, что подынтегральная функция φ , определенная в (1.2.10), имеет размерность линейной плотности энергии и неотрицательна. Из последнего свойства следует неотрицательность интеграла Φ для произвольных функций u , s и p . Это позволяет привести интегро-дифференциальную задачу (1.2.7)–(1.2.10) к минимизационной формулировке: найти допустимые функции $u^*(t, x)$, $s^*(t, x)$ и $p^*(t, x)$, которые доставляют минимальное (нулевое) значение функционалу Φ :

$$\Phi(u^*, s^*, p^*) = \min_{u, s, p} \Phi(u, s, p) = 0\tag{1.2.11}$$

при строгом выполнении ограничений (1.2.7)–(1.2.9).

Обозначим действительные и произвольно выбранные допустимые перемещения, силы, импульсы соответственно через u^* , s^* и p^* и u , s , p . Положим, что

$$u = u^* + \delta u, \quad s = s^* + \delta s, \quad p = p^* + \delta p,$$

где δu , δs , δp — некоторые вариации переменных относительно точного решения. Тогда из квадратичности функционала Φ относительно неизвестных функций следует, что

$$\Phi(u, s, p) = \Phi(u^*, s^*, p^*) + \delta\Phi + \delta^2\Phi,$$

где $\Phi(u^*, s^*, p^*) = 0$ в силу определения решения, $\delta\Phi = \delta_u\Phi + \delta_s\Phi + \delta_p\Phi$ — сумма первых вариации выбранного функционала относительно соответственно неизвестных u , s , p , а $\delta^2\Phi = \Phi(\delta u, \delta s, \delta p) \geq 0$ — вторая вариация Φ .

Выразим в явном виде первые вариации интеграла Φ и уравнения Эйлера–Лагранжа минимизационной задачи (1.2.11). Для этого необходимо использовать связь между функцией силы s и линейной плотностью импульса p , которая определяется уравнением (1.2.7), а значит, и связь между их вариациями δs и δp :

$$\delta p_t = \delta s_x. \quad (1.2.12)$$

После интегрирования $\delta\Phi$ по частям с учетом ограничений (1.2.7)–(1.2.9) получаем выражения для вариаций

$$\begin{aligned} \delta_u\Phi &= - \int_0^T \int_0^L (\rho\eta_t + (\kappa\xi)_x) \delta u \, dxdt + \\ &+ \int_0^L [\rho\eta\delta u]_{t=T} \, dx + \int_0^T [\kappa\xi\delta u]_{x=L} \, dt, \\ \delta_s\Phi &= - \int_0^T \int_0^L \xi\delta s \, dxdt, \quad \delta_p\Phi = - \int_0^T \int_0^L \eta\delta p \, dxdt. \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Из (1.2.13) видно, что $\delta\Phi = 0$ на любых допустимых вариациях δu , δs , δp , если выполняются соотношения (1.2.5).

Введем вспомогательную функцию

$$\zeta(t, x) = - \int_0^t \eta(t_1, x) dt_1$$

и получим с учетом условия (1.2.12) выражения для первой вариации

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \delta_u\Phi + \delta_{sp}\Phi = 0 \\ \delta_{sp}\Phi &= - \int_0^T \int_0^L \xi \delta s \, dx dt + \int_0^T \int_0^L \zeta_t \delta p \, dx dt = \\ & \int_0^T \int_0^L (\zeta_x - \xi) \delta s \, dx dt + \int_0^L [\zeta \delta p]_{t=T} \, dx + \int_0^T [\zeta \delta s]_{x=0} \, dt. \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

Выпишем из (1.2.13) и (1.2.14) уравнения Эйлера–Лагранжа с соответствующими граничными и терминальными соотношениями

$$\begin{aligned} \rho \zeta_{tt} - (\kappa \zeta_x)_x &= 0, \quad \xi = \zeta_x; \\ \zeta|_{x=0} &= \zeta_x|_{x=L} = \zeta|_{t=T} = \zeta_t|_{t=T} = 0. \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

Относительно неизвестной функции $\zeta(t, x)$ система (1.2.15) представляет собой терминально-краевую задачу с единственно тривиальным решением, из которого непосредственно следуют условия $\xi = 0$ и $\eta = 0$. Иными словами, если решение u^* , s^* и p^* задачи (1.2.7)–(1.2.9), (1.2.11) существует в классическом смысле, система (1.2.15) вместе с ограничениями (1.2.7)–(1.2.9) эквивалентна исходной задаче о вынужденных движениях упругого стержня (1.2.2)–(1.2.4).

§1.3. Вариационные подходы к решению начально-краевых задач в линейной теории упругости

1.3.1. Постановка задачи. Рассмотрим упругое тело, занимающее в d -мерном пространстве ($d = 1, 2, 3$) некоторую ограниченную область Ω с кусочно-гладкой границей Γ . Вначале введем динамические переменные $\mathbf{p}(t, x)$, $\sigma(t, x)$ и кинематические переменные $\mathbf{u}(t, x)$, $\varepsilon(t, x)$, характеризующие поведение упругой системы и зависящие от времени t и d -мерного вектора $x = \{x_1, \dots, x_d\}$ пространственных координат. Здесь \mathbf{p} и \mathbf{u} — векторные функции соответственно плотности импульса и перемещений, а σ и ε — тензоры второго ранга, определяющие распределение упругих напряжений и деформаций во времени и пространстве.

В линейной теории упругости локальные уравнения состояния среды, связывающие плотность импульса \mathbf{p} со скоростями точек системы \mathbf{u}_t , а также напряжения σ с деформациями ε можно записать в виде

$$\eta = \mathbf{u}_t - \frac{\mathbf{p}}{\rho(x)} = 0, \quad \xi = \varepsilon - \mathbf{C}^{-1}(x) : \sigma = 0. \quad (1.3.1)$$

Здесь тензор деформаций ε линейно зависит от вектора перемещений:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (1.3.2)$$

При этом объемная плотность тела ρ и тензор модулей упругости \mathbf{C} — заданные функции координат x . Компоненты тензора четвертого ранга \mathbf{C} обладают следующими свойствами симметрии:

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{klij}.$$

Для сокращения записи в (1.3.1) введен вектор $\eta(t, x)$, определяющий связь между скоростями точек тела и плотностью импульса, а также тензор $\xi(t, x)$, задающий соотношения закона Гука. Двоеточие

между тензорами означает их двойное скалярное произведение (двойную свертку по индексам). В уравнении (1.3.2) используется оператор градиента $\nabla = [\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_d]^T$ в пространстве координат x .

Используя соотношения (1.3.1), (1.3.2), уравнение движения упругого тела

$$\rho(x)\mathbf{u}_{tt} - \nabla \cdot \mathbf{C}(x) : \varepsilon - \mathbf{f}(t, x) = \mathbf{0},$$

записанное в перемещениях, можно представить, используя тензор напряжений σ и вектор плотности импульса \mathbf{p} , в виде:

$$\mathbf{p}_t - \nabla \cdot \sigma - \mathbf{f}(t, x) = \mathbf{0}. \quad (1.3.3)$$

Здесь \mathbf{f} — вектор внешних объемных сил, которые могут быть как заданными функциями времени t и координат x , так и неизвестными воздействиями, если ставится задача управления движениями упругого тела. Точка между векторами и тензорами означает скалярное произведение (свертку по индексу). Соотношение (1.3.3) связывает упругие и инерционные силы и в дальнейшем называется уравнением изменения импульса.

Рассмотрим случай линейных граничных условий, которые могут быть представлены через компоненты векторов перемещения \mathbf{u} и внешней нагрузки

$$\mathbf{q} = \sigma \cdot \mathbf{n}$$

в форме

$$\alpha(x) \cdot \mathbf{u} + \beta(x) \cdot \mathbf{q} = \mathbf{v}(t, x), \quad x \in \Gamma, \quad (1.3.4)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к границе тела Γ , \mathbf{v} — граничный вектор, который является заданной функцией t и x . Здесь α и β — тензоры второго ранга, которые определяют тип граничных условий.

Предположим, что главные направления этих тензоров совпадают. Пусть $\alpha_k(x)$ и $\beta_k(x)$, $k = 1, \dots, d$, собственные значения α и β , которые

соответствуют главной оси с ортом $\mathbf{i}_k(x)$. Проекция $v_k = \mathbf{v} \cdot \mathbf{i}_k$ функции \mathbf{v} на единичный вектор \mathbf{i}_k определяет перемещение u_k вдоль главной оси, если заданы коэффициенты $\alpha_k = 1$ и $\beta_k = 0$ на некоторой части границы $\Gamma_u^{(k)} \subset \Gamma$. Эта же проекция задает внешнюю нагрузку q_k в направлении \mathbf{i}_k , если $\alpha_k = 0$ и $\beta_k = 1$ на части границы $\Gamma_\sigma^{(k)} \in \Gamma$. Условия (1.3.4) включают в себя, как частный случай, разные виды упругого основания, если для какого-то индекса k пара чисел α_k и β_k одновременно не равна нулю (обычно $\alpha_k \beta_k > 0$).

Для полного описания движения упругого тела необходимо определить его состояние в начальный момент времени (без ограничения общности при $t = 0$). Это можно сделать, задавая начальные распределения упругих перемещений \mathbf{u} и плотности импульса \mathbf{p} как достаточно гладкие функции координат x :

$$\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}^0(x), \quad \mathbf{p}(0, x) = \mathbf{p}^0(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.3.5)$$

Соотношения (1.3.1)–(1.3.3) описывают напряженно-деформированное состояние в каждой внутренней точке упругого тела. Для существования решения начально-краевой задачи (1.3.1)–(1.3.5) напряжения во внутренних точках тела должны непрерывно переходить в напряжения на границе. Таким же образом значения перемещений внутренних точек непрерывно переходят в граничные значения. При этом неявно предполагается непрерывность перехода компонент тензора модулей упругости \mathbf{C} , определенного для внутренних точек, на границу тела Γ [25].

Как и в §1.2 необходимо принять во внимание, что граничные условия (1.3.4) не могут быть заданы без учета физических факторов, которые порождают эти условия. Например, некоторая часть границы может быть поверхностью раздела двух или нескольких сред (как упругих, так и неупругих). В этом случае любая граничная точка принадлежит как рассматриваемому телу, так и телам, которые порождают эти граничные условия. Некоторые внутренние поверхности тела Ω также

могут быть границами раздела различных материалов. Любая точка на этих поверхностях одновременно принадлежит частям тела с разными механическими свойствами, т.е. тензор модулей упругости \mathbf{C} и функция плотности ρ на этих поверхностях, вообще говоря, не определены, и следовательно, не определены соотношения (1.3.1).

В общем случае, решение начально-краевой задачи может не существовать в классическом виде, поэтому необходимо рассматривать его в некотором обобщенном смысле, используя методы функционального анализа и расширяя допустимые пространства неизвестных переменных [74, 93, 177].

1.3.2. Классические вариационные принципы. Для того чтобы учесть упомянутые выше неопределенности, в линейной теории упругости применяются вариационные подходы. Приведем два классических примера, которые потребуются в дальнейшем.

Предположим, что в начале ($t = 0$) и конце ($t = T$) движения заданы перемещения \mathbf{u} , существуют выраженные через эти перемещения функции кинетической энергии K и упругой энергии U , а при вариациях перемещений $\delta\mathbf{u}$ поверхностные нагрузки \mathbf{q} не меняются, т.е. $\bar{\Gamma}_u^{(k)} \cup \bar{\Gamma}_\sigma^{(k)} = \Gamma$ для $k = 1, \dots, d$. Тогда из принципа виртуальной работы следует принцип Гамильтона о стационарности функционала действия:

$$\begin{aligned} \delta H &= 0, \quad H = \int_0^T (K - U) dt, \quad K = \int_{\Omega} \frac{\rho \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}_t}{2} d\Omega, \\ U &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \varepsilon : \mathbf{C} : \varepsilon - \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right) d\Omega - \sum_{k=1}^d \int_{\Gamma_\sigma^{(k)}} v_k(x) u_k d\Gamma; \\ u_k &= v_k(x), \quad x \in \Gamma_u^{(k)}, \\ u_k &= \mathbf{i}_k(x) \cdot \mathbf{u}, \quad v_k = \mathbf{i}_k(x) \cdot \mathbf{v}(x), \quad k = 1, \dots, d; \\ \mathbf{u}(0, x) &= \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{u}(T, x) = \mathbf{u}^f. \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

В этой задаче строго выполняются соотношения (1.3.1). Компоненты u_k вектора перемещений \mathbf{u} , которые заданы в системе координат,

связанной с главными осями тензоров α и β , должны удовлетворять граничному условию (1.3.4) на частях границы $\Gamma_u^{(k)} \subset \Gamma$, где фиксированы перемещения, т.е. $\alpha_k = 1$ и $\beta_k = 0$. Уравнение изменения импульса (1.3.3) и граничные условия в напряжениях на частях границы $\Gamma_\sigma^{(k)} = \Gamma \setminus \bar{\Gamma}_u^{(k)}$, где заданы коэффициенты $\alpha_k = 0$ и $\beta_k = 1$, появляются в условиях стационарности функционала H , определенного в (1.3.6).

Если же определены начальные и терминальные распределения плотности импульса \mathbf{p} , существуют функции дополнительной кинетической энергии K_c и дополнительной упругой энергии U_c , выраженные соответственно через плотность импульса \mathbf{p} и напряжения σ , а при вариациях равновесных полей $\delta\mathbf{p}$, $\delta\sigma$ граничные условия в перемещениях не меняются, то можно сформулировать принцип стационарности дополнительного функционала действия

$$\begin{aligned} \delta H_c = 0, \quad H_c &= \int_0^T (K_c - U_c) dt, \quad K_c = \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}{\rho(x)} d\Omega, \\ U_c &= \frac{1}{2} \int_\Omega \sigma : \mathbf{C}^{-1} : \sigma d\Omega - \sum_{k=1}^d \int_{\Gamma_u^{(k)}} v_k(x) q_k d\Gamma; \\ q_k &= v_k(x), \quad x \in \Gamma_\sigma^{(k)}, \\ q_k &= \mathbf{i}_k(x) \cdot \mathbf{q}, \quad v_k = \mathbf{i}_k(x) \cdot \mathbf{v}(x), \quad k = 1, \dots, d; \\ \mathbf{p}(0, x) &= \mathbf{p}^0, \quad \mathbf{p}(T, x) = \mathbf{p}^f. \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

В соответствии с этим принципом равновесные поля плотности импульса \mathbf{p} и напряжений σ выполняют соотношения (1.3.1) и (1.3.3), а компоненты тензора σ строго удовлетворяют граничным условиям в напряжениях на частях границы $\Gamma_\sigma^{(k)}$. Кинематическое уравнение (1.3.2) и граничные условия, заданные в перемещениях на частях границы $\Gamma_u^{(k)}$, эквивалентны необходимым условиям стационарности дополнительного к H функционала H_c .

Отметим, что вариационные принципы (1.3.6) и (1.3.7) сформулированы для краевых динамических задач линейной теории упругости и,

вообще говоря, не могут быть применены в представленном виде для решения начально-краевой задачи (1.3.1)–(1.3.5).

1.3.3. Метод интегро-дифференциальных соотношений. В предлагаемом подходе в отличие от классических формулировок вместо локальных уравнений состояния упругого тела (1.3.1) вводится в рассмотрение одно интегральное соотношение, связывающее векторы плотности импульса \mathbf{p} и скорости \mathbf{u}_t , а также тензоры напряжений σ и деформаций ε .

Была предложена [54] следующая интегро-дифференциальная формулировка начально-краевой задачи о движении упругого тела (1.3.1)–(1.3.5): найти такие неизвестные поля перемещений $\mathbf{u}^*(t, x)$, напряжений $\sigma^*(t, x)$ и плотности импульса $\mathbf{p}^*(t, x)$, которые удовлетворяют следующему интегральному соотношению:

$$\begin{aligned} \Phi_+[\mathbf{u}, \sigma, \mathbf{p}] &= \int_0^T \int_{\Omega} \varphi_+ d\Omega dt = 0, \\ \varphi_+ &= \frac{1}{2}(\rho(x)\eta \cdot \eta + \xi : \mathbf{C}(x) : \xi), \\ \eta &= \mathbf{u}_t - \rho^{-1}(x)\mathbf{p}, \quad \xi = \varepsilon - \mathbf{C}^{-1}(x) : \sigma, \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

при выполнении кинематического уравнения (1.3.2), уравнения изменения импульса (1.3.3), граничных и начальных условий (1.3.4), (1.3.5).

Как и для одномерного случая, рассмотренного в §1.2, подынтегральная функция φ_+ из (1.3.8) имеет размерность плотности энергии и неотрицательна. Из последнего свойства следует неотрицательность интеграла Φ_+ для произвольных функций \mathbf{u} , σ и \mathbf{p} , что позволяет привести интегро-дифференциальную задачу (1.3.2)–(1.3.5), (1.3.8) к минимизационной формулировке: найти допустимые функции \mathbf{u}^* , σ^* и \mathbf{p}^* , которые доставляют минимальное (нулевое) значение функционалу Φ_+ :

$$\Phi_+[\mathbf{u}^*, \sigma^*, \mathbf{p}^*] = \min_{\mathbf{u}, \sigma, \mathbf{p}} \Phi_+[\mathbf{u}, \sigma, \mathbf{p}] = 0 \tag{1.3.9}$$

при строгом выполнении ограничений (1.3.2)–(1.3.5).

Обозначим действительные и произвольно выбранные допустимые перемещения, напряжения, импульсы через \mathbf{u}^* , σ^* , \mathbf{p}^* и \mathbf{u} , σ , \mathbf{p} соответственно и положим

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* + \delta\mathbf{u}, \quad \sigma = \sigma^* + \delta\sigma, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}^* + \delta\mathbf{p}.$$

Тогда с учетом (1.3.9) имеем

$$\Phi_+[\mathbf{u}, \sigma, \mathbf{p}] = \delta_{\mathbf{u}}\Phi_+ + \delta_{\sigma}\Phi_+ + \delta_{\mathbf{p}}\Phi_+ + \delta^2\Phi_+,$$

где $\delta_{\mathbf{u}}\Phi_+$, $\delta_{\sigma}\Phi_+$, $\delta_{\mathbf{p}}\Phi_+$ — первые вариации относительно неизвестных \mathbf{u} , σ , \mathbf{p} , а $\delta^2\Phi_+ \geq 0$ — вторая вариация функционала Φ_+ .

1.3.4. Семейство квадратичных функционалов. Была показана [54] возможность построения семейства эквивалентных вариационных формулировок с разными минимизируемыми функционалами для статических задач линейной теории упругости.

Аналогично в динамических задачах можно ввести следующее параметрическое семейство квадратичных функционалов

$$\Phi = \int_0^T \int_{\Omega} \varphi d\Omega dt, \quad \varphi = a\rho\eta \cdot \eta + b\xi : \mathbf{C} : \xi, \quad a^2 + b^2 = \frac{1}{2}, \quad b \geq 0, \quad (1.3.10)$$

для которых стационарные условия при выполнении всех ограничений (1.3.2)–(1.3.5) эквивалентны определяющим соотношениям (1.3.1) состояния упругого тела. В выражениях (1.3.10) для функционала Φ величины a и b — действительные постоянные. При $a = b = 1/2$ интеграл Φ совпадает с неотрицательным функционалом Φ_+ , определенным соотношениями (1.3.8). Если $a > 0$ и $b \neq 0$, каждому функционалу $\Phi[b]$ соответствует своя задача условной минимизации, подобная задаче (1.3.2)–(1.3.5), (1.3.9).

Для произвольных ненулевых значений a и b ($ab \neq 0$) можно определить общую вариационную формулировку начально-краевой задачи линейной упругости: при выполнении ограничений (1.3.2)–(1.3.5) найти

неизвестные функции $\mathbf{u}^*(t, x)$, $\sigma^*(t, x)$, $\mathbf{p}^*(t, x)$, доставляющие стационарные значения функционалу Φ :

$$\delta\Phi[\mathbf{u}^*, \sigma^*, \mathbf{p}^*] = \delta_{\mathbf{u}}\Phi + \delta_{\sigma}\Phi + \delta_{\mathbf{p}}\Phi = 0. \quad (1.3.11)$$

После интегрирования по частям с учетом условий (1.3.2)–(1.3.5) получаем выражения для первых вариаций

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{u}}\Phi &= -2 \int_0^T \int_{\Omega} \{a\rho(x)\eta_t + b\nabla \cdot (\mathbf{C}(x) : \xi)\} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega dt + \\ &+ 2a \int_{\Omega} [\rho(x)\eta \cdot \delta\mathbf{u}]_{t=0}^{t=T} d\Omega + 2b \int_0^T \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{C}(x) : \xi) \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma dt, \quad (1.3.12) \\ \delta_{\sigma}\Phi &= -2b \int_0^T \int_{\Omega} \xi : \delta\sigma d\Omega dt, \quad \delta_{\mathbf{p}}\Phi = -2a \int_0^T \int_{\Omega} \eta \cdot \delta\mathbf{p} d\Omega dt. \end{aligned}$$

Из выражений (1.3.12) видно, что первые вариации функционала Φ равны нулю на любых допустимых вариациях функций $\delta\mathbf{u}$, $\delta\sigma$, $\delta\mathbf{p}$, если выполняются соотношения (1.3.1).

Получим в явном виде необходимые условия стационарности функционала Φ (уравнения Лагранжа–Эйлера). Для этого надо учесть связь между тензором напряжений σ и вектором плотности импульса \mathbf{p} , которая определяется уравнением изменения импульса (1.3.3), а значит, и связь между их вариациями $\delta\mathbf{p}$ и $\delta\sigma$:

$$\delta\mathbf{p}_t = \nabla \cdot \delta\sigma. \quad (1.3.13)$$

Вводя, как и в §1.2, вспомогательный вектор

$$\zeta(t, x) = - \int_0^t \eta(t_1, x) dt_1,$$

находим с учетом ограничения (1.3.13) условия для первых вариаций

$$\begin{aligned}
 \delta_{\mathbf{u}}\Phi &= 2 \int_0^T \int_{\Omega} (a\rho\dot{\zeta}_{tt} - b\nabla \cdot (\mathbf{C} : \xi)) \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega \, dt - \\
 &\quad - 2a \int_{\Omega} [\rho\dot{\zeta}_t \cdot \delta\mathbf{u}]_{t=0}^{t=T} \, d\Omega + 2b \int_0^T \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{C} : \xi) \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Gamma \, dt = 0, \\
 \delta_{\sigma}\Phi + \delta_{\mathbf{p}}\Phi &= 2 \int_0^T \int_{\Omega} (a\varepsilon_{\zeta} - b\xi) : \delta\sigma \, d\Omega \, dt + \\
 &\quad + a \int_{\Omega} [\zeta \cdot \delta\mathbf{p}]_{t=0}^{t=T} \, d\Omega - a \int_0^T \int_{\Gamma} \zeta \cdot \delta\sigma \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \, dt = 0,
 \end{aligned} \tag{1.3.14}$$

где введен безразмерный тензор второго ранга

$$\varepsilon_{\zeta} = \frac{1}{2}(\nabla\zeta + \nabla\zeta^T).$$

Учитывая условия (1.3.4) и (1.3.5), накладываемые на граничные и начальные вариации неизвестных функций $\delta\mathbf{u}$, $\delta\sigma$, $\delta\mathbf{p}$, выпишем уравнения Лагранжа–Эйлера с соответствующими граничными и терминальными соотношениями

$$\begin{aligned}
 \rho\dot{\zeta}_{tt} - \nabla \cdot (\mathbf{C} : \varepsilon_{\zeta}) &= 0, \quad a\varepsilon_{\zeta} + b\xi = 0; \\
 x \in \Gamma : \quad \alpha \cdot \zeta + \beta \cdot \mathbf{q}_{\zeta} &= 0, \quad \mathbf{q}_{\zeta} = (\mathbf{C} : \varepsilon_{\zeta}) \cdot \mathbf{n}; \\
 t = T : \quad \zeta = \dot{\zeta}_t &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.3.15}$$

Относительно неизвестного вектора ζ система (1.3.15) представляет собой терминально-краевую задачу линейной теории упругости с единственным нулевым решением, из которого непосредственно следуют условия $\xi = 0$ и $\eta = 0$. Иными словами, если решение \mathbf{u}^* , σ^* , \mathbf{p}^* задачи (1.3.2)–(1.3.5), (1.3.11) существует, система (1.3.15) вместе с ограничениями (1.3.2)–(1.3.5) эквивалентна исходной динамической задаче линейной теории упругости (1.3.1)–(1.3.5).

1.3.5. Анализ вариационных формулировок. Рассмотрим более детально один функционал из семейства (1.3.10) при $a = -b = 1/2$.

Представим его в виде

$$\begin{aligned}\Phi_- &= \Phi|_{b=-1/2} = \int_0^T \int_{\Omega} \varphi_-(\mathbf{u}, \sigma, \mathbf{p}) d\Omega dt = \Theta_u + \Theta_\sigma - 2\Theta, \\ \varphi_- &= \frac{1}{2} (\rho\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\xi}); \\ \Theta &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_t - \sigma : \boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega dt, \\ \Theta_u &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}_t - \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega dt, \\ \Theta_\sigma &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (\rho^{-1} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} - \sigma : \mathbf{C}^{-1} : \sigma) d\Omega dt.\end{aligned}$$

Заметим, что интеграл Θ_u зависит только от перемещений, тогда как в выражение для Θ_σ вектор-функция \mathbf{u} не входит. Билинейный функционал Θ , в свою очередь, не зависит явно от упругих и инерционных свойств тела, и после интегрирования по частям его можно привести к виду

$$2\Theta = \int_{\Omega} [\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}]_{t=0}^{t=T} d\Omega - \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Omega dt - \int_0^T \int_{\Gamma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} d\Gamma dt. \quad (1.3.16)$$

Как и в задачах (1.3.6), (1.3.7), рассмотрим случай, когда на части границы $\Gamma_\sigma^{(k)} \subset \Gamma$ через функцию v_k задается компонента q_k вектора нагрузок \mathbf{q} ($\alpha_k = 0$, $\beta_k = 1$ в уравнении (1.3.4)), в то время как на оставшейся части границы $\Gamma_u^{(k)} \subset \Gamma$ задана компонента u_k вектора перемещений u ($\alpha_k = 1$, $\beta_k = 0$) в направлении одной из общих главных осей $\mathbf{i}_k(x)$ тензоров $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Подчеркнем, что части границы $\Gamma_u^{(k)}$, $\Gamma_\sigma^{(k)}$ в этом случае удовлетворяют следующим условиям:

$$\bar{\Gamma}_u^{(k)} \cup \bar{\Gamma}_\sigma^{(k)} = \Gamma, \quad \Gamma_u^{(k)} \cap \Gamma_\sigma^{(k)} = \emptyset, \quad k = 1, \dots, d.$$

Это значит, что отсутствуют смешанные граничные соотношения, связывающие компоненты вектора перемещений и тензора напряжений. Тогда после подстановки выражения (1.3.16) функционал Φ_- может быть переписан следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_- = & \Theta_u + \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Omega dt + \sum_{k=1}^d \int_0^T \int_{\Gamma_{\sigma}^{(i)}} v_k u_k d\Gamma dt + \\ & + \Theta_{\sigma} + \sum_{k=1}^d \int_0^T \int_{\Gamma_u^{(k)}} q_k v_k d\Gamma dt - \int_{\Omega} [\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}]_{t=0}^{t=T} d\Omega \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

Если в начальный и конечный моменты времени задано распределение в теле либо перемещений, либо плотности импульса, интеграл Φ_- распадается на две независимые части:

$$\Phi_- = H_u + H_{\sigma},$$

$$H_u = \Theta_u + \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Omega dt + \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Gamma_{\sigma}^{(i)}} v_i u_i d\Gamma dt + \Xi_u,$$

$$H_{\sigma} = \Theta_{\sigma} + \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Gamma_u^{(i)}} q_i v_i d\Gamma dt + \Xi_p.$$

Функционал H_u зависит только от функции перемещений \mathbf{u} , а H_{σ} — от тензора напряжений σ и вектора плотности импульса \mathbf{p} , Ξ_u и Ξ_p — интегралы по области Ω , зависящие соответственно от функций \mathbf{u} и \mathbf{p} .

В табл. 1.3.1 представлены краевые по времени условия (А, В) и явные выражения для интегралов Ξ_u и Ξ_p для разных типов динамических задач. Первые четыре строки соответствуют граничным задачам, а последняя — периодической по времени задаче. В таблице для сокращения записи введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} I_p^0 &= \int_{\Omega} \mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{u}|_{t=0} d\Omega, & I_p^f &= \int_{\Omega} \mathbf{p}^f \cdot \mathbf{u}|_{t=T} d\Omega, \\ I_u^0 &= \int_{\Omega} \mathbf{u}^0 \cdot \mathbf{p}|_{t=0} d\Omega, & I_u^f &= \int_{\Omega} \mathbf{u}^f \cdot \mathbf{p}|_{t=T} d\Omega. \end{aligned}$$

Таблица 1.3.1: Типы краевых задач.

Условие А	Условие В	Ξ_u	Ξ_p
$\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}^0(x)$	$\mathbf{u}(T, x) = \mathbf{u}^f(x)$	0	$I_u^f - I_u^0$
$\mathbf{p}(0, x) = \mathbf{p}^0(x)$	$\mathbf{p}(T, x) = \mathbf{p}^f(x)$	$I_p^f - I_p^0$	0
$\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}^0(x)$	$\mathbf{p}(T, x) = \mathbf{p}^f(x)$	I_p^f	$-I_u^0$
$\mathbf{p}(0, x) = \mathbf{p}^0(x)$	$\mathbf{u}(T, x) = \mathbf{u}^f(x)$	$-I_p^0$	I_u^f
$\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}(T, x)$	$\mathbf{p}(0, x) = \mathbf{p}(T, x)$	0	0

В соответствии с первым равенством (1.3.14) при учете ограничений (1.3.3), (1.3.4) и краевых условий по времени, приведенных в табл. 1.3.1, стационарные условия для функционала Φ_- могут быть представлены в виде

$$\delta\Phi_- = \delta_{\mathbf{u}}H_u + \delta_{\sigma\mathbf{p}}H_\sigma = 0.$$

Следовательно, рассматриваемая краевая задача распадается на две независимые подзадачи.

Задача 1. Найти допустимое поле перемещений \mathbf{u}^* , которое удовлетворяет условиям (1.3.4) на частях границы $\Gamma_u^{(k)}$ ($k = 1, \dots, d$), а также начальным и терминальным условиям из табл. 1.3.1, заданным в перемещениях, и доставляет стационарное значение функционалу H_u :

$$\delta_{\mathbf{u}}H_u = 0. \tag{1.3.18}$$

Задача 2. Найти равновесные поля напряжений σ^* и плотности импульса \mathbf{p}^* , которые удовлетворяют соотношения (1.3.4) на частях границы $\Gamma_\sigma^{(k)}$ ($k = 1, \dots, d$), а также начальные и терминальные условия из табл. 1.3.1, заданные в импульсах, и доставляют стационарное значение функционалу H_σ :

$$\delta_{\sigma\mathbf{p}}H_\sigma = 0. \tag{1.3.19}$$

Важно отметить, что если в начальный и конечный момент времени заданы перемещения (первая строка табл. 1.3.1), то задача 1 совпадает с принципом Гамильтона–Остроградского (1.3.6) ($H_u = H$). Если же в начале и в конце процесса определено распределение вектора плотности импульса (вторая строка табл. 1.3.1), задача 2 полностью соответствует дополнительному принципу Гамильтона (1.3.7) ($H_\sigma = H_c$). Оба этих классических принципа следуют из задач 1 и 2 в периодическом случае (последняя строка табл. 1.3.1).

В отличие от вариационных принципов (1.3.6) и (1.3.7), которые сформулированы для краевых динамических задач, в предложенном подходе функционал Φ_- может быть использован также для решения начально-краевой задачи (1.3.1)–(1.3.5). При задании начальных условий (1.3.5) последний член в соотношении (1.3.17) зависит от скалярного произведения векторов \mathbf{u} и \mathbf{p} , взятых в конечный момент времени. Это не позволяет разделить функционал Φ_- на две независимые части. Разделение на две подзадачи (1.3.18) и (1.3.19) напрямую невозможно даже для краевых задач определенных в табл. 1.3.1, если на какой-либо части границы Γ области Ω заданы смешанные условия ($\alpha_k \beta_k \neq 0$). В этих случаях вариационная задача (1.3.11) при соответствующих ограничениях должна решаться одновременно в перемещениях, напряжениях и импульсах.

1.3.6. Вариационная формулировка начально-краевой задачи в перемещениях и напряжениях. При решении динамических задач линейной теории упругости в предложенной вариационной постановке (1.3.2)–(1.3.5), (1.3.11) приходится иметь дело с довольно большим количеством неизвестных величин. Так, для пространственной задачи ($d = 3$) необходимо определить шесть компонент векторов перемещений u и плотности импульса p и шесть компонент тензора напряжений σ . Даже после разрешения векторного уравнения изменения импульса (1.3.3) в функционале остается девять независимых

функций. Это может существенно ограничить применимость численных подходов. Для повышения эффективности вычислительных алгоритмов возможно применение особых вариационных формулировок, в которых часть уравнений состояний (1.3.1) рассматривается как дополнительные ограничения на допустимые состояния тела.

Исследуем неотрицательный функционал из семейства (1.3.10), а именно, интеграл Φ при $a = 0$ и $b = 1/\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\Phi_0[\mathbf{u}, \sigma] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi|_{a=0} = \int_0^T \int_{\Omega} \varphi_0 d\Omega dt, \\ \varphi_0 &= \frac{1}{2} \xi : \mathbf{C} : \xi, \quad \xi = \varepsilon - \mathbf{C}^{-1} : \sigma.\end{aligned}\tag{1.3.20}$$

Для корректной постановки минимизационной задачи, соответствующей функционалу Φ_0 , соотношение между скоростью точек тела и плотностью импульса $\eta = 0$ в (1.3.1) должно рассматриваться как локальное ограничение на поля перемещений и импульсов. Тогда вариационная формулировка звучит следующим образом: найти такие поля перемещений \mathbf{u}^* и напряжений σ^* , которые доставляют минимальное значение функционалу Φ_0 при заданных ограничениях:

$$\begin{aligned}\Phi_0[\mathbf{u}^*, \sigma^*] &= \min_{\mathbf{u}, \sigma} \Phi_0[\mathbf{u}, \sigma] = 0; \\ \rho(x) \mathbf{u}_{tt} &= \nabla \cdot \sigma + f(t, x); \\ x \in \Gamma : \quad \alpha(x) \cdot \mathbf{u} + \beta(x) \cdot \mathbf{q} &= \mathbf{v}(x), \quad \mathbf{q} = \sigma \cdot \mathbf{n}; \\ t = 0 : \quad \mathbf{u} &= \mathbf{u}^0(x), \quad \mathbf{u}_t = \rho^{-1}(x) \mathbf{p}^0(x).\end{aligned}\tag{1.3.21}$$

Обозначим действительные, а также любые допустимые перемещения и напряжения соответственно через \mathbf{u}^* и σ^* , \mathbf{u} и σ . Введем обозначения

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* + \delta \mathbf{u}, \quad \sigma = \sigma^* + \delta \sigma$$

и выпишем вариации функционала

$$\Phi_0[\mathbf{u}, \sigma] = \delta_{\mathbf{u}} \Phi_0 + \delta_{\sigma} \Phi_0 + \delta^2 \Phi_0.$$

Вторые вариации неотрицательны в силу квадратичности подынтегральной функции φ_0 по отношению к вариациям $\delta \mathbf{u}$ и $\delta \sigma$ ($\delta^2 \Phi_0 \geq 0$). Первые вариации функционала Φ_0 равны нулю для произвольных $\delta \mathbf{u}$ и $\delta \sigma$, если выполнено равенство $\xi = 0$.

В задаче (1.3.21) вектор перемещений \mathbf{u} и тензор напряжений σ , а также их вариации $\delta \mathbf{u}$ и $\delta \sigma$, связаны, помимо возможных смешанных граничных условий, соотношениями второго закона Ньютона

$$\delta \mathbf{u}_{tt} = \nabla \cdot \delta \sigma .$$

Для определения условий стационарности функционала Φ_0 при соответствующих ограничениях введем в рассмотрение вспомогательный тензор $\chi(t, x)$, определяющий равновесные поля перемещений и напряжений так, что

$$u = \nabla \cdot \chi + \int_0^t \int_0^{t_2} \frac{f(t_1, x)}{\rho(x)} dt_1 dt_2, \quad \sigma = \rho(x) \chi_{tt} .$$

После ряда подстановок и интегрирований по частям первые вариации функционала Φ_0 , выраженные через тензоры ξ и χ , имеют вид

$$\begin{aligned} \delta \chi \Phi_0 = & \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta \xi - \rho \xi_{tt}) : \delta \chi d\Omega dt + \int_{\Omega} \rho [\xi_t : \delta \chi - \xi : \delta \chi_t]_{t=0}^{t=T} d\Omega + \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma} [(n \cdot \mathbf{C} : \xi) \cdot (\nabla \cdot \delta \chi) - (\nabla \cdot \mathbf{C} : \xi) \cdot (\delta \chi \cdot n)] d\Gamma dt = 0, \end{aligned} \tag{1.3.22}$$

где

$$\Delta \xi = \frac{1}{2} \left[\nabla (\nabla \cdot \mathbf{C} : \xi) + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{C} : \xi)^T \right] .$$

Система уравнений Лагранжа–Эйлера и соответствующих граничных и терминальных условий может быть получена из условий стационарности (1.3.22) при учете граничных и начальных условий, накладываемых на χ .

дываемых на вариации тензора χ ,

$$\begin{aligned} \rho \xi_{tt} &= \frac{1}{2} \left[\nabla (\nabla \cdot \mathbf{C} : \xi) + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{C} : \xi)^T \right]; \\ x \in \Gamma : \quad \alpha \cdot (\nabla \cdot \mathbf{C} : \xi) + \rho \beta \cdot (n \cdot \mathbf{C} : \xi_{tt}) &= 0; \\ t = T : \quad \xi &= \xi_t = 0. \end{aligned} \tag{1.3.23}$$

Если решение исходной динамической задачи существует, то можно показать, что терминально-краевая задача (1.3.23) относительно неизвестного тензора ξ имеет только тривиальное решение. Это означает, что условия стационарности (1.3.22) вместе с ограничениями (1.3.21) эквивалентны полной системе уравнений (1.3.1)–(1.3.5), описывающей движения упругого тела в рамках линейной теории упругости.

§1.4. Вариационные формулировки задачи о поперечных перемещениях упругой балки

1.4.1. Постановка задачи. Рассматриваются плоские поперечные движения прямолинейной упругой балки, описываемые в рамках модели Эйлера–Бернулли линейным уравнением в частных производных

$$\rho(x)w_{tt} + (\kappa(x)w_{xx})_{xx} = f(x, t), \quad x \in (0, L). \quad (1.4.1)$$

Здесь w — поперечные перемещения точек центральной линии балки, длина которой равна L , $\rho > 0$ — линейная плотность, а $\kappa > 0$ — изгибная жесткость балки, f — распределенная по ее длине нагрузка. В начальный момент времени $t = 0$ определены форма поперечного изгиба (перемещения) и относительная скорость точек балки. В каждой из концевых точек $x = 0, L$ задаются по два условия, которые будут приведены ниже.

Перейдем к безразмерной форме записи уравнений движения упругой балки, определяя новые координату, время и заданные функции в следующем виде

$$\begin{aligned} x &= Lx', & t &= t_0t', & w &= Lw', \\ \rho &= \rho_0\rho', & \kappa &= \kappa_0\kappa', & f &= \kappa_0f'/L^3, \\ t_0 &= L^2\sqrt{\frac{\rho_0}{\kappa_0}}, & \rho_0 &= \frac{1}{L}\int_0^L \rho(x)dx, & \kappa_0 &= \frac{1}{L}\int_0^L \kappa(x)dx. \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Здесь t_0 — время, характеризующее периоды собственных колебаний, ρ_0 и κ_0 — средняя линейная плотность и изгибная жесткость балки соответственно. Очевидно, что при такой замене $\rho' = \kappa' = 1$, если $\rho = \text{const}$ и $\kappa = \text{const}$. Подставляя в уравнение (1.4.1) выражения из (1.4.2) для координаты x , времени t , функций перемещений w , плотности ρ , жесткости κ , нагрузки f и умножая это уравнение на $L^3\kappa_0^{-1}$, получим безразмерное уравнение аналогичное (1.4.1). В дальнейшем штрихи опускаются.

Введем безразмерные силовые переменные p и s , характеризующие вместе с геометрической переменной w поведение упругой системы и зависящие от времени t и координаты x . Здесь p и s — функции соответственно линейной плотности импульса (в дальнейшем для краткости импульс) и изгибающего момента в поперечном сечении балки (далее — момент).

В линейной теории локальные уравнения состояния, связывающие плотность импульса p со скоростями точек системы w_t , а также момент s с изгибом w_{xx} можно записать в виде

$$\eta = w_t - \rho^{-1}p = 0, \quad \xi = w_{xx} - \kappa^{-1}s = 0, \quad (1.4.3)$$

где для удобства введены вспомогательные функции η и ξ .

Используя соотношения (1.4.3), уравнение движения упругой балки (1.4.1), записанное в перемещениях, можно выразить через функции момента s и импульса p :

$$p_t + s_{xx} = f. \quad (1.4.4)$$

Это соотношение будем называть уравнением изменения плотности импульса точек балки.

Рассмотрим случай линейных граничных условий, которые выражаются через краевые значения функций перемещений w , угла поворота центральной линии балки w_x (в рамках линейной теории), момента s , и перерезывающей силы $-s_x$ в форме

$$\begin{aligned} x = 0: \quad a_1 w + b_1 s_x &= v_1(t), \quad a_2 w_x - b_2 s = v_2(t); \\ x = 1: \quad a_3 w - b_3 s_x &= v_3(t), \quad a_4 w_x + b_4 s = v_4(t). \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

Здесь переменные v_k ($k = 1, 2, 3, 4$) — известные функции времени t . Постоянные коэффициенты $a_k \geq 0$ и $b_k \geq 0$ задают тип граничных условий. Так, например, функции $v_{1,3}$ определяют перемещения w на концах балки, если даны постоянные $a_{1,3} = 1$, $b_{1,3} = 0$, или перерезывающую силу $-s_x$, если $a_{1,3} = 0$ и $b_{1,3} = 1$. При $a_{2,4} = 1$, $b_{2,4} = 0$,

на концах задается касательная к центральной линии балки, а если $a_{2,4} = 0$, $b_{2,4} = 1$, то в концевых сечениях даны изгибающие моменты s . Условия (1.4.5) включают в себя разнообразные виды упругого закрепления балки, если для какого-то из индексов $k = 1, \dots, 4$ пара коэффициентов a_k и b_k одновременно не равна нулю ($a_k b_k \neq 0$).

Для полного описания движения упругой балки определим его состояние в начальный момент времени, задавая распределения поперечных перемещений w и плотности импульса p , как функции координат x :

$$w(0, x) = w^0(x), \quad p(0, x) = p^0(x). \quad (1.4.6)$$

При постановке задачи надо принимать во внимание совместность начальных (1.4.6) и краевых (1.4.5) условий [3].

1.4.2. Классические вариационные формулировки. При решении начально-краевой задачи (1.4.3)–(1.4.6) необходимо учитывать, что функции линейной плотности ρ и изгибной жесткости κ могут претерпевать разрывы в некоторых точках балки, граничные функции v_k мгновенно менять свои значения в некоторые моменты времени, а функция распределенной нагрузки f рваться на некоторых кривых в двумерном пространстве времени и координаты. В этих точках могут существовать особенности решения, для учета которых в статических задачах используются вариационные подходы [25].

Как и в линейной теории упругости, классические вариационные принципы сформулированы для периодических и краевых по времени задач о поперечных движениях упругой балки и ограниченного класса условий, заданных на концах балки. Приведем два примера вариационных формулировок, которые потребуются в дальнейшем для анализа исходной задачи.

Рассмотрим движения упругой балки на фиксированном интервале $t \in [0, T]$. Если в начале ($t = 0$) и в конце ($t = T$) движения заданы

перемещения $w(0, x) = w^0(x)$ и $w(T, x) = w^1(x)$, существуют функции кинетической энергии K и полной потенциальной энергии U , выраженные через перемещения, при вариациях δw не изменяются изгибающие моменты s и перерезывающие силы $-s_x$ на краях балки ($a_k b_k = 0$, $a_k + b_k = 1$, $k = 1, 2, 3, 4$), из принципа виртуальной работы следует принцип стационарности Гамильтона:

$$\begin{aligned} \delta H = 0, \quad H[w] &= \int_0^T (K - U) dt, \\ U &= \int_0^1 (A - fw) dx - \\ &\quad - [b_1 v_1 w - b_2 v_2 w_x]_{x=0} - [b_3 v_3 w - b_4 v_4 w_x]_{x=1}, \\ K &= \int_0^1 \frac{\rho w_t^2}{2} dx, \quad A = \frac{\kappa w_{xx}^2}{2}. \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

Согласно этому принципу граничные условия в перемещениях (если $b_k = 0$ и $a_k = 1$) являются главными, т.е. должны строго выполняться в локальной форме (1.4.5). Поэтому соответствующие функции v_k не входят в линейную часть функционала H , определенного в системе (1.4.7).

Если на концах балки некоторые условия заданы через изгибающий момент или перерезывающую силу (при $b_k = 1$ и $a_k = 0$), то они являются естественными граничными условиями и учитываются в обобщенном смысле через соответствующие линейные члены функционала H .

В этой вариационной задаче подразумевается строгое выполнение локальных соотношений (1.4.3). Уравнение движения (1.4.2) и те краевые условия из (1.4.5), для которых $b_k = 1$ и $a_k = 0$, появляются как необходимые условия стационарности гамильтониана H .

Если заданы начальные и терминальные распределения импульса ($p(0, x) = p^0(x)$, $p(T, x) = p^1(x)$), существуют функции дополнительной

кинетической энергии K_c и полной дополнительной энергии U_c , выраженные через импульс p и момент s , и при вариациях равновесных полей δp , δs граничные перемещения w и наклон центральной линии w_x не меняют свои значения ($a_k b_k = 0$, $a_k + b_k = 1$, $k = 1, 2, 3, 4$), можно сформулировать принцип стационарности дополнительной энергии

$$\delta H_c = 0, \quad H_c[p, s] = \int_0^T (K_c - U_c) dt, \quad K_c = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{p^2}{\rho} dx, \quad (1.4.8)$$

$$U_c = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{s^2}{\kappa} dx - [a_1 v_1 s_x - a_2 v_2 s]_{x=0} + [a_3 v_3 s_x - a_4 v_4 s]_{x=1}.$$

В этой формулировке граничные условия, выраженные через изгибающие моменты ($b_k = 1$, $a_k = 0$) являются главными, т.е. должны строго выполняться в локальной форме (1.4.5). Кроме того функции момента и импульса p обязаны удовлетворять уравнение (1.4.4).

Из этих ограничений вытекает, что функция распределенной нагрузки f и часть функций v_k , которые определяют внешние момент и силу на краях балки, не входят в функционал H_c , определенный в (1.4.8). Если же некоторые уравнения из (1.4.5) заданы в перемещениях w ($b_k = 0$, $a_k = 1$), в дополнительном принципе Гамильтона именно эти соотношения являются естественными граничными условиями и учитываются через соответствующие линейные члены функционала H_c . Соотношения состояния (1.4.3) и граничные условия (1.4.5), определенные через перемещения, эквивалентны условиям стационарности дополнительного к H функционала H_c .

Оба принципа (1.4.7) и (1.4.8) сформулированы для краевых динамических задач линейной теории упругости и, вообще говоря, в представленном виде не могут быть применены для решения начально-краевой задачи (1.4.3)–(1.4.6).

1.4.3. Метод интегро-дифференциальных соотношений. Согласно МИДС вместо локальных уравнений состояния балки (1.4.3)

вводится в рассмотрение одно интегральное соотношение, связывающее импульсы p и моменты s с функцией перемещений w .

В [44] была дана следующая интегро-дифференциальная формулировка задачи о движении упругой балки (1.4.3)–(1.4.6): найти такие неизвестные поля плотности импульса p^* , момента s^* и перемещений w^* , которые удовлетворяют следующему интегральному соотношению

$$\Phi_+[p, s, w] = \int_{\Omega} \varphi_+ d\Omega = 0, \quad \varphi_+ = \frac{1}{2} (\rho\eta^2 + \kappa\xi^2), \quad (1.4.9)$$

при строгом выполнении условий (1.4.4)–(1.4.6). Для сокращения записи введена область $\Omega = (0, T) \times (0, 1)$ с границей $\partial\Omega$ в пространстве времени t и координаты x . Двойной интеграл в (1.4.9) берется по прямоугольной области Ω ($d\Omega = dt dx$).

Подынтегральная функция φ_+ , определенная в системе (1.4.9) через функции η, ξ из (1.4.3), неотрицательна по построению. Из этого свойства следует, что $\Phi_+ \geq 0$ для произвольных функций p, s и w . Это позволяет свести интегро-дифференциальную задачу (1.4.4)–(1.4.6), (1.4.9) к следующей минимизационной.

Задача 1. Найти такие допустимые функции p^*, s^* и w^* , которые доставляют минимальное (нулевое) значение функционалу Φ_+ :

$$\Phi_+[p^*, s^*, w^*] = \min_{p, s, w} \Phi_+[p, s, w] = 0 \quad (1.4.10)$$

при строгом выполнении ограничений (1.4.4)–(1.4.6).

Функционал Φ_+ можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned} \Phi_+ &= \Psi_1 + \Psi_2 - 2\Psi_0, \\ \Psi_0[p, s, w] &= \int_{\Omega} \psi_0 d\Omega, \quad \Psi_1[p, s] = \int_{\Omega} \psi_1 d\Omega, \quad \Psi_2[w] = \int_{\Omega} \psi_2 d\Omega, \\ \psi_0 &= \frac{1}{2} (pw_t + sw_{xx}), \quad \psi_1 = \frac{p^2}{2\rho} + \frac{s^2}{2\kappa}, \quad \psi_2 = \frac{1}{2} (\rho w_t^2 + \kappa w_{xx}^2). \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

Подынтегральные выражения ψ_0 , ψ_1 , ψ_2 представляют собой различные представления линейной плотности полной механической энергии упругой балки. Функция ψ_2 зависит только от поперечных перемещений w , в то время как в выражение для ψ_1 , квадратичное по p и s , перемещения не входят. Смешанная билинейная функция плотности энергии ψ_0 не зависит явно от инерционных и упругих свойств балки.

Так как решение задачи (1.4.10) может носить разрывный характер, локальное условие (1.4.4) определено только, когда функция моментов s дважды непрерывно дифференцируема по x , а частная производная по времени от p непрерывная функция по t .

В вариационной формулировке условие динамического равновесия необходимо понимать в следующем интегральном смысле: для любой области $\Upsilon \subset \Omega$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Upsilon$ и любой непрерывно дифференцируемой по x функции перемещений $h(t, x)$ выполняется соотношение

$$\int_{\Upsilon} (ph_t - sh_{xx}) d\Upsilon = - \int_{\Upsilon} fhd\Upsilon + \int_{\partial\Upsilon} \{n_x sh_x - (n_t p - n_x s_x) h\} d\partial\Upsilon. \quad (1.4.12)$$

Здесь n_t и n_x — проекции единичной внешней нормали к границе $\partial\Upsilon$ соответственно на оси t и x . Можно показать, что для сформулированной минимизационной задачи необходимо, чтобы на линиях $x = \text{const}$ в области Ω допустимые перемещения w и моменты s задавались непрерывно дифференцируемыми по x функциями. На линиях $t = \text{const}$ поля плотности импульса p и перемещений w непрерывны, на наклонных кривых ($|n_t| |n_x| \neq 0$) вдоль нормали должно быть непрерывным соотношение $n_t p - n_x s_x$.

1.4.4. Явные энергетические оценки качества решения. Используя функционал Φ_+ и энергетические интегралы Ψ_0 , Ψ_1 , Ψ_2 , определенные в (1.4.11), для произвольных допустимых полей импульсов p , моментов s и перемещений w , удовлетворяющих ограничениям (1.4.5),

(1.4.6), (1.4.12), можно предложить ряд критериев близости к точному решению. Интегральное качество приближенных функций p , s , w можно оценить по величине безразмерных соотношений, например, вида

$$\Delta_1 = \frac{\Psi_1 + \Psi_2}{2\Psi_0} - 1, \quad \Delta_2 = 1 - \frac{2\Psi_0}{\Psi_1 + \Psi_2},$$

$$\Delta_3 = \frac{\Phi_+}{2\Psi_1}, \quad \Delta_4 = \frac{\Phi_+}{2\Psi_2}.$$

Локальные энергетические качества точности некоторого допустимого движения $p(t, x)$, $s(t, x)$, $w(t, x)$ характеризует функция $\varphi_+(p, s, w)$, определенная в (1.4.9). Еще одним показателем качества приближенных движений является разность между запасенной балкой в процессе движения полной механической энергией и работой внешних сил. Для оценки этой величины введем еще одну функцию линейной плотности механической энергии ψ и соответствующую ей энергию E

$$\psi = \frac{p^2}{2\rho} + \frac{\kappa w_{xx}^2}{2}, \quad E = \int_0^1 \psi dx, \quad \Psi = \int_0^T E dt,$$

где Ψ — это сумма заданной в перемещениях линейной плотности упругой энергии из задачи (1.4.7) и выраженной через импульсы линейной плотности кинетической энергии из задачи (1.4.8). Аналогично выражениям из (1.4.11) определен интеграл по времени Ψ от полной механической энергии балки E .

Из непрерывности по времени допустимых импульсов p и перемещений w следует непрерывность функции энергии $E(t)$. Дифференцируя эту функцию по времени и дважды производя интегрирование по частям, получаем выражение для мощности с учетом условия динамиче-

ского равновесия (1.4.12)

$$\dot{E} = \int_0^1 \left(\frac{pp_t}{\rho} + \kappa w_{xx} w_{ttx} \right) dx = \dot{W} + \dot{E}_0, \quad (1.4.13)$$

$$\dot{W} = [s w_{tx} - s_x w_t]_{x=0}^{x=1}, \quad \dot{E}_0 = \int_0^1 (-\eta p_t + \kappa \xi w_{ttx}) dx.$$

Здесь W — работа внешних сил, E_0 — «паразитная» энергия, интеграл от модуля которой уменьшается при приближении допустимого движения к действительному, т.е. при уменьшении отношений Δ_k , заданных в (1.4.13).

1.4.5. Анализ вариационных формулировок. В §1.3 была показана возможность построения семейства эквивалентных вариационных формулировок с разными функционалами для динамических задач линейной теории упругости. Аналогично в задачах о движениях упругой балки можно ввести следующее параметрическое семейство квадратичных функционалов

$$\Phi = \int_{\Omega} \varphi d\Omega, \quad \varphi = \frac{1}{2} (\rho \eta^2 + \alpha \kappa \xi^2), \quad \alpha \neq 0, \quad (1.4.14)$$

для которых, как будет показано далее, стационарные условия при выполнении ограничений (1.4.5), (1.4.6), (1.4.12) эквивалентны определяющим соотношениям состояния упругой балки (1.4.3). В выражениях для функционала Φ из (1.4.14) α — ненулевая действительная постоянная. При $\alpha = 1$ интеграл Φ совпадает с неотрицательным функционалом Φ_+ , определенным соотношениями (1.4.9). Если $\alpha > 0$, каждому функционалу $\Phi(\alpha)$ соответствует своя задача условной минимизации эквивалентная задаче (1.4.5), (1.4.6), (1.4.10), (1.4.12).

Обозначим действительные и произвольно выбранные допустимые импульсы, моменты, перемещения, через p^* , s^* , w^* и p , s , w соответственно и положим, что $p = p^* + \delta p$, $s = s^* + \delta s$, $w = w^* + \delta w$. Тогда по постановке задачи предполагается, что на точном решении p^* , s^* ,

w^* значение функционала Φ равно нулю: $\Phi[p^*, s^*, w^*] = 0$. На любых допустимых полях p, s, w получаем

$$\begin{aligned} \Phi[p, s, w] &= \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \frac{\rho}{2} \left(w_t^* + \delta w_t - \frac{p^* + \delta p}{\rho} \right)^2 + \frac{\alpha \kappa}{2} \left(w_{xx}^* + \delta w_{xx} - \frac{s^* + \delta s}{\kappa} \right)^2 \right\} d\Omega, \\ \Phi &= \Phi[p^*, s^*, w^*] + \delta\Phi + \Phi(\delta p, \delta s, \delta w) = \delta\Phi + \delta^2\Phi, \\ \delta\Phi &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \rho\eta(p, w) \left(\delta w_t - \frac{\delta p}{\rho} \right) + \alpha\kappa\xi(s, w) \left(\delta w_{xx} - \frac{\delta s}{\kappa} \right) \right\} d\Omega, \end{aligned}$$

где $\delta\Phi$ — первая, а $\delta^2\Phi$ — вторая вариации функционала Φ . Отсутствие членов более высокой степени объясняется квадратичной формой функционала по отношению к неизвестным функциям.

Для произвольных значений α можно определить общую вариационную формулировку начально-краевой задачи движений упругой балки: найти неизвестные функции p^*, s^*, w^* , доставляющие при выполнении ограничений (1.4.5), (1.4.6), (1.4.12) стационарные значения функционалу Φ

$$\delta\Phi = \delta_p\Phi + \delta_s\Phi + \delta_w\Phi = 0, \quad (1.4.15)$$

где $\delta_p\Phi, \delta_s\Phi, \delta_w\Phi$ — первые вариации относительно неизвестных p, s, w соответственно.

После интегрирования по частям с учетом условий (1.4.5), (1.4.6) и (1.4.12) получаем выражения для первых вариаций

$$\begin{aligned} \delta_p\Phi + \delta_s\Phi &= - \int_{\Omega} (\eta\delta p + \alpha\xi\delta s) d\Omega, \\ \delta_w\Phi &= \int_{\Omega} (\alpha(\kappa\xi)_{xx} - \rho\eta_t) \delta w d\Omega + \\ &+ \alpha \int_0^T [\kappa\xi\delta w_x - (\kappa\xi)_x\delta w]_{x=0}^{x=1} dt + \int_0^1 [\rho\eta\delta w]_{t=0}^{t=T} dx. \end{aligned} \quad (1.4.16)$$

Из выражений (1.4.16) видно, что первые вариации функционала Φ равны нулю на любых допустимых вариациях функций δp , δs , δw , если выполняются соотношения (1.4.3).

Получим в явном виде необходимые условия стационарности функционала Φ (уравнения Эйлера–Лагранжа). Для этого надо учесть связь между функциями импульса p и момента s , которая определяется уравнением динамического равновесия (1.4.4), а значит и связь между их вариациями δp и δs :

$$\delta p_t = -\delta s_{xx}. \quad (1.4.17)$$

Вводя вспомогательную функцию

$$\zeta(t, x) = \int_0^t \eta(t_1, x) dt_1,$$

находим с учетом (1.4.17) условия для первых вариаций

$$\begin{aligned} \delta_p \Phi + \delta_s \Phi &= - \int_{\Omega} (\zeta_{xx} + \alpha \xi) \delta s \, d\Omega + \\ &+ \int_0^T [\zeta \delta s_x - \zeta_x \delta s]_{x=0}^{x=1} dt - \int_0^1 [\zeta \delta p]_{t=0}^{t=T} dx = 0, \\ \delta_w \Phi &= \int_{\Omega} (\alpha(\kappa \xi)_{xx} - \rho \zeta_{tt}) \delta w \, d\Omega + \\ &+ \alpha \int_0^T [\kappa \xi \delta w_x - (\kappa \xi)_x \delta w]_{x=0}^{x=1} dt + \int_0^1 [\rho \zeta_t \delta w]_{t=0}^{t=T} dx = 0. \end{aligned}$$

Учитывая условия (1.4.5) и (1.4.6) на граничные и начальные вариации неизвестных функций δp , δs , δw , выпишем уравнения Эйлера–Лагранжа с граничными и терминальными соотношениями

$$\begin{aligned} \rho \zeta_{tt} + (\kappa \zeta_{xx})_{xx} &= 0, \quad \alpha \xi + \zeta_{xx} = 0; \\ x = 0: \quad a_1 \zeta + b_1 (\kappa \zeta_{xx})_x &= 0, \quad a_2 \zeta_x - b_2 \kappa \zeta_{xx} = 0; \\ x = 1: \quad a_3 \zeta - b_3 (\kappa \zeta_{xx})_x &= 0, \quad a_4 \zeta_x + b_4 \kappa \zeta_{xx} = 0; \\ t = T: \quad \zeta = \zeta_t &= 0. \end{aligned} \quad (1.4.18)$$

Относительно неизвестной функции ζ система (1.4.18) представляет собой терминально-краевую задачу с единственным нулевым решением, из которого непосредственно следуют условия $\eta = 0$ и $\xi = 0$. Иными словами, если решение p^* , s^* , w^* задачи (1.4.5), (1.4.6), (1.4.12), (1.4.15) существует, система (1.4.18) вместе с ограничениями (1.4.5), (1.4.6), (1.4.12) эквивалентна исходной линейной задаче о движении упругой балки (1.4.3)–(1.4.6).

1.4.6. Связь с классическими вариационными принципами.

Рассмотрим один функционал из семейства (1.4.14), в случае когда $\alpha = -1$ ($\Phi_- = \Phi|_{\alpha=-1}$). Определим соответствующую вариационную задачу.

Задача 2. Найти неизвестные функции p^* , s^* , w^* , доставляющие при выполнении ограничений (1.4.5), (1.4.6), (1.4.12) стационарные значения функционалу Φ_- .

Представим функционал Φ_- в следующем виде

$$\begin{aligned} \Phi_-[p, s, w] &= \int_{\Omega} \varphi_- d\Omega = \Theta_1 + \Theta_2 - 2\Theta_0, \quad \varphi_- = \frac{\rho\eta^2}{2} - \frac{\kappa\xi^2}{2}, \\ \Theta_0 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (pw_t - sw_{xx}) d\Omega, \quad \Theta_1 = \int_{\Omega} \left(\frac{p^2}{2\rho} - \frac{s^2}{2\kappa} \right) d\Omega, \\ \Theta_2 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\rho w_t^2 + \kappa w_{xx}^2) d\Omega. \end{aligned} \quad (1.4.19)$$

Как и для интегралов Ψ_k , $k = 0, 1, 2$, определенных в (1.4.11), видно, что интеграл Θ_2 зависит только от перемещений w , тогда как в выражение для Θ_1 функция w не входит. Билинейный функционал Θ_0 , в свою очередь, не зависит явно от упругих и инерционных свойств балки, и с учетом равенства (1.4.12) этот интеграл приводится к виду

$$2\Theta_0 = - \int_{\Omega} f w d\Omega + \int_0^T [s w_x - s_x w]_{x=0}^{x=1} dt + \int_0^1 [p w]_{t=0}^{t=T} dx. \quad (1.4.20)$$

Рассмотрим, как и в вариационных формулировках (1.4.7), (1.4.8), случай, когда на концах упругой балки граничные условия задаются либо в перемещениях, либо в моментах ($a_k b_k = 0$, $a_k + b_k = 1$, $k = 1, 2, 3, 4$), то есть отсутствуют смешанные граничные соотношения. Тогда после подстановки выражения (1.4.20) функционал Φ_- может быть переписан с учетом (1.4.7), (1.4.8) следующим образом

$$\Phi_- = H_c[p, s] + H[w] - \int_0^1 [pw]_{t=0}^{t=T} dx. \quad (1.4.21)$$

Если в начальный и конечный моменты времени задано распределение в балке либо поперечных перемещений, либо линейной плотности импульса, интеграл Φ_- распадается на две независимые части

$$\Phi_- = H_1 + H_2, \quad H_1 = H_c + \Xi_1, \quad H_2 = H + \Xi_2.$$

Здесь функционал H_1 зависит от функций плотности импульса p и момента s , а H_2 — только от функции перемещений w , Ξ_1 и Ξ_2 — интегралы по интервалу $x \in [0, 1]$, зависящие соответственно от функций p и w .

В табл. 1.4.1 представлены явные выражения интегралов Ξ_1 и Ξ_2 для разных типов динамических задач. Первые четыре строки соответствуют граничным по времени задачам, а последняя — периодической задаче. В таблице введены обозначения:

$$I_p^0 = \int_0^1 p^0 w|_{t=0} dx, \quad I_p^1 = \int_0^1 p^1 w|_{t=T} dx,$$

$$I_w^0 = \int_0^1 w^0 p|_{t=0} dx, \quad I_w^1 = \int_0^1 w^1 p|_{t=T} dx.$$

Для задач с краевыми условиями по времени, которые приведены в табл. 1.4.1, первые вариации функционала Φ_- могут быть представ-

Таблица 1.4.1: Типы краевых задач для упругой балки.

Условие А	Условие В	Ξ_1	Ξ_2
$w(0, x) = w^0(x)$	$w(T, x) = w^1(x)$	$I_w^1 - I_w^0$	0
$p(0, x) = p^0(x)$	$p(T, x) = p^1(x)$	0	$I_p^1 - I_p^0$
$w(0, x) = w^0(x)$	$p(T, x) = p^1(x)$	$-I_w^0$	I_p^1
$p(0, x) = p^0(x)$	$w(T, x) = w^1(x)$	I_w^1	$-I_p^0$
$w(0, x) = w(T, x)$	$p(0, x) = p(T, x)$	0	0

лены с учетом ограничений на вариации функций p и s в виде

$$\delta\Phi_- = \delta_{ps}H_1[p, s] + \delta_w H_2[w] = 0.$$

Следовательно, эти краевые задачи распадаются на две независимые подзадачи:

Задача 3. Найти допустимое поле перемещений w^* , которое строго удовлетворяет кинематическим краевым условиям ($a_k = 1, b_k = 0$) в (1.4.5), а также заданным в перемещениях начальным и терминальным условиям из табл. 1.4.1, и доставляет стационарное значение функционалу H_2

$$\delta_w H_2 = 0. \quad (1.4.22)$$

Задача 4. Найти равновесные поля импульсов p^* и моментов s^* , которые удовлетворяют динамическим краевым условиям ($a_k = 1, b_k = 0$) в (1.4.5), а также заданным в импульсах p начальным и терминальным условиям из табл. 1.4.1, и доставляют стационарное значение функционалу H_1

$$\delta_{ps} H_1 = 0. \quad (1.4.23)$$

Важно отметить, что если в начальный и конечный момент времени заданы перемещения (первая строка в табл. 1.4.1, условия 1,2), тогда задача 3 совпадает с принципом стационарности Гамильтона (1.4.7)

($H_2 = H$). Если же в начале и в конце процесса определено распределение импульса (вторая строка в табл. 1.4.1), задача 4 полностью соответствует дополнительному принципу Гамильтона (1.4.8) ($H_1 = H_c$). Оба классических принципа следуют из задач 3,4 и в случае периодических условий (последняя строка в табл. 1.4.1).

В отличие от вариационных принципов (1.4.7) и (1.4.8), которые сформулированы для краевых динамических задач, в предложенном подходе функционал Φ_- , как и остальные функционалы в семействе Φ , можно использовать также для решения начально-краевой задачи (1.4.3)–(1.4.6). При задании начальных условий (1.4.6) последний член в соотношении (1.4.21) зависит от произведения функций p и w , взятых в конечный момент времени T . Это не позволяет разделить функционал Φ_- на две независимые части. Даже для краевых по времени задач определенных в табл. 1.4.1 разделение на две подзадачи (1.4.22) и (1.4.23) не происходит, если на концах упругой балки для какого либо индекса k заданы смешанные условия ($a_k b_k \neq 0$). В этих случаях вариационная задача (1.4.15) при соответствующих ограничениях должна решаться одновременно в импульсах, моментах и перемещениях.

Глава 2.

Интегро-дифференциальные подходы к расчету вынужденных движений колебательных систем

§2.1. Метод Ритца и вариационные постановки начально-краевых задач о движении механических систем

2.1.1. Решение задачи о вынужденных продольных перемещениях однородного упругого стержня. Рассмотрим, как и в §1.2, продольные перемещения тонкого прямолинейного упругого стержня. Пусть один его конец при $x = L$ свободен от нагрузок, а другой при $x = 0$ перемещается по заданному закону $Lu_0(t)$.

Если геометрические и механические параметры стержня не зависят от пространственной координаты x , т.е. коэффициент жесткости κ и линейная плотность ρ постоянны, то выбором новых безразмерных координат и функции перемещения

$$x' = L^{-1}x, \quad t' = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho L^2}}t, \quad u'(t, x) = L^{-1}u(t, x) - u_0(t)$$

можно свести уравнение движения к виду

$$u_{tt} - u_{xx} = a(t), \quad a = -\ddot{u}_0(t), \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T). \quad (2.1.1)$$

Здесь точка над символом означает дифференцирование по времени. В данном параграфе считается, что внешние распределенные нагрузки отсутствуют, а штрихи для простоты записи в дальнейшем опускаются.

Однородные краевые условия записываются в этих обозначениях как

$$u(t, 0) = 0, \quad u_x(t, 1) = 0, \quad (2.1.2)$$

а начальные условия — в виде

$$u(0, x) = u^0(x), \quad u_t(0, x) = v^0(x). \quad (2.1.3)$$

При заданном законе движения $u_0(t)$ решение уравнения (2.1.1) с начальными и краевыми условиями (2.1.2) и (2.1.3) для однородного прямолинейного стержня можно построить методом разделения переменных [60]. Для этого представим упругие смещения в форме

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Theta_k(t) X_k(x). \quad (2.1.4)$$

Здесь X_k — собственные функции краевой задачи

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = \lambda^2 X, \quad X(0) = \frac{dX}{dx} \Big|_{x=1} = 0. \quad (2.1.5)$$

Собственные значения λ_k находятся аналитически:

$$\lambda_k = -\frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Соответствующие решения задачи (2.1.5) имеют вид

$$X_k(x) = \sqrt{2} \sin \lambda_k x \quad (2.1.6)$$

и образуют ортонормированную систему, т.е.

$$\int_0^1 X_k(x) X_l(x) dx = \delta_{kl}, \quad \|X_k\|_2 = \left(2 \int_0^1 \sin^2(\lambda_k x) dx \right)^{\frac{1}{2}} = 1, \quad (2.1.7)$$

где δ_{kl} — символ Кронекера.

Умножая уравнение движения (2.1.1) на заданные в (2.1.6) функции $X_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, и интегрируя полученные произведения по координате $x \in (0, 1)$ с учетом (2.1.4) и (2.1.7), получаем счетную систему уравнений для коэффициентов Фурье $\Theta_k(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Theta_k}{dt^2} + \lambda_k^2 \Theta_k &= C_k a(t), \quad k = 1, 2, \dots, \\ C_k &= \int_0^1 X_k(x) dx = \frac{\sqrt{2}}{\lambda_k}. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Частное решение системы (2.1.8) или решение при нулевых начальных условиях запишется в виде

$$\Theta_k^1(t) = \frac{C_k}{\lambda_k} \int_0^t \sin(\lambda_k(t - \tau)) a(\tau) d\tau. \quad (2.1.9)$$

Для составления общего решения с произвольными начальными условиями (2.1.3) необходимо добавить к (2.1.9) функцию k -ой моды собственных колебаний стержня:

$$\begin{aligned} \Theta_k &= \Theta_k^0(t) + \Theta_k^1(t), & \Theta_k^0 &= u_k^0 \cos \lambda_k t + \frac{v_k^0}{\lambda_k} \sin \lambda_k t, \\ u_k^0 &= \int_0^1 u^0(x) X_k(x) dx, & v_k^0 &= \int_0^1 v^0(x) X_k(x) dx. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Важной интегральной характеристикой движения является средняя механическая энергия

$$\bar{E}_f = \frac{1}{2T} \int_0^T \int_0^1 (u_x^2 + u_t^2) dx dt,$$

распределенная в системе. Учитывая свойство ортогональности собственных функций (2.1.7), получаем после интегрирования по частям:

$$\bar{E}_f = \frac{1}{2T} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T \left(\lambda_k^2 \Theta_k^2(t) + \dot{\Theta}_k^2(t) \right) dt. \quad (2.1.11)$$

Это равенство говорит, что полная энергия стержня равна сумме энергий каждой моды движения.

Рассмотрим важный случай полиномиального по времени закона перемещения конца стержня

$$a(t) = \sum_{n=0}^N a_n t^n, \quad (2.1.12)$$

который будет использоваться в Главе 4 для параметрической оптимизации движений упругих систем. Тогда интеграл (2.1.9) может быть

представлен в аналитическом виде

$$\begin{aligned} \Theta_k^1(t) &= \sum_{n=0}^N a_{kn} \left[(-1)^{n+1} \cos \left(\frac{n\pi}{2} + \tau_k \right) + p_n(\tau_k) \right], \\ \tau_k &= \lambda_k t, \quad a_{kn} = \frac{\sqrt{2n!} a_n}{\lambda_k^{n+3}}, \\ p_n(t) &= \begin{cases} \sum_{i=0}^j \frac{(-1)^{j-i} t^{2i}}{(2i)!}, & n = 2j \\ \sum_{i=0}^j \frac{(-1)^{j-i} t^{2i+1}}{(2i+1)!}, & n = 2j+1 \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

При фиксированной степени полинома (2.1.12), достаточно гладких функциях $u^0(x)$, $v^0(x)$ и ограниченном времени движения $t \leq T$ максимальное по t значение членов ряда (2.1.4) уменьшается с ростом номера k . Это следует из ограниченности абсолютного значения собственных функций

$$|X_k(x)| \leq \sqrt{2}, \quad |\Theta_k^0(t)| \leq |u_k^0| + \frac{|v_k^0|}{\lambda_k},$$

а также из вида частного решения (2.1.13). При однородных начальных условиях ($u^0(x) = v^0(x) \equiv 0$) для заданного полинома (2.1.12) и времени процесса T можно получить оценку сходимости ряда (2.1.4):

$$|\Theta_k^1(t) X_k(x)| \leq C \lambda_k^{-3},$$

где коэффициент C зависит от времени T , а также от параметров a_n и N полинома (2.1.12).

Сходимость ряда (2.1.4) при произвольных начальных распределениях перемещений $u^0(x)$ и скоростей $v^0(x)$ точек стержня определяется свойствами гладкости этих функций [89].

2.1.2. Классический метод Галеркина. Даже для однородного стержня, когда собственные функции представлены в аналитическом виде (2.1.6), построение движения в форме бесконечного ряда с практической точки зрения не всегда удобно. Из решения первых K уравнений

в (2.1.8) находится K -модовое приближение

$$u^{(K)}(t, y) = \sum_{k=1}^K \Theta_k(t) X_k(x) \quad (2.1.14)$$

к точному решению задачи (2.1.1)–(2.1.3).

Хотя собственные функции X_k получены явно, для произвольного ускорения $a(t)$ не всегда удается вычислить интеграл (2.1.9) аналитически. Более того, для стержня с переменными значениями жесткости $\kappa(x)$ и плотности $\rho(x)$ требуется применение специальных процедур для численного определения собственных частот и форм колебаний [9, 70].

Распространенным подходом к приближенному решению задач динамики для систем с распределенными параметрами является метод Галеркина. В простейшей модификации этого подхода используется конечномерное приближение неизвестных переменных с помощью определенного набора базисных функций. Так для упругого стержня его продольные перемещения можно искать, например, в виде

$$u^{(K)} = \sum_{k=1}^K u_k \psi_k(t, x), \quad (2.1.15)$$

где ψ_k берутся из системы линейно независимых функций с определенными свойствами полноты [177], а u_k – неизвестные коэффициенты. При этом функции $u^{(K)}$ удовлетворяют краевые условия на перемещение, т.е. первое уравнение из (2.1.2), и начальные условия (2.1.3).

После этого конечномерное приближение (2.1.15) подставляется в исходное уравнение (2.1.1) и составляется система уравнений из интегральных проекций на базисные функции:

$$\int_0^T \int_0^1 \left(u_{tt}^{(K)} - u_{xx}^{(K)} - a(t) \right) \psi_k dx dt + \int_0^T \left[u_x^{(K)} \psi_k \right]_{x=1} dt = 0, \quad (2.1.16)$$

где $k = 1, \dots, K$.

Если все ψ_k удовлетворяют граничному условию на перемещения из (2.1.2), то, проинтегрировав уравнения (2.1.16) по частям, можно понизить требование к гладкости этих функций и привести систему (2.1.16) к следующему виду

$$\int_0^T \int_0^1 \left\{ u_x^{(K)} \psi_{k,x}(t, x) + \left(u_{tt}^{(K)} - a(t) \right) \psi_k(t, x) \right\} dx dt = 0. \quad (2.1.17)$$

Коэффициенты u_k находятся из решения либо системы (2.1.17), либо (2.1.16). Непростыми вопросами в методе Галеркина являются выбор подходящего базиса и числа K соответствующих функций ψ_k , удовлетворяющих краевым и начальным условиям (2.1.2), (2.1.3), а также оценка качества получаемого приближения.

Выберем в качестве базисных функций собственные формы, умноженные на неизвестные коэффициенты Фурье, т.е.

$$\psi_k = \sqrt{2} \Theta_k(t) \sin \lambda_k x. \quad (2.1.18)$$

Подставляя в равенство (2.1.16) выражение для функции перемещения $u^{(K)}$ из (2.1.15) с учетом (2.1.18), получим K -модовое приближение (2.1.14), в котором $\Theta_k = \Theta_k^0 + \Theta_k^1$, где Θ_k^1 и Θ_k^0 определены соответственно в (2.1.9) и (2.1.10).

2.1.3. Метод Ритца на основе интегро-дифференциального подхода. На основе МИДС, изложенного в предыдущей главе, удается получить явные энергетические оценки качества решения. Это позволяет разрабатывать эффективные численные алгоритмы нахождения достоверных приближений для задач статики и динамики [171].

Изложим один из таких подходов, который основан на вариационной формулировке задач о вынужденных перемещениях упругих систем и полиномиальном приближении искомых переменных. Для иллюстрации рассматриваются продольные движения тонкого стержня, описываемые системой уравнений (2.1.1)–(2.1.3) с заданным перемещением

его конца согласно (2.1.12). Как и в §1.2 дополнительно с неизвестными перемещениями $u(t, x)$ вводятся функции силы в поперечном сечении $s(t, x)$ и линейной плотности импульса $p(t, x)$. Ищется минимум функционала энергетической ошибки

$$\Phi = \int_0^T \int_0^1 \varphi(u, s, p) dx dt \rightarrow \min_{u, s, p}, \quad (2.1.19)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} (\eta^2 + \xi^2), \quad \xi = u_x - s, \quad \eta = u_t - p,$$

при следующих ограничениях

$$p_t - s_x = a(t), \quad (2.1.20)$$

$$u(t, 0) = 0, \quad s(t, 1) = 0, \quad u(0, x) = u^0(x), \quad p(0, x) = p^0(x).$$

Для приближенного решения этой задачи неизвестные переменные выберем в виде

$$u(t, x) = u^0(x) + tx \sum_{i+j=0}^{M_u} u_{ij} t^i x^j,$$

$$p(t, x) = p^0(x) + t \sum_{i+j=0}^{M_p} p_{ij} t^i x^j, \quad (2.1.21)$$

$$s(t, x) = a(t)(1-x) - \int_x^1 p_t(t, y) dy.$$

Введенные в (2.1.21) конечномерные функции удовлетворяют всем ограничениям задачи (2.1.20). Подставляя u , s и p в функционал Φ и вводя вектор проектных параметров $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$, составленный из неизвестных коэффициентов u_{ij} для $0 \leq i+j \leq M_u$ и p_{ij} для $0 \leq i+j \leq M_p$, получаем задачу безусловной минимизации квадратичной функции $\Phi(\mathbf{y})$: требуется найти такой вектор \mathbf{y}^* , что

$$\Phi(\mathbf{y}^*) = \min_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{y}).$$

Здесь размерность вектора \mathbf{y} определяется как

$$M = \frac{1}{2}(M_u + 1)(M_u + 2) + \frac{1}{2}(M_p + 1)(M_p + 2).$$

Для простоты изложения приравняем степени полиномов $M_p = M_u$. Задача минимизации сводится к системе линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^M, \quad M = (M_u + 1)(M_u + 2).$$

Пример 2.1.1. Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ стержень находился в покое и в нем отсутствовали упругие деформации, т.е.

$$\begin{aligned} t = 0: \quad u_0 = 0, \quad \dot{u}_0 = 0, \\ u^0(x) = 0, \quad p^0(x) = 0, \end{aligned} \tag{2.1.22}$$

где $u_0(t)$ — функция перемещения конца стержня при $x = 0$.

Допустим к тому же, что заданы положение и скорость этого конца в момент времени T , т.е.

$$t = T: \quad u_0 = u_T, \quad \dot{u}_0 = 0, \tag{2.1.23}$$

а ускорение $a = \ddot{u}_0$ это линейная функция времени. Из (2.1.22) и (2.1.23) следует, что

$$a(t) = a_0 + a_1 t, \quad a_0 = \frac{6u_T}{T^2}, \quad a_1 = -\frac{12u_T}{T^3}. \tag{2.1.24}$$

На рис. 2.1.1 для $T = 4$ и $u_T = 1$ показаны перемещение конца стержня $u_0(t)$ (сплошная кривая), его скорость $v_0 = \dot{u}_0(t)$ (штриховая кривая) и ускорение $a(t)$ (штрихпунктирная линия).

В силу линейности рассматриваемой системы решение будет пропорционально перемещению u_T . Поэтому содержательно рассмотреть только случай, когда $u_T = 1$. Остальные решения получаются простым

масштабированием. Тогда движения стержня определяются только величиной интервала T . Исследуем качество получаемых полиномиальных аппроксимаций (2.1.21) в зависимости от этого параметра и степени полинома M_u .

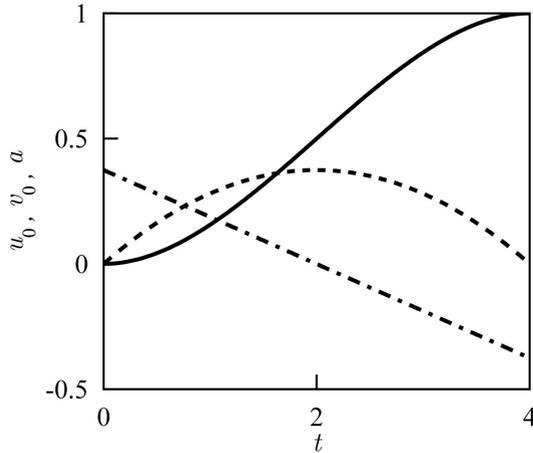


Рис. 2.1.1. Перемещение, скорость и ускорение конца стержня.

Как было предложено в Главе 1, абсолютная ошибка решения в энергетической норме задается самим минимизируемым функционалом $\Phi(\mathbf{y}^*)$. Относительную ошибку можно определить, например, как

$$\Delta = \frac{\Phi(\mathbf{y}^*)}{2\Psi(\mathbf{y}^*)}, \quad \Psi = \int_0^T E(t) dt, \quad E = \frac{1}{2} \int_0^1 (u_x^2 + p^2) dx, \quad (2.1.25)$$

где E — относительная энергия стержня, которая выражается через функции перемещения $u(\mathbf{y}^*)$ и импульса $p(\mathbf{y}^*)$, заданные в (2.1.21).

Зафиксируем время интересующего нас движения $T = 4$. Перемещения точек стержня u как функция от t и x для полиномов степени $M_u = 15$ представлены на рис. 2.1.2. Определим приближенную среднюю энергию $\bar{E} = T^{-1}\Psi$ как функцию от параметра M_u .

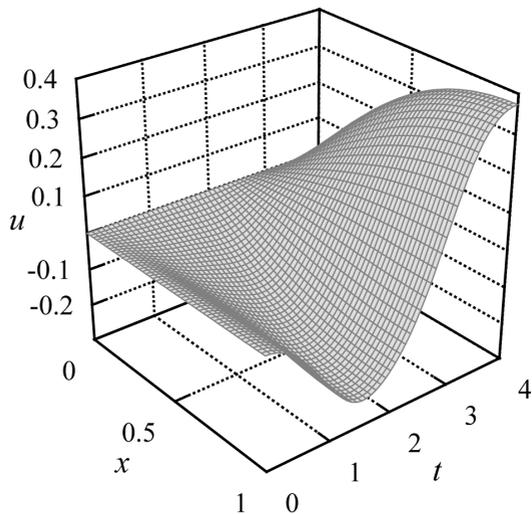


Рис. 2.1.2. Перемещения точек стержня u при $T = 4$.

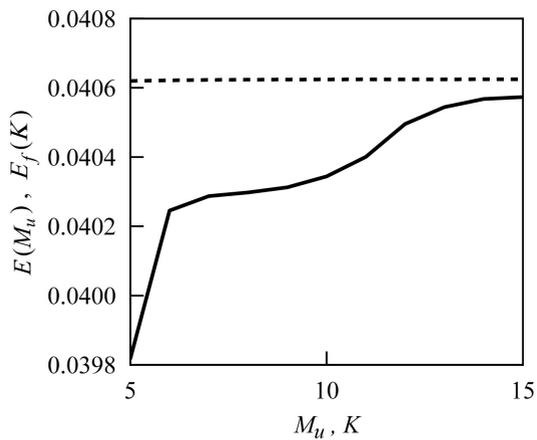


Рис. 2.1.3. Средняя энергия \bar{E} как функция от степени полиномов M_u .

Сплошная кривая на рис. 2.1.3. показывает монотонный рост этой величины при увеличении размерности задачи. Для сравнения штриховая линия отображает изменение средней энергии $\bar{E}_f(K)$, полученной для K -модового приближения согласно (2.1.14). Несомненно метод Фурье дает в этом примере более точные значения энергии.

Относительная ошибка полиномиальной аппроксимации Δ как монотонно убывающая функция степени M_u показана на рис. 2.1.4. Как видно из рис. 2.1.3, 2.1.4, при повышении размерности приближения конечномерное решение в энергетическом смысле сходится к точному.

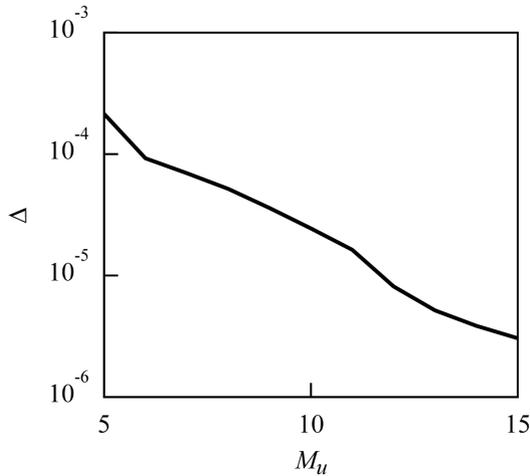


Рис. 2.1.4. Относительная ошибка Δ как функция от степени полиномов M_u .

Введем еще одну относительную ошибку

$$\Delta_0(M_u) = 1 - \frac{\bar{E}(M_u)}{\bar{E}_f},$$

где \bar{E}_f значение средней энергии стержня, полученное методом Фурье согласно (2.1.11), и сравним ее с ошибкой Δ из (2.1.25) для того же

значения M_u . Так, для $M_u = 15$ получаем $\Delta_0(M_u) \approx 0.13\%$. Квадрат этой ошибки сопоставим с величиной Δ ($\sqrt{\Delta(M_u)} \approx 0.17\%$). Этот факт объясняется тем, что функционал Φ связан с энергией вариаций (отклонений от точного решения), а ошибка Δ_0 , в некотором смысле, пропорциональна квадрату от этой величины.

Для того чтобы убедиться в этом, представим некоторое приближенное решение u , p и s задачи (2.1.19), (2.1.20) в виде

$$u = u^*(t, x) + \delta u(t, x), \quad p = u_t^*(t, x) + \delta p(t, x), \quad s = u_x^*(t, x) + \delta s(t, x).$$

Так как функционалы Φ и Ψ — квадратичные формы от переменных u , p и s , то можно записать

$$\Phi[u, p, s] = \Phi^* + \delta\Phi + \delta^2\Phi,$$

$$\Psi[u, p, s] = \Psi^* + \delta\Psi + \delta^2\Psi,$$

где $\Phi^* = 0$ и Ψ^* — это значения функционалов на точном решении, а остальные слагаемые с оценками их величин представляются в виде:

$$\delta^2\Phi = \int_0^T \int_0^1 [(\delta u_x - \delta s)^2 + (\delta u_t - \delta p)^2] dxdt,$$

$$\delta\Phi = \int_0^T \int_0^1 \{(u_x^* - s^*)(\delta u_x - \delta s) + (u_t^* - p^*)(\delta u - \delta p)\} dxdt \Rightarrow$$

$$|\delta\Phi| \leq C_1 \sqrt{\Phi^* \delta^2\Phi} = 0$$

и

$$\delta^2\Psi = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (\delta u_x^2 + \delta p^2) dxdt,$$

$$\delta\Psi = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (u_x^* \delta u_x + u_t^* \delta p) dxdt \Rightarrow |\delta\Psi| \leq C_2 \sqrt{\delta^2\Psi\Psi^*},$$

$$\Delta_0 = \left| \frac{\Psi^* - \Psi}{\Psi^*} \right| \leq C_2 \sqrt{\frac{\delta^2\Psi}{\Psi^*}} + O\left(\frac{\delta^2\Psi}{\Psi^*}\right).$$

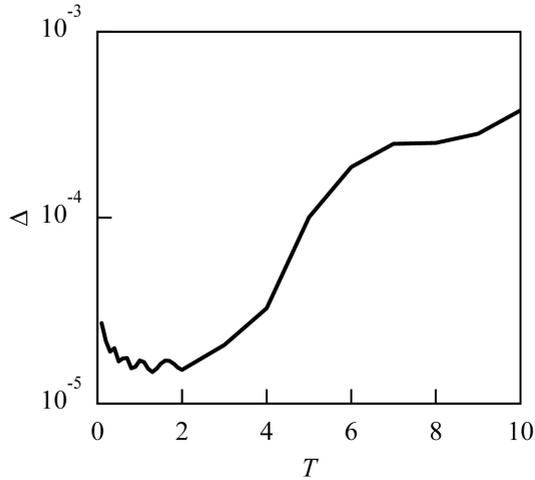


Рис. 2.1.5. Относительная ошибка Δ в зависимости от времени процесса T .

На рис. 2.1.5 представлена зависимость относительной ошибки приближенного решения Δ от длительности движения T . При этом фиксируется перемещение конца стержня $u_T = 1$ и параметры аппроксимации $M_u = M_p = 12$, введенные в (2.1.21). Как видно из этого графика, точность решения уменьшается при увеличении времени процесса. Это обусловлено тем фактом, что в системе возбуждаются высокочастотные упругие колебания, которые плохо описываются полиномиальными функциями. В противоположном случае, когда время процесса сравнимо или меньше периода первой моды колебаний ($T \leq 2\pi\lambda_1^{-1} = 4$), относительная ошибка значительно ниже, несмотря на увеличение средней величины запасенной в стержне энергии.

Для улучшения качества решения на больших интервалах времени ($T \gg 4$) можно использовать другие базисные функции, например, сплайны. Такого рода аппроксимации будут рассмотрены в §2.2.

2.1.4. Решение задачи о поперечных перемещениях упругой балки. В §1.3 была сформулирована задача о поперечных перемещениях тонкой прямолинейной упругой балки в рамках модели Бернулли–Эйлера. Положим, что один конец балки при $x = 1$ свободен от нагрузок, а другой конец при $x = 0$ жестко закреплен на основании, которое перемещается по заданному закону $w_0(t)$. Жесткость κ и линейная плотность ρ постоянны. Тогда согласно преобразованию координат (1.4.2) уравнение движения (1.4.1) в системе координат, связанной с подвижным основанием, сводится к виду

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = a(t), \quad a = -\frac{d^2 w_0(t)}{dt^2}, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T). \quad (2.1.26)$$

где a задают инерционную распределенную силу. Внешняя нагрузка в этом примере равна нулю.

Краевые условия записываются в виде

$$w(t, 0) = w_x(t, 0) = w_{xx}(t, 1) = w_{xxx}(t, 1) = 0. \quad (2.1.27)$$

Задано также некоторое начальное распределение перемещений и скоростей точек балки

$$w(0, x) = w^0(x), \quad w_t(0, x) = v^0(x). \quad (2.1.28)$$

Как и для продольных движений тонкого стержня, решение уравнения (2.1.26) с начальными и краевыми условиями (2.1.27) и (2.1.28) можно искать с помощью метода Фурье в виде

$$w(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Theta_k(t) X_k(x).$$

Здесь X_k — собственные решения краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{d^4 X}{dx^4} &= \lambda^2 X, \\ X(0) &= \left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d^2 X}{dx^2} \right|_{x=1} = \left. \frac{d^3 X}{dx^3} \right|_{x=1} = 0. \end{aligned}$$

Собственные значения λ_n находятся из трансцендентного уравнения [4]:

$$1 + \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda = 0. \quad (2.1.29)$$

Соответствующие функции X_k краевой задачи (2.1.5) имеют вид

$$X_k(x) = \operatorname{ch} \lambda_k x - \cos \lambda_k x - \frac{\operatorname{ch} \lambda_k + \cos \lambda_k}{\operatorname{sh} \lambda_k + \sin \lambda_k} (\operatorname{sh} \lambda_k x - \sin \lambda_k x). \quad (2.1.30)$$

Можно показать, что это ортонормированные функции, которые удовлетворяют условию (2.1.7).

Проецируя уравнение движения (2.1.26) на собственные функции $X_k(x)$, получим из (2.1.30) с учетом (2.1.29) бесконечномерную систему уравнений, аналогичную (2.1.8):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Theta_k}{dt^2} + \omega_k^2 \Theta_k &= C_k a(t), \quad k = 1, 2, \dots, \\ \omega_k &= \lambda_k^2, \quad C_k = \int_0^1 X_k(x) dx, \end{aligned} \quad (2.1.31)$$

где ω_k — собственные частоты колебаний.

Частное решение системы (2.1.31) имеет вид

$$\Theta_k^1(t) = \frac{C_k}{\omega_k} \int_0^t \sin(\omega_k(t - \tau)) a(\tau) d\tau. \quad (2.1.32)$$

Решение однородного уравнения (2.1.26) с ненулевыми начальными данными (2.1.28) представляется как

$$\begin{aligned} \Theta_k^0(t) &= w_k^0 \cos \omega_k t + \frac{v_k^0}{\omega_k} \sin \omega_k t, \\ w_k^0 &= \int_0^1 w^0(x) X_k(x) dx, \quad v_k^0 = \int_0^1 v^0(x) X_k(x) dx. \end{aligned}$$

Средняя механическая энергия равна

$$\bar{E}_f = \frac{1}{2T} \int_0^T \int_0^1 (w_{xx}^2 + w_t^2) dx dt$$

и представима в виде

$$\bar{E}_f = \frac{1}{2T} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T \left(\lambda_k^4 \Theta_k^2(t) + \dot{\Theta}_k^2(t) \right) dt. \quad (2.1.33)$$

Для полиномиального по времени закона перемещения конца стержня

$$a(t) = \sum_{n=0}^N a_n t^n,$$

интеграл (2.1.32) может быть найден в аналитическом виде

$$\Theta_k^1(t) = \sum_{n=0}^N a_{kn} \left[(-1)^{n+1} \cos \left(\frac{n\pi}{2} + \tau_k \right) + p_n(\tau_k) \right],$$

$$\tau_k = \omega_k t, \quad a_{kn} = \frac{n! C_k a_n}{\omega_k^{n+2}},$$

где функция p_n задана в (2.1.13).

2.1.5. Метод Ритца для балочной модели Эйлера–Бернулли.

Распространим подход, основанный на вариационной формулировке задач о вынужденных перемещениях упругих систем и полиномиальном приближении искомых переменных, на случай поперечных движений упругой балки. Дополнительно с неизвестными перемещениями $w(t, x)$ вводятся функции изгибающего момента $s(t, x)$ и линейной плотности импульса $p(t, x)$. Ищется минимум функционала Φ

$$\Phi = \int_0^T \int_0^1 \varphi(w, s, p) dx dt \rightarrow \min_{u, s, p}, \quad (2.1.34)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} (\eta^2 + \xi^2), \quad \xi = w_{xx} - s, \quad \eta = w_t - p,$$

при следующих ограничениях

$$p_t + s_{xx} = a(t),$$

$$w(t, 0) = w_x(t, 0) = s(t, 1) = s_x(t, 1) = 0, \quad (2.1.35)$$

$$w(0, x) = w^0(x), \quad p(0, x) = p^0(x).$$

Для приближенного решения этой задачи неизвестные переменные выберем в виде полиномов

$$\begin{aligned} w(t, x) &= w^0(x) + tx^2 \sum_{i+j=0}^{M_w} w_{ij} t^i x^j, \\ p(t, x) &= p^0(x) + t \sum_{i+j=0}^{M_w} p_{ij} t^i x^j, \end{aligned} \quad (2.1.36)$$

$$s(t, x) = \frac{1}{2} a(t)(1-x)^2 - \int_x^1 \int_{x_2}^1 p_t(t, x_1) dx_1 dx_2.$$

Функции (2.1.36) удовлетворяют всем ограничениям задачи (2.1.35). Подставляя w , s и p в функционал Φ и вводя вектор проектных параметров $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$, $M = (M_w + 1)(M_w + 1)$, составленный из неизвестных коэффициентов w_{ij} и p_{ij} для всех индексов i и j при $0 \leq i + j \leq M_w$, получаем задачу на безусловную минимизацию квадратичной функции $\Phi(\mathbf{y})$: требуется найти такой вектор \mathbf{y}^* , что

$$\Phi(\mathbf{y}^*) = \min_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{y}).$$

Пример 2.1.2. Пусть в начальный момент времени балка была не деформирована и находилась в покое:

$$w_0(0) = 0, \quad \left. \frac{dw_0}{dt} \right|_{t=0} = 0,$$

$$w^0(x) = 0, \quad p^0(x) = 0.$$

Линейное ускорение $a(t)$ задано в соответствии с (2.1.24), где выбран параметр $u_T = 1$.

Абсолютная ошибка решения в энергетической норме задается как

$$\Delta = \frac{\Phi(\mathbf{y}^*)}{2\Psi(\mathbf{y}^*)}, \quad \Psi = \int_0^T E(t) dt, \quad E = \frac{1}{2} \int_0^1 (w_{xx}^2 + p^2) dx, \quad (2.1.37)$$

где E — относительная механическая энергия балки.

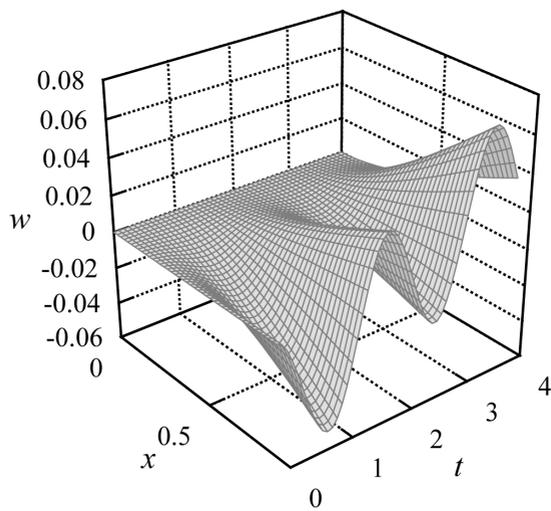


Рис. 2.1.6. Перемещения точек балки w при $T = 4$.

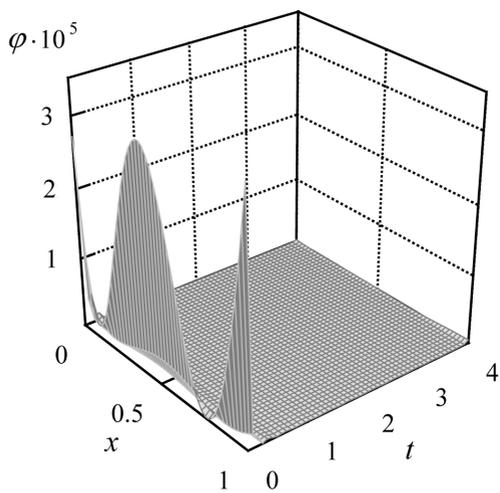


Рис. 2.1.7. Относительная ошибка φ при $M_w = 15$.

Зафиксируем вначале время интересующего нас движения $T = 4$. На рис. 2.1.6 представлены перемещения точек стержня w как функция координат t и x для $T = 4$ и $M_w = 15$. Распределение локальной энергетической ошибки φ , введенной в (2.1.34), изображено для этих параметров на рис. 2.1.7. Самые большие величины этой ошибки проявляются в начале процесса движения.

Определим среднюю энергию как $\bar{E} = T^{-1}\Psi$, где функционал Ψ определен в (2.1.37). Сплошная кривая на рис. 2.1.8 показывает рост этой энергии при увеличении параметра аппроксимации M_w . Для сравнения штриховая линия отображает изменение средней энергии $\bar{E}_f(K)$, полученной для K -модового приближения согласно (2.1.33).

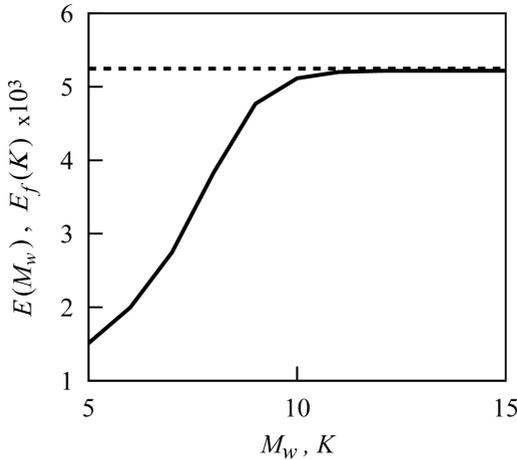


Рис. 2.1.8. Средняя энергия \bar{E} как функция от степени полиномов M_w .

Относительная ошибка полиномиальной аппроксимации Δ как монотонно убывающая функция степени M_w показана на рис. 2.1.9. Как видно из рис. 2.1.8, 2.1.9, при повышении размерности полиномиальные приближения сходятся к точному решению. Стоит отметить, что

выбранное в численном примере время процесса $T = 4$ больше чем период первой моды колебаний $T_1 = 2\pi\lambda_1^{-2} \approx 1.787$. Это объясняет тот факт, что для получения достоверного решения требуется достаточно большая степень полиномов M_w .

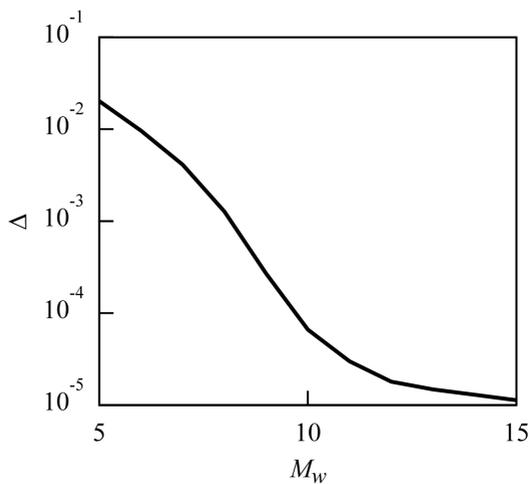


Рис. 2.1.9. Относительная ошибка $\Delta(M_w)$.

§2.2. Метод конечных элементов в задаче о продольных перемещениях упругого стержня

2.2.1. Постановка вариационной задачи. Рассмотрим продольные перемещения однородного упругого стержня, представленные в безразмерном виде. В соответствии с введенной ранее вариационной формулировкой (2.1.19)–(2.1.20) ищется минимум функционала энергетической ошибки

$$\Phi = \int_0^T \int_0^1 \varphi(u, s, p) dx dt \rightarrow \min_{u, s, p}, \quad (2.2.1)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} (\eta^2 + \xi^2), \quad \xi = u_x - s, \quad \eta = u_t - p,$$

при следующих ограничениях

$$\begin{aligned} p_t - s_x &= 0, \\ u(t, 0) &= u_0(t), \quad s(t, 1) = 0, \\ u(0, x) &= 0, \quad p(0, x) = 0. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Для автоматического выполнения первого уравнения в (2.2.2) выразим силы s и импульсы p через вспомогательную динамическую функцию r в виде

$$s = r_t(t, x), \quad p = r_x(t, x). \quad (2.2.3)$$

Можно показать, что по закону изменения импульса, связывающему поля сил s и импульсов p , аппроксимация введенной переменной r должна быть непрерывной функцией от t и x . Из структуры минимизируемого функционала

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \left\{ (u_x - r_t)^2 + (u_t - r_x)^2 \right\} dx dt, \quad (2.2.4)$$

выраженного через $r(t, x)$ и $u(t, x)$, также вытекает необходимость существования обобщенных производных ($r, u \in H^1(\Omega)$) и, следовательно,

но, непрерывность соответствующих аппроксимаций [74]. Здесь введена пространственно-временная область определения неизвестных функций $\Omega = (0, T) \times (0, 1)$. Начальные и граничные условия в (2.2.2) выражаются через неизвестные переменные u и r с точностью до константы как

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= u_0(t), & r(t, 1) &= 0, \\ u(0, x) &= 0, & r(0, x) &= 0. \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Для приближенного решения минимизационной задачи используем метод конечных элементов. Неизвестные перемещения u , силу в поперечном сечении s и линейную плотность импульса p будем искать в пространстве кусочно-полиномиальных функций, заданных на треугольной сетке в Ω [121].

2.2.2. Аппроксимация продольных перемещений упругого стержня. Введем узловые точки на координатных осях t и x так, что

$$\begin{aligned} x_m &> x_{m-1}, & m &= 1, \dots, M+1, \\ t_n &> t_{n-1}, & n &= 1, \dots, N+1, \\ x_1 &= 0, & x_{M+1} &= 1, & t_1 &= 0, & t_{N+1} &= T. \end{aligned}$$

С помощью прямых $x = x_m$ и $t = t_n$ (см. рис. 2.2.1) разобьем область определения Ω функций $u(t, x)$ и $r(t, x)$ на MN прямоугольников

$$\Omega_{mn} = \{t, x : t \in (t_n, t_{n+1}), x \in (x_m, x_{m+1})\},$$

где $m = 1, \dots, M$ и $n = 1, \dots, N$.

Вершины прямоугольников с координатами $\{t_n, x_m\}$, которые являются узловыми точками сетки, обозначим как A_{mn} , а отрезки, соединяющие точки A_{kl} и A_{mn} , как $A_{kl}A_{mn}$. Для сокращения записи введем обозначения

$$T_{mn} = A_{mn}A_{m,n+1}, \quad L_{mn} = A_{mn}A_{m+1,n}.$$

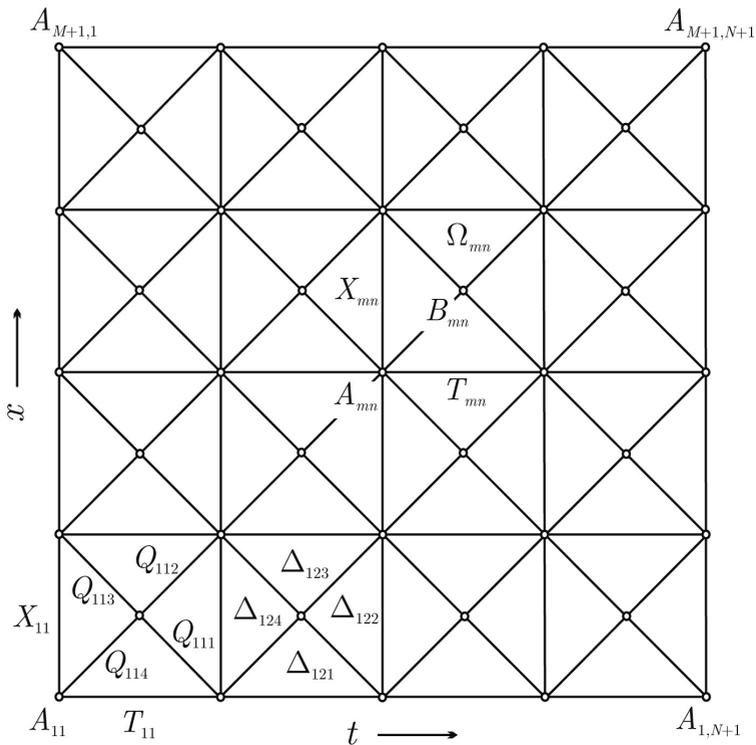


Рис. 2.2.1. Однородная треугольная сетка в области Ω .

Диагонали прямоугольника Ω_{mn} (см. рис. 2.2.2) делят его на четыре треугольника

$$\begin{aligned}
 \Delta_{mn,1} &= B_{mn} A_{mn} A_{m,n+1}, & \Delta_{mn,2} &= B_{mn} A_{m,n+1} A_{m+1,n+1}, \\
 \Delta_{mn,3} &= B_{mn} A_{m+1,n+1} A_{m+1,n}, & \Delta_{mn,4} &= B_{mn} A_{m+1,n} A_{mn}.
 \end{aligned}
 \tag{2.2.6}$$

Здесь B_{mn} — это точка пересечения диагоналей $A_{mn} A_{m+1,n+1}$ и $A_{m,n+1} A_{m+1,n}$. Введем также обозначения для сторон треугольников (2.2.6):

$$\begin{aligned}
 Q_{mn,1} &= B_{mn} A_{m,n+1}, & Q_{mn,2} &= B_{mn} A_{m+1,n+1}, \\
 Q_{mn,3} &= B_{mn} A_{m+1,n}, & Q_{mn,4} &= B_{mn} A_{mn}.
 \end{aligned}
 \tag{2.2.7}$$

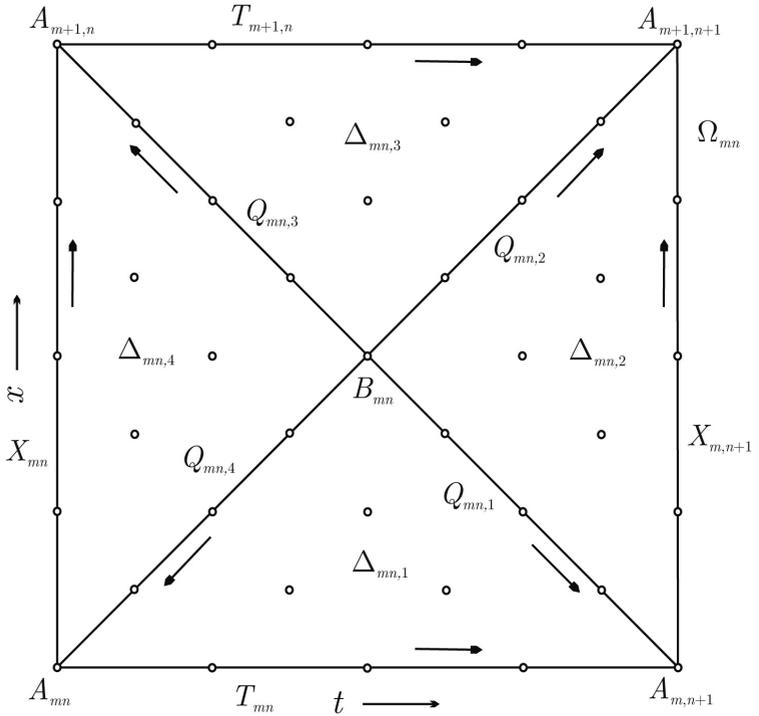


Рис. 2.2.2. Структура сетки на четырехугольнике Ω_{mn} .

На каждом из $4MN$ треугольников Δ_{nmj} , определенных в (2.2.6), неизвестные функции ищутся как полные полиномы степени K в представлении Бэзе–Бернштейна [112]. Согласно этому представлению для произвольного треугольника $\Delta \subset \Omega$ с вершинами $A_i = \{t_i, x_i\} \in \bar{\Omega}$, $i = 1, 2, 3$ (введена локальная индексация с обходом вершин против часовой стрелки), переменные u и r можно выразить как

$$u(t, x) = \sum_{k+l=0}^K u_{kl} B_{kl}^K(t, x), \quad r(t, x) = \sum_{k+l=0}^K r_{kl} B_{kl}^K(t, x), \quad (2.2.8)$$

$$B_{kl}^K(t, x) = \frac{K!}{k!l!(K-k-l)!} b_1^k(t, x) b_2^l(t, x) b_3^{K-k-l}(t, x),$$

где введены линейные функции, иначе барицентрические координаты,

$$\begin{aligned} b_1(t, x) &= \frac{(x_2 - x_3)(t - t_3) - (t_2 - t_3)(x - x_3)}{d}, \\ b_2(t, x) &= \frac{(x_3 - x_1)(t - t_1) - (t_3 - t_1)(x - x_1)}{d}, \\ b_3(t, x) &= \frac{(x_1 - x_2)(t - t_2) - (t_1 - t_2)(x - x_2)}{d}, \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

$$d = \det \mathbf{T}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь \mathbf{T} — расширенная матрица координат, детерминант d которой равен удвоенной площади треугольника Δ . Определенные в (2.2.9) функции b_i обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} b_i(t_i, x_i) &= 1, \quad b_i(t_j, x_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ b_1 + b_2 + b_3 &= 1. \end{aligned}$$

Удобно использовать аналитическое выражение для интеграла по треугольнику Δ для функций Безье–Бернштейна

$$\int_{\Delta} B_{kl}^n(t, x) d\Delta = \frac{n!}{(n+2)!} d.$$

Произведение двух функций B_{ij}^m и B_{kl}^n всегда можно выразить через новый полином Безье–Бернштейна

$$\begin{aligned} B_{ij}^M B_{kl}^N &= \frac{\binom{i+k}{i} \binom{j+l}{j} \binom{m+n}{m}}{\binom{M+N}{M}} B_{i+k, j+l}^{M+N}, \\ m = M - i - j, \quad n = N - k - l, \quad \binom{j}{i} &= \frac{j!}{i!(j-i)!}. \end{aligned}$$

В явном виде представляются и частные производные от этих поли-

$$\frac{\partial}{\partial t} B_{kl}^K(t, x) = K \left(B_{k-1, l}^{K-1} b_{1, t} + B_{k, l-1}^{K-1} b_{2, t} + B_{k, l}^{K-1} b_{3, t} \right), \quad (2.2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} B_{kl}^K(t, x) = K \left(B_{k-1, l}^{K-1} b_{1, x} + B_{k, l-1}^{K-1} b_{2, x} + B_{k, l}^{K-1} b_{3, x} \right).$$

Производные от барицентрических функций b_i , $i = 1, 2, 3$, задаются координатами $\{t_i, x_i\}$ вершин треугольника Δ :

$$\begin{aligned} b_{1, t} &= \frac{x_2 - x_3}{d}, & b_{2, t} &= \frac{x_3 - x_1}{d}, & b_{3, t} &= \frac{x_1 - x_2}{d}, \\ b_{1, x} &= \frac{t_3 - t_2}{d}, & b_{2, x} &= \frac{t_1 - t_3}{d}, & b_{3, x} &= \frac{t_2 - t_1}{d}. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

В правых частях выражений для производных (2.2.10) следует приравнять нулю те слагаемые, в которых либо встречаются отрицательные индексы ($k - 1 < 0$ или $l - 1 < 0$), либо сумма нижних индексов больше верхнего ($k + l > K - 1$).

Для выбранной кусочно-полиномиальной аппроксимации на любом треугольнике сетки Δ_{mnj} неизвестные функции $u(t, x)$ и $r(t, x)$ определяются в соответствии с (2.2.8) параметрами $u_{kl}^{(mnj)}$ и $r_{kl}^{(mnj)}$, число которых для каждой из этих функций равно

$$N_{\Delta} = \frac{(K + 1)(K + 2)}{2}.$$

Введем вектор локальных параметров $\hat{\mathbf{z}} = \{\hat{z}_i\} \in \mathbb{R}^{N_i}$, компоненты которого составлены из коэффициентов Бэзье–Бернштейна $u_{kl}^{(mnj)}$ и $r_{kl}^{(mnj)}$ всех треугольников сетки Δ_{mnj} . Размерность вектора $\hat{\mathbf{z}}$ равна

$$N_l = 8MNN_{\Delta},$$

а порядок его компонентов \hat{z}_i выберем так, что

$$\begin{aligned}
 \hat{z}_{i_1} &= u_{kl}^{(mnj)}, \quad \hat{z}_{i_2} = r_{kl}^{(mnj)}, \\
 i_1 &= j_0 + k_0, \quad i_2 = N_\Delta + j_0 + k_0, \\
 j_0 &= 8((m-1)N + n - 1)N_\Delta, \\
 k_0 &= \frac{k(2K - k + 3)}{2} + l + 1, \\
 m &= 1, \dots, M, \quad n = 1, \dots, N, \quad j = 1, 2, 3, 4, \\
 k &= 0, \dots, K, \quad l = 0, \dots, K - k.
 \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

Здесь j_0 — номер последнего коэффициента в предыдущем треугольнике, а k_0 определяет одномерную индексацию коэффициентов Безье–Бернштейна $u_{kl}^{(mnj)}$ внутри треугольника Δ_{mnj} . Треугольники упорядочены так, что сначала пробегает свои значения правый индекс j , затем — средний n и последним — m .

Определим вектор разрывных базисных функций

$$\mathbf{a}(t, x) = \{a_i(t, x)\} \in \mathbb{R}^{N_i},$$

который соответствует вектору локальных параметров $\hat{\mathbf{z}}$, согласно

$$a_{i_1} = a_{i_2} = \begin{cases} B_{kl}^{(mnj)}(t, x), & \{t, x\} \in \Delta_{mnj} \\ 0, & \{t, x\} \notin \Delta_{mnj} \end{cases}.$$

где $B_{kl}^{(mnj)}$ соответствующие полиномы Безье–Бернштейна степени K , заданные на треугольнике Δ_{mnj} согласно (2.2.8). Индексы i_1 и i_2 определены в (2.2.12). Тогда аппроксимации кинематических и динамических полей представимы в виде

$$\begin{aligned}
 \hat{u} &= \hat{\mathbf{u}}^T(t, x)\hat{\mathbf{z}}, \quad \hat{r} = \hat{\mathbf{r}}^T(t, x)\hat{\mathbf{z}}, \\
 \hat{\mathbf{u}} &= \mathbf{E}_u \mathbf{a}(t, x), \quad \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{E}_r \mathbf{a}(t, x),
 \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

где для выборки необходимых базисных функций введены диагональ-

ные матрицы

$$\mathbf{E}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_u^0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_u^0 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{E}_u^0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_l \times N_l}, \quad \mathbf{E}_u^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_\Delta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

и

$$\mathbf{E}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_r^0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_r^0 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{E}_r^0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_l \times N_l}, \quad \mathbf{E}_r^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_\Delta} \end{bmatrix}.$$

Через \mathbf{I}_n обозначены единичные матрицы размера $n \times n$.

2.2.3. Непрерывность кинематических и динамических полей. Важным шагом в алгоритме метода конечных элементов является выполнение необходимого условия непрерывности приближенных полей u и r . Для этого требуется стыковка полиномов (2.2.8) на сторонах, соединяющих сопряженные треугольники, а также строгое выполнение начальных и краевых условий (2.2.5). Выбранное представление кусочно-полиномиальных аппроксимаций в форме Безье–Бернштейна позволяет это сделать в явном виде.

Отметим важное свойство полиномов $B_{kl}^K(t, x)$, заданных на произвольном треугольнике Δ согласно (2.2.8). На значения полиномиальных функций u и r в каждой из вершин A_1 , A_2 и A_3 влияет лишь одна функция, соответственно $B_{K,0}^K$, $B_{0,K}^K$ и $B_{0,0}^K$. При этом

$$\begin{aligned} u(t_1, x_1) &= u_{K,0}, & u(t_2, x_2) &= u_{0,K}, & u(t_3, x_3) &= u_{0,0}, \\ r(t_1, x_1) &= r_{K,0}, & r(t_2, x_2) &= r_{0,K}, & r(t_3, x_3) &= r_{0,0}. \end{aligned}$$

Таким образом, можно связать соответствующие функции и коэффициенты с вершинами треугольников. Для сетки, заданной на области Ω , любая вершина (узловая точка) принадлежит сразу нескольким треугольникам. Значит, из условия непрерывности $u(t, x)$ и $r(t, x)$ следует приравнять между собой относящиеся к этой точке коэффициенты, которые определяют узловые значения неизвестных функций.

На стороне Q_i , $i = 1, 2, 3$, противоположащей вершине A_i треугольника Δ , ненулевые значения имеют только полиномы B_{kl}^K , которые не содержат барицентрическую функцию $b_i(t, x)$ из (2.2.9). Кроме двух базисных функций, связанных с прилегающими к стороне Q_i вершинами, это еще $K - 1$ полиномов. Поэтому отнесем функции $B_{0, K-k}^K$ для $k = 1, \dots, K - 1$ и соответствующие коэффициенты $u_{0, K-k}$, $r_{0, K-k}$ к стороне Q_1 ; $B_{k, 0}^K$, $u_{k, 0}$ и $r_{k, 0}$ — к стороне Q_2 ; $B_{K-k, k}^K$, $u_{K-k, k}$ и $r_{K-k, k}$ — к Q_3 . Отметим, что локальная индексация для каждой стороны производится против часовой стрелки вдоль контура треугольника.

Любая сторона некоторого выбранного треугольника Δ_1 либо принадлежит внешней границе $\partial\Omega = \bar{\Omega}/\Omega$, либо соединяет его со смежным треугольником Δ_2 . Для непрерывности сплайна на области

$$\{t, x\} \in \bar{\Delta}_1 \cup \bar{\Delta}_2$$

достаточно приравнять коэффициенты, которые относятся к общим вершинам и стороне, с учетом противоположного направления нумерации параметров на общем для Δ_1 и Δ_2 отрезке. Например, если первая сторона $Q_1^{(1)}$ треугольника Δ_1 является второй стороной $Q_2^{(2)}$ у элемента Δ_2 , то $u_{k, 0}^{(2)} = u_{0, k}^{(1)}$ и $r_{k, 0}^{(2)} = r_{0, k}^{(1)}$ для $k = 1, \dots, K - 1$ и т. п.

Полиномы B_{kl}^K , для которых выполнены условия $k \neq 0$, $l \neq 0$ и $k + l \neq K$, принимают нулевые значения на границе треугольника и могут быть определены как его внутренние базисные функции. Их число на каждом треугольнике для переменных u , r равно $N_t = (K - 1)(K - 2)$. Соответствующие коэффициенты u_{kl} , r_{kl} влияют на значения полей u и r только внутри области Δ , не участвуют в стыковке между элементами сетки и могут быть соотнесены только с этим треугольником.

Учитывая то, что параметры, отнесенные к узлам и сторонам сетки, после непрерывной стыковки определяют значения функций u и r сразу на нескольких треугольниках, необходимо провести перенумерацию всех оставшихся коэффициентов, выделить вектор проектных

(неизвестных) параметров и связать локальные и глобальные индексы. Это можно сделать неоднозначно, но следует учитывать, что способ нумерации параметров существенно влияет на численную ошибку при решении получающейся линейной системы алгебраических уравнений.

Опишем схематически одну из возможных последовательностей расположения глобальных параметров с учетом введенных обозначений элементов сетки. Далее верхний индекс u указывает на степени свободы сетки, определяющие функцию перемещений $u(t, r)$, а индекс r — степени свободы, связанные с динамической функцией $r(t, x)$. К прямоугольнику $\Omega_{mn} \in \Omega$, $m = 1, \dots, M$, $n = 1, \dots, N$, (см. рис. 2.2.2) относятся:

1. параметры T_{mn}^r , связанные с открытым отрезком T_{mn} ;
2. параметр $A_{m,n+1}^r$ для узловой точки $A_{m,n+1}$;
3. параметры $T_{m+1,n}^u$, связанные с отрезком $T_{m+1,n}$;
4. параметр $A_{m+1,n+1}^u$, связанный с точкой $A_{m+1,n+1}$;
5. параметры B_{mn}^u и B_{mn}^r для серединной точки B_{mn} ;
6. внутренние степени свободы Δ_{mnj}^u и Δ_{mnj}^r треугольников Δ_{mnj} , а также коэффициенты Q_{mnj}^u и Q_{mnj}^r , связанные со сторонами Q_{mnj} , где $j = 1, 2, 3, 4$;
7. параметры $T_{m,n+1}^u$ и $T_{m,n+1}^r$, связанные с отрезком $T_{m,n+1}$.

Суммарное число параметров прямоугольника равно $N_\Omega = 4K^2$. Сами же прямоугольники упорядочены так, что каждому приписывается номер $n_\Omega = (m - 1)N + n$.

После $N_y = MN N_\Omega$ коэффициентов, которые входят в вектор параметров $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{N_y}$, располагаются параметры, определяемые граничными и начальными условиями:

1. параметры $T_{1,n}^u$, связанные с отрезками $T_{1,n}$, и параметры $A_{1,n+1}^u$ вершин $A_{1,n+1}$ для $n = 1, \dots, N$ (краевые условия в перемещениях при $x = 0$);
2. параметры $T_{M+1,n}^r$ отрезков $T_{M+1,n}$, и параметры $A_{M+1,n+1}^r$ вершин $A_{M+1,n+1}$ для $n = 1, \dots, N$ (краевые условия в силах при $x = 1$);
3. Два коэффициента $A_{1,1}^u$ и $A_{1,1}^r$ (начальные условия при $t = 0$);
4. параметры $X_{m,1}^u$ и $X_{m,1}^r$ отрезков $X_{m,1}$, а также $A_{m+1,1}^u$ и $A_{m+1,1}^r$ вершин $A_{m+1,1}$ для $m = 1, \dots, M$ (начальные условия при $t = 0$, $x \neq 0$);

Эти коэффициенты задаются из условий (2.2.5) и составляют вектор системных параметров $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{N_q}$, где $N_q = 2(MK + NK + 1)$. Объединим \mathbf{u} и \mathbf{q} в один вектор глобальных параметров

$$\mathbf{z} = [\mathbf{y}^T \ \mathbf{q}^T]^T \in \mathbb{R}^{N_g}, \quad N_g = N_y + N_q. \quad (2.2.14)$$

Принимая во внимание выбранный порядок расположения коэффициентов в векторе \mathbf{z} , можно связать локальные и глобальные параметры системы линейным соотношением.

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{Q}\mathbf{z}, \quad \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{N_l \times N_g}, \quad (2.2.15)$$

где состоящая из единиц и нулей матрица \mathbf{Q} такая, что

$$\mathbf{e}_l = \mathbf{Q}\mathbf{e}_g, \quad \mathbf{e}_l = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^{N_l}, \quad \mathbf{e}_g = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^{N_g}.$$

Окончательно, непрерывные кинематические и динамические поля, заданные на выбранной сетке, выражаются с учетом (2.2.13) и (2.2.15) в матричной форме:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{u}^T(t, x)\mathbf{z}, \quad \tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}^T(t, x)\mathbf{z}, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{Q}^T \mathbf{E}_u \mathbf{a}(t, x), \quad \mathbf{r} = \mathbf{Q}^T \mathbf{E}_r \mathbf{a}(t, x). \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

2.2.4. Уравнения состояния в методе конечных элементов.

Подставляя аппроксимации функции перемещений $u(t, x, \mathbf{z})$ и динамической функции $r(t, x, \mathbf{z})$ из (2.2.16) в выражения для функционала (2.2.4), получаем

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(\mathbf{z}) &= \Phi[\tilde{u}, \tilde{r}] = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{F} \mathbf{z}, \\ \mathbf{F} &= \mathbf{F}_{uu} + \mathbf{F}_{ur} + \mathbf{F}_{ru} + \mathbf{F}_{rr}, \\ \mathbf{F}_{uu} &= \int_{\Omega} \{ \mathbf{u}_x \mathbf{u}_x^T + \mathbf{u}_t \mathbf{u}_t^T \} d\Omega, \quad \mathbf{F}_{rr} = \int_{\Omega} \{ \mathbf{r}_x \mathbf{r}_x^T + \mathbf{r}_t \mathbf{r}_t^T \} d\Omega, \\ \mathbf{F}_{ur} &= - \int_{\Omega} \{ \mathbf{u}_t \mathbf{r}_x^T + \mathbf{u}_x \mathbf{r}_t^T + \mathbf{r}_t \mathbf{u}_x^T + \mathbf{r}_x \mathbf{u}_t^T \} d\Omega, \quad \mathbf{F}_{ru} = \mathbf{F}_{ur}^T.\end{aligned}\tag{2.2.17}$$

Учитывая структуру (2.2.14) вектора глобальных параметров \mathbf{z} , можно выразить функционал $\tilde{\Phi}$, введенный в (2.2.17), через векторы проектных и системных параметров в виде

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(\mathbf{z}) &= \tilde{\Phi}(\mathbf{y}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}_y & \mathbf{F}_q \\ \mathbf{F}_q^T & \mathbf{F}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{F}_y &= \mathbf{F}_y^T \in \mathbb{R}^{N_y \times N_y}, \quad \mathbf{F}_q \in \mathbb{R}^{N_y \times N_q}, \quad \mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_0^T \in \mathbb{R}^{N_q \times N_q}.\end{aligned}$$

Из квадратичной формы исходного функционала Φ следует, что минимальное значение функционала $\tilde{\Phi}$ достигается при равенстве нулю его производных

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{F}_y \mathbf{y} + \mathbf{F}_q \mathbf{q} = 0.\tag{2.2.18}$$

Согласно (2.2.3) и (2.2.16) из решения

$$\tilde{\mathbf{y}} = -\mathbf{F}_y^{-1} \mathbf{F}_q \mathbf{q}$$

линейной системы уравнений (2.2.18) находятся поля перемещений, сил и импульсов

$$\tilde{u} = \mathbf{u}^T(t, x) \tilde{\mathbf{z}}, \quad \tilde{s} = \mathbf{r}_t^T(t, x) \tilde{\mathbf{z}}, \quad \tilde{p} = \mathbf{r}_x^T(t, x) \tilde{\mathbf{z}}, \quad \tilde{\mathbf{z}} = [\tilde{\mathbf{y}}^T \ \mathbf{q}^T]^T.$$

Относительная энергетическая ошибка Δ полученных аппроксимаций выражается в матричном виде:

$$\begin{aligned}\Delta &= \tilde{\Phi}(\mathbf{q})\tilde{\Psi}_1^{-1}(\tilde{\mathbf{z}}), \\ \tilde{\Phi}(\mathbf{q}) &= \tilde{\Phi}(\tilde{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T (\mathbf{F}_0 - \mathbf{F}_q^T \mathbf{F}_y^{-1} \mathbf{F}_q) \mathbf{q}, \\ \tilde{\Psi}_1(\tilde{\mathbf{z}}) &= \Psi_1[\tilde{u}] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tilde{u}_x^2 + \tilde{u}_t^2) d\Omega = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}^T \mathbf{F}_{uu} \tilde{\mathbf{z}}.\end{aligned}$$

Здесь Ψ_1 — выраженный через перемещения интеграл по времени от полной механической энергии стержня, \mathbf{F}_{uu} — матрица, введенная в (2.2.17). Распределение энергетической ошибки $\tilde{\varphi}(t, x, \mathbf{q}) = \varphi(\tilde{u}, \tilde{s}, \tilde{p})$ находится согласно (2.2.1).

Пример 2.2.1. Как и в примере 2.1.1, рассмотрим вынужденные продольные движения однородного упругого стержня. Краевые и начальные условия заданы согласно (2.2.2), где перемещения конца стержня при $x = 0$ определяются полиномиальной функцией

$$u_0(t) = \frac{3t^2}{T^2} - \frac{2t^3}{T^3}. \quad (2.2.19)$$

Если перемещения \tilde{u} задаются на треугольниках полиномами степени $K \geq 3$, то эти условия можно удовлетворить точно. При этом равны нулю компоненты q_i вектора системных параметров \mathbf{q} для $i > NK$. Эти параметры определяют перемещения и импульсы в начальный момент времени $t = 0$, а также силы на конце стержня при $x = 1$. Остальные компоненты ($i \leq NK$), отвечающие за перемещение конца $x = 0$, находятся из взаимно однозначного соответствия канонической формы (2.2.19) полиномиальной функции u_0 и представления одномерного сплайна $\tilde{u}(t, 0)$ в виде полиномов Бэзье–Бернштейна.

На части границы области Ω при $x = 0$ ненулевые значения принимают полиномы $B_{0, K-k}^{(1n1)}(t, 0)$ для $k = 0, \dots, K$ и $n = 1, \dots, N$, заданные на треугольниках Δ_{1n1} . При этих функциях стоят коэффициенты, соответствующие системным параметрам q_j , где $j = (n-1)K + k$.

Раскладывая на отрезке $t \in [t_n, t_{n+1}]$ функцию

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t, 0) &= \sum_{k=0}^K q_j^{(k,n)} B_{0,K-k}^{(1n1)}(t, 0) = \mathbf{b}_n^T(t) \mathbf{q}_n, \\ q_0 &= q_{2KN+1}, \quad \mathbf{b}_n(t), \mathbf{q}_n \in \mathbb{R}^{K+1},\end{aligned}$$

в ряд Тейлора

$$\tilde{u}(t, 0) = \sum_{k=0}^K \left(\left. \frac{d^k \mathbf{b}_n^T}{dt^k} \right|_{t=0} \mathbf{q}_n \right) \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^K c_k t^k,$$

можно определить с учетом (2.2.19) значение параметров q_j :

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{B}_n^{-1} \mathbf{c}, \quad \mathbf{B}_n = \left\{ B_n^{(kl)} \right\} = \left\{ \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dt^k} B_{0,K-l}^{(1n1)}(t, 0) \right]_{t=0} \right\},$$

где $\mathbf{c} = [c_0, c_1, \dots, c_K]^T$ — вектор коэффициентов полинома u_0 . Подчеркнем, что в рассматриваемом примере ненулевые компоненты вектора \mathbf{q} зависят нелинейно от единственного параметра системы T .

Узловые линии конечно-элементной сетки проведены с фиксированными шагами $\Delta t = N^{-1}T$ и $\Delta x = M^{-1}$ соответственно по координатам t и x . Узлы A_{mn} расположены в точках $\{t_n, x_m\} = \{(n-1)\Delta t, (m-1)\Delta x\}$ для $m = 1, \dots, M+1$ и $n = 1, \dots, N+1$, а узлы B_{mn} — в точках $\{(n-\frac{1}{2})\Delta t, (m-\frac{1}{2})\Delta x\}$. Фиксировано время процесса $T = 4$. Меняются степень полиномов K и параметр сетки $M = N$ (см. рис. 2.2.1).

На рис. 2.2.3 показана зависимость относительной энергетической ошибки Δ от числа проектных параметров N_y для тестового движения. Сплошной ломаной линией отражена сходимость численного решения при увеличении параметра M для фиксированной степени полиномов $K = 3$. Это, так называемая, « h -сходимость». Уменьшение ошибки $\Delta(N_y)$ при повышении степени $K = 3, 4, \dots, 8$, « p -сходимость», продемонстрирована штриховой линией.

Отметим, что при увеличении степени полиномов K можно добиться гораздо большей точности решения для заданной размерности N_y . Однако, при этом резко возрастают объем вычислений и обусловленность

матрицы \mathbf{F}_y , что может отрицательно повлиять на эффективность применения высоких степеней полиномов.

Для заданного класса движений необходимо выбирать параметры K , M и N так, чтобы по возможности сократить время расчета и достигнуть заданной точности аппроксимации. Перспективным направлением для повышения эффективности алгоритма МКЭ является применение адаптивных сеток [142]. Для данной расчетной схемы можно варьировать, например, узловые координаты t_n и x_m .

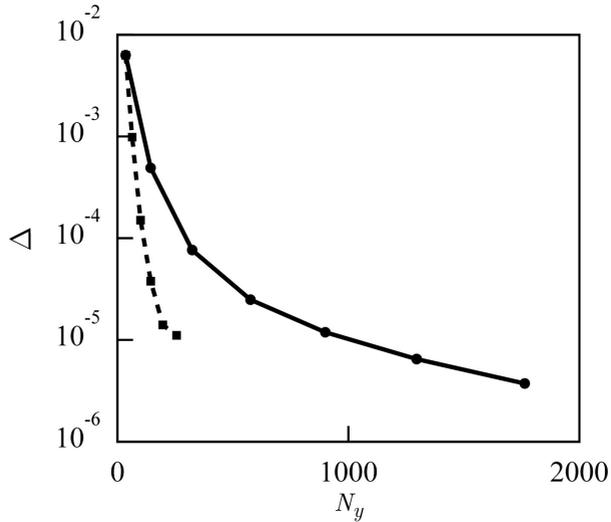


Рис. 2.2.3. Ошибка аппроксимации Δ при увеличении степени полиномов $K = 3 - 8$ (квадраты) и числа узлов $M = N = 1 - 7$ (круги).

На рис. 2.2.4 представлены значения относительных (упругих) смещений точек стержня $\tilde{u}(t, x) - u_0(t)$ в зависимости времени t и координаты x . Это распределение с большой точностью повторяет относительные перемещения, полученные в §2.1 (ср. рис. 2.1.2).

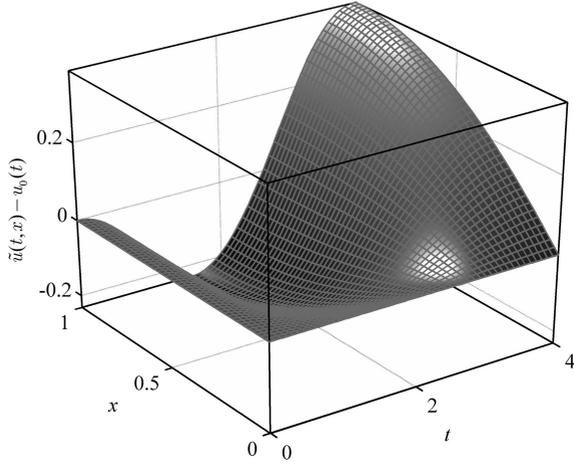


Рис. 2.2.4. Распределение перемещений $u(t, x)$.

На рис. 2.2.5 показано распределение локальной ошибки вычислений при фиксированных параметрах сетки $K = 3$ и $M = N = 5$. Как видно функция ошибки $\tilde{\varphi}(t, x)$ достигает максимального значения в начале движения. Это связано с переходными процессами в упругом стержне, которые обусловлены конечной скоростью распространения механического воздействия для исследуемой модели. В области $\Omega_0 = \{t, x : t < x\} \subset \Omega$ функции перемещений u , сил s и импульсов p должны быть тождественно равны нулю на точном решении. Полученные аппроксимации с определенной ошибкой следуют этому решению, что видно из рис. 2.2.6, 2.2.7 для полей $\tilde{s}(t, x)$ и $\tilde{p}(t, x)$. На этих рисунках видно, что аппроксимации строго выполняют начальные и краевые условия $\tilde{p}(0, x) = 0$ и $\tilde{s}(t, 1) = 0$.

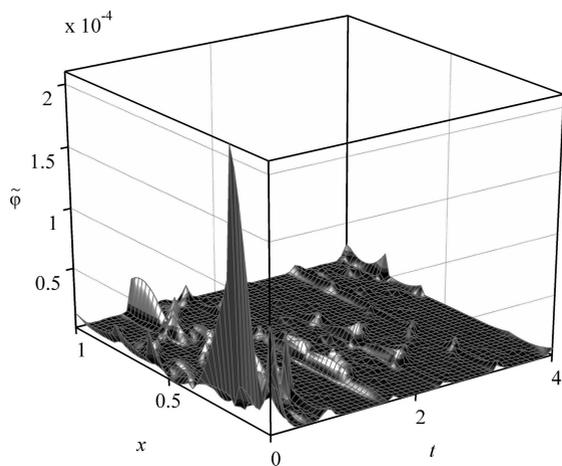


Рис. 2.2.5. Распределение ошибки аппроксимации
для $K = 3$ и $M = N = 5$.

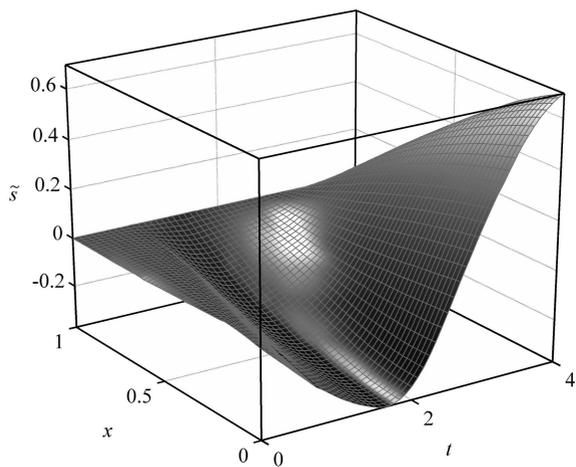


Рис. 2.2.6. Распределение силы $s(t, x)$.

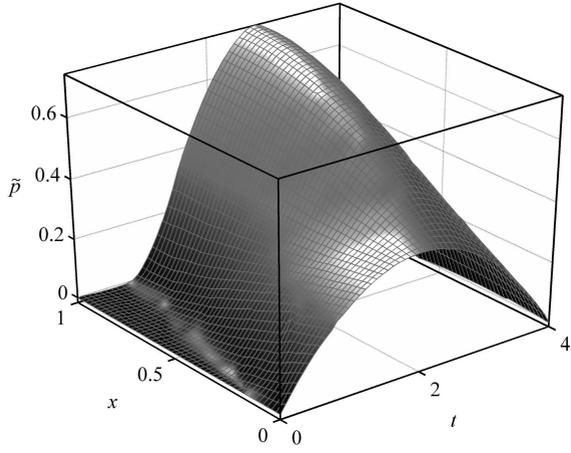


Рис. 2.2.7. Распределение плотности импульса $p(t, x)$.

§2.3. Численное моделирование вынужденных движений упругого тела

2.3.1. Численный алгоритм и оценки качества решения. Рассмотрим один из возможных алгоритмов численного построения решения минимизационной задачи линейной теории упругости (1.3.21). Проиллюстрируем его на примере движений однородного изотропного упругого тела ($d = 3$). Ограничимся случаем, когда отсутствуют объемные силы $\mathbf{f} = 0$, и сформулируем минимизационную задачу в перемещениях и напряжениях с функционалом Φ_0 , введенным в (1.3.20):

$$\begin{aligned} \Phi_0(\mathbf{u}^*, \sigma^*) &= \min_{\mathbf{u}, \sigma} \Phi_0(\mathbf{u}, \sigma) = 0, \\ \Phi_0 &= \int_0^T \int_{\Omega} \varphi_0(\mathbf{u}, \sigma) d\Omega dt, \quad \varphi_0 = \frac{1}{2} \xi : \mathbf{C} : \xi, \quad \xi = \varepsilon - \mathbf{C}^{-1} : \sigma; \\ \rho \mathbf{u}_{tt} &= \nabla \cdot \sigma; \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

$$\begin{aligned} x \in \Gamma : \quad & \alpha(x) \mathbf{u}(t, x) + \beta(x) \mathbf{q}(t, x) = \mathbf{v}(t, x), \quad \mathbf{q} = \sigma \cdot \mathbf{n}; \\ t = 0 : \quad & \mathbf{u}(t, x) = \mathbf{u}^0(x), \quad \mathbf{u}_t(t, x) = \rho^{-1} \mathbf{p}^0(x). \end{aligned}$$

Здесь Ω — занимаемая телом область с границей Γ , $\mathbf{n}(x)$ — внешняя нормаль к границе, $\mathbf{u}(t, x)$ — вектор перемещений, $\sigma(t, x)$ — тензор напряжений, $\rho = \text{const}$ — объемная плотность тела, \mathbf{u}^0 и \mathbf{p}^0 — начальное распределение перемещений и импульсов, T — интервал времени, на котором рассматривается движение. Для изотропного тела тензор модулей упругости $\mathbf{C} = \text{const}$ зависит только от модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν . Константы α и β такие, что либо $\alpha = 1$ и $\beta = 0$, либо $\alpha = 0$ и $\beta = 1$. Через известную вектор-функцию $\mathbf{v}(t, x)$ в первом случае граничные условия заданы в перемещениях $\mathbf{u}(t, x)$ на части границы $\Gamma_1 \subset \Gamma$, а во втором — в напряжениях $\mathbf{q}(t, x)$ на $\Gamma_2 \subset \Gamma$.

В общем виде, предлагаемый алгоритм можно описать следующим образом. Вначале зададим целое число N и выберем аппроксимации

$\tilde{\mathbf{u}}(t, x), \tilde{\sigma}(t, x)$ решения \mathbf{u}^*, σ^* задачи (2.3.1) в виде конечных сумм

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_{k=1}^N \mathbf{u}^{(k)} a_k(t, x), \quad \tilde{\sigma} = \sum_{k=1}^N \sigma^{(k)} a_k(t, x), \quad (2.3.2)$$

где $\{a_k(t, x), k = 1, 2, \dots\}$ некоторая полная счетная система линейно независимых функций, а $\mathbf{u}^{(k)}, \sigma^{(k)}$ — неизвестные вещественные коэффициенты, записанные в векторном и тензорном виде.

Базисные функции a_k выбираются так, чтобы аппроксимации $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\sigma}$ могли, для некоторого набора постоянных $\mathbf{u}^{(k)}, \sigma^{(k)}$, точно удовлетворять второй закон Ньютона, граничные и начальные условия, определенные в задаче (2.3.1). Из этого напрямую следует, что граничный вектор $\mathbf{v}(t, x), x \in \Gamma$, и функции начального распределения перемещений $\mathbf{u}^0(x)$ и импульсов $\mathbf{p}^0(x)$ должны быть представимы в виде

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{N_v} \mathbf{v}^{(k)} a_k|_{x \in \Gamma}, \quad \mathbf{u}^0 = \sum_{k=1}^{N_u} \mathbf{u}^{(0k)} a_k|_{t=0}, \quad \mathbf{p}^0 = \sum_{k=1}^{N_p} \mathbf{p}^{(0k)} \frac{\partial a_k}{\partial t} \Big|_{t=0},$$

где $\mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{u}^{(0k)}$ и $\mathbf{p}^{(0k)}$ фиксированные коэффициенты. На следующем шаге определяется часть параметров $\mathbf{u}^{(k)}, \sigma^{(k)}$ так, чтобы аппроксимации (2.3.2) удовлетворяли все ограничения, заданные в (2.3.1). Затем полученные допустимые аппроксимации $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\sigma}$ подставляются в функционал Φ_0 .

Задача условной минимизации функционал Φ_0 относительно неизвестных \mathbf{u} и σ переходит в задачу безусловной минимизации функции $\Phi_0(\mathbf{y})$, где \mathbf{y} — выраженное в векторной форме множество всех независимых параметров $u_i^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)}$, оставшихся после удовлетворения ограничений (2.3.1). Так как функция Φ_0 является квадратичной формой относительно \mathbf{y} , для нахождения оптимального набора параметров \mathbf{y}^* и её минимального значения $\Phi_0^* = \Phi_0(\mathbf{y}^*) \geq 0$ необходимо решить линейную систему алгебраических уравнений

$$\frac{\partial \Phi_0(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{0}.$$

Отметим, что функционал Φ_0 достигает своего абсолютного нулевого значения только на точном решении \mathbf{u}^*, σ^* . Чтобы оценить качество полученного приближенного решения $\tilde{\mathbf{u}}^* = \tilde{\mathbf{u}}(t, x, \mathbf{y}^*)$, $\tilde{\sigma}^* = \tilde{\sigma}(t, x, \mathbf{y}^*)$ можно использовать следующие интегральные и локальные оценки:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\Phi_0^*}{\tilde{\Psi}^*} < \delta, \quad \tilde{\Psi}^* = \int_0^T \tilde{W}^* dt, \\ \tilde{W}^*(t) &= \int_{\Omega} \psi(\tilde{\mathbf{u}}^*) d\Omega, \quad \psi = \frac{1}{2} (\rho \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}_t + \varepsilon : \mathbf{C} : \varepsilon), \\ \tilde{\varphi}_0^*(t, x) &= \frac{1}{2} \tilde{\xi}^* : \mathbf{C} : \tilde{\xi}^*, \quad \tilde{\xi}^* = \tilde{\varepsilon}^* - \mathbf{C}^{-1} : \tilde{\sigma}^*, \\ \dot{W}^* &= \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{q}}^* \cdot \tilde{\mathbf{u}}_t^* d\Gamma + \dot{W}_0, \quad \dot{W}_0 = \int_{\Omega} \tilde{\xi}^* : \mathbf{C} : \tilde{\varepsilon}_t^* d\Omega, \\ \tilde{\varepsilon}^* &= \frac{1}{2} [\nabla \tilde{\mathbf{u}}^* + (\nabla \tilde{\mathbf{u}}^*)^T], \quad \tilde{\mathbf{q}}^* = \mathbf{C} : \tilde{\sigma}^*. \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Здесь $\delta \ll 1$ — положительная безразмерная величина, определяющая качество полученного решения, $\tilde{\Psi}^* > 0$ — приближенное значение интеграла от полной механической энергии W , запасаемой упругим телом во время движения, а ψ — объемная плотность этой энергии. Величину Δ можно рассматривать как интегральную относительную ошибку приближенного решения, в то время как функцию $\tilde{\varphi}_0^*$ от времени t и координат x — как распределение локальной энергетической ошибки.

Функция механической энергии \tilde{W}^* включает слагаемое W_0 , которое определяет в явном виде разницу между работой, совершенной внешними силами на приближенных движениях $\tilde{\mathbf{u}}^*$, $\tilde{\sigma}^*$ и запасенной телом энергией $\tilde{W}^*(t) - \tilde{W}^*(0)$. Из выражения для производной по времени от энергии W_0 в предпоследней строке (2.3.3) следует, что величина дисбаланса энергии через тензор $\tilde{\xi}^*$ связана с величиной относительной интегральной ошибки Δ .

2.3.2. Вынужденные движения трехмерного упругого тела.

В качестве примера рассмотрим движения упругого тела, имеющего в

недеформированном состоянии форму вытянутого прямоугольного параллелепипеда (см. рис. 2.3.1). Даны геометрические параметры:

$$\Omega = \{x_1, x_2, x_3 : 0 < x_1 < L, |x_2| < a, |x_3| < a\},$$

где L — длина тела, а $2a$ — размер поперечного сечения. Фиксирован конечный момент времени T . Рассматривается случай, когда в начальный момент времени $t = 0$ в теле отсутствуют упругие смещения и все точки находятся в покое. В качестве управления выберем полиномиальное во времени поступательное перемещение грани $x_1 = 0$ как твердого целого вдоль оси Ox_3 , где O — точка начала координат.

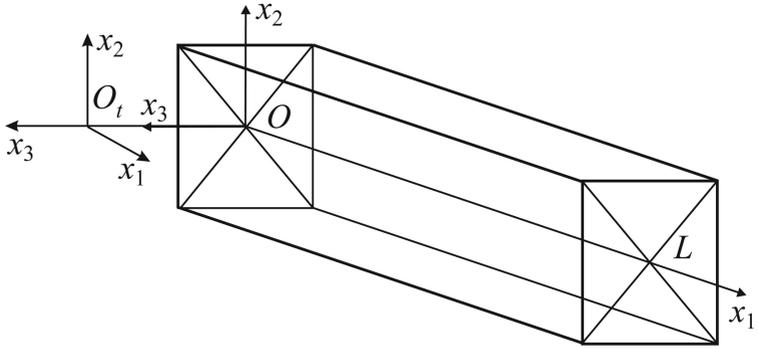


Рис. 2.3.1. Форма упругого тела.

Для данной задачи условия на границе записываются в виде

$$\begin{aligned} x_2 = \pm a : \quad & \sigma_{12} = \sigma_{22} = \sigma_{23} = 0; \\ x_3 = \pm a : \quad & \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0; \\ x_1 = L : \quad & \sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0; \\ x_1 = 0 : \quad & u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = v_3(t). \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Компонента v_3 граничной функции \mathbf{v} определена в классе полино-

мов от времени с фиксированной степенью N_v :

$$v_3 = \sum_{k=0}^{N_v} v_3^{(k)} t^k, \quad (2.3.5)$$

где $v_3^{(k)}$ — заданные константы. Начальные условия имеют нулевые правые части

$$\mathbf{u}^0(x) = \mathbf{p}^0(x) = 0.$$

2.3.3. Аппроксимации полей перемещений и напряжений.

Опишем используемые конечномерные приближения. Выбирается степень аппроксимации M_p и следующие полиномиальные по координатам x_2 и x_3 функции $\tilde{u}_k(t, x)$, $\tilde{\sigma}_{kl}(t, x)$, $k, l = 1, 2, 3$, для неизвестных компонент вектора перемещений \mathbf{u} и тензора напряжений σ

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= \sum_{i+j=0}^{M_p} x_2^{2i} x_3^{2j+1} u_1^{(i,j)}, & \tilde{\sigma}_{11} &= \sum_{i+j=0}^{M_p} x_2^{2i} x_3^{2j+1} \sigma_{11}^{(i,j)}, \\ \tilde{u}_2 &= \sum_{i+j=0}^{M_p-1} x_2^{2i+1} x_3^{2j+1} u_2^{(i,j)}, & \tilde{u}_3 &= \sum_{i+j=0}^{M_p} x_2^{2i} x_3^{2j} u_3^{(i,j)}, \\ \tilde{\sigma}_{23} &= \sum_{i+j=0}^{M_p-2} (a^2 - x_2^2)(a^2 - x_3^2) x_2^{2i-1} x_3^{2j-2} \sigma_{23}^{(i,j)}, \\ \tilde{\sigma}_{22} &= \sum_{i+j=0}^{M_p} (a^2 - x_2^2) x_2^{2i} x_3^{2j+1} \sigma_{22}^{(i,j)}, & (2.3.6) \\ \tilde{\sigma}_{33} &= \sum_{i+j=0}^{M_p} (a^2 - x_3^2) x_2^{2i} x_3^{2j+1} \sigma_{33}^{(i,j)}, \\ \tilde{\sigma}_{12} &= \sum_{i+j=0}^{M_p-1} (a^2 - x_2^2) x_2^{2i+1} x_3^{2j+1} \sigma_{12}^{(i,j)}, \\ \tilde{\sigma}_{13} &= \sum_{i+j=0}^{M_p} (a^2 - x_3^2) x_2^{2i} x_3^{2j} \sigma_{13}^{(i,j)}, \end{aligned}$$

где $u_k^{(i,j)}$ и $\sigma_{kl}^{(i,j)}$ — заданные ниже функции времени t и координаты x_1 .

Аппроксимации (2.3.6) точно выполняют граничные условия (2.3.4) на сторонах параллельных оси Ox_1 . Как показано в работе [41] (см. также §3.3) симметрия тела по отношению к координатным плоскостям Ox_1x_2 и Ox_1x_3 позволяет разделить исходную задачу на четыре независимых подзадачи: трехмерное растяжение-сжатие и кручение вдоль оси x_1 , а также изгибы вокруг осей x_2 и x_3 . Для рассматриваемых движений сечения при $x_1 = 0$ и однородных начальных условий реализуется лишь изгиб вокруг оси x_2 . Предложенные функции (2.3.6) выбраны так, чтобы не нарушать свойства симметрии задачи.

Разделим пространственно-временную область

$$\Upsilon = \{t, x_1 : t \in (0, T), x_1 \in (0, L)\}$$

на $N \times M$ прямоугольников Υ_{kl} , $k = 1, \dots, N$ и $l = 1, \dots, M$, с вершинами $Q_{k-1, l-1}$, $Q_{k-1, l}$, $Q_{k, l-1}$, $Q_{k, l}$ (см. рис. 2.3.2), где

$$Q_{i,j} = \{t_i, y_j\}, \quad t_k > t_{k-1}, \quad t_0 = 0, \quad t_N = T, \quad y_l > y_{l-1}, \quad y_0 = 0, \quad y_M = L.$$

Назовем стороны данной сетки как $L_{kl} = Q_{k, l-1}Q_{k, l}$ для $k = 0, \dots, N$, $l = 1, \dots, M$ и $T_{kl} = Q_{k-1, l}Q_{k, l}$ для $k = 1, \dots, N$, $l = 0, \dots, M$.

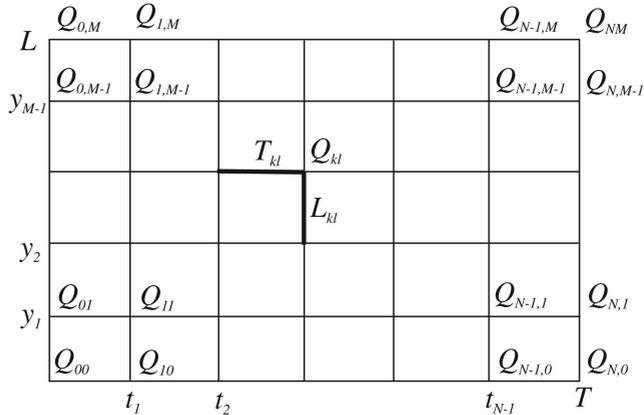


Рис. 2.3.2. Разбиение пространственно-временной области Υ .

В каждой четырехмерной области

$$\Sigma_{j_4, j_5} = \{t, x_1, x_2, x_3 : \{t, x_1\} \in \Upsilon_{j_4, j_5}, |x_2| < a, |x_3| < a\}$$

заданы полиномы

$$u_k^{(j_2, j_3)}(t, x_1) = \sum_{j_0 + j_1 = 0}^{N_p} u_k^{(J)} t^{j_0} x_1^{j_1},$$

$$\sigma_{kl}^{(j_2, j_3)}(t, x_1) = \sum_{j_0 + j_1 = 0}^{N_p} \sigma_{kl}^{(J)} t^{j_0} x_1^{j_1}, \quad k, l = 1, 2, 3,$$

$$J = \{j_i\}, \quad i = 0, \dots, 5,$$

$$j_0 + j_1 \leq N_p, \quad j_2 + j_3 \leq M_p, \quad j_4 = 1, \dots, N, \quad j_5 = 1, \dots, M.$$

Здесь $u_k^{(J)}$ и $\sigma_{kl}^{(J)}$ неизвестные действительные коэффициенты. Число N_p выбирается достаточно большим, чтобы удовлетворить закон Ньютона в задаче (2.3.1), а также граничные условия (2.3.4).

Для корректного применения вариационных подходов необходимо выполнить следующие условия стыковки функций на границах смежных элементов Σ_{kl} :

$$\{t, x_1\} \in L_{kl}, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad l = 1, \dots, M:$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(kl)}(t_k, x_1, x_2, x_3) = \tilde{\mathbf{u}}^{(k+1, l)}(t_k, x_1, x_2, x_3),$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_t^{(kl)}(t_k, x_1, x_2, x_3) = \tilde{\mathbf{u}}_t^{(k+1, l)}(t_k, x_1, x_2, x_3);$$

$$\{t, x_1\} \in T_{kl}, \quad k = 1, \dots, N, \quad l = 1, \dots, M-1:$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(kl)}(t, y_l, x_2, x_3) = \tilde{\mathbf{u}}^{(k, l+1)}(t, y_l, x_2, x_3),$$

$$\mathbf{n} \cdot \tilde{\sigma}^{(kl)}(t, y_l, x_2, x_3) = \mathbf{n} \cdot \tilde{\sigma}^{(k, l+1)}(t, y_l, x_2, x_3), \quad \mathbf{n} = [1, 0, 0]^T.$$

2.3.4. Численные результаты. Для расчетов были выбраны следующие безразмерные геометрические и механические параметры:

$$L = 1, \quad a = 0.05, \quad T = 2,$$

$$\rho S = EI = 1, \quad \nu = 0.3, \quad S = 4a^2, \quad I = 4a^4/3.$$

и заданы целые числа, определяющие порядок аппроксимаций неизвестных функций на элементе: $N = 5$, $M = 1$, $M_p = 2$, $N_p = 10$. Использовалась однородная по времени сетка с узловыми значениями $t_i = iT/N$. После удовлетворения соотношений закона Ньютона, граничных, начальных и межэлементных условий, размерность системы составила $N_{DOF} = 1985$. Был выбран кубичный ($N_v = 3$) по времени закон управления (2.3.5), переводящий сечение $x_1 = 0$ из начального нулевого состояния в заданное терминальное

$$v = v_3(t) = (3t^2 - t^3)/4, \quad v(0) = \dot{v}(0) = \dot{v}(T) = 0, \quad v(T) = 1.$$

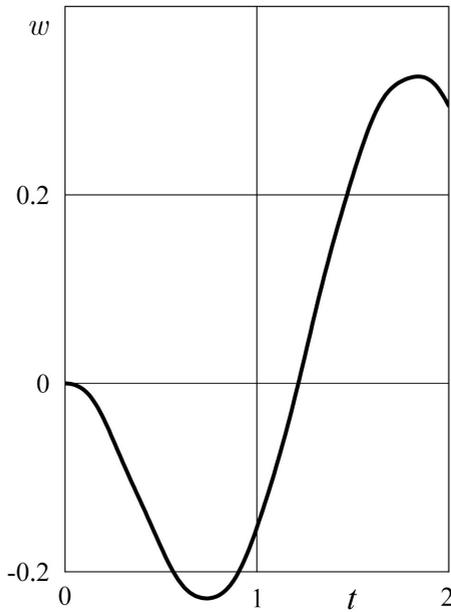


Рис. 2.3.3. Относительное смещение точки свободного сечения $x = \{L, 0, 0\}$.

Для заданных параметров значение интеграла по времени от полной

механической энергии, запасаемой телом во время движения, приближенно равно $\Psi = 0.18$. Абсолютная и относительная ошибка (2.3.3) составила соответственно $\Phi_0 = 0.0020$, $\Delta_0 = 1.1\%$.

На рис. 2.3.3 показано относительное упругое смещение

$$w = u_3(t, L, 0, 0) - v(t)$$

центральной точки сечения $x_1 = L$, как функция от времени t .

Функция линейной плотности полной механической энергии тела

$$\psi_1(t, x_1) = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \psi dx_2 dx_3$$

от времени t и координаты x_1 приведена на рис. 2.3.4. Распределение локальной ошибки

$$\varphi_1(t, x_1) = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \varphi_0 dx_2 dx_3$$

в сечениях $x_1 = \text{const}$ вдоль оси Ox_1 представлено на рис. 2.3.5. Как видно, наибольшая ошибка сосредоточена около перемещаемого сечения $x_1 = 0$.

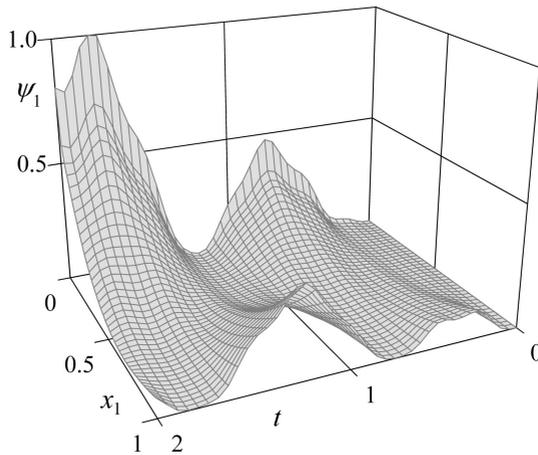


Рис. 2.3.4. Распределение плотности механической энергии $\psi_1(t, x_1)$.

В отличие от балочной модели Эйлера–Бернулли, рассмотренной в §2.1, трехмерная модель движений балки позволяет получить локальные параметры движения в любой точке упругого тела в произвольный момент времени. Например, на рис. 2.3.6 показана форма деформированного сечения $x_1 = 0.05$ в момент времени $t = 0.8$.

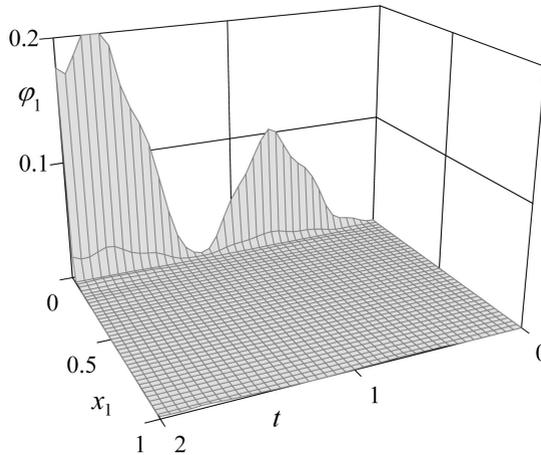


Рис. 2.3.5. Распределение локальной ошибки $\varphi_1(t, x_1)$.

Распределение локальной ошибки φ_0 в этом сечений приведено на рис. 2.3.7 для $t = 0.8$. Видно, что ошибка близка к нулю почти везде, за исключением малых областей вблизи углов сечения. Отметим, что сечение выбрано вблизи заделки, чтобы подчеркнуть существование сингулярности решения в этой динамической задаче.

Несомненно, для получения более достоверных решений вблизи особенностей необходимо применять различные подходы, включающие в себя методы адаптации и измельчения сеток, а также использование сингулярных конечных элементов. Некоторые из этих методов были применены для улучшения качества решения статических задач линей-

ной теории упругости [126]. Однако применение таких подходов выходит за рамки этой работы.

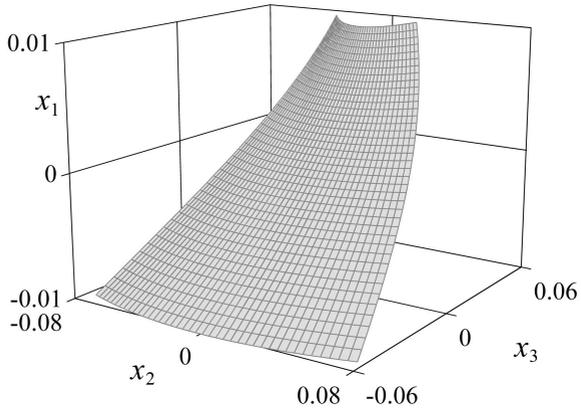


Рис. 2.3.6. Деформация поперечного сечения тела.

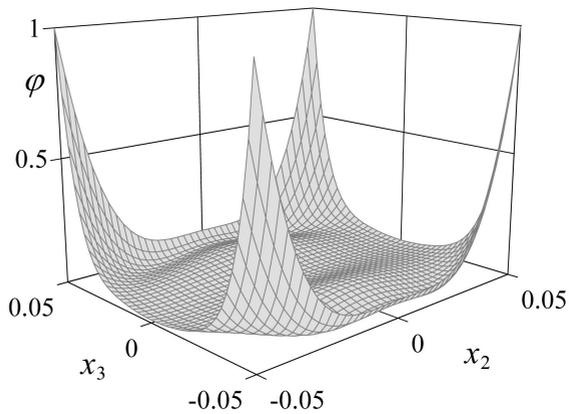


Рис. 2.3.7. Распределение локальной ошибки в сечении.

В рассматриваемом движении механическая энергия W вначале увеличивается от нулевого значения до некоторой максимальной величины

при $t \approx 1.7$, после чего монотонно убывает, как видно из рис. 2.3.8. Показанное на рис. 2.3.9 изменение величины энергии W_0 , обусловленное дискретизацией модели, отражает качество полученного численного решения. Величина «паразитной» энергии как функция времени не велика по сравнению с полной механической энергией балки на всем интервале движения. При повышении точности решения подобный дисбаланс энергии будет уменьшаться.

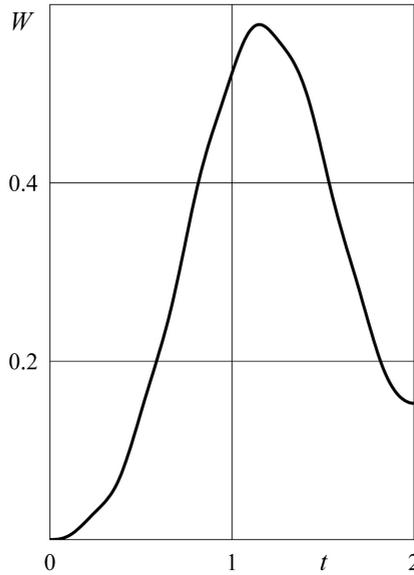


Рис. 2.3.8. Изменение величины механической энергии тела $W(t)$.

Распределение линейной плотности мощности этой «паразитной» энергии

$$\omega(t, x_1) = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \tilde{\xi} : \mathbf{C} : \tilde{\varepsilon}_t dx_2 dx_3$$

приведено на рис. 2.3.10. Видно, что максимальное изменение энергии конечномерной системы происходит вблизи управляемого сечения

(заделки), где и сосредоточена максимальная ошибка вычислений φ_1 (ср. рис. 2.3.5).

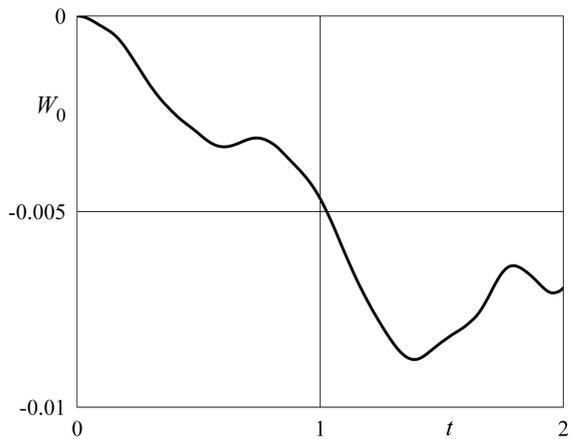


Рис. 2.3.9. Величина «паразитной» энергии $W_0(t)$.

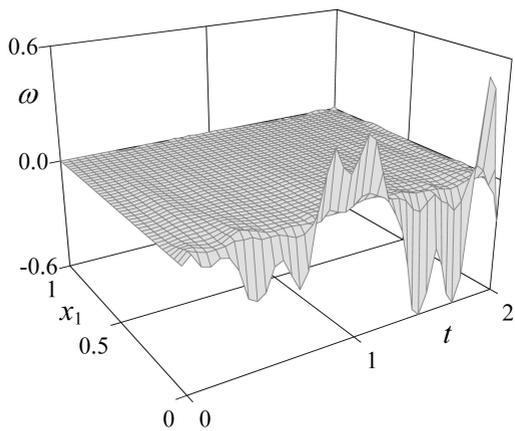


Рис. 2.3.10. Плотность мощности «паразитной» энергии $\omega(t, x_1)$.

§2.4. Вариационный подход к пространственной дискретизации уравнений движения упругой балки

2.4.1. Приближенные системы уравнений движения балки.

Одна из целей этой главы — разработка численных методов нахождения приближенных решений вариационных задач, сформулированных в Главе 1. В предыдущих параграфах были предложены алгоритмы, которые основаны на полиномиальных и кусочно-полиномиальных аппроксимациях неизвестных функций по координатам и времени. После такой дискретизации задача нахождения стационарных значений выбранного функционала Φ при заданных краевых воздействиях сводится к решению конечномерной линейной системы алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров движения.

При заданных требованиях к точности решения и классу допустимых управлений этот подход имеет ряд ограничений на выбор параметров задачи. Для численного моделирования движений систем с распределенными параметрами часто оказывается более удобным сведение исходной задачи к приближенной конечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений на основе метода семидискретизации [142].

Проиллюстрируем этот подход на примере поперечных движений однородной упругой балки (см. §1.4 и §2.1). Ограничимся случаем, когда отсутствуют распределенные перерезывающие силы $f(t, x) = 0$, и сформулируем в безразмерном виде вариационную задачу:

$$\begin{aligned} \delta\Phi_{\pm}[p, s, w] &= 0; \\ p_t + s_{xx} &= 0; \\ x = 0: \quad a_1 w + b_1 s_x &= v_1(t), \quad a_2 w_x - b_2 s = v_2(t), \\ x = 1: \quad a_3 w - b_3 s_x &= v_3(t), \quad a_4 w_x + b_4 s = v_4(t), \\ t = 0: \quad w &= w^0(x), \quad p = p^0(x). \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

где согласно (1.4.9) и (1.4.19) введены два функционала

$$\begin{aligned}\Phi_{\pm} &= \int_{\Omega} \varphi_{\pm}(p, s, w) d\Omega, \quad \Omega = (0, T) \times (0, 1), \\ \varphi_+ &= \frac{1}{2} (\rho\eta^2 \pm \kappa\xi^2), \quad \eta = w_t - \frac{p}{\rho}, \quad \xi = w_{xx} - \frac{s}{\kappa},\end{aligned}\tag{2.4.2}$$

рассмотренные в §1.4. Напомним, что $p(t, x)$ — функция линейной плотности импульса точек балки, $s(t, x)$ — изгибающий момент в её поперечном сечении, $w(t, x)$ — поперечные перемещения точек балки, $\eta(t, x)$ и $\xi(t, x)$ — функции состояния, $\rho = \text{const}$ — линейная плотность, $\kappa = \text{const}$ — изгибная жесткость балки, a_k и b_k — фиксированные коэффициенты, а $v_k(t)$ — заданные функции для $k = 1, 2, 3, 4$.

Для построения системы приближенных уравнений используем вариационные свойства функционалов Φ_{\pm} . Для этого введем в рассмотрение вспомогательную функцию r :

$$p = -r_{xx}, \quad s = r_t.\tag{2.4.3}$$

Первые вариации функционалов Φ_{\pm} после интегрирования по частям выражаются через вариации пары функций r и w следующим образом:

$$\begin{aligned}\delta_r \Phi_{\pm} &= \int_{\Omega} [(\rho^{-1} r_{xx})_{xx} \mp \kappa^{-1} r_{tt} + (1 \pm 1) w_{tx}] \delta r d\Omega + \\ &+ \int_0^T [\eta \delta r_x - \eta_x \delta r]_{x=0}^{x=1} dt \mp \int_0^1 [\xi \delta r]_{t=0}^{t=T} dx, \\ \delta_w \Phi_{\pm} &= - \int_{\Omega} [\rho w_{tt} \mp (\kappa w_{xx})_{xx} + (1 \pm 1) r_{txx}] \delta w d\Omega + \\ &\pm \int_0^T [\kappa \xi \delta w_x - (\kappa \xi)_x \delta w]_{x=0}^{x=1} dt + \int_0^1 [\rho \eta \delta w]_{t=0}^{t=T} dx, \\ \eta &= w_t + \rho^{-1} r_{xx}, \quad \xi = w_{xx} - \kappa^{-1} r_t.\end{aligned}\tag{2.4.4}$$

Для простоты ограничимся случаем граничных условий из (2.4.1), для которых выполнены соотношения

$$a_k b_k = 0, \quad a_k + b_k = 1, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Будем искать приближенные решения, используя конечномерные по координате x аппроксимации неизвестных функции r и w

$$\tilde{r} = \sum_{i=1}^{N+2} \theta_i(x) r_i(t), \quad \tilde{w} = \sum_{i=1}^{N+2} \theta_i(x) w_i(t), \quad (2.4.5)$$

где θ_i — заданные непрерывно дифференцируемые базисные функции, удовлетворяющие краевым условиям

$$\begin{aligned} \theta_n(0) = \theta'_n(0) = \theta_n(1) = \theta'_n(1) = 0, \quad 3 \leq n \leq N, \\ \theta_1(0) = 1, \quad \theta'_1(0) = \theta_1(1) = \theta'_1(1) = 0, \\ \theta'_2(0) = 1, \quad \theta_2(0) = \theta_2(1) = \theta'_2(1) = 0, \\ \theta_{N+1}(1) = 1, \quad \theta_{N+1}(0) = \theta'_{N+1}(0) = \theta'_{N+1}(1) = 0, \\ \theta'_{N+2}(1) = 1, \quad \theta_{N+2}(0) = \theta'_{N+2}(0) = \theta_{N+2}(1) = 0. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Здесь и далее штрихами обозначены производные по координате x , а точками — по времени t .

Неизвестные функции времени r_i, w_i с индексами $i = 1, 2, N+1, N+2$ должны строго удовлетворять граничные условия на концах упругой балки, в связи с чем необходимо выразить эти функции через четыре новые функции $u_k(t)$ ($k = 1, 2, 3, 4$), например, следующим образом

$$\begin{aligned} w_1 &= b_1 u_1 + a_1 v_1(t), & r_1 &= a_2 u_1 - b_k I_2(t), \\ w_2 &= b_2 u_2 + a_2 v_2(t), & r_2 &= a_1 u_2 + b_k I_1(t), \\ w_{N+1} &= b_3 u_3 + a_3 v_3(t), & r_{N+1} &= a_4 u_3 + b_k I_4(t), \\ w_{N+2} &= b_4 u_4 + a_4 v_4(t), & r_{N+2} &= a_3 u_4 - b_k I_3(t), \end{aligned}$$

где

$$I_k(t) = \int_0^t v_k(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

а a_k и b_k — определенные ранее постоянные.

Обозначим оставшиеся функции как

$$r_n = u_{n+4}(t), \quad w_n = u_{n+N+2}(t)$$

и введем вектор-функцию $\mathbf{u}(t) = \{u_i(t)\} \in \mathbb{R}^{2N}$. Полученные согласно предложенным преобразованиям (2.4.3) и аппроксимациям (2.4.5) поля импульсов $\tilde{p} = p(\tilde{r})$, моментов $\tilde{s} = s(\tilde{r})$ и перемещений \tilde{w} строго удовлетворяют закону изменения импульса и условиям на краях упругой балки в соответствии с (2.4.1). Используя эти допустимые поля, можно свести вариационную задачу (2.4.2) для функционала Φ_{\pm} при заданных граничных функциях $v_k(t)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) к следующей.

Необходимо найти такую вектор-функцию $\mathbf{u}^*(t)$, которая доставляет стационарные значения функционалу $\tilde{\Phi}_{\pm}(\mathbf{u}, \mathbf{v}(t)) = \Phi_{\pm}(\tilde{p}, \tilde{s}, \tilde{w})$, где

$$\mathbf{v} = \{v_k(t)\} \in \mathbb{R}^4,$$

т. е. выполняет условие

$$\delta_{\mathbf{u}} \tilde{\Phi}_{\pm} = 0.$$

Отметим, что вариационная формулировка для функционала $\tilde{\Phi}_{\pm}$ сводится к задаче его минимизации в пространстве вектор-функций $\mathbf{u}(t)$ с учетом начальных условий.

В интегралах $\tilde{\Phi}_{\pm}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ подынтегральные функции

$$\tilde{\varphi}_{\pm} = \rho \tilde{\eta}^2 / 2 \pm \kappa \tilde{\xi}^2 / 2, \quad \tilde{\eta} = \tilde{w}_t + \rho^{-1} \tilde{r}_{xx}, \quad \tilde{\xi} = \tilde{w}_{xx} - \kappa^{-1} \tilde{r}_t, \quad (2.4.7)$$

явно зависят от вектора $\mathbf{u}(t)$ и его производной $\dot{\mathbf{u}}(t)$. Из этого следует, что для достаточно гладкого граничного воздействия $\mathbf{v}(t)$ соответствующая система уравнений Эйлера с начальным условием и условием трансверсальности имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta_{\pm}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} - \frac{\partial \Theta_{\pm}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad \Theta_{\pm} = \int_0^1 \tilde{\varphi}_{\pm}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}, x) dx; \quad (2.4.8)$$

$$t = 0: \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^0; \quad t = T: \quad \frac{\partial \Theta_{\pm}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \mathbf{0}.$$

Вектор \mathbf{u}^0 определяется из начальных условий, заданных в (2.4.1), причем базисные функции должны соответствовать этим условиям.

Так как функции $\tilde{\eta}$, $\tilde{\xi}$ из (2.4.7) линейно зависят от \mathbf{u} , $\dot{\mathbf{u}}$, и \mathbf{v} , краевая по времени задача (2.4.8) с $2N$ начальными и $2N$ терминальными условиями задается системой $2N$ линейных дифференциальных уравнений второго порядка следующего вида:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{u}} + \beta\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}} \mp \mathbf{C}\mathbf{u} = \mathbf{l}(\mathbf{v}). \quad (2.4.9)$$

Здесь \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} — $(N \times N)$ -матрицы; \mathbf{l} — линейная по граничному вектору \mathbf{v} функция, которая может зависеть от его интегралов и производных по времени t ; $\beta = 1$ для Θ_+ и $\beta = 0$ для Θ_- .

Предположим, что аппроксимация (2.4.5) перемещений \tilde{w} зависит от N_1 функций u_k , составляющих вектор $\mathbf{u}_1(t) \in \mathbb{R}^{N_1}$, а аппроксимация (2.4.5) вспомогательной функции \tilde{r} — от остальных $N_2 = 2N - N_1$ функций u_k (вектор $\mathbf{u}_2(t) \in \mathbb{R}^{N_2}$). Здесь $N - 2 \leq N_1 \leq N + 2$ для приближений вида (2.4.5). Тогда, как видно из выражений для вариаций функционалов Φ_{\pm} (первая и вторая формулы (2.4.4)), простой перенумерацией индексов можно привести векторное уравнение (2.4.9) к виду

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1 \\ \dot{\mathbf{u}}_2 \end{bmatrix} \pm \\ & \pm \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1(\mathbf{v}) \\ \mathbf{l}_2(\mathbf{v}) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

где $\mathbf{A}_1, \mathbf{C}_1 \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_1}$ и $\mathbf{A}_2, \mathbf{C}_2 \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_2}$ — симметричные положительно определенные матрицы, которые имеют следующую покомпонентную структуру:

$$\begin{aligned} A_1^{m(i),m(j)} &= \int_0^1 \kappa \theta_i''(x) \theta_j''(x) dx, & A_2^{n(i),n(j)} &= \int_0^1 \rho^{-1} \theta_i''(x) \theta_j''(x) dx, \\ C_1^{m(i),m(j)} &= \int_0^1 \rho \theta_i(x) \theta_j(x) dx, & C_2^{n(i),n(j)} &= \int_0^1 \kappa^{-1} \theta_i(x) \theta_j(x) dx. \end{aligned}$$

Элементы матриц $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}$ и $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$ приводятся к виду

$$B_1^{m(i),n(j)} = -B_2^{n(j),m(i)} = \int_0^1 (\theta_i \theta_j'' + \theta_i'' \theta_j) dx.$$

Верхние индексы $m(i)$ и $n(i)$ определяют взаимно однозначное соответствие между функциями w_i, r_i с одной стороны и компонентами векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ с другой стороны так, что

$$u_{1,m(i)}(t) = w_i(t), \quad u_{2,n(i)}(t) = r_i(t).$$

Для вариационной задачи, которая определяется через функционал Φ_+ , в приближенной системе уравнений Эйлера–Лагранжа возникают члены, которые зависят от первых производных $\dot{r}_i(t)$ и $\dot{w}_i(t)$, т. к. коэффициент β не равен нулю в уравнениях (2.4.9) и (2.4.10). Кроме того, перед матрицей \mathbf{C} стоит знак минус. Это одно из основных отличий предложенной формулировки от классических вариационных задач динамики, описанных в §1.4. В задаче на нахождение стационарных значений функционала Φ_- ($\beta = 0$), которая, как показано, имеет непосредственную связь с принципом Гамильтона–Остроградского, нет членов, явно зависящих от первых производных по времени.

Несмотря на некоторое нарушение консервативности по сравнению с исходной задачей, приближенное решение системы (2.4.10) при $\beta = 1$ будет наилучшим образом, в смысле минимизации выбранного энергетического функционала Φ_+ , удовлетворять уравнениям состояния балки. Величина возникающей «паразитной» мощности зависит от значения функционала Φ_+ и будет стремиться к нулю в минимизационной задаче при расширении пространства аппроксимирующих функций.

Из структуры уравнения (2.4.10) можно определить, что в задаче на нахождение стационарных значений функционала $\tilde{\Phi}_-$ собственные числа λ^- фундаментальной матрицы принимают чисто мнимые значения. Было показано [53], что при минимизации неотрицательного функцио-

нала $\tilde{\Phi}_+$ действительные части комплексных собственных чисел λ^+ для системы уравнений (2.4.10) не равны нулю за исключением того случая, когда решение приближенной системы точно задает свободные колебания упругой балки для соответствующего собственного числа. Малое абсолютное значение действительной части собственного числа $|\operatorname{Re} \lambda^+|$ может служить признаком близости его мнимой части $\operatorname{Im} \lambda^+$ к точному значению одной из собственных частот колебаний балки.

Классический подход к получению приближенного решения для рассматриваемой задачи с помощью метода Бубнова–Галеркина [102] приведет при выбранных аппроксимациях (2.4.5) функций перемещений к системе дифференциальных уравнений

$$\mathbf{A}_1 \ddot{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{C}_1 \mathbf{u}_1 = \mathbf{I}_1(\mathbf{v})$$

Здесь матрицы и векторы такие же, как и в уравнении (2.4.9). Для определения приближенного движения точек балки необходимо также задать начальные перемещения \mathbf{u}_1 и скорости $\dot{\mathbf{u}}_1$.

Полученное решение этой задачи Коши не удовлетворяет необходимым условиям стационарности как для предложенных в статье, так и для классических вариационных формулировок: нарушается условие трансверсальности (последнее условие (2.4.8)). Если решение существует в классическом смысле, как вариационный подход, так и метод Бубнова–Галеркина должны давать близкие результаты. Подчеркнем, что даже при наличии особенностей решения вариационный подход позволяет на заданных аппроксимациях находить наилучшее, в смысле минимизации энергетического функционала $\tilde{\Phi}_+$, движение.

2.4.2. Численное моделирование и анализ движений упругой балки. Проиллюстрируем возможности применения предложенного интегро-дифференциального подхода к задачам моделирования динамики систем с распределенными параметрами и сравним разные вариационные формулировки. Для этого рассмотрим при заданном управ-

лении движение однородной упругой балки ($\rho \equiv \kappa \equiv 1$) из начального состояния покоя ($w^0(x) = p^0(x) = 0$ в условиях (2.4.1)).

Пусть правый конец балки ($x = 1$) свободен от нагрузок, направление центральной линии балки на левом конце ($x = 0$) фиксировано и левое сечение перемещается по некоторому закону во времени. Таким образом, в граничных условиях из (2.4.1) получаем

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = b_3 = b_4 = 1, \quad b_1 = b_2 = a_3 = a_4 = 0, \\ v_1 = v(t), \quad v_2 = v_3 = v_4 = 0. \end{aligned}$$

Здесь v — заданная функция времени. Необходимо, конечно, дополнительное условие совместности $v(0) = 0$.

В качестве базисных функций θ_k для аппроксимаций (2.4.5) будем использовать полиномы степени $N + 1$ в виде

$$\begin{aligned} \theta_1 = B_{0,N+1} - B_{1,N+1}, \quad \theta_2 = \frac{B_{1,N+1}}{N+1}, \\ \theta_k = B_{k-1,N+1}, \quad k = 3, 4, \dots, N, \\ \theta_{N+1} = -\frac{B_{N,N+1}}{N+1}, \quad \theta_{N+2} = B_{N+1,N+1} + B_{N,N+1}, \\ B_{m,n} = C_m^m b_0^m b_1^{n-m}, \quad C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \\ b_0 = 1 - x, \quad b_1 = x, \quad m \leq n, \end{aligned}$$

где $B_{m,n}$ — функции Бернштейна [20]. Эти полиномы удовлетворяют краевые условия (2.4.6) и достаточно просто могут быть приспособлены для построения более широкого класса аппроксимаций, а именно — дважды гладких кусочно-полиномиальных сплайнов.

Применим две вариационные формулировки для функционалов $\tilde{\Phi}_{\pm}$, описанные в §2.3 (задачи 1 и 2). В рассматриваемом примере после выполнения граничных условий

$$w_1 = v, \quad w_2 = r_{N+1} = r_{N+2} = 0$$

и переобозначения независимых функций

$$u_n = w_{n+2}, \quad u_{N+n} = r_n, \quad n = 1, \dots, 2N,$$

Таблица 2.4.1: Собственные числа приближенных систем уравнений.

k	1	2	3	4	5
ω_k^*	3.516	22.034	61.697	120.903	199.871
$\Delta\omega_k^-$	$< 10^{-14}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$1.1 \cdot 10^{-5}$	0.215	1.235
$\Delta\omega_k^+$	$< 10^{-16}$	$1.6 \cdot 10^{-8}$	$7 \cdot 10^{-6}$	0.104	0.762
α_k^+	$2 \cdot 10^{-7}$	0.003	0.085	5.585	15.697

система уравнений (2.4.10) упрощается, и в результате имеем

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2, \quad \mathbf{B}_1 = -\mathbf{B}_2, \quad \mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2.$$

Из этого следует, что в задаче 2 все (чисто мнимые) собственные числа дважды кратны:

$$\lambda_{\pm(2n-1)}^- = \lambda_{\pm 2n}^- = \pm i\omega_n^-, \quad \omega_n^- > 0, \quad n = 1, \dots, N,$$

и совпадают с приближенными значениями, полученными при тех же аппроксимациях для двух классических вариационных задач в формулировке Гамильтона–Остроградского.

В задаче 1 приближенные комплексно сопряженные собственные значения образуют пары:

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm(2n-1)}^+ &= -\alpha_n^+ \pm i\omega_n^+, \quad \lambda_{\pm 2n}^+ = \alpha_n^+ \pm i\omega_n^+, \\ \alpha_n^+ &> 0, \quad \omega_n^+ > 0, \quad n = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

В табл. 2.4.1 приведены точные значения первых пяти собственных частот $\omega_k^* > 0$, найденные из решения характеристического уравнения

$$1 + \cos \sqrt{\omega} \operatorname{ch} \sqrt{\omega} = 0$$

для консольно закрепленной однородной балки [44].

Приведены также ошибки в определении этих собственных частот $\Delta\omega_k^- = \omega_k^- - \omega_k^*$ и $\Delta\omega_k^+ = \omega_k^+ - \omega_k^*$ для задач 1 и 2 при фиксированном

параметре аппроксимации $N = 8$. Наконец, показаны абсолютные величины действительной части собственных чисел в задаче 1; эта задача дает более точные значения частот колебаний балки по сравнению с задачей 2. Видно, что невязки частот $\Delta\omega_k^\pm$ и действительная часть α_k^+ быстро растут с номером собственного числа k .

Пример 2.4.1. Зафиксируем время движения $T = 2$ и терминальное положение левого конца балки $v(T) = 1$. Рассмотрим движения балки при заданном управлении. В качестве тестового закона управления было выбрано квадратичное по времени изменение положения левого конца балки: $v = t^2/4$ (сплошная кривая на рис. 2.4.1). Штриховая кривая описывает движение правого конца балки $w(t, 1)$, найденное при фиксированном значении степени аппроксимации $N = 8$. Различия в перемещениях, полученных для задач 1 и 2 практически незаметно.

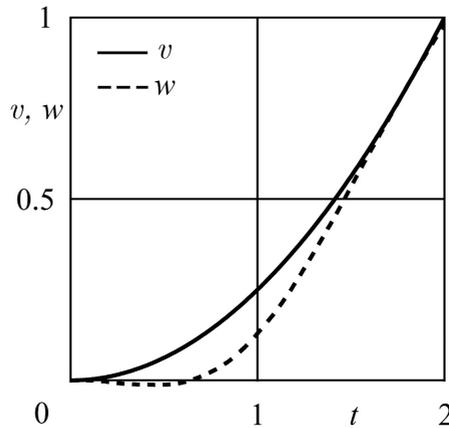


Рис. 2.4.1. Перемещения концов балки при $x = 0$ и $x = 1$.

При $N = 8$ задача минимизации функционала $\tilde{\Phi}_+$ (задача 1) дает для заданного движения интегральную ошибку $\tilde{\Phi}_+^\dagger = 1.7 \times 10^{-10}$, которой соответствует относительная ошибка $\Delta = \tilde{\Phi}_+^\dagger \Psi^{-1}$, приближен-

но равная $\Delta^+ = 4 \cdot 10^{-10}$. Для численного решения, полученного при нахождении стационарных значений функционала $\tilde{\Phi}_-$ (задача 2), значение функционала $\tilde{\Phi}_+$ при тех же аппроксимациях заведомо больше и составляет $\tilde{\Phi}_+^- = 4.9 \times 10^{-8}$. Соответствующая относительная ошибка равна $\Delta^- = 1.3 \times 10^{-7}$.

Для демонстрации сходимости обоих подходов к точному решению на рис. 2.4.2 приведены значения абсолютных интегральных ошибок $\tilde{\Phi}_\pm$ в зависимости от значения параметра аппроксимирующих функций N соответственно для задачи 1 и 2. Как и следует из теории аппроксимаций, из-за вложенности используемых приближений экстремальное значение функционала $\tilde{\Phi}_+^+$ (сплошная кривая) монотонно убывает с увеличением N и лежит для фиксированного N ниже любых (неоптимальных) значений функционала $\tilde{\Phi}_+$, в том числе и ниже $\tilde{\Phi}_+^-$ (штриховая кривая).

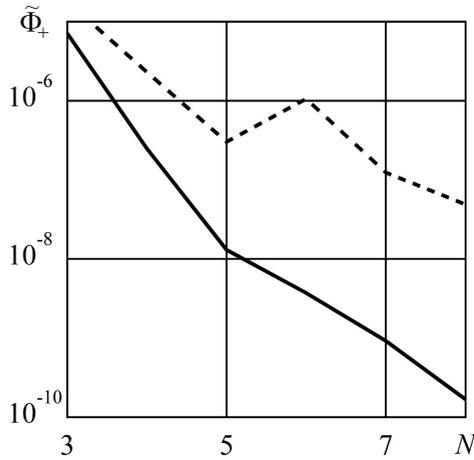


Рис. 2.4.2. Интегральная ошибка численного решения для задач 1 и 2.

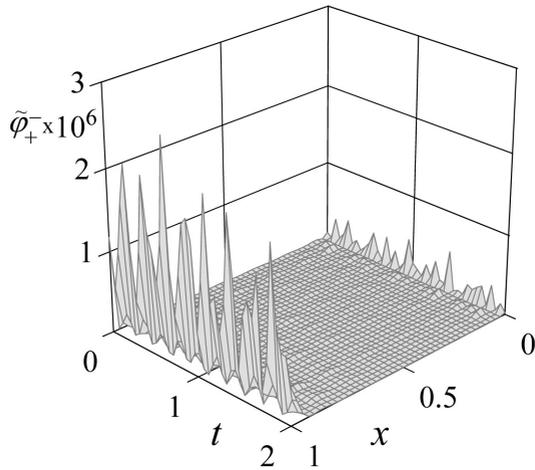
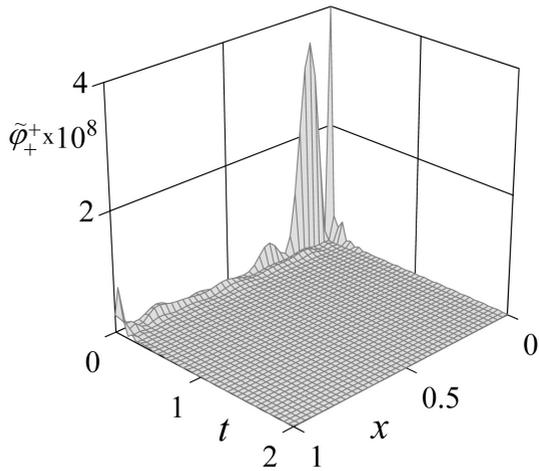


Рис. 2.4.3. Распределение локальной ошибки для задач 1 (сверху) и 2 (снизу).

Наряду с интегральными ошибками были получены и распределения локальной ошибки. На рис. 2.4.3 приведены значения функции $\tilde{\varphi}_+$ при $N = 8$ для двух приближенных решений. Сверху показана функция $\tilde{\varphi}_+^+(t, x)$ для задачи 1, снизу — ошибка $\tilde{\varphi}_+^-(t, x)$ для задачи 2. Видно, что основная ошибка $\tilde{\varphi}_+^+$ для минимизационной задачи сосредоточена

в узкой области вблизи начального момента времени $t = 0$ и достигает своего максимума в перемещаемом конце балки ($x = 0$) при $t = 0$. Для задачи 2 на стационарные значения функционала $\tilde{\Phi}_-$ невязка $\tilde{\varphi}_+$ распределена во времени и сосредоточена у свободного конца балки ($x = 1$).

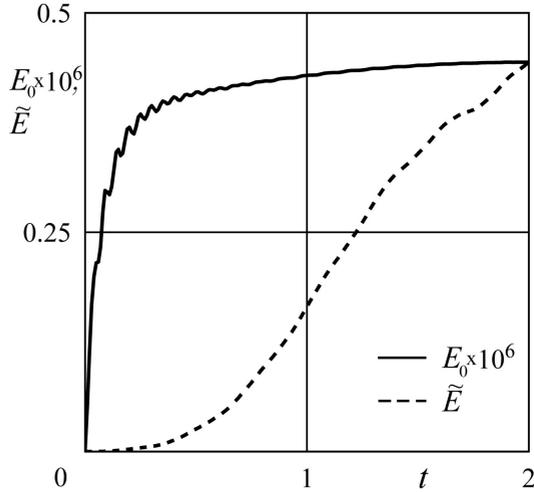


Рис. 2.4.4. Изменение «паразитной» энергии для задачи 1.

Как было указано в §2.2, еще один показатель качества приближенного решения — дисбаланс энергии E_0 в результате дискретизации исходной задачи. На рис. 2.4.4 (сплошная кривая) выведено изменение во времени этой «паразитной» энергии для приближенного решения задачи 1 при $N = 8$. Для сравнения штриховой кривой приведено изменение во времени самой энергии \tilde{E} . Величина энергии в конце процесса равна $\tilde{E}(2) = 0.444$. Интеграл по времени от E приближенно равен $\tilde{\Psi} = 0.372$. Для заданного движения балки функция $E_0(t)$ возрастает: резко в начале процесса, затем медленно. Тем не менее, максимальное значение

«паразитной» энергии много меньше средней энергии $\bar{E} = T^{-1}\Psi$, запасаемой в системе.

Так как в задаче 2 для Θ_- собственные значения системы дифференциальных уравнений (2.4.10) принимают мнимые значения, дисбаланс энергии определяется лишь способом численного решения конечномерной краевой задачи (2.4.8) и лежит в пределах точности округления.

§2.5. Модификация метода Галеркина в задачах о движении упругих конструкций

2.5.1. Метод Галеркина в задаче о продольных движениях упругого стержня. На примере вынужденных продольных движений однородного упругого стержня опишем классический подход к численному решению начально-краевых задач, основанный на методе Бубнова–Галеркина [180] и семидискретизации неизвестных функций (конечномерное приближение по пространственной переменной).

Динамические уравнения могут быть записаны в следующем безразмерном виде

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T), \\ u(t, 0) &= u_0(t), \quad u_x(t, 1) = 0, \\ u(0, x) &= u^0(x), \quad u_t(0, x) = p^0(x), \quad u^0(0) = u_0(0), \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

где $u = u(t, x)$ — неизвестные перемещения точек стержня, а $u_0(t)$, $u^0(x)$ и $p^0(x)$ — заданные функции, определяющие краевые и начальные условия.

Пусть аппроксимация переменной u представима в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t, x) &= \tilde{u}(x, \tilde{\mathbf{y}}_1(t)) = \mathbf{a}_1^T(x) \tilde{\mathbf{y}}_1(t) = \sum_{j=1}^N a_j(x) \tilde{y}_j(t), \\ \mathbf{a}_1(0) &= 0, \quad \mathbf{a}_1(x) \in \mathbb{R}^N, \quad \tilde{\mathbf{y}}_1(t) \in \mathbb{R}^N. \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Здесь \mathbf{a}_1 — вектор базисных функций $a_j(x)$, $\tilde{\mathbf{y}}_1$ — вектор искомых функций $\tilde{y}_j(t)$, а N — размерность приближений. В соответствии с методом Галеркина, основные идеи которого обсуждались в п. 2.1.2, интегральные проекции уравнения движения, заданного в (2.5.1), на пространство базисных функций \mathbf{a}_1 после интегрирования по частям представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\int_0^1 (\tilde{u}_{tt} \mathbf{a}_1(x) + \tilde{u}_{xx} \mathbf{a}'_1(x)) dx - u_0(t) \mathbf{a}_1(1) = \mathbf{0}. \quad (2.5.3)$$

Штрихи означают производные по пространственной координате x .

В соответствии с (2.5.1) начальные условия для этой системы берутся тоже в виде интегральных проекций

$$t = 0 : \int_0^1 (\tilde{u} - u^0(x)) \mathbf{a}_1(x) dx = \mathbf{0},$$

$$\int_0^1 (\tilde{u}_t - p^0(x)) \mathbf{a}_1(x) dx = \mathbf{0}.$$
(2.5.4)

Решение $\tilde{\mathbf{y}}_1^*(t)$ задачи Коши (2.5.3), (2.5.4) даст приближенное значение перемещений $\tilde{u}^* = \tilde{u}(x, \tilde{\mathbf{y}}_1^*(t))$.

Проанализируем спектральные свойства полученной системы уравнений. Для этого рассмотрим соответствующую задачу на собственные значения

$$(\mathbf{C}_1 - \omega^2 \mathbf{A}_1) \mathbf{y}_1 = 0, \quad \mathbf{y}_1 = [y_1, \dots, y_N]^T \in \mathbb{R}^N, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (2.5.5)$$

Здесь \mathbf{y}_1 — собственный вектор, а ω — собственная частота системы (2.5.3). Матрица жесткости и матрица масс определяется из (2.5.2) и (2.5.3) в виде

$$\mathbf{C}_1 = \int_0^1 \mathbf{a}'_1(x) \mathbf{a}'_1{}^T(x) dx \in \mathbb{R}^{N \times N},$$

$$\mathbf{A}_1 = \int_0^1 \mathbf{a}_1(x) \mathbf{a}_1{}^T(x) dx \in \mathbb{R}^{N \times N}.$$

Для исходной системы (2.5.1) получены явные выражения для собственных частот

$$\omega_m^0 = \frac{\pi}{2} + m\pi, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.5.6)$$

Приближенные значения частот ω_m находятся из условия вырождения системы линейных алгебраических уравнений (2.5.5):

$$\det(\mathbf{C}_1 - \omega_m^2 \mathbf{A}_1) = 0.$$

Для демонстрации сходимости обсуждаемого алгоритма построим базисные функции $a_j(x)$ на основе полиномов Бернштейна

$$B_{j,n}(x) = C_j^n x^j (1-x)^{n-j},$$

$$x \in [0, 1], \quad C_j^n = \frac{n!}{j!(n-j)!}, \quad j = 0, \dots, n. \quad (2.5.7)$$

Эти функции составляют базис в пространстве полных полиномов степени n и обладают определенными свойствами, упрощающими процедуры стыковки в МКЭ (см. п. 2.2.2). Для полиномов Бернштейна получены компактные формы представления интегралов и производных:

$$\int_0^1 B_{j,n}(x) dx = \frac{1}{n+1},$$

$$\frac{dB_{j,n}(x)}{dx} = n(B_{j-1,n-1}(x) - B_{j,n-1}(x)),$$

которые могут эффективно применяться в численных процедурах.

В результате базисный вектор, матрица жесткости, матрица масс представимы в виде

$$\mathbf{a}_1(x) = \{B_{j,N}(x)\} \in \mathbb{R}^N,$$

$$\mathbf{C}_1 = \left\{ \int_0^1 B'_{j,N}(x) B'_{k,N}(x) dx \right\} \in \mathbb{R}^{N \times N},$$

$$\mathbf{A}_1 = \left\{ \int_0^1 B_{j,N}(x) B_{k,N}(x) dx \right\} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad 1 \leq j, k \leq N.$$

Относительная ошибка

$$\Delta\omega_m = \left| \frac{\omega_m - \omega_m^0}{\omega_m^0} \right|, \quad \omega_m > 0,$$

при определении девяти низших собственных частот ω_m , полученных численно методом Галеркина с использованием пакета прикладных программ MATLAB, показана на рис. 2.5.1. Как можно убедиться, ошибка для каждой моды быстро убывает с ростом размерности аппроксимации N . Стоит отметить стабильное поведение численных результатов для данного метода при достаточно высоких степенях полиномов.

2.5.2. Сравнение метода Галеркина и вариационного подхода. Основное отличие интегро-дифференциального подхода, развиваемого в работе, от классического метода Галеркина состоит в представлении уравнений состояния для систем с распределенными параметрами в интегральной форме [54]. Согласно одной описанной выше реализации этого подхода, начально-краевая задача (2.5.1) сводится к условной минимизации энергетического функционала

$$\begin{aligned} \Phi[u, p, s] &= \int_0^T \Theta(u_t, u_x, s, q) dt \rightarrow \min_{u, p, s}, \\ \Theta &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\eta^2 + \xi^2) dx, \quad \eta = u_t - p, \quad \xi = u_x - s, \\ p_t - s_x &= 0, \\ u(t, 0) &= u_0(t), \quad s(t, 1) = 0, \\ u(0, x) &= u^0(x), \quad p(0, x) = p^0(x), \quad u_0(0) = u^0(0). \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

Как и ранее, $p(t, x)$ — линейная плотность импульса, а $s(t, x)$ — нормальная составляющая силы в поперечном сечении стержня.

Чтобы применить процедуру дискретизации по пространственной переменной, разрешим вначале уравнение динамического равновесия, третья строка в (2.5.8). Это можно сделать, вводя вспомогательную функцию $r(t, x)$ так, чтобы выполнялись соотношения

$$p = r_x, \quad s = r_t. \tag{2.5.9}$$

Затем с учетом краевых и начальных условий из (2.5.8) кинематическая (u) и динамическая (r) функции ищутся в виде:

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u}(t, x) + u^0(x) + u_0(t) - u_0(0), \\ r &= \tilde{r}(t, x) - \int_x^1 p^0(z) dz, \\ \tilde{u} &= \mathbf{a}_1^T(x) \tilde{\mathbf{y}}_1(t), \quad \tilde{r} = \mathbf{a}_2^T(x) \tilde{\mathbf{y}}_2(t), \\ \mathbf{a}_1(0) &= \mathbf{a}_2(1) = 0, \quad \mathbf{a}_{1,2}(x) \in \mathbb{R}^N, \quad \tilde{\mathbf{y}}_{1,2}(t) \in \mathbb{R}^N. \end{aligned} \tag{2.5.10}$$

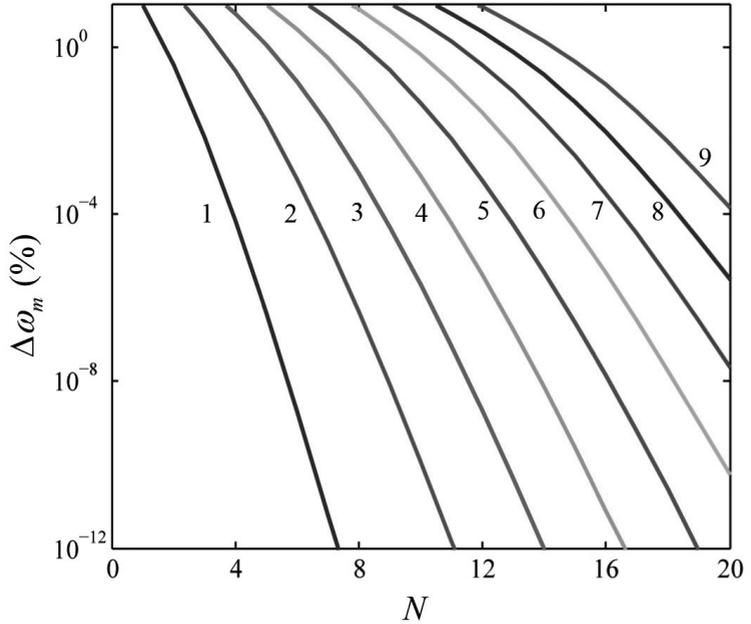


Рис. 2.5.1. Относительная ошибка определения собственных частот для классического метода Галеркина.

После подстановки аппроксимаций (2.5.10) с учетом (2.5.9) в функционал Φ , определенный в (2.5.8), получим одномерную минимизационную задачу

$$\Phi[\tilde{\mathbf{y}}] = \int_0^T \tilde{\Theta}(t, \dot{\tilde{\mathbf{y}}}, \tilde{\mathbf{y}}) dt \rightarrow \min_{\tilde{\mathbf{y}}}, \quad \tilde{\mathbf{y}}(t) = [\tilde{\mathbf{y}}_1^T(t), \tilde{\mathbf{y}}_2^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{2N}, \quad (2.5.11)$$

с однородными начальными условиями

$$\tilde{\mathbf{y}}(0) = 0. \quad (2.5.12)$$

Здесь функция энергетической ошибки $\tilde{\Theta}(t)$ выражается через аппрок-

симации (2.5.10) согласно

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta} &= \tilde{\Theta}(t, \dot{\tilde{\mathbf{y}}}, \tilde{\mathbf{y}}) = \int_0^1 \tilde{\varphi}(t, x, \dot{\tilde{\mathbf{y}}}, \tilde{\mathbf{y}}) dx, \quad \tilde{\varphi} = \frac{1}{2} (\tilde{\eta}^2 + \tilde{\xi}^2), \\ \tilde{\eta} &= \tilde{u}_t(t, x) - \tilde{r}_x(t, x) + \dot{u}_0(t) - p^0(x), \\ \tilde{\xi} &= \tilde{u}_x(t, x) - \tilde{r}_t(t, x) + (u^0(x))'.\end{aligned}\tag{2.5.13}$$

Точка над символом означает производную по времени t .

Для достаточно гладкой функции $u_0(t)$ уравнения Эйлера и условия трансверсальности, соответствующие задаче (2.5.11), выписываются в векторном виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \dot{\tilde{\mathbf{y}}}} - \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \tilde{\mathbf{y}}} = \mathbf{0}; \quad \left. \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \dot{\tilde{\mathbf{y}}}} \right|_{t=T} = \mathbf{0}.\tag{2.5.14}$$

Вытекающая из системы (2.5.14) задача на собственные значения имеет следующую матричную структуру

$$(\lambda^2 \mathbf{A} - 2\lambda \mathbf{B} - \mathbf{C}) \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} = [\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T]^T.\tag{2.5.15}$$

Здесь \mathbf{y} — собственный вектор и $\mathbf{y}_{1,2} \in \mathbb{C}^N$, а $\lambda \in \mathbb{C}$ — комплексное собственное значение. Введенные в (2.5.15) матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} записываются в форме

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}, \\ \mathbf{A}_1 &= \int_0^1 \mathbf{a}_1(x) \mathbf{a}_1^T(x) dx, \quad \mathbf{A}_2 = \int_0^1 \mathbf{a}_2(x) \mathbf{a}_2^T(x) dx; \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}, \\ \mathbf{B}_1 &= -\mathbf{B}_2^T = \int_0^1 \mathbf{a}_1(x) \mathbf{a}'_2^T(x) dx;\end{aligned}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N},$$

$$\mathbf{C}_1 = \int_0^1 \mathbf{a}'_1(x) \mathbf{a}'_1{}^T(x) dx, \quad \mathbf{C}_2 = \int_0^1 \mathbf{a}'_2(x) \mathbf{a}'_2{}^T(x) dx.$$

Можно доказать, что для квадратичной по λ задачи (2.5.15) собственные числа λ_m принимают чисто мнимые значения тогда и только тогда, когда они в точности совпадают с собственными числами исходной задачи (2.5.1). В любом другом случае число λ_m имеет ненулевую действительную часть ($\operatorname{Re} \lambda \neq 0$).

Для эффективного нахождения приближенных частот и форм колебаний стержня квадратичную задачу (2.5.15) можно свести к эквивалентной линейной, изменив вариационную формулировку (2.5.11), (2.5.12) с помощью метода множителей Лагранжа. В расширенной постановке, требуется найти векторные функции

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}} &= [\tilde{\mathbf{v}}_1^T(t), \mathbf{v}_2^T(t)]^T, \quad \tilde{\mathbf{z}} = [\tilde{\mathbf{z}}_1^T(t), \tilde{\mathbf{z}}_2^T(t), \tilde{\mathbf{y}}_1^T(t), \tilde{\mathbf{y}}_2^T(t)]^T, \\ \tilde{\mathbf{v}}_{1,2}(t), \tilde{\mathbf{z}}_{1,2}(t), \tilde{\mathbf{y}}_{1,2}(t) &\in \mathbb{C}^N, \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

которые доставляют стационарное значение функционалу

$$\Phi_1[\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{v}}] = \int_0^T \left[\tilde{\Theta}(t, \tilde{\mathbf{z}}) + \tilde{\mathbf{v}}_1^T(\tilde{\mathbf{z}}_1 - \dot{\tilde{\mathbf{y}}}_1) + \tilde{\mathbf{v}}_2^T(\tilde{\mathbf{z}}_2 - \dot{\tilde{\mathbf{y}}}_2) \right] dt.$$

Соответствующая система уравнений на собственные значения имеет вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{E}^T(\lambda) \\ \mathbf{E}(\lambda) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (2.5.17)$$

где введены следующие матрицы и собственные векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4N \times 4N}, \quad \mathbf{E} = [\mathbf{I} \quad -\lambda \mathbf{I}] \in \mathbb{C}^{2N \times 4N}, \\ \mathbf{v} &\in \mathbb{C}^{2N}, \quad \mathbf{z} = [\mathbf{z}_1^T, \mathbf{z}_2^T, \mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T]^T, \\ \mathbf{y} &= [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}] \mathbf{z}, \quad \mathbf{z}_{1,2}, \mathbf{y}_{1,2} \in \mathbb{C}^N. \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

Порядок системы (2.5.17) можно понизить, исключая вектор множителей Лагранжа \mathbf{v} согласно

$$\mathbf{v} = [\mathbf{A} \quad -\mathbf{B}] \mathbf{z}.$$

В результате получим линейную относительно λ задачу на собственные значения

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} - \lambda \mathbf{A} & \mathbf{C} + \lambda \mathbf{B} \\ \mathbf{I} & -\lambda \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{z} = \mathbf{0}. \quad (2.5.19)$$

Разрешая часть уравнений из системы (2.5.19) относительно векторов \mathbf{z}_1 и \mathbf{y}_2 , входящих в вектор \mathbf{z} в соответствии с (2.5.18), находим, что

$$\mathbf{z}_1 = \lambda \mathbf{y}_1, \quad \mathbf{y}_2 = \lambda \mathbf{C}_2^{-1} (\mathbf{A}_2 \mathbf{z}_2 + 2\mathbf{B}_1^T \mathbf{y}_1). \quad (2.5.20)$$

С использованием выражений (2.5.20) векторное уравнение (2.5.19) сводится к системе

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} - \lambda^2 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ 2\mathbf{B}_1^T & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (2.5.21)$$

где введены матрицы

$$\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A}_1 - 2\mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2^{-1} \mathbf{B}_1^T, \quad \mathbf{A}_{12} = -\mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2^{-1} \mathbf{A}_2.$$

Из линейной зависимости от параметра λ^2 следует, что для системы (2.5.21) те собственные числа λ , которые не являются собственными значениями для исходной задачи (2.5.1), образуют четверки в виде

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm 2m-1} &= -\delta_m \pm i\omega_m, & \lambda_{\pm 2m} &= \delta_m \pm i\omega_m, \\ \omega_m &> 0, & \delta_m &> 0, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Интересно отметить, что эквивалентность линейных алгебраических систем (2.5.15), (2.5.17), (2.5.19) и (2.5.21) может быть напрямую доказана с помощью тождественных матричных преобразований. Тем не менее, при использовании вариационной формулировки (2.5.8) для построения эффективных и достоверных процедур нахождения параметров движения необходимо учитывать численные свойства этих систем.

Снова выберем конечное число базисных функций в (2.5.10) из полиномов Бернштейна (2.5.7) для представления в векторной форме

$$\mathbf{a}_1 = \{B_{j,N}(x)\}, \quad \mathbf{a}_2 = \{B_{N-j,N}(x)\}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.5.22)$$

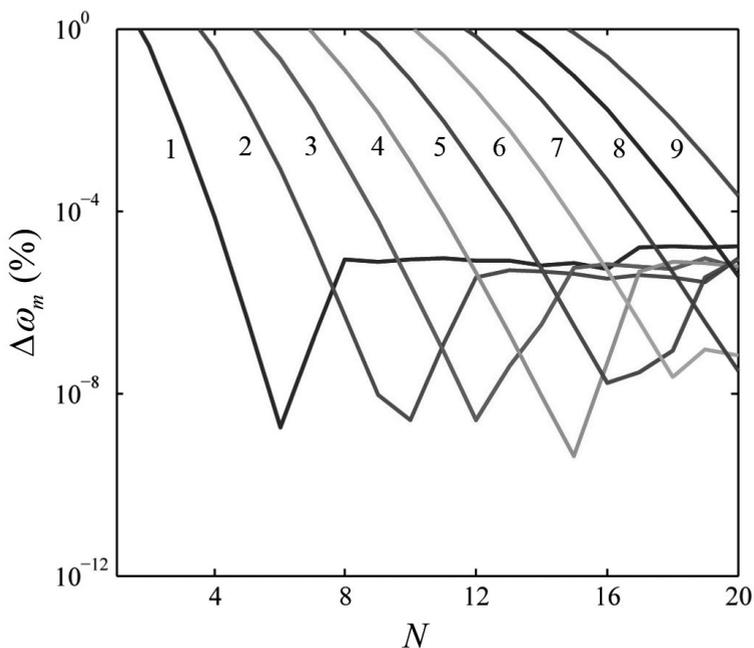


Рис. 2.5.2. Относительная ошибка определения собственных частот для вариационного подхода.

Для задачи на собственные значения (2.5.19) относительные ошибки в определении частот

$$\Delta\omega_m = \left| \frac{|\lambda_{2m}| - \omega_m^0}{\omega_m^0} \right| \quad (2.5.23)$$

показаны на рис. 2.5.2 для ω_m^0 , $m = 1, \dots, 9$. При увеличении порядка аппроксимаций N значение ошибки $\Delta\omega_m$ сначала быстро уменьшается до определенной величины, а затем держится приблизительно на

одном уровне. Такое поведение может быть объяснено плохой вычислительной обусловленностью задачи (2.5.19) по сравнению с обусловленностью задачи (2.5.5), полученной на основе метода Галеркина для той же степени полиномов N .

Тем не менее, в пределах вычислительной ошибки найденное на основе вариационного подхода приближенное решение является наилучшим в смысле минимизации энергетической нормы, которая порождается неотрицательным функционалом ошибки Φ , введенным в (2.5.8). Как обсуждалось в п. 2.1.3, для оценки качества решения можно использовать следующую относительную величину

$$\Delta = \tilde{\Phi}[\tilde{u}, \tilde{r}] \tilde{\Psi}^{-1}[\tilde{r}],$$

$$\tilde{\Phi} = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \tilde{\varphi}(t, x, \tilde{u}, \tilde{r}) dx dt, \quad \tilde{\Psi} = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \tilde{\psi}(x, \tilde{r}) dx dt. \quad (2.5.24)$$

Для получения этой оценки привлекается функция локальной энергетической ошибки $\tilde{\varphi}$ из (2.5.13) и выражение для линейной плотности энергии

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{2} \left\{ (\tilde{r}_x(t, x) - p^0(x))^2 + (\tilde{r}_t(t, x))^2 \right\},$$

которая определена через динамическую функцию \tilde{r} из (2.5.10).

Соответствующая норма ошибки

$$\Phi_\lambda = \mathbf{z}^* \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{z} \quad (2.5.25)$$

для задачи на собственные значения (2.5.19) при изопериметрическом условии (энергетическая нормировка собственных векторов)

$$\Psi_\lambda = \mathbf{z}^* \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{z} = 1 \quad (2.5.26)$$

может быть использована для оценки качества аппроксимаций формы колебаний, которая задается вектором \mathbf{z} из (2.5.16). Здесь \mathbf{z}^* означает комплексно сопряженный вектор к \mathbf{z} .

Сходимость численных приближений к решению задачи (2.5.1) отражена на рис. 2.5.3 для 9 низших мод свободных колебаний системы. По аналогии с поведением ошибки для собственных значений λ_m , энергетическая ошибка Φ_λ — быстро убывающая функция от параметра аппроксимации N . В тоже время эта величина существенно возрастает с увеличением номера моды m .

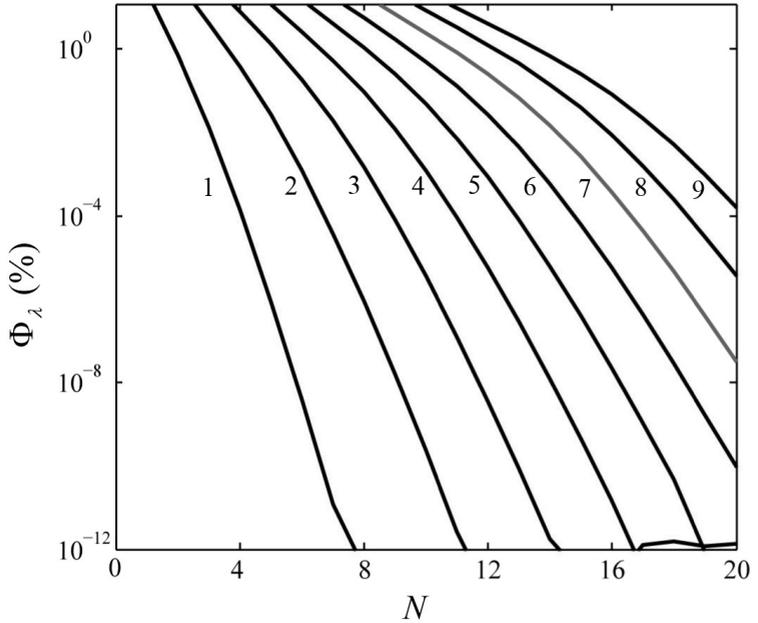


Рис. 2.5.3. Интегральная ошибка $\Phi_\lambda(N)$ для вариационного подхода.

Как показано на рис. 2.5.4 на примере изменения первого собственного значения λ_1 при увеличении параметра N , действительная часть δ_m числа λ_m много меньше его мнимой части ω_m при достаточно больших степенях аппроксимации. Их отношение $\delta_m \omega_m^{-1}$ можно также использовать для неявной оценки близости числа ω_m к соответствующей частоте свободных колебаний стержня ω_m^0 , заданной в (2.5.6). Заметно

также влияние ошибки округления на точность вычислений при высоких степенях полиномов ($N > 6$).

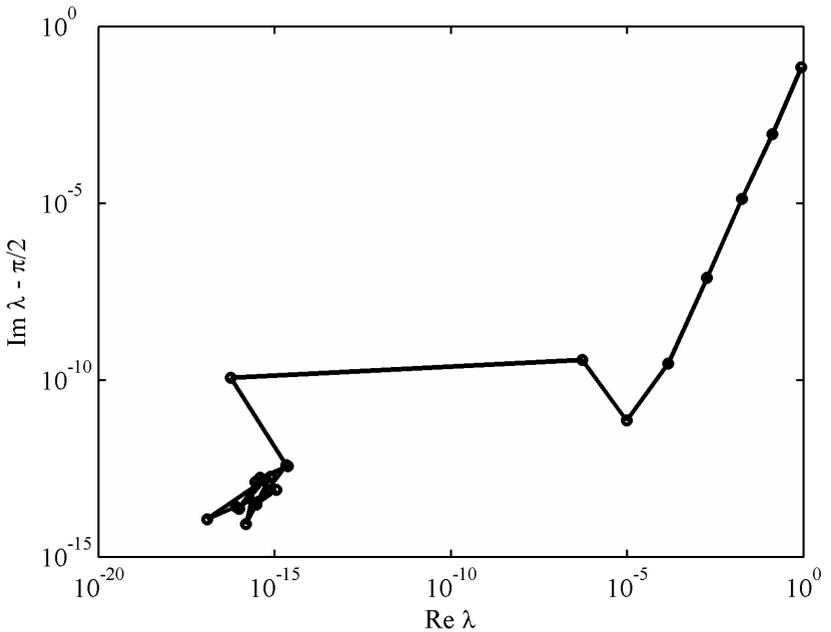


Рис. 2.5.4. Действительная и мнимая часть собственного числа $\lambda_1(N)$.

2.5.3. Проекционный подход на основе метода интегро-дифференциальных соотношений. Альтернативный подход к решению динамических задач с распределенными параметрами основан на модификации метода Петрова–Галеркина. Он заключается в том, что ищутся нулевые интегральные проекции функций состояния $\eta(t, x, \tilde{u}, \tilde{r})$ и $\xi(t, x, \tilde{u}, \tilde{r})$ из (2.5.13) на конечномерное пространство специально выбранных тестовых функций $v_1(t, x) \in \mathcal{V}_1$ и $v_2(t, x) \in \mathcal{V}_2$.

Опишем алгоритм получения совместной системы обыкновенных

дифференциальных уравнений, используя интегралы

$$\int_0^T \int_0^1 \eta(t, x, \tilde{u}, \tilde{r}) v_1(t, x) dx dt = 0, \quad (2.5.27)$$

$$\int_0^T \int_0^1 \xi(t, x, \tilde{u}, \tilde{r}) v_2(t, x) dx dt = 0.$$

Уравнения, приближенно задающие продольные движения точек стержня, можно выписать в векторном виде, если разложить тестовые функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$ по базисам, которые заданы соответственно в пространствах \mathcal{V}_1 и \mathcal{V}_2 .

Используя конечномерное приближение по координате x , положим, что размерность каждого пространства тестовых функций $\mathcal{V}_{1,2}$ совпадает с размерностью N пробных функций \tilde{u} и \tilde{r} по координате x . Тогда можно представить $v_1(x)$ и $v_2(x)$ в виде

$$v_i = \sum_{j=1}^N b_{ij}(x) v_{ij}(t) \in \mathcal{V}_i, \quad i = 1, 2,$$

где b_{ij} — выбранные базисные функции, v_{ij} — произвольно зависящие от времени коэффициенты.

Соберем тестовые базисные функций b_{ij} в векторы $\mathbf{b}_1(x) \in \mathbb{R}^N$ и $\mathbf{b}_2(x) \in \mathbb{R}^N$. Тогда условие равенства нулю интегралов в (2.5.27) эквивалентно системе двух векторных уравнений первого порядка

$$\int_0^1 (\tilde{u}_t(t, x) - \tilde{r}_x(t, x) + \dot{u}_0(t) - p^0(x)) \mathbf{b}_1(x) dx = \mathbf{0}, \quad (2.5.28)$$

$$\int_0^1 (\tilde{u}_x(t, x) - \tilde{r}_t(t, x) + (u^0(x))') \mathbf{b}_2(x) dx = \mathbf{0}.$$

Для постановки совместной начальной задачи необходимо учесть $2N$ начальных условий. Пробные функции $\tilde{u}(x, \tilde{\mathbf{y}}_1(t))$ и $\tilde{r}(x, \tilde{\mathbf{y}}_2(t))$, заданные в (2.5.10), при $t = 0$ должны строго выполнять однородные условия, которые эквивалентны векторному уравнению (2.5.12).

Соответствующая системе (2.5.12) и (2.5.28) задача на собственные значения может быть записана в виде

$$(\lambda \mathbf{F} - \mathbf{G}) \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{2N}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (2.5.29)$$

где введены матричные обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}, \\ \mathbf{F}_1 &= \int_0^1 \mathbf{b}_1(x) \mathbf{a}_1^T(x) dx, \quad \mathbf{F}_2 = - \int_0^1 \mathbf{b}_2(x) \mathbf{a}_2^T(x) dx; \\ \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}, \\ \mathbf{G}_1 &= \int_0^1 \mathbf{b}_1(x) \mathbf{a}'_2{}^T(x) dx, \quad \mathbf{G}_2 = - \int_0^1 \mathbf{b}_2(x) \mathbf{a}'_1{}^T(x) dx. \end{aligned}$$

Продемонстрируем сходимость предложенного проекционного подхода. Для этого векторы тестовых базисных функций $\mathbf{b}_{1,2}(x)$ выберем в соответствии с пробными функциями $\mathbf{a}_{1,2}(x)$ из (2.5.22), которые использовались в вариационном подходе. Используя обозначения, введенные в (2.5.7) для полиномов Бернштейна, запишем эти векторы в виде

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 = \{B_{j-1, N-1}(x)\}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Учитывая структуру матриц \mathbf{F} и \mathbf{G} , можно показать, что все собственные числа задачи (2.5.29) принимают мнимые значения

$$\lambda_{\pm m} = \pm i \omega_m, \quad m = 1, \dots, N, \quad \omega_m > 0.$$

Это отличает предложенный подход от метода Рунге, примененного для минимизационной постановки (2.5.8).

На рис. 2.5.5 относительная частотная расстройка $\Delta \omega_m$, введенная в (2.5.23), показана для первых 9 мод колебаний как функция от параметра задачи N . Незаметно влияние численных ошибок округления,

как это было в вариационном подходе (см. рис. 2.5.2). Картина сходимости частот на выбранных приближениях к точным величинам для исходной задачи (2.5.1) аналогична той, которая была получена для подхода основанного на методе Бубнова–Галеркина (рис. 2.5.1).

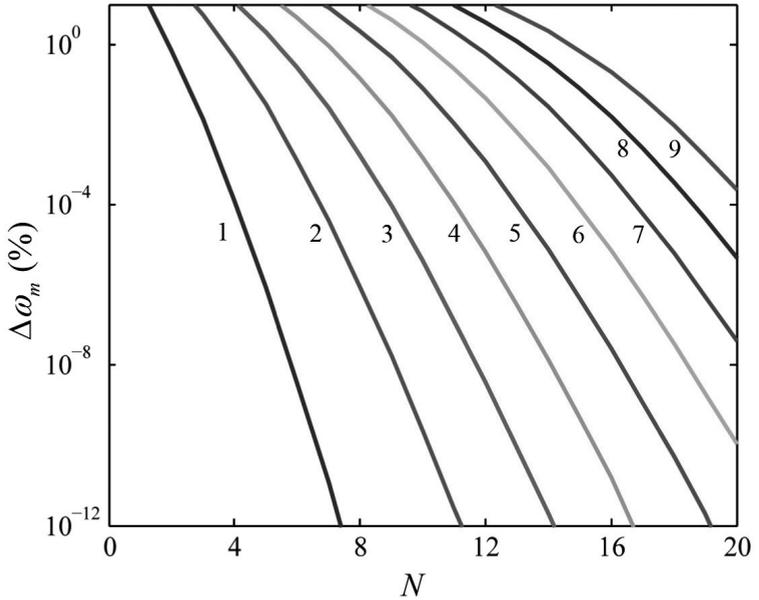


Рис. 2.5.5. Относительная ошибка определения собственных частот для проекционного подхода.

Существенным преимуществом по сравнению с классическим подходом является то, что для оценки аппроксимаций могут быть напрямую использованы как интегральные, так и локальные критерии качества (2.5.24)–(2.5.26). На рис. 2.5.6 качество форм собственных колебаний определяется с помощью функционала Φ_λ , введенного в (2.5.25).

Не смотря на то, что полученная в проекционном алгоритме система приближенных уравнений (2.5.12), (2.5.28) не удовлетворяет свойства

экстремальности в смысле минимизации функционала Φ , этот подход имеет ряд немаловажных качеств:

1. Дифференциальный порядок этой системы (2.5.29) в два раза меньше, чем порядок вариационной системы (2.5.12), (2.5.14).
2. В отличие от вариационного подхода решается начальная, а не краевая задача.
3. Собственные значения принимают чисто мнимые значения.

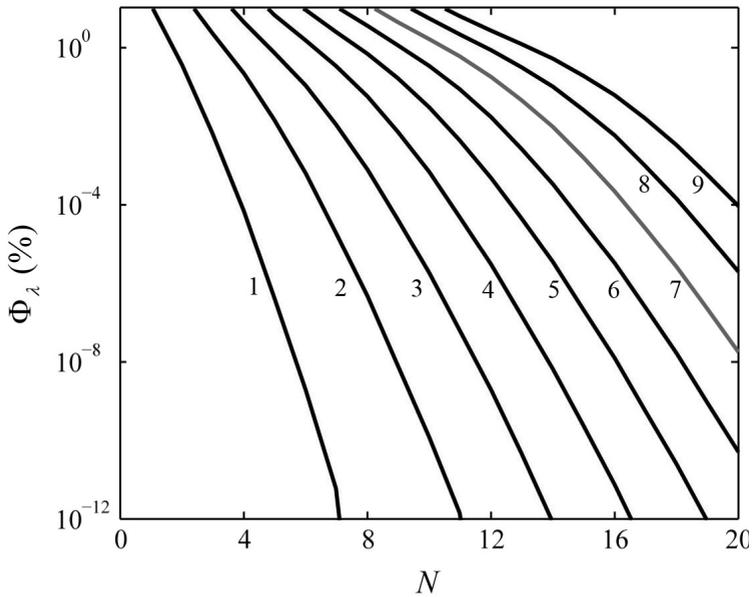


Рис. 2.5.6. Интегральная ошибка $\Phi_\lambda(N)$ для проекционного подхода.

Наряду с возможностью использовать явные оценки качества и получать более достоверные численные результаты, перечисленные преимущества могут быть использованы для построения достаточно эф-

фективных процедур моделирования и оптимизации в прямых и обратных задачах динамики систем с распределенными параметрами.

2.5.4. Проекционный подход с использованием метода конечных элементов. Вернемся к рассмотренной в §2.4 задаче об изгибных движениях упругой однородной балки

$$\begin{aligned}
 \eta &= w_t - p = 0, & \xi &= w_{xx} - s = 0, \\
 p_t + s_{xx} &= 0, & x &\in (0, 1), \quad t \in (0, T); \\
 x = 0: & \quad w = w_0(t), \quad w_x = 0, \\
 x = 1: & \quad s = 0, \quad s_x = 0; \\
 t = 0: & \quad w = w^0(x), \quad p = p^0(x); \\
 w^0(0) &= w_0(0).
 \end{aligned} \tag{2.5.30}$$

Здесь $p(t, x)$, $s(t, x)$ и $w(t, x)$ — соответственно неизвестные безразмерные поля плотности импульса, изгибающего момента и поперечных перемещений, $p^0(x)$ и $w^0(x)$ — начальное распределение перемещений и импульсов, а $w_0(t)$ — заданная функция смещений конца балки.

Применим для приближенного решения этой задачи проекционный подход, изложенный в предыдущем параграфе, и метод конечных элементов для дискретизации неизвестных переменных по пространственной координате x . Для этого разобьем отрезок $x \in (0, 1)$ на элементы

$$I_i = \{x : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad i = 1, \dots, M, \tag{2.5.31}$$

где

$$x_{i-1} < x_i, \quad x_0 = 0, \quad x_M = 1.$$

Чтобы выполнить уравнение изменения импульса, определим, как и в §2.4, динамическую функцию $r(t, x)$ так, чтобы

$$p = -r_{xx}, \quad s = r_t. \tag{2.5.32}$$

Далее введем на каждом элементе I_i локальную переменную

$$z_i = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \tag{2.5.33}$$

и зададим на этом элементе, учитывая начальные условия из (2.5.30), аппроксимации импульсов, моментов и перемещений в виде

$$\begin{aligned} p &= -\tilde{r}_{xx}(t, x) + p^0(x), \quad s = \tilde{r}_t(t, x), \\ w &= \tilde{w}(t, x) + w^0(x) + w_0(t) - w_0(0). \end{aligned} \quad (2.5.34)$$

Здесь поля \tilde{r} и \tilde{w} заданы через полиномы Бернштейна (2.5.7) на пространстве функций, кусочно-полиномиальных по координате x :

$$\begin{aligned} \tilde{w} \in \mathcal{S}_w &= \left\{ \begin{array}{l} \tilde{w}(t, x) : \quad \tilde{w} = \sum_{j=0}^{N+1} w_{ij}(t) B_{j, N+1}(z_i(x)) , \\ x \in I_i, \quad i = 1, \dots, M ; \\ \tilde{w} \in C^1 ; \quad \tilde{w}(t, 0) = \tilde{w}_x(t, 0) = 0 \end{array} \right\}, \\ \tilde{r} \in \mathcal{S}_p &= \left\{ \begin{array}{l} \tilde{r}(t, x) : \quad \tilde{r} = \sum_{j=0}^{N+1} r_{ij}(t) B_{j, N+1}(z_i(x)) , \\ x \in I_i, \quad i = 1, \dots, M ; \\ \tilde{r} \in C^1 ; \quad \tilde{r}(t, 1) = \tilde{r}_x(t, 1) = 0 \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (2.5.35)$$

Неизвестные функции $w_{ij}(t)$ и $r_{ij}(t)$, введенные в (2.5.35), связаны между собой через краевые условия и условия гладкости, накладываемые на аппроксимации \tilde{w} и \tilde{r} . При использовании полиномов Бернштейна эта связь может быть представлена в явном виде

$$\begin{aligned} w_{1,0}(t) &= w_{1,1}(t) = 0, \quad w_{i+1,0}(t) = w_{i, N+1}(t), \\ w_{i+1,1}(t) &= (1 + \alpha_j) w_{i, N+1}(t) - \alpha_i w_{i, N}(t), \\ r_{M, N}(t) &= r_{M, N+1}(t) = 0, \quad r_{i+1, N+1}(t) = r_{i+1, 0}(t), \\ r_{i+1, N}(t) &= (1 + \beta_j) r_{i+1, 0}(t) - \beta_i r_{i+1, 1}(t), \\ \alpha_i &= \beta_i^{-1} = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i - x_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, M - 1. \end{aligned} \quad (2.5.36)$$

Запишем функции \tilde{w} и \tilde{r} в векторном виде

$$\tilde{w} = \mathbf{a}_1^T(x) \tilde{\mathbf{y}}_1(t), \quad \tilde{r} = \mathbf{a}_2^T(x) \tilde{\mathbf{y}}_2(t), \quad \mathbf{a}_{1,2}(x), \tilde{\mathbf{y}}_{1,2}(t) \in \mathbb{R}^{M \cdot N},$$

где аналогично (2.5.10) введены векторы искоемых переменных

$$\tilde{\mathbf{y}}_1(t) = [w_1, \dots, w_M]^T, \quad w_i(t) = \{w_{i,2}, \dots, w_{i,N+1}\},$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_2(t) = [r_1, \dots, r_M]^T, \quad r_i(t) = \{r_{i,0}, \dots, r_{i,N-1}\},$$

и соответствующие векторы пробных базисных функций

$$\mathbf{a}_1(x) = \frac{\partial \tilde{w}(x, \tilde{\mathbf{y}}_1)}{\partial \tilde{\mathbf{y}}_1}, \quad \mathbf{a}_2(x) = \frac{\partial \tilde{r}(x, \tilde{\mathbf{y}}_2)}{\partial \tilde{\mathbf{y}}_2}. \quad (2.5.37)$$

С учетом (2.5.32)–(2.5.36) полученные аппроксимации функций импульсов $p(x, \tilde{\mathbf{y}}_2)$, моментов $s(x, \dot{\tilde{\mathbf{y}}}_2)$ и перемещений $w(t, x, \tilde{\mathbf{y}}_1)$ точно удовлетворяют уравнение изменения импульса и краевые условия. Уравнения состояния согласно предлагаемому проекционному подходу выполняются в интегральном смысле.

Введем векторы тестовых функций в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1(x) = \mathbf{b}_2(x) &= [b_1, \dots, b_M]^T, \\ b_i(x) &= \{b_{i1}, \dots, b_{iN}\}, \quad i = 1, \dots, M, \\ b_{ij}(x) &= \begin{cases} B_{j-1, N-1}(z_i), & x \in I_i \\ 0, & x \notin I_i \end{cases}, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.5.38)$$

Здесь интервалы I_i введены согласно (2.5.31), а локальные координаты $z_i(x)$ определены в (2.5.33). Тогда приближенная система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка запишется в векторной форме

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tilde{\eta}(t, x, \dot{\tilde{\mathbf{y}}}_1, \tilde{\mathbf{y}}_2) \mathbf{b}_1(x) dx &= \mathbf{0}, \\ \int_0^1 \tilde{\xi}(x, \dot{\tilde{\mathbf{y}}}_2, \tilde{\mathbf{y}}_1) \mathbf{b}_2(x) dx &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.5.39)$$

где после подстановки выражений (2.5.34) функции $\tilde{\eta}$ и $\tilde{\xi}$ получаются из функций состояния $\eta(w_t, p)$ и $\xi(w_{xx}, s)$ в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} &= \mathbf{a}_1^T(x) \cdot \dot{\tilde{\mathbf{y}}}_1 + (\mathbf{a}_2^T(x))'' \cdot \tilde{\mathbf{y}}_2 + \dot{w}_0(t) - p^0(x), \\ \tilde{\xi} &= (\mathbf{a}_1^T(x))'' \cdot \tilde{\mathbf{y}}_1 - \mathbf{a}_2^T(x) \cdot \dot{\tilde{\mathbf{y}}}_2 + (w^0(x))''. \end{aligned} \quad (2.5.40)$$

Согласно (2.5.30) и (2.5.34) неизвестные векторные функции $\tilde{\mathbf{y}}_1$ и $\tilde{\mathbf{y}}_2$ должны удовлетворять однородные начальные условия

$$\tilde{\mathbf{y}}_1(0) = \tilde{\mathbf{y}}_2(0) = \mathbf{0}. \quad (2.5.41)$$

Можно показать, что полученная задача Коши (2.5.39)–(2.5.41) имеет единственное решение $\tilde{\mathbf{y}}_1^*(t)$, $\tilde{\mathbf{y}}_2^*(t)$. Оно используется для построения приближенных полей

$$\tilde{p}^*(t, x) = p(x, \tilde{\mathbf{y}}_2^*(t)), \quad \tilde{s}^*(t, x) = s(x, \dot{\tilde{\mathbf{y}}}_2^*(t)), \quad \tilde{w}^*(t, x) = w(t, x, \tilde{\mathbf{y}}_1^*(t)),$$

для которых применимы предложенные ранее оценки качества решения

$$\Delta^g = \frac{\tilde{\Phi}_+^g}{2\tilde{\Psi}^g},$$

где

$$\tilde{\Phi}_+^g = \Phi_+[\tilde{p}^*(t, x), \tilde{s}^*(t, x), \tilde{w}^*(t, x)], \quad \tilde{\Psi}^g = \Psi[\tilde{p}^*(t, x), \tilde{w}^*(t, x)],$$

$$\Phi_+[p, s, w] = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \left\{ (w_t - p)^2 + (w_{xx} - s)^2 \right\} dx dt,$$

$$\Psi[p, w] = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (w_{xx}^2 + p^2) dx dt.$$

Пример 2.5.1. Как и в Примере 2.4.1, рассмотрим однородные начальные условия $w^0(x) = p^0(x) = 0$ и перемещение конца балки $w_0(t) = t^2/4$. Зафиксируем время окончания процесса $T = 2$.

Для фиксированной степени полиномов, определяемой параметром N , и минимально возможного количества элементов $M = 1$ аппроксимации неизвестных функций (2.5.35) совпадают с полиномиальными аппроксимациями (2.4.5) предложенными в §2.4. Сравним качество решений, полученных с помощью вариационного и проекционного подходов при использовании одних и тех же пространств \mathcal{S}_w и \mathcal{S}_r ($M = 1$).

Расчеты показывают, что поля перемещений в обоих подходах слабо отличаются. Как было показано в примере 2.4.1 задача минимизации функционала $\tilde{\Phi}_+$ (задача 1) при $N = 8$ дает относительную интегральную ошибку $\Delta^+ = 4.5 \cdot 10^{-10}$. Для решения системы (2.5.39)–(2.5.41), значение функционала $\tilde{\Phi}_+$ при тех же полиномиальных аппроксимациях ($M = 1, N = 8$) заведомо больше и соответствующая относительная ошибка равна $\Delta^g = 3.2 \cdot 10^{-8}$.

На рис. 2.5.7 приведены значения абсолютных интегральных ошибок в зависимости от значения параметра N (так называемая p -сходимость). Экстремальные значения функционала $\tilde{\Phi}_+^+(N)$ (сплошная кривая) всегда ниже значений функционала $\tilde{\Phi}_+^g(N)$ (штриховая кривая), полученного модифицированным методом Галеркина.

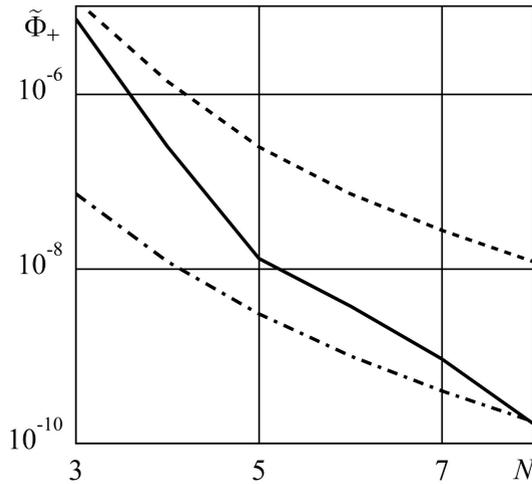


Рис. 2.5.7. Интегральная ошибка численного решения для вариационного и проекционного подходов.

Учтем, что для получения оптимального приближения необходимо решить систему $2N$ уравнений второго порядка, а система (2.5.39) со-

держит такое же количество дифференциальных уравнений первого порядка. Для сравнения эффективности вариационного и проекционного подходов на рис. 2.5.7 приведены значения функционала $\tilde{\Phi}_+^g(2N)$ для удвоенной размерности аппроксимаций (штрихпунктирная ломаная). Можно заметить, что для некоторых значений параметра N при одинаковом дифференциальном порядке решаемых систем величина функционала $\tilde{\Phi}_+^g(2N)$ меньше чем $\tilde{\Phi}_+^g(N)$.

На рис. 2.5.8 сплошными кривыми для различных степеней полиномов показано уменьшение интегральной ошибки $\tilde{\Phi}_+^g(N_1)$ при увеличении числа элементов $M = 1 \div 8$ в зависимости от размерности задачи $N_1 = MN$ (h -сходимость). Необходимо отметить, что с ростом параметра N , хотя и происходит улучшение качества решений, значительно увеличивается время расчета. Поэтому для эффективного моделирования, особенно при решении задачи в режиме реального времени, необходимо находить наилучшее сочетание значений M и N , учитывая при этом фактор численной стабильности алгоритма.

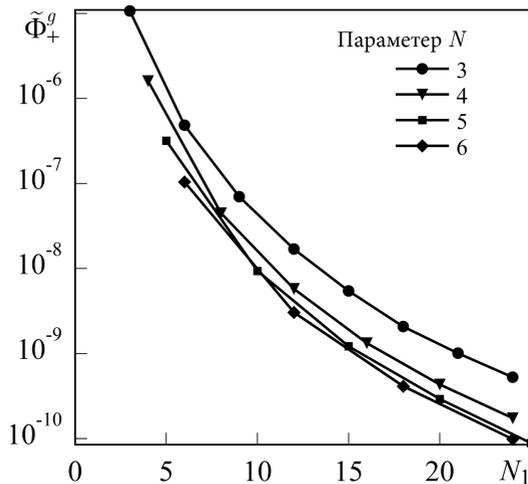


Рис. 2.5.8. Интегральная ошибка $\tilde{\Phi}_+^g(N_1)$.

Глава 3.

Вариационные и проекционные подходы к анализу собственных колебаний механических систем

§3.1. Регулярные подходы к построению собственных частот и форм колебаний упругих тел балочной формы

3.1.1. Постановка задачи о собственных колебаниях упругой плоской пластины. Рассмотрим в рамках двумерной линейной теории упругости собственные колебания изотропной пластины занимающей в плоскости Ox_1x_2 прямоугольную область

$$\Omega = \{x : 0 < x_1 < L, -h < x_2 < h\}, \quad x = \{x_1, x_2\}.$$

Как показано на рис. 3.1.1, граница области Ω состоит из четырех отрезков

$$\Gamma = \partial\Omega = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3 \cup \bar{\Gamma}_4.$$

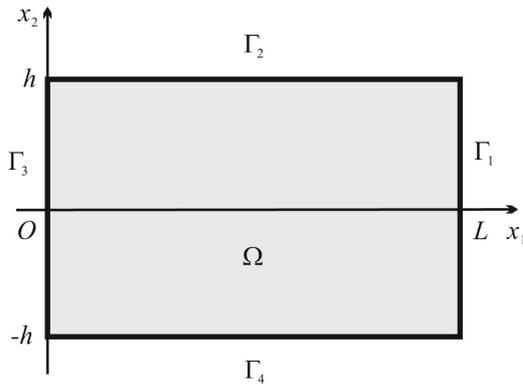


Рис. 3.1.1. Упругая прямоугольная пластина.

Положим, что части границы Γ_2 и Γ_4 при $x_2 = \pm h$ свободны от нагрузок, а на отрезках Γ_1 и Γ_3 при $x_2 = 0, L$ заданы либо нулевые напряжения, либо нулевые перемещения. В дальнейшем без ограничений на применимость предлагаемых подходов считается, что длина L пластины (балки) много больше ее высоты $2h$.

Введем векторы перемещений $\mathbf{u}(t, x)$ и плотности импульса $\mathbf{p}(t, x)$, а также тензоры напряжений $\sigma(t, x)$ и деформаций $\varepsilon(t, x)$:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, \quad (3.1.1)$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix}.$$

Тензор деформаций ε можно связать с перемещениями точек балки \mathbf{u} покомпонентно в форме

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad 2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}. \quad (3.1.2)$$

В плосконапряженном состоянии закон Гука и соотношения между скоростями и импульсами запишутся в виде

$$\xi(t, x) = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{12} & \xi_{22} \end{bmatrix} = 0, \quad \eta(t, x) = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (3.1.3)$$

Здесь компоненты тензора (ξ) и вектора (η) состояний для изотропного тела определяются соответственно как

$$\xi_{11} = \varepsilon_{11} - \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}), \quad \xi_{22} = \varepsilon_{22} - \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}), \quad (3.1.4)$$

$$\xi_{12} = \varepsilon_{12} - \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{12}.$$

и

$$\eta_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{p_1}{\rho}, \quad \eta_2 = \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{p_2}{\rho}.$$

Свойства материала задаются через модуль Юнга $E(x) > 0$, коэффициент Пуассона $\nu(x) > 0$ и плотность $\rho(x) > 0$.

Уравнение динамического равновесия в отсутствии внешних объемных сил предстанет в виде

$$\mathbf{f}(t, x) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = 0, \quad (3.1.5)$$

где введен суммарный вектор упругих и инерционных объемных сил \mathbf{f} с компонентами

$$f_1 = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial p_1}{\partial t}, \quad f_2 = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} - \frac{\partial p_2}{\partial t}.$$

Пусть заданы однородные граничные условия на боковых сторонах балки

$$x_2 = \pm h: \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = 0, \quad (3.1.6)$$

а также на ее торцах

$$\begin{aligned} x_1 = 0: \quad \sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{12} = 0 \quad \underline{\vee} \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \\ x_1 = l: \quad \sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{12} = 0 \quad \underline{\vee} \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Для того чтобы сформулировать задачу на собственные значения, представим неизвестные переменные в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t, x) &= \tilde{\mathbf{u}}(x) \sin \omega t, \quad \mathbf{p}(t, x) = \tilde{\mathbf{p}}(x) \cos \omega t, \\ \sigma(t, x) &= \tilde{\sigma}(x) \sin \omega t, \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

где $\omega > 0$ — частота собственных колебаний. Знак «тильда» в дальнейшем опускается.

После подстановки выражений (3.1.8) компоненты вектора состояний η можно свести, исключив время, к виду

$$\eta_1(x) = \omega u_1 - \frac{p_1}{\rho}, \quad \eta_2(x) = \omega u_2 - \frac{p_2}{\rho}, \quad (3.1.9)$$

а вектор объемных сил записать как

$$f_1(x) = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \omega p_1, \quad f_2(x) = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \omega p_2. \quad (3.1.10)$$

Учитывая условие динамического равновесия (3.1.5) и соотношения (3.1.10), выразим функции импульсов через напряжения. Тогда из уравнений (3.1.9) получим

$$\begin{aligned}\eta_1(x) &= \omega u_1 + \frac{1}{\rho\omega} \left(\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} \right), \\ \eta_2(x) &= \omega u_2 + \frac{1}{\rho\omega} \left(\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} \right).\end{aligned}\quad (3.1.11)$$

Ставится задача о нахождении собственных частот ω , перемещений $u(x)$ и напряжений $\sigma(x)$, которые удовлетворяют уравнения состояния (3.1.3) с учетом (3.1.4) и (3.1.11), а также граничные условия (3.1.6) и (3.1.7).

По аналогии с задачей о движении упругих тел, рассмотренной в §1.3, введем два энергетических функционала

$$\Phi_{\pm}^{\omega}[\mathbf{u}, \sigma, \omega] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\rho\eta \cdot \eta \pm \xi : \mathbf{C} : \xi) d\Omega, \quad (3.1.12)$$

где \mathbf{C} тензор модулей упругости.

Энергию системы можно выразить либо через перемещения

$$\Psi_u^{\omega}[\mathbf{u}, \omega] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\rho\omega^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \varepsilon : \mathbf{C} : \varepsilon) d\Omega, \quad (3.1.13)$$

либо через напряжения

$$\Psi_{\sigma}^{\omega}[\sigma, \omega] = \frac{1}{2\omega^2} \int_{\Omega} (\rho^{-1} \nabla\sigma \cdot \nabla\sigma + \omega^2 \sigma : \mathbf{C}^{-1} : \sigma) d\Omega. \quad (3.1.14)$$

Для изотропного материала свертки тензоров в (3.1.12)–(3.1.14) имеют вид

$$\begin{aligned}\xi : \mathbf{C} : \xi &= \frac{E}{1-\nu^2} (\xi_{11}^2 + 2\nu\xi_{11}\xi_{22} + \xi_{22}^2 + 2(1-\nu)\xi_{12}^2), \\ \varepsilon : \mathbf{C} : \varepsilon &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11}^2 + 2\nu\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2 + 2(1-\nu)\varepsilon_{12}^2), \\ \sigma : \mathbf{C}^{-1} : \sigma &= \frac{1}{E} (\sigma_{11}^2 - 2\nu\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 2(1+\nu)\sigma_{12}^2).\end{aligned}$$

Так как решение поставленной задачи задается с точностью до произвольного множителя, естественно задать одно из изопериметрических условий

$$\Psi_u^\omega = 1 \quad \underline{\vee} \quad \Psi_\sigma^\omega = 1.$$

3.1.2. Вариационный подход к приближенному решению задачи о собственных колебаниях упругой балки. В §1.3 показана связь между вариационной постановкой динамической задачи о движении упругого тела на основе метода интегро-дифференциальных соотношений и классическими вариационными принципами Гамильтона–Остроградского.

Для случая собственных колебаний (см. табл. 1.3.1) задача о нахождении частоты ω , полей перемещений $\mathbf{u}^*(t, x)$ и напряжений $\sigma^*(t, x)$, которые доставляют стационарное значение функционалу

$$\delta\Phi_-^\omega[\mathbf{u}, \sigma, \omega] = 0,$$

сводится к вариационной задаче в перемещениях

$$\delta H^\omega[\mathbf{u}, \omega] = 0, \quad H^\omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\rho\omega^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - \varepsilon : \mathbf{C} : \varepsilon) d\Omega, \quad (3.1.15)$$

и дополнительной к ней задаче в напряжениях

$$\delta H_c^\omega[\sigma, \omega] = 0, \quad H_c^\omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\rho\omega^2} \nabla\sigma \cdot \nabla\sigma - \sigma : \mathbf{C}^{-1} : \sigma \right) d\Omega. \quad (3.1.16)$$

Перемещения и напряжения в этих постановках строго выполняют граничные условия (3.1.6) и (3.1.7).

Используем конечномерное представление искомых функций \mathbf{u} и σ

по одной из координат x_2 в виде

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \sum_{k=0}^N y^k u_1^{(k)}(x_1), & u_2 &= \sum_{k=0}^{N-1} y^k u_2^{(k)}(x_1), \\
 \sigma_{11} &= \sum_{k=0}^N y^k \sigma_{11}^{(k)}(x_1), & \sigma_{12} &= \sum_{k=0}^{N-1} y^k (1-y^2) \sigma_{12}^{(k)}(x_1), \\
 \sigma_{22} &= \sum_{k=0}^N y^k (1-y^2) \sigma_{22}^{(k)}(x_1), & y &= \frac{x_2}{h},
 \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

где $u_i^{(k)}$ и $\sigma_{ij}^{(k)}$, $i, j = 1, 2$, — неизвестные функции координаты x_1 . Выбранные напряжения автоматически удовлетворяют граничные условия (3.1.6).

Определим векторные функции проектных параметров как

$$\begin{aligned}
 \mathbf{z}_1 &= \left[u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_1^{(N-1)}, u_2^{(N-1)}, u_1^{(N)} \right]^T, \\
 \mathbf{z}_2 &= \left[\sigma_{11}^{(0)}, \sigma_{12}^{(0)}, \dots, \sigma_{11}^{(N-1)}, \sigma_{12}^{(N-1)}, \sigma_{11}^{(N)} \right]^T, \\
 \mathbf{z}_3 &= \left[\sigma_{22}^{(0)}, \dots, \sigma_{22}^{(N)} \right]^T,
 \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

т.е. $\mathbf{z}_{1,2}(x_1) \in \mathbb{R}^{2N+1}$, $\mathbf{z}_3(x_1) \in \mathbb{R}^{N+1}$. Введем в рассмотрение следующие интегралы

$$\begin{aligned}
 \Theta(\mathbf{z}'_1, \mathbf{z}_1, \omega, x_1) &= \frac{1}{2} \int_{-h}^h (\rho \omega^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - \varepsilon : \mathbf{C} : \varepsilon) dx_2, \\
 \Theta_c(\mathbf{z}'_2, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \omega, x_1) &= \\
 &= \frac{1}{2\omega^2} \int_{-h}^h (\rho^{-1} \nabla \sigma \cdot \nabla \sigma - \omega^2 \sigma : \mathbf{C}^{-1} : \sigma) dx_2.
 \end{aligned} \tag{3.1.19}$$

Здесь штрихи означают производную по переменной x_1 .

С учетом (3.1.17)–(3.1.19) первые вариации функционалов H^ω и H_c^ω ,

заданных в (3.1.15) и (3.1.16), запишутся согласно

$$\begin{aligned} \delta H^\omega &= \left[\frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{z}'_1} \cdot \delta \mathbf{z}_1 \right]_{x_1=0}^{x_1=l} - \int_0^l \left(\frac{d}{dx_1} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{z}'_1} - \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{z}_1} \right) \cdot \delta \mathbf{z}_1 dx_1, \\ \delta H_c^\omega &= \left[\frac{\partial \Theta_c}{\partial \mathbf{z}'_2} \cdot \delta \mathbf{z}_2 \right]_{x_1=0}^{x_1=l} - \int_0^l \left(\frac{d}{dx_1} \frac{\partial \Theta_c}{\partial \mathbf{z}'_2} - \frac{\partial \Theta_c}{\partial \mathbf{z}_2} \right) \cdot \delta \mathbf{z}_2 dx_1 + \\ &+ \int_0^l \frac{\partial \Theta_c}{\partial \mathbf{z}_3} \cdot \delta \mathbf{z}_3 dx_1. \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Для выбранных аппроксимаций (3.1.17) необходимые условия стационарности функционала $H^\omega[\mathbf{z}_1, \omega]$ — это записанная в векторной форме система дифференциальных уравнений Эйлера

$$\frac{d}{dx_1} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{z}'_1} - \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{z}_1} = \mathbf{0}. \quad (3.1.21)$$

К системе (3.1.21) необходимо добавить условия трансверсальности на свободных концах, что с учетом граничных условий (3.1.7) дает

$$\begin{aligned} x_1 = 0 : \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{z}'_1} &= \mathbf{0} \quad \vee \quad \mathbf{z}_1 = \mathbf{0}, \\ x_1 = l : \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{z}'_1} &= \mathbf{0} \quad \vee \quad \mathbf{z}_1 = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

Для дополнительного принципа Гамильтона необходимые условия стационарности функционала $H_c^\omega[\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \omega]$ составляют линейную систему дифференциально-алгебраических уравнений

$$\frac{d}{dx_1} \frac{\partial \Theta_c}{\partial \mathbf{z}'_2} - \frac{\partial \Theta_c}{\partial \mathbf{z}_2} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \Theta_c}{\partial \mathbf{z}_3} = \mathbf{0}. \quad (3.1.23)$$

Для нахождения приближенных собственных частот ω и собственных векторов $\mathbf{z}_2(x_1)$, $\mathbf{z}_3(x_1)$ необходимо добавить $2N + 1$ краевых условий. Эти условия с учетом (3.1.7) и (3.1.20) можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_1 = 0 : \quad \mathbf{z}_2 &= \mathbf{0} \quad \vee \quad \frac{\partial \Theta_c}{\partial \mathbf{z}'_2} = \mathbf{0}, \\ x_1 = l : \quad \mathbf{z}_2 &= \mathbf{0} \quad \vee \quad \frac{\partial \Theta_c}{\partial \mathbf{z}'_2} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

Решая краевую задачу на собственные значения (3.1.21), (3.1.22) и учитывая изопериметрическое условие $\Psi_u^\omega = 1$ и выражения (3.1.17) и (3.1.18), получим собственные функции перемещений. Из задачи (3.1.23), (3.1.24) при $\Psi_\sigma^\omega = 1$ находятся соответствующие напряжения.

3.1.3. Проекционный подход к нахождению собственных колебаний упругой балки. В §2.5 был описан алгоритм получения аппроксимаций решения динамических задач, основанный на проекционном подходе и методе семидискретизации. Используем эту методику для получения приближенных систем уравнений, описывающих собственные колебания балки в рамках модели плоско напряженного упругого тела.

Рассмотрим задачу на собственные значения ω в перемещениях $\mathbf{u}(x)$ и напряжениях $\sigma(x)$, поставленную в п. 3.1.1. В классической формулировке должны выполняться уравнения состояния (3.1.3) с учетом выражений (3.1.2), (3.1.4), (3.1.11) и граничные условия (3.1.6) и (3.1.7). Решение, которое автоматически удовлетворяет ограничения на боковых сторонах балки (3.1.6), ищется в виде пробных функций (3.1.17).

В проекционном подходе (модификация метода Петрова–Галеркина [97, 102]) требуется, чтобы перемещения и напряжения доставляли нулевые значения интегральным проекциям тензора и вектора состояния на выбранные векторные (\mathcal{V}) и тензорные (\mathcal{T}) поля тестовых функций:

$$\begin{aligned} \Upsilon_\xi = \int_0^L \Theta_\xi dx_1 = 0, \quad \Theta_\xi = \int_{-h}^h \xi(\mathbf{u}, \sigma) : \tau dx_2, \quad \forall \tau \in \mathcal{T}; \\ \Upsilon_\eta = \int_0^L \Theta_\eta dx_1 = 0, \quad \Theta_\eta = \int_{-h}^h \omega \rho \eta(\mathbf{u}, \sigma) \cdot \mathbf{v} dx_2, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

Здесь вектор $\mathbf{v}(x)$ имеет размерность перемещений, $\tau(x)$ — тензор напряжений, а Θ_ξ и Θ_η — интегралы невязки уравнений состояния размерности линейной плотности энергии.

Как и для пробных полей (3.1.17), тестовые функции можно выбрать в виде полиномов относительно одной их переменных x_2 . Отличие состоит в том, что на эти функции не накладываются никакие ограничения. Чтобы получить совместную систему уравнений, представим тестовые перемещения и напряжения в виде

$$\begin{aligned} v_1 &= \sum_{k=0}^N y^k v_1^{(k)}(x_1), & v_2 &= \sum_{k=0}^{N-1} y^k v_2^{(k)}(x_1), \\ \tau_{11} &= \sum_{k=0}^N y^k \tau_{11}^{(k)}(x_1), & \tau_{12} &= \sum_{k=0}^{N-1} y^k \tau_{12}^{(k)}(x_1), \\ \tau_{22} &= \sum_{k=0}^N y^k \tau_{22}^{(k)}(x_1), & y &= \frac{x_2}{h}, \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

где $v_i^{(k)}$ и $\tau_{ij}^{(k)}$, $i, j = 1, 2$, — произвольные с необходимыми свойствами гладкости функции от x_1 . По аналогии с проектными параметрами (3.1.18) соберем эти функции в три вектора

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(x) &= [v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \dots, v_1^{(N-1)}, v_2^{(N-1)}, v_1^{(N)}]^T \in \mathbb{R}^{2N+1}, \\ \mathbf{y}_2(x) &= [\tau_{11}^{(0)}, \tau_{12}^{(0)}, \dots, \tau_{11}^{(N-1)}, \tau_{12}^{(N-1)}, \tau_{11}^{(N)}]^T \in \mathbb{R}^{2N+1}, \\ \mathbf{y}_3(x) &= [\tau_{22}^{(0)}, \dots, \tau_{22}^{(N)}]^T \in \mathbb{R}^{N+1}. \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

С учетом введенных обозначений (3.1.18) и (3.1.27) подставим выражения для перемещений и напряжений (3.1.17), (3.1.26) в интегралы Θ_ξ и Θ_η из (3.1.25). После интегрирования по x_2 и дифференцирования по \mathbf{y}_j , $j = 1, 2, 3$, получим систему дифференциально-алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_\eta(\mathbf{z}'_2, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{y}_1, \omega, x_1)}{\partial \mathbf{y}_1} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \Theta_\xi(\mathbf{z}'_1, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \omega, x_1)}{\partial \mathbf{y}_2} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \Theta_\xi(\mathbf{z}'_1, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \omega, x_1)}{\partial \mathbf{y}_3} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

Здесь первые два равенства представляют собой $4N + 2$ обыкновенных

дифференциальных уравнения первого порядка, записанных в векторном виде, а последнее равенство — $N+1$ алгебраических уравнений, линейных относительно проектных параметров, которые составляют векторы \mathbf{z}_j , $j = 1, 2, 3$.

Для аппроксимаций (3.1.17) система уравнений (3.1.28) вместе с крайними соотношениями

$$\begin{aligned} x_1 = 0 : \quad \mathbf{z}_2 = \mathbf{0} \quad \vee \quad \mathbf{z}_1 = \mathbf{0}, \\ x_1 = l : \quad \mathbf{z}_2 = \mathbf{0} \quad \vee \quad \mathbf{z}_1 = \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{3.1.29}$$

вытекающими из граничных условий (3.1.7), может быть использована для нахождения собственных частот ω и собственных функций $\mathbf{z}_j(x_1)$, $j = 1, 2, 3$, по которым согласно (3.1.17) восстанавливаются поля амплитуд перемещений $\mathbf{u}(x)$ и напряжений $\sigma(x)$.

3.1.4. Сравнение вариационного и проекционного подходов.

Для выбранного класса пробных и тестовых функций $\mathbf{u}(x)$, $\sigma(x)$, $\mathbf{v}(x)$, $\tau(x)$ можно доказать, что приближенные системы уравнений (3.1.21) и (3.1.28), полученные соответственно с помощью вариационного и проекционного подхода эквивалентны. Для этого запишем условие на первую вариацию функционала $H^\omega[\mathbf{u}, \omega]$, введенного в (3.1.15), в виде

$$\delta H^\omega = \int_{\Omega} (\rho\omega^2 u \cdot \delta \mathbf{u} - \varepsilon(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \varepsilon(\delta \mathbf{u})) d\Omega = 0.$$

Компоненты вектора вариаций $\delta \mathbf{u}$ находятся из выражений для перемещений $u_1(x)$ и $u_2(x)$, определенных в (3.1.17), заменой искомым функций $u_{1,2}^{(k)}(x_1)$ на произвольные функции $\delta u_{1,2}^{(k)}(x_1)$, удовлетворяющие крайние условия (3.1.22). Из этого согласно (3.1.17) и (3.1.26) следует, что вариаций $\delta \mathbf{u}(x)$ принадлежат тому же пространству что и перемещения $\mathbf{v}(x)$. Подставим вектор $\mathbf{v} = \delta \mathbf{u}$ в выражения (3.1.25) и с учетом структуры функций состояния (3.1.4) и (3.1.11) запишем усло-

вия равенства нулю функционалов Υ_ξ и Υ_η в виде

$$\begin{aligned}\Upsilon_\xi[\mathbf{u}, \sigma, \tau] &= \int_{\Omega} (\varepsilon(\mathbf{u}) : \tau - \sigma : \mathbf{C}^{-1} : \tau) d\Omega = 0, \\ \Upsilon_\eta[\mathbf{u}, \sigma, \delta\mathbf{u}] &= \int_{\Omega} (\rho\omega^2\mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{u} + \nabla \cdot \sigma \cdot \delta\mathbf{u}) d\Omega = 0,\end{aligned}\tag{3.1.30}$$

где \mathbf{C} — тензор модулей упругости.

Из (3.1.26) следует, что тензорные функции деформаций $\varepsilon(\delta\mathbf{u})$ образуют подпространство линейного пространства тестовых функций $\mathbf{C}^{-1} : \tau$. Это означает, что напряжения τ всегда можно представить в виде суммы ортогональных тензоров

$$\tau = \tau^\perp + \mathbf{C} : \varepsilon(\delta\mathbf{u}), \quad \int_{\Omega} (\tau^\perp : \varepsilon(\delta\mathbf{u})) d\Omega = 0.\tag{3.1.31}$$

Ввиду произвольности функций $\mathbf{z}_j(x_1)$ для $j = 1, 2, 3$ и эквивалентности пространств, на которых заданы векторы $\mathbf{u}(x)$ и $\delta\mathbf{u}(x)$, первое соотношение (3.1.30) с учетом (3.1.31) распадается на два интегральных условия

$$\begin{aligned}\Upsilon_\xi[\mathbf{u}, \sigma, \delta\mathbf{u}] &= \int_{\Omega} (\varepsilon(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \varepsilon(\delta\mathbf{u}) - \sigma : \varepsilon(\delta\mathbf{u})) d\Omega = 0, \\ \Upsilon_\eta[\mathbf{u}, \sigma, \tau^\perp] &= - \int_{\Omega} \sigma : \mathbf{C}^{-1} : \tau^\perp d\Omega = 0.\end{aligned}$$

Первое из этих условий дает равенство

$$\int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(\delta\mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \varepsilon(\delta\mathbf{u}) d\Omega.\tag{3.1.32}$$

После интегрирования функционала $\Upsilon_\eta[\mathbf{u}, \sigma, \delta\mathbf{u}]$ из (3.1.30) по ча-

стям и подстановки в него соотношения (3.1.32) получаем

$$\begin{aligned}
 \Upsilon_\eta[\mathbf{u}, \sigma, \delta\mathbf{u}] &= \\
 &= \int_{\Omega} (\rho\omega^2 \mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{u} - \varepsilon(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \varepsilon(\delta\mathbf{u})) d\Omega - \\
 &\quad - \int_{-h}^h [\mathbf{n}_1(x_1) \cdot \sigma \cdot \delta\mathbf{u}]_{x_1=0}^{x_1=L} dx_2 = \delta H^\omega = 0, \\
 \mathbf{n}_1(0) &= [-1, 0]^T, \quad \mathbf{n}_1(L) = [1, 0]^T,
 \end{aligned} \tag{3.1.33}$$

где введен вектор нормали \mathbf{n}_1 . Равенство функционалов Υ_η и δH^ω вытекает из того, что согласно граничным условиям (3.1.7) при $x = 0$ и $x = L$ выполняется либо равенство $\mathbf{n}_1 \cdot \sigma = 0$, либо $\delta\mathbf{u} = 0$.

Из (3.1.33) следует, что систему уравнений (3.1.28) можно свести к заданной относительно перемещений системе (3.1.21) с теми же краевыми условиями (3.1.22). Далее рассматривается проекционный подход к нахождению приближенных частот и форм уравнений балки.

Разумеется, как и будет показано в §3.2, представление (3.1.17) – это не единственно возможное конечномерное разложение неизвестных функций. Для некоторых специальных случаев, например для свободной балки, когда на перемещения не накладываются никакие граничные условия, с помощью проекционного подхода возможно построение содержательных моделей, в которых число функций перемещений $u_j^{(k)}$ больше числа функций напряжений $\sigma_{1j}^{(k)}$ ($j = 1, 2$) [50, 137].

3.1.5. Анализ собственных частот и форм продольных колебаний однородной упругой балки. Рассмотрим случай, когда упругая балка состоит из однородного материала, т.е. $E = \text{const}$, $\rho = \text{const}$, $\nu = \text{const}$. Выбором нового масштаба времени $t = h\sqrt{\rho E^{-1}}\tilde{t}$ и длины $x = h\tilde{x}$ система (3.1.28), (3.1.29) сводится к безразмерному виду: $E = \rho = h = 1$. Знак «тильда» в дальнейшем опускается.

С учетом свойств симметрии области Ω и граничных условий (3.1.6) и (3.1.7) можно провести декомпозицию исходной системы (3.1.28) на

Таблица 3.1.1: Функции продольных и поперечных колебаний.

Колебания:	u_1	u_2	σ_{11}	σ_{12}	σ_{22}
продольные	$u_1^{(2j)}$	$u_2^{(2j+1)}$	$\sigma_{11}^{(2j)}$	$\sigma_{22}^{(2j)}$	$\sigma_{12}^{(2j+1)}$
поперечные	$u_1^{(2j+1)}$	$u_2^{(2j)}$	$\sigma_{11}^{(2j+1)}$	$\sigma_{22}^{(2j+1)}$	$\sigma_{12}^{(2j)}$

две независимые подсистемы, которые описывают продольные и поперечные колебания упругой балки [47]. Для этого в выражениях для перемещений и напряжений (3.1.17) необходимо оставить только те неизвестные функции, которые стоят при соответствующих степенях переменной $y = x_2$, как показано в табл. 3.1.1. Четность (нечетность) верхних индексов характеризует свойства симметрии (антисимметрии) функций перемещений и напряжений относительно координатной оси Ox_1 . В силу ортогональности четных и нечетных степенных функций будут автоматически обнуляться соответствующие проекции в интегралах (3.1.25).

Определяющим перемещением для продольных колебаний служит растяжение и сжатие центральной линии балки ($x_2 = 0$), которая задается функцией $u_1^{(0)}(x_1)$. Поперечные собственные движения характеризуются ортогональным смещением относительно этой линии $u_2^{(0)}(x_1)$.

Рассмотрим вначале продольные колебания. Перемещения и напряжения можно записать с учетом (3.1.17) и табл. 3.1.1 в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sum_{j=0}^M y^{2j} \sigma_{11}^{(2j)}(x_1), & u_1 &= \sum_{j=0}^M y^{2j} u_1^{(2j)}(x_1), \\ \sigma_{22} &= \sum_{j=0}^M y^{2j} (1 - y^2) \sigma_{22}^{(2j)}(x_1), & u_2 &= \sum_{j=0}^{M-1} y^{2j+1} u_2^{(2j+1)}(x_1), \\ \sigma_{12} &= \sum_{j=0}^{M-1} y^{2j+1} (1 - y^2) \sigma_{12}^{(2j+1)}(x_1), \end{aligned}$$

где параметр M определяет размерность аппроксимаций. В результате, для процесса растяжения–сжатия центральной линии дифференциаль-

ный порядок системы уравнений равен $4M + 2$.

Для минимально возможной степени аппроксимаций $M = 0$ система (3.1.28) сводится к одному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 u_1^{(0)}}{dx_1^2} + (1 - \nu^2)\omega^2 u_1^{(0)} = 0,$$

$$\sigma_{11}^{(0)} = \frac{1}{1 - \nu^2} \frac{du_1^{(0)}}{dx_1}, \quad \sigma_{22}^{(0)} = \frac{3\nu}{2} \sigma_{11}^{(0)},$$

которое совпадает с классическим уравнением продольных колебаний тонкого упругого стержня только в случае $\nu = 0$. Решение задачи на собственные значения может быть получено в аналитическом виде для граничных условий (3.1.7) произвольного вида.

Для $M = 1$ система (3.1.28) сводится к бикубическому уравнению относительно функции $u_1^{(0)}(x_1)$, которая задает перемещения точек центральной линии вдоль оси Ox_1 . Корни характеристического уравнения $\lambda_j(\omega)$, $j = 1, \dots, 6$, находятся в аналитическом виде. На рис. 3.1.2 при $\nu = 0.3$ показаны мнимые ($|\text{Im } \lambda_j|$ – сплошные линии) и вещественные ($|\text{Re } \lambda_j|$ – штриховые линии) ветви частотно-волновых характеристик $\lambda_j(\omega)$ для выбранного приближения.

Существуют три критических значения частоты

$$\omega_1^* = 1.787, \quad \omega_2^* = \frac{10}{91} \sqrt{273} = 1.816, \quad \omega_3^* = \frac{5}{13} \sqrt{39} = 2.402,$$

определяющие четыре зоны колебаний, которые разделены на рис. 3.1.2 пунктирными линиями. В первой зоне ($\omega < \omega_1^*$) два корня имеют чисто мнимые значения, четыре остальных – комплексные. Во второй ($\omega_1^* < \omega < \omega_2^*$) и четвертой ($\omega_3^* < \omega$) зонах все корни чисто мнимые, а в третьей ($\omega_2^* < \omega < \omega_3^*$) – четыре мнимых и два действительных корня. Интересно отметить, что во второй зоне присутствует монотонно убывающая ветвь $|\text{Im } \lambda_j(\omega)|$.

Штрихпунктирная прямая показывает зависимость волнового числа от частоты продольных колебаний ($|\lambda| = \omega$) для классической модели

тонкого стержня. Эта линия почти касается кривой $\text{Im}\lambda_1(\omega)$, где λ_1 — такой корень характеристического уравнения, для которого при всех ω выполняются условия $\text{Re}\lambda_1(\omega) = 0$ и $\text{Im}\lambda_1(\omega) > 0$. Так как классическая модель тонкого упругого стержня не учитывает поперечные движения точек сечения, она дает более грубую оценку для собственных частот системы.

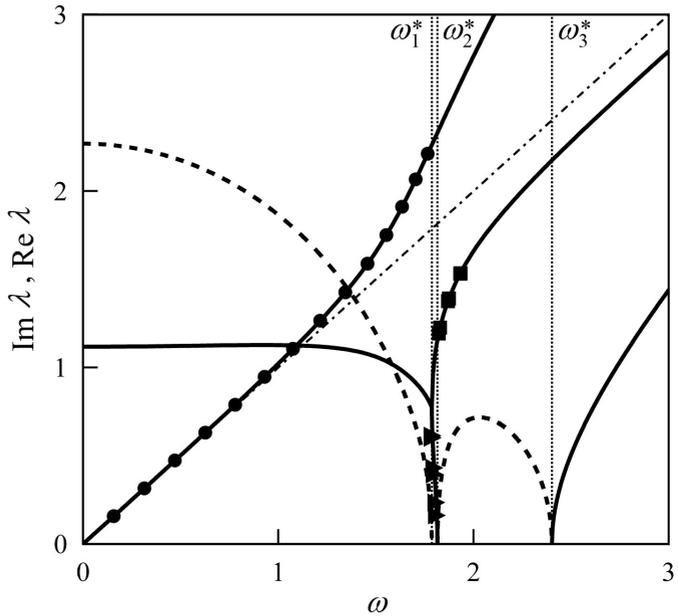


Рис. 3.1.2. Частотно-волновые характеристики продольных движений балки.

Рассмотрим частный случай собственных колебаний упругой балки, жестко закрепленной на обоих концах:

$$x_1 = 0, L : \quad u_1^{(0)}(x_1) = u_1^{(2)}(x_1) = u_2^{(1)}(x_1) = 0.$$

Таблица 3.1.2: Частоты продольных колебаний заземленной балки.

Мода (<i>a</i>)	1	3	5	7	9	11	13
ω_n	0.158	0.471	0.780	1.076	1.344	1.554	1.705
$\Delta\omega_n$ (%)	-0.25	0.04	0.73	2.14	4.96	10.1	16.5
Моды (<i>s</i>)	2	4	6	8	10	12	14
ω_n	0.315	0.626	0.930	1.215	1.457	1.635	1.766
$\Delta\omega_n$ (%)	-0.15	0.32	1.32	3.31	7.22	13.3	19.7

При $L = 20$ и $\nu = 0.3$ значения собственных частот ω_n для первой зоны приведены в табл. 3.1.2 вместе с указанием симметрии (*s*) или антисимметрии (*a*) функции $u_1^{(0)}$ относительно середины $x_1 = 10$ центральной линии балки. В таблице для каждой моды дано также рассогласование по частотам

$$\Delta\omega_n = \frac{\omega_n^c - \omega_n}{\omega_n^c} \quad (3.1.34)$$

между классической моделью $\omega_n^c = 0.05\pi n$ и моделью полученной вариационным и проекционным подходом для $M = 1$. При приближении к второй зоне эта величина растет (почти до 20% для 14-ой моды).

Волновые числа $\text{Im } \lambda_1(\omega_n)$ для первой зоны показаны на рис. 3.1.2 кружками, для второй зоны – треугольниками, а для третьей – квадратами. Отметим, что в узкой второй частотной зоне расположено довольно много собственных частот, при этом нарушается порядок следования четных и нечетных мод. В третьей зоне поведение частот становится ещё более нерегулярным, частоты с разной четностью могут принимать очень близкие значения. Для наглядности, поведение частот в трех зонах в зависимости от номера моды показано кружками на рис. 3.1.3.

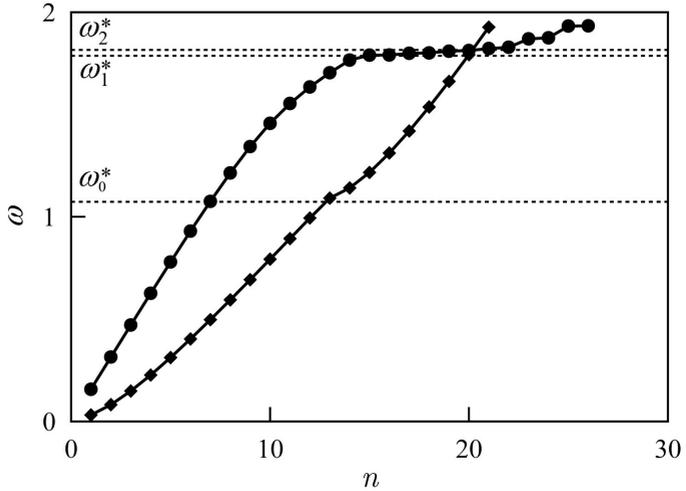


Рис. 3.1.3. Собственные частоты защемленной упругой балки.

3.1.6. Собственные частоты и формы поперечных колебаний упругой балки. Рассмотрим поперечные колебания балки. Четность или нечетность степеней разложения функций по переменной y в соотношениях (3.1.17) определяется из табл. 3.1.1. Выпишем соответствующие аппроксимации перемещений и напряжений

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \sum_{j=0}^M y^{2j+1} \sigma_{11}^{(2j+1)}(x_1), & u_1 &= \sum_{j=0}^M y^{2j+1} u_1^{(2j+1)}(x_1), \\
 \sigma_{12} &= \sum_{j=0}^M y^{2j} (1 - y^2) \sigma_{12}^{(2j)}(x_1), & u_2 &= \sum_{j=0}^M y^{2j} u_2^{(2j)}(x_1), \\
 \sigma_{22} &= \sum_{j=0}^M y^{2j+1} (1 - y^2) \sigma_{22}^{(2j+1)}(x_1).
 \end{aligned} \tag{3.1.35}$$

Из выражений (3.1.35) следует, что дифференциальный порядок системы уравнений для изгиба равен $4M + 2$.

Для минимально возможной степени аппроксимаций $M = 0$ система (3.1.28) сводится к одному биквадратному дифференциальному урав-

нению от функции перемещений $u_2^{(0)}(x_1)$:

$$\frac{d^4 u_2^{(0)}}{dx_1^4} + a(\omega, \nu) \frac{d^2 u_2^{(0)}}{dx_1^2} - b(\omega, \nu) u_2^{(0)} = 0, \quad (3.1.36)$$

$$a = (1 + \nu)(3 - \nu)\omega^2, \quad b = (1 - \nu^2)(3 - 2(1 + \nu)\omega^2)\omega^2.$$

Отметим, что при достаточно малых собственных частотах $\omega \ll 1$ уравнение (3.1.36) приближается к классическому уравнению изгиба балки Эйлера–Бернулли только в случае $\nu = 0$. Как и в балке Тимошенко [81], в рассматриваемой модели допускаются не только изгиб центральной линии, но и сдвиговые движения $x_2 u_1^{(1)}(x_1)$.

На рис. 3.1.4 показаны частотно-волновые характеристики поперечных движений упругой балки для коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$. Существует критическая частота $\omega_0^* = 1.074$ (пунктирная прямая), разделяющая две зоны: $\omega \in (0, \omega_0^*)$ и $\omega \in (\omega_0^*, +\infty)$. Сплошные кривые соответствуют мнимым корням характеристического уравнения $|\text{Im } \lambda_j(\omega)|$, а штриховые – действительным $|\text{Re } \lambda_j(\omega)|$.

Как и для модели Эйлера–Бернулли в первой зоне два корня мнимые, а два – комплексные, но абсолютные значения мнимых и действительных корней не совпадают. Во второй зоне все собственные числа принимают чисто мнимые значения. При $\omega = \omega_0^*$ два корня обращаются в нуль. Для сравнения штрихпунктирной кривой отображается частотно-волновая характеристика балки Бернулли: $|\lambda^c| = \sqrt[4]{3\omega^2}$. При $\omega \rightarrow 0$ кривые $|\lambda_j(\omega)|$ слипаются и близко подходят (но не прилипают) к классической кривой.

Рассмотрим поперечные колебания упругой балки жестко зацеленной с обоих концов

$$x_1 = 0, L : \quad u_1^{(1)}(x_1) = u_2^{(0)}(x_1) = 0.$$

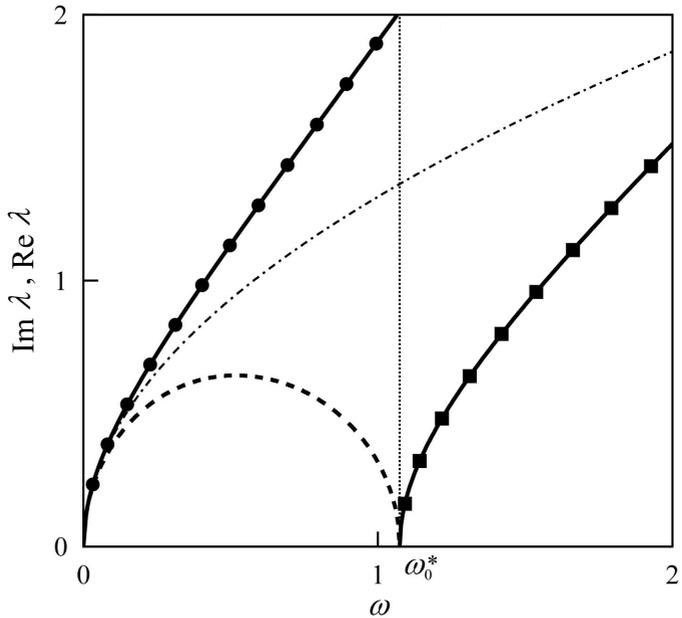


Рис. 3.1.4. Частотно-волновые характеристики поперечных движений упругой балки.

Как и в п. 3.1.5, выберем длину балки $L = 20$. Для выбранных параметров и краевых условий в первой зоне ($\omega_n < \omega_0^*$) расположены 12 собственных частот ω_n . Эти частоты с пометкой четности (s) или нечетности (a) функции изгиба центральной линии балки $u_2^{(0)}(x_1)$ приведены в табл. 3.1.3. Соответствующие им волновые числа $|\text{Im } \lambda_j(\omega_n)|$ показаны кружками на рис. 3.1.4. Собственные числа во второй зоне ($\omega_n > \omega_0^*$, $n > 12$) помечены на рисунке квадратами. Для сравнения с продольными колебаниями ромбами на рис. 3.1.3 изображена зависимость значения собственной частоты от номера поперечной моды n .

В табл. 3.1.3 приведены также результаты сравнения полученного решения с решением соответствующей классической задачи о собствен-

Таблица 3.1.3: Частоты поперечных колебаний защемленной балки.

Мода (s)	1	3	5	7	9	11
ω_n	0.0319	0.1489	0.3125	0.4976	0.6931	0.8935
$\Delta\omega_n$ (%)	1.27	14.7	27.5	37.9	46.1	52.6
Моды (a)	2	4	6	8	10	12
ω_n	0.0821	0.2269	0.4032	0.5945	0.7929	0.9942
$\Delta\omega_n$ (%)	7.81	21.3	33.0	42.2	49.5	55.3

ных колебаниях защемленной с обоих концов балки

$$\frac{d^4 u_2^{(0)}}{dx^4} + 3\omega^2 u_2^{(0)} = 0,$$

$$x_1 = 0, L : u_2^{(0)}(x_1) = \frac{du_2^{(0)}}{dx} = 0.$$

Собственные числа для этой задачи находятся из решения трансцендентного уравнения

$$\cos L\lambda^c \operatorname{ch} L\lambda^c = 1, \quad \lambda^c = \sqrt[4]{3\omega^2}.$$

Как видно из таблицы, даже для первой моды относительное расхождение (3.1.34) между собственными частотами, полученными с помощью проекционного подхода и в рамках модели Эйлера–Бернулли, составляет более одного процента, а уже с 11-ой частоты превышает 50%.

§3.2. Модели свободных продольных и поперечных колебаний упругих балок

3.2.1. Постановка задачи о собственных колебаниях свободной упругой балки. Как и в §3.1, в рамках двумерной линейной теории упругости рассмотрим собственные колебания изотропной балки, занимающей в плоскости Ox_1x_2 прямоугольную область (см. рис. 3.2.1)

$$\Omega = \{x : -a_1 < x_1 < a_1, -a_2 < x_2 < a_2\}, \quad x = \{x_1, x_2\}.$$

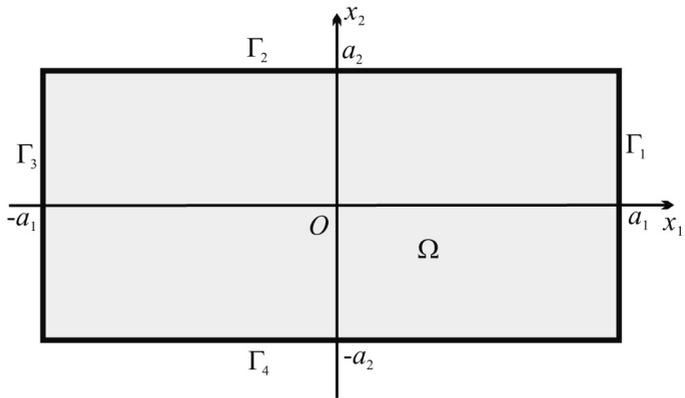


Рис. 3.2.1. Область, занимаемая упругой балкой.

Амплитуды перемещений $\mathbf{u}(x)$, напряжений $\sigma(x)$ и деформаций $\varepsilon(x)$ введены согласно (3.1.1) и (3.1.2). В плосконапряженном состоянии закон Гука и соотношения между скоростями и импульсами запишутся в виде

$$\begin{aligned} \xi_{11} &= \varepsilon_{11} - \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) = 0, \\ \xi_{22} &= \varepsilon_{22} - \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) = 0, \\ \xi_{12} &= \varepsilon_{12} - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} = 0 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

и

$$\begin{aligned}\eta_1(x) &= \omega u_1 + \frac{1}{\rho\omega} \left(\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} \right) = 0, \\ \eta_2(x) &= \omega u_2 + \frac{1}{\rho\omega} \left(\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} \right) = 0.\end{aligned}\tag{3.2.2}$$

Пусть граница Γ области Ω свободна от нагрузок. Это означает, что заданы однородные граничные условия на сторонах балки

$$x_2 = \pm a_2 : \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = 0\tag{3.2.3}$$

и

$$x_1 = \pm a_1 : \quad \sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{12} = 0.\tag{3.2.4}$$

Ставится задача о нахождении собственных частот ω , перемещений $u(x)$ и напряжений $\sigma(x)$, которые удовлетворяют уравнения состояния (3.2.1) и (3.2.2), а также граничные условия (3.2.3) и (3.2.4).

Так как на перемещения в данной задаче не накладываются никакие ограничения, можно выразить их, используя соотношения (3.2.2), через напряжения

$$u = -\frac{1}{\rho\omega^2} \nabla \cdot \sigma.\tag{3.2.5}$$

Подставляя перемещения из (3.2.5) в уравнения состояния (3.2.1), получим тензорное уравнение, определяющее поля напряжений в области Ω , в виде

$$\xi = -\frac{1}{2\omega^2} (\zeta + \zeta^T) - \mathbf{C}^{-1} : \sigma = 0, \quad \zeta = \nabla (\rho^{-1} \nabla \cdot \sigma).$$

В проекционном подходе требуется, чтобы напряжения $\sigma \in \mathcal{T}_1$ точно удовлетворяли граничные условия (3.2.3), (3.2.4) и доставляли нулевые значения интегральным проекциям тензора состояния ξ на выбранные тензорные поля тестовых функций $\tau(x) \in \mathcal{T}_2$:

$$\Upsilon_\xi = \int_{-a_1}^{a_1} \Theta_\xi dx_1 = 0, \quad \Theta_\xi = \int_{-a_2}^{a_2} \xi(\sigma) : \tau(x) dx_2, \quad \forall \tau \in \mathcal{T}_2.\tag{3.2.6}$$

Как и в предыдущем параграфе, используем конечномерное представление компонент тензора напряжений σ по координате x_2 в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \sum_{k=0}^N y^k \sigma_{11}^{(k)}(x_1), & \sigma_{12} &= \sum_{k=0}^{N-1} y^k (1-y^2) \sigma_{12}^{(k)}(x_1), \\ \sigma_{22} &= \sum_{k=0}^N y^k (1-y^2) \sigma_{22}^{(k)}(x_1), & y &= \frac{x_2}{a_2},\end{aligned}\tag{3.2.7}$$

где $\sigma_{ij}^{(k)}$, $i, j = 1, 2$, — неизвестные функции координаты x_1 . Такие напряжения автоматически удовлетворяют граничные условия (3.2.3).

Согласно методу Галеркина [80] пространство тестовых функций \mathcal{T}_2 должно совпадать с пространством пробных функций \mathcal{T}_1 . Воспользуемся этим подходом и определим компоненты тензора τ как

$$\begin{aligned}\tau_{11} &= \sum_{k=0}^N y^k \tau_{11}^{(k)}(x_1), & \tau_{12} &= \sum_{k=0}^{N-1} y^k (1-y^2) \tau_{12}^{(k)}(x_1), \\ \tau_{22} &= \sum_{k=0}^N y^k (1-y^2) \tau_{22}^{(k)}(x_1).\end{aligned}\tag{3.2.8}$$

Соберем пробные и тестовые функции в три вектора

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_1 &= \left[\sigma_{11}^{(0)}, \sigma_{12}^{(0)}, \dots, \sigma_{11}^{(N-1)}, \sigma_{12}^{(N-1)}, \sigma_{11}^{(N)} \right]^T, \\ \mathbf{z}_2 &= \left[\sigma_{22}^{(0)}, \dots, \sigma_{22}^{(N)} \right]^T, \\ \mathbf{y} &= \left[\tau_{11}^{(0)}, \tau_{22}^{(0)}, \tau_{12}^{(0)}, \dots, \tau_{11}^{(N-1)}, \tau_{22}^{(N-1)}, \tau_{12}^{(N-1)}, \tau_{11}^{(N)}, \tau_{22}^{(N)} \right]^T,\end{aligned}$$

где $\mathbf{z}_1(x_1) \in \mathbb{R}^{2N+1}$, $\mathbf{z}_2(x_1) \in \mathbb{R}^{N+1}$ и $\mathbf{y}(x_1) \in \mathbb{R}^{3N+2}$.

С учетом этих обозначений подставим выражения для напряжений (3.2.7) и (3.2.8) в интеграл Θ_ξ из (3.2.6). После интегрирования по x_2 и дифференцирования по вектору \mathbf{y} получим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \Theta_\xi(\mathbf{z}'_1, \mathbf{z}'_2, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{y}, \omega, x_1)}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{0}.\tag{3.2.9}$$

Учитывая структуру уравнений состояния (3.2.1) и (3.2.2), можно показать, что дифференциальный порядок системы (3.2.9) совпадает с количеством краевых условий

$$x_1 = \pm a_1 : \quad \mathbf{z}_1 = \mathbf{0}, \quad (3.2.10)$$

вытекающих непосредственно из граничных соотношений (3.2.4).

Для аппроксимаций (3.2.7) система уравнений (3.2.9) с краевыми условиями (3.2.10) используется для нахождения собственных частот ω и собственных векторов $\mathbf{z}_j(x_1)$, $j = 1, 2$, по которым согласно (3.2.5) и (3.2.7) восстанавливаются поля амплитуд перемещений $\mathbf{u}(x)$ и напряжений $\sigma(x)$.

Для оценки качества приближений, получаемых предложенным способом, можно использовать функционал невязки, аналогичный введенному в §1.3,

$$\Phi_0^\omega[\sigma, \omega] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\xi : C : \xi) d\Omega.$$

Энергия системы $\Psi_\sigma^\omega[\sigma, \omega]$ выражается через напряжения согласно (3.1.14). Чтобы однозначно определить собственные векторные функции $\mathbf{z}_j(x_1)$, решение системы (3.2.9), (3.2.10) можно выбирать с условием

$$\Psi_\sigma^\omega = 1.$$

Тогда относительная ошибка в определении собственных форм колебаний совпадает с величиной энергетического функционала:

$$\Delta = \Phi_0^\omega[\sigma, \omega]. \quad (3.2.11)$$

Используя симметрию области Ω и граничных условий (3.2.3), (3.2.4) относительно координатных осей Ox_1 и Ox_2 , поставленную задачу на собственные значения (3.2.9), (3.2.10) можно декомпозировать на четыре независимые подзадачи. Указанные в предыдущем разделе продольные и поперечные колебания (см. табл. 3.1.1) делятся в свою очередь

на две подгруппы движений согласно следующим свойствам четности неизвестных функций

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(k)}(x_1) &= \pm\sigma_{11}^{(k)}(-x_1), \\ \sigma_{12}^{(k)}(x_1) &= \mp\sigma_{12}^{(k)}(-x_1), \\ \sigma_{22}^{(k)}(x_1) &= \pm\sigma_{22}^{(k)}(-x_1).\end{aligned}\tag{3.2.12}$$

Интересно отметить связь между предложенным в этом разделе проекционным подходом и известным вариационным принципом Хеллингера–Рейсснера [25]. Сформулируем этот принцип для рассматриваемой задачи на собственные значения следующим образом. Амплитуды собственных перемещений $\mathbf{u}(x)$ и напряжений $\sigma(x)$ должны строго удовлетворять граничные условия (3.2.3), (3.2.4) и доставлять стационарные значения функционалу

$$\begin{aligned}\Phi_{HR}[\mathbf{u}, \sigma, \omega] &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\rho\omega^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2\sigma : \varepsilon - \sigma : \mathbf{C}^{-1} : \sigma) d\Omega, \\ \varepsilon &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T).\end{aligned}$$

Выпишем условия стационарности этого функционала:

$$\begin{aligned}\delta_{\mathbf{u}}\Phi_{HR} &= \int_{\Omega} (\rho\omega^2 \mathbf{u} + \nabla \cdot \sigma) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega = 0, \\ \delta_{\sigma}\Phi_{HR} &= \int_{\Omega} (\varepsilon - \mathbf{C}^{-1} : \sigma) : \delta \sigma d\Omega = 0.\end{aligned}\tag{3.2.13}$$

Для нахождения приближенных решений в данной постановке будем выбирать перемещения $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ и напряжения $\sigma \in \mathcal{T}_0$ так, чтобы $\rho^{-1}\omega^{-2}\nabla \cdot \sigma \in \mathcal{V}$. Здесь \mathcal{V} и \mathcal{T}_0 — некоторые линейные пространства допустимых перемещений и напряжений. Тогда первое условие (3.2.13) можно однозначно разрешить относительно вектора \mathbf{u} . Как следствие имеем выражение для перемещений (3.2.5). Положим $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$, где \mathcal{T}_1 и \mathcal{T}_2 — пространства соответственно аппроксимаций (3.2.7) и тестовых функций (3.2.8), и заменим вариацию $\delta\sigma$ на тензор τ в (3.2.13). В результате получается интегральное равенство (3.2.6).

3.2.2. Упрощенная модель продольных колебаний свободной упругой балки. Рассмотрим собственные движения однородной упругой балки. Как и в предыдущем разделе, зафиксируем безразмерные параметры: $E = \rho = a_2 = 1$. В качестве простейшей модели продольных колебаний балки выберем нулевое приближение $N = 1$ в (3.2.7).

В этом случае тензор напряжений зависит только от двух неизвестных функций $\sigma_{11}^{(0)}(x_1)$ и $\sigma_{22}^{(0)}(x_1)$. Система (3.2.9) сводится к одному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 \sigma_{11}^{(0)}}{dx^2} + \lambda^2(\omega) \sigma_{11}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{22}^{(0)} = \alpha(\omega) \sigma_{11}^{(0)}, \quad (3.2.14)$$

где волновое число λ и множитель α зависят от частоты ω и коэффициента Пуассона ν согласно

$$\lambda^2 = \omega^2 \left(1 - \frac{2}{3} \nu \alpha(\omega) \right), \quad \alpha = \frac{5}{2} \frac{\nu \omega^2}{2\omega^2 - 5}. \quad (3.2.15)$$

Из (3.2.10) следуют краевые условия

$$x_1 = \pm a_1 : \quad \sigma_{11}^{(0)} = 0. \quad (3.2.16)$$

В отличие от классического уравнения продольных колебаний тонкого стержня, дифференциальное уравнение в напряжениях (3.2.14) содержит параметр λ , зависящий нелинейно от частоты собственных колебаний ω , а также от параметра задачи ν . Подобные модели можно получить и другими способами, например с помощью асимптотического подхода [50].

Значения $\lambda^2(\omega)$ положительны при $\omega \in (0, \omega_1^*) \cup (\omega_2^*, \infty)$ и отрицательны при $\omega \in (\omega_1^*, \omega_2^*)$. Критические частоты, которые делят частотную область на три зоны, заданы как

$$\omega_1^* = \sqrt{\frac{15}{6 - 5\nu}}, \quad \omega_2^* = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Отметим, что значения ω_1^* не превышают ω_2^* ($\omega_1^* = \omega_2^*$ при $\nu = 0$), т.к. для обычных материалов $0 \leq \nu \leq 0.5$.

Можно показать, что при $\lambda^2(\omega) \leq 0$ нетривиальных решений краевой задачи на собственные значения (3.2.14)–(3.2.16) не существует. При $\lambda^2(\omega) > 0$ в зависимости от свойств симметрии (3.2.12) решение имеет вид

$$\sigma_{11}^{(0)} = c \cos(\lambda x) \quad \vee \quad \sigma_{11}^{(0)} = c \sin(\lambda x) .$$

Здесь не учитываются свободные движение балки как абсолютно твердого тела.

Характеристическое уравнение для определения собственных частот ω может быть записано следующим образом:

$$2a_1\lambda(\omega) = \pi n, \quad n \in \mathbb{N} . \quad (3.2.17)$$

Два положительных корня ω_- и ω_+ (первая и третья зоны) уравнения (3.2.17) находятся в явном виде как функции от $\lambda \geq 0$:

$$\omega_{\pm}(n) = \sqrt{\frac{15 + 6\lambda_n^2 \pm \sqrt{(15 - 6\lambda_n^2)^2 + 300\nu^2\lambda_n^2}}{2(6 - 5\nu^2)}} , \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{2a_1} .$$

На рис. 3.2.2 сплошными кривыми показаны частотно-волновые характеристики $\lambda(\omega_{\pm})$ для первой и третьей зоны при $\nu = 0.3$. Частотные зоны отделены на рис. 3.2.2 пунктирными линиями. При стремлении коэффициента Пуассона ν к нулю, значение волнового числа стремится к классической характеристике $\lambda \rightarrow \omega_{\pm}$, а интервал второй зоны уменьшается: $\omega_1^* \rightarrow \omega_2^*$. При этом функции $\omega_{\pm}(\lambda)$ являются монотонно возрастающими, $\omega_-(0) = 0$, $\omega_+(0) = \omega_2^*$ и для больших значений n справедливы следующие асимптотические соотношения:

$$\omega_-|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow \omega_1 , \quad \omega_+|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow \sqrt{\frac{6}{6 - 5\nu^2}} \lambda_n .$$

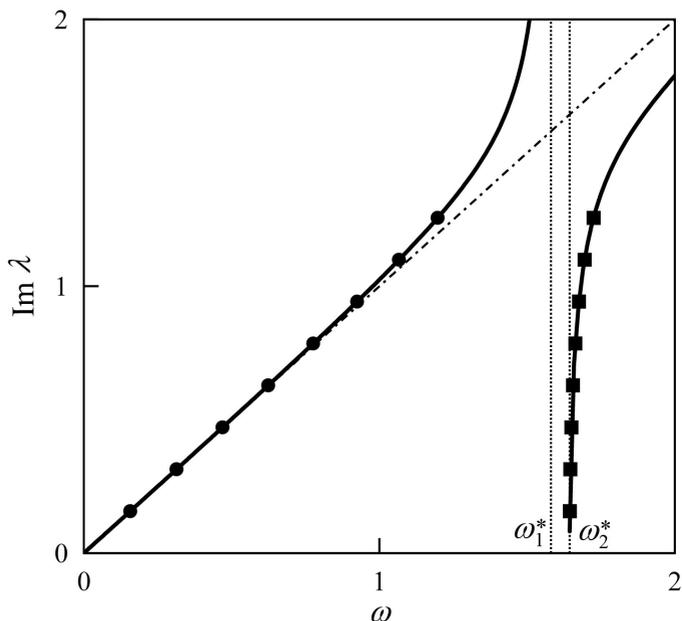


Рис. 3.2.2. Частотно-волновые характеристики продольных колебаний упругой балки при $M = 0$.

При $a_1 = 10$ и $\nu = 0.3$ значения 8 нижних собственных частот $\omega_-(n)$ для первой зоны приведены в табл. 3.2.1. Там же обозначена симметрия (s) или антисимметрия (a) функции $\sigma_{11}^{(0)}(x_1)$ относительно середины центральной линии балки $x_1 = 0$. Эти же значения частот $\omega_-(\lambda_n)$ вместе с частотами третьей зоны $\omega_+(\lambda_n)$ показаны на рис. 3.2.2 соответственно кружками и квадратами.

Важной характеристикой собственных форм колебаний является отношение нормальных напряжений α , определенное в (3.2.15). Зависимость коэффициента α от номера моды n для первой и третьей частотных зон отражена на рис. 3.2.3 соответственно сплошной и штриховой кривой. В первой зоне нормальные напряжения изменяются в противофазе ($\alpha < 0$), абсолютное значение $|\alpha|$ для низших частот мало и моно-

Таблица 3.2.1: Частоты нижней ветви продольных колебаний.

Мода (s)	1	3	5	7
ω_n^-	0.1570	0.4695	0.7762	1.0667
$\Delta\omega_n$ (%)	$3 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-3}$	0.034	0.22
Моды (a)	2	4	6	8
ω_n^-	0.3137	0.6240	0.9246	1.1976
$\Delta\omega_n$ (%)	$5 \cdot 10^{-4}$	0.011	0.090	0.51

тонно увеличивается с ростом номера n . В третьей зоне $\alpha(n) > 0$ – строго убывающая функция, величина нормальных напряжений $\sigma_{22}^{(0)}(x_1)$ для малых значений n значительно превышает продольные напряжения $\sigma_{11}^{(0)}(x_1)$.

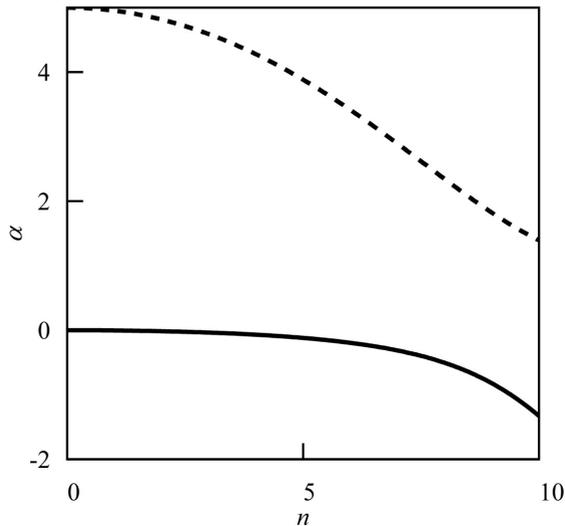


Рис. 3.2.3. Отношение нормальных напряжений $\alpha(n)$.

Как было предложено в предыдущем параграфе, качество полученных полей перемещений можно явно оценить с помощью величины от-

носительной энергетической ошибки Δ , введенной в (3.2.11). При заданных параметрах системы для первой частотной зоны эта ошибка показана на рис. 3.2.4 треугольниками, соединенными для наглядности сплошными линиями. Ошибка аппроксимации быстро растет с увеличением номера моды n .

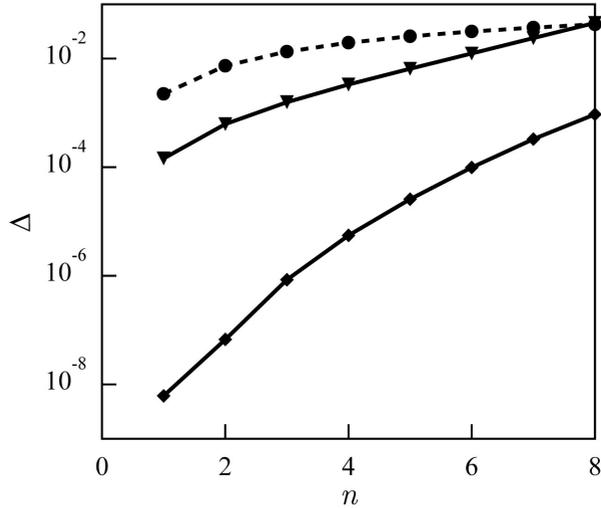


Рис. 3.2.4. Относительная энергетическая ошибка $\Delta(n)$ в определении собственных форм колебаний свободной упругой балки.

3.2.3. Уточненная модель продольных колебаний балки. Для того, чтобы повысить точность приближенных решений, необходимо увеличить размерность аппроксимации. При $N = 2$ компоненты тензора напряжений $\sigma(x)$ для продольных колебаний определяются пятью неизвестными функциями в форме

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^{(0)}(x_1) + x_2^2 \sigma_{11}^{(2)}(x_1), \quad \sigma_{12} = (1 - x_2^2) x_2 \sigma_{12}^{(1)}(x_1),$$

$$\sigma_{22} = (1 - x_2^2) \left(\sigma_{22}^{(0)}(x_1) + x_2^2 \sigma_{22}^{(2)}(x_1) \right).$$

Соответствующие однородные граничные условия имеют вид

$$x_1 = \pm a_1 : \sigma_{11}^{(0)} = \sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{12}^{(1)} = 0.$$

Как и для проекционной модели, рассмотренной в §3.1, система (3.2.9) при $N = 2$ сводится к бикубическому дифференциальному уравнению, правда относительно функции $\sigma_{11}^{(0)}(x_1)$, которая задает нормальные напряжения вдоль оси Ox_1 на центральной линии $x_2 = 0$.

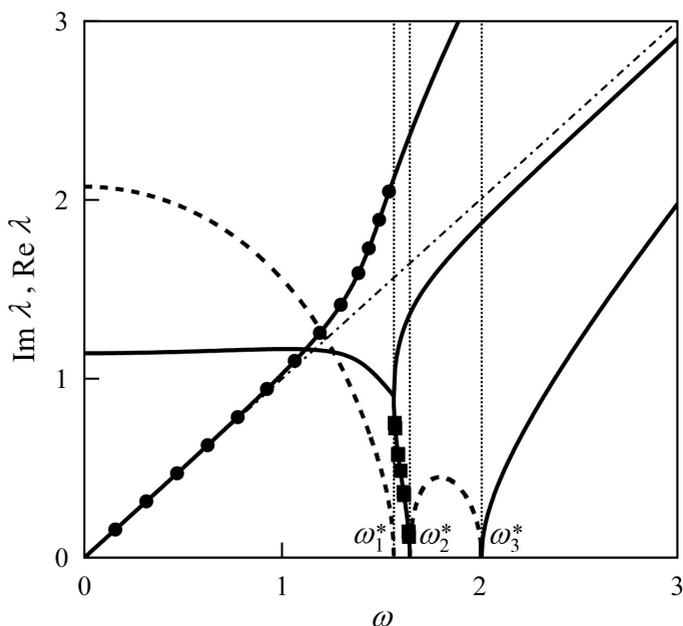


Рис. 3.2.5. Частотно-волновые характеристики продольных колебаний.

Корни характеристического уравнения $\lambda_j(\omega)$, $j = 1, \dots, 6$, для выбранного приближения показаны при $\nu = 0.3$ на рис. 3.2.5 ($|\text{Im } \lambda_j|$ – сплошные кривые, $|\text{Re } \lambda_j|$ – штриховые кривые). При критических значениях частоты

$$\omega_1^* = 1.566, \quad \omega_2^* = 1.647, \quad \omega_3^* = \sqrt{\frac{105}{26}} = 2.010$$

происходит бифуркация решения. Это определяет четыре зоны колебаний, границы которых представлены на рис. 3.2.5 пунктирными линиями. В первой зоне ($\omega < \omega_1^*$) два корня – чисто мнимые, четыре остальных – комплексные. Во второй ($\omega_1^* < \omega < \omega_2^*$) и четвертой ($\omega_3^* < \omega$) зонах все корни чисто мнимые, а в третьей ($\omega_2^* < \omega < \omega_3^*$) – четыре мнимых и два действительных корня.

По сравнению с балочной моделью заданной в §3.1 в перемещениях и напряжениях (см. рис. 3.1.2) заметно, что границы частотных зон сдвинулись влево, а интервал второй зоны увеличился.

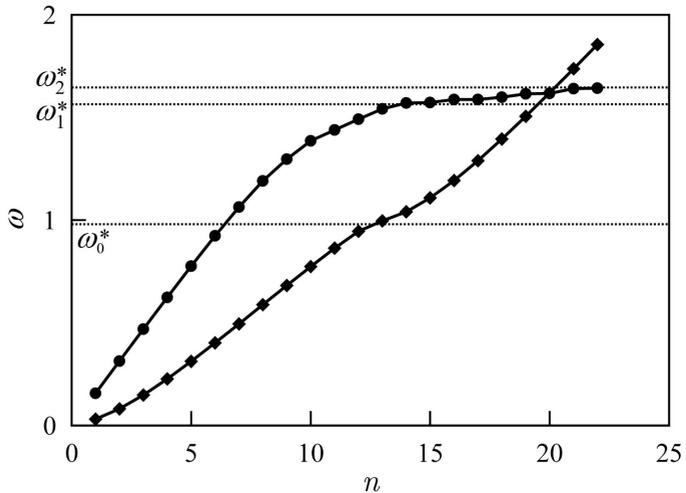


Рис. 3.2.6. Собственные частоты свободной упругой балки.

Для $a_1 = 10$ значения собственных частот продольных колебаний, расположенных в первой и второй зонах, показаны на рис. 3.2.6 ломаной линией с кружками в зависимости от номера моды. Эти же значения отражены на рис. 3.2.5 кружками и квадратами. В первой зоне моды с четной и нечетной определяющей функцией $\sigma_{11}^{(0)}(x_1)$ сменяют друг друга. Во второй зоне последовательность смены симметрии функций

напряжений нарушается, собственные частоты с разными свойствами форм оказываются близки друг к другу. Отметим, что для этого типа колебаний характерно уменьшение минимального абсолютного значения волнового числа при увеличении номера моды.

Точность в определении частот для данного приближения можно определить неявно по изменению их значений по сравнению с упрощенной балочной моделью ($N = 1$). В табл. 3.2.1 приведены значения относительного изменения частот при переходе к более точной модели. Все первые 8 частот мало меняются, немного опускаясь вниз.

Как показано на рис. 3.2.4 (сплошная ломаная, помеченная ромбами), точность определения форм колебаний увеличивается на несколько порядков для этих мод по сравнению с более грубой моделью. Как всегда, относительная ошибка $\Delta(n)$ очень быстро возрастает с увеличением номера моды.

3.2.4. Модель поперечных колебаний свободной упругой балки. Рассмотрим поперечные колебания балки и зададим минимальный порядок $N = 1$ в приближении (3.2.7). С учетом свойств симметрии решения относительно оси Ox_2 , которые заданы в табл. 3.1.1, выпишем соответствующие аппроксимации напряжений

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= x_2 \sigma_{11}^{(1)}(x_1), & \sigma_{12} &= (1 - x_2^2) \sigma_{12}^{(0)}(x_1), \\ \sigma_{22} &= x_2 (1 - x_2^2) \sigma_{22}^{(1)}(x_1).\end{aligned}$$

Для этой степени аппроксимаций система (3.2.9) сводится к биквадратному дифференциальному уравнению от функции касательных напряжений $\sigma_{12}^{(0)}(x_1)$:

$$\begin{aligned}a(\omega, \nu) \frac{d^4 \sigma_{12}^{(0)}}{dx_1^4} + b(\omega, \nu) \frac{d^2 \sigma_{12}^{(0)}}{dx_1^2} - c(\omega, \nu) \sigma_{12}^{(0)} &= 0, \\ a = 1 - \frac{4\omega^2}{35}, & \quad b = \frac{17 + 10\nu}{5} \omega^2 - \frac{2(30 + 20\nu - 7\nu^2)}{175} \omega^4, \\ c = 3\omega^2 + \frac{94 + 84\nu - 7\nu^2}{35} \omega^4 - \frac{4(1 + \nu)(10 - 7\nu^2)}{175} \omega^6.\end{aligned} \quad (3.2.18)$$

Можно показать, что при малых собственных частотах ($\omega \ll 1$) уравнение (3.2.18) асимптотически приближается к классическому уравнению изгиба балки Эйлера–Бернулли для любых значений $\nu = 0$.

На рис. 3.2.7 показаны частотно-волновые характеристики поперечных движений упругой балки для коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$. Критическая частота $\omega_0^* = 0.9806$ (пунктирная прямая) разделяет две зоны: $\omega \in (0, \omega_0^*)$ и $\omega \in (\omega_0^*, +\infty)$. Сплошные кривые соответствуют мнимым корням характеристического уравнения $|\text{Im } \lambda_j(\omega)|$, а штриховые – действительным $|\text{Re } \lambda_j(\omega)|$.

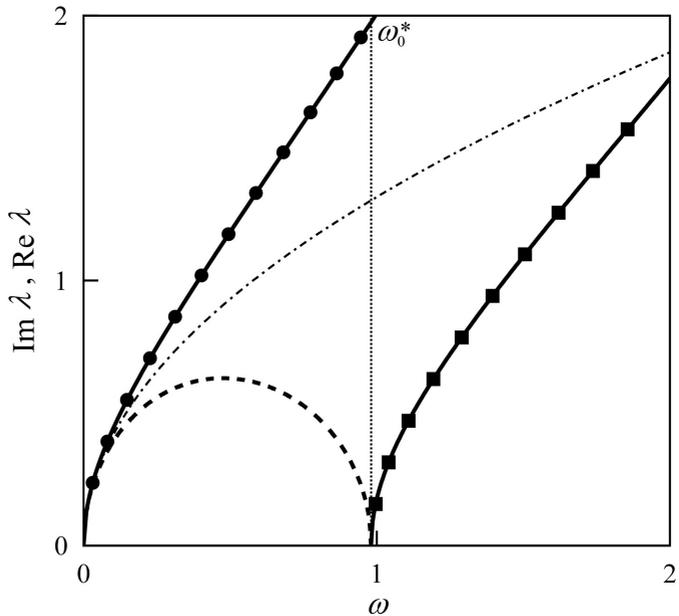


Рис. 3.2.7. Частотно-волновые характеристики поперечных движений.

Хотя, как и для модели Эйлера–Бернулли, в первой зоне два корня мнимые, а два – комплексные, однако абсолютные значения мнимых и действительных корней не совпадают. Решения ищутся в зависимости

от четности (s) или нечетности (a) в форме

$$\sigma_{12} = c_1 \cos |\lambda_1| x + c_2 \operatorname{ch} |\lambda_2| x \quad \vee \quad \sigma_{12} = c_1 \sin |\lambda_1| x + c_2 \operatorname{sh} |\lambda_2| x.$$

Во второй зоне все собственные числа принимают чисто мнимые значения и функция, задающая касательные напряжения, имеет вид

$$\sigma_{12} = c_1 \cos |\lambda_1| x + c_2 \cos |\lambda_2| x \quad \vee \quad \sigma_{12} = c_1 \sin |\lambda_1| x + c_2 \sin |\lambda_2| x.$$

При $\omega = \omega_0^*$ два корня обращаются в нуль. Штрихпунктирной кривой на рис. 3.2.7 отображается частотно-волновая характеристика балки Бернулли: $|\lambda^c| = \sqrt[4]{3\omega^2}$. При малых значениях частоты ($\omega \rightarrow 0$) кривые $|\lambda_j(\omega)|$ слипаются с этой кривой.

Выберем полудлину балки равной $a_1 = 10$. Для этого геометрического параметра в первой зоне ($\omega_n < \omega_0^*$) расположены 12 собственных частот ω_n . Эти частоты с пометкой симметрии (s) или антисимметрии (a) касательных напряжений $\sigma_{12}^{(0)}(x_1)$ приведены в табл. 3.2.2.

В таблице также указаны относительные ошибки Δ определения собственных форм продольных колебаний. Для сравнения, точность решения для первых восьми мод в зависимости от номера собственной частоты n отражена на рис. 3.2.4 с помощью штриховой ломаной, помеченной кружками. Как видно из рисунка, для данного приближения ($N = 1$) ошибка в определении собственных форм поперечных движений выше соответствующей ошибки в определении продольных колебаний. Как показывают расчеты основной вклад в эту ошибку вносит недиагональная компонента тензора состояния $\xi_{12}(x)$ (см. (3.2.1)). Для увеличения точности необходимо повышать размерность аппроксимаций.

Собственные волновые числа $|\operatorname{Im} \lambda_j(\omega_n)|$ показаны на рис. 3.2.7 кружками для первой зоны и квадратами для второй зоны ($\omega_n > \omega_0^*$, $n > 12$). Для сравнения с продольными колебаниями на рис. 3.2.6 изображена

Таблица 3.2.2: Собственные частоты поперечных колебаний балки.

Мода (a)	1	3	5	7	9	11
ω_n	0.0312	0.1485	0.3125	0.4949	0.6816	0.8634
Δ (%)	0.23	1.35	2.58	3.73	4.84	6.08
Моды (s)	2	4	6	8	10	12
ω_n	0.0813	0.2269	0.4025	0.5883	0.7739	0.9458
Δ (%)	0.74	1.98	3.16	4.28	5.43	7.02

зависимость значения собственной частоты от номера моды n . Отметим, что для выбранных параметров задачи собственные частоты продольных и поперечных колебаний почти совпадают при $n = 20$.

§3.3. Моделирование и анализ собственных колебаний упругой призматической балки

3.3.1. Проекционный подход к трехмерным задачам о собственных колебаниях упругих тел. Для построения достоверных балочных моделей в рамках линейной теории упругости важно учитывать пространственное распределение полей перемещений и напряжений. С прикладной точки зрения, распространенный класс упругих тел балочного типа представляют стержни призматической формы, валы, трубы и т.п. Задачи о собственных движениях таких тел могут обладать свойствами симметрии, которые позволяют уменьшить размерность исходной системы и применить после определенной модификации интегральные подходы, рассмотренные в предыдущих параграфах этой главы.

При выводе конечномерных систем дифференциальных уравнений, описывающих с разной степенью точности собственные колебания прямолинейной балки с прямоугольным поперечным сечением, применяется подход, описанный в §3.1. В этом подходе используются специальные интегральные проекции уравнений состояния, связывающих тензоры напряжений и деформаций, а также векторы скоростей точек тела и плотности импульса.

Рассмотрим упругое тело, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда длиной $2a_1$ и размерами поперечного сечения $2a_2 \times 2a_3$, при этом $a_1 \gg a_2 + a_3$ (см. рис. 3.3.1). Введем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$, $x = \{x_1, x_2, x_3\}$, начало которой расположено в середине тела, а оси Ox_k параллельны ребрам длиной $2a_k$, $k = 1, 2, 3$. Область, занимаемая телом, определяется как

$$\Omega = \{x : x_k \in (-a_k, a_k), k = 1, 2, 3\} .$$

Ограничим анализ движений упругого тела (балки) случаем собственных колебаний, описываемых системой уравнений линейной те-

рии упругости [73]. Перепишем их в виде

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = \nabla \cdot \sigma, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (3.3.1)$$

$$\mathbf{p} = \rho(x) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad \sigma = \mathbf{C}(x) : \varepsilon. \quad (3.3.2)$$

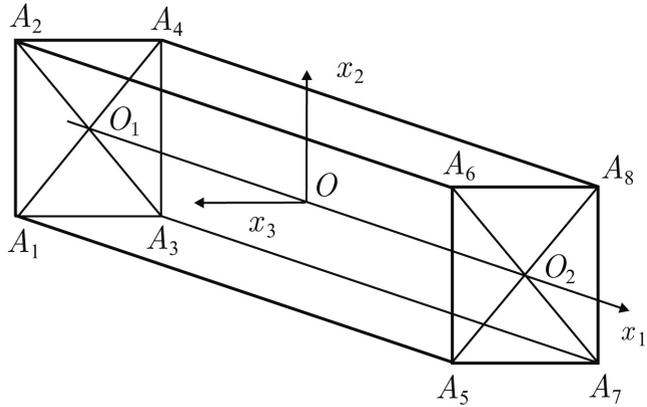


Рис. 3.3.1. Призматическая область, занимаемая упругой балкой.

Первое уравнение (3.3.1) определяет скорость изменения вектора плотности импульса \mathbf{p} через дивергенцию тензора напряжений σ (уравнение изменения импульса), второе соотношение задает линейный тензор деформаций ε через вектор перемещений \mathbf{u} . Соотношения (3.3.2) представляют собой уравнения состояния, связывающие напряжения σ и деформации ε (закон Гука), а также плотности импульса \mathbf{p} и скорости точек тела. Здесь \mathbf{C} – тензор модулей упругости, ρ – плотность материала. Напомним, что точка между векторами и тензорами означает скалярное произведение (свертку по одному индексу), а двоеточие между тензорами – их двойное скалярное произведение (двойную свертку по индексам).

Рассматривается случай, когда длинные стороны балки свободны от нагрузок

$$x_k = \pm a_k, \quad k = 2, 3: \quad \sigma \cdot \mathbf{n}_{\pm}^{(k)} = 0, \quad (3.3.3)$$

а торцевые поперечные сечения либо свободны, либо закреплены

$$x_1 = \pm a_1: \quad \sigma \cdot \mathbf{n}_{\pm}^{(1)} = 0 \quad \underline{\vee} \quad \mathbf{u} = 0. \quad (3.3.4)$$

Здесь $\mathbf{n}_{\pm}^{(k)} = [\pm\delta_{1k}, \pm\delta_{2k}, \pm\delta_{3k}]^T$, $k = 1, 2, 3$, — векторы внешней единичной нормали к границе тела Ω , δ_{jk} — символ Кронекера.

Будем искать неизвестные собственные функции в виде

$$\mathbf{u}(t, x) = \tilde{\mathbf{u}}(x)e^{i\omega t}, \quad \mathbf{p}(t, x) = -\frac{i}{\omega}\tilde{\mathbf{p}}(x)e^{i\omega t}, \quad \sigma(t, x) = \tilde{\sigma}(x)e^{i\omega t}, \quad (3.3.5)$$

опуская в дальнейшем знак «тильда». Здесь ω — неизвестная частота собственных колебаний упругой балки.

Согласно методу интегро-дифференциальных соотношений представим уравнения состояния (3.3.2) в интегральном виде с учетом выражений (3.3.5) и сформулируем следующую проекционную задачу: найти поля $\mathbf{u}^*(x)$, $\mathbf{p}^*(x)$, $\sigma^*(x)$, которые удовлетворяют уравнению равновесия

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} - \nabla \cdot \sigma = \mathbf{0}, \quad (3.3.6)$$

граничным условиям (3.3.3), (3.3.4) и следующему интегральному соотношению:

$$\int_{\Omega} [\eta \cdot \mathbf{v} + \xi : \zeta] d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{v}, \zeta : v_k, \zeta_{kl} \in L_2(\Omega), k, l = 1, 2, 3, \quad (3.3.7)$$

$$\eta = \mathbf{p} + \rho\omega^2\mathbf{u}, \quad \xi = \sigma - \mathbf{C} : \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T).$$

Вектор η связывает плотности импульса и скорости точек тела, тензор ξ определяет соотношение закона Гука, компоненты v_k вектора \mathbf{v} и компоненты ζ_{kl} тензора ζ — это тестовые функции, квадратично интегрируемые по области Ω .

3.3.2. Приближенная система дифференциально-алгебраических уравнений колебаний упругой балки. Для вывода системы приближенных уравнений относительно переменной x_1 с краевыми условиями (3.3.4) при $x_1 = \pm a_1$ используем конечномерные полиномиальные аппроксимации компонент вектора перемещений \mathbf{u} , вектора плотности импульса \mathbf{p} и тензора напряжений σ относительно нормированных координат $\tilde{x}_n = a_n^{-1}x_n$ ($n = 2, 3$):

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \sum_{k+l}^N u_1^{(kl)}(x_1) \tilde{x}_2^k \tilde{x}_3^l, & u_n &= \sum_{k+l}^{N-1} u_n^{(kl)}(x_1) \tilde{x}_2^k \tilde{x}_3^l, \\
 p_1 &= \sum_{k+l}^N p_1^{(kl)}(x_1) \tilde{x}_2^k \tilde{x}_3^l, & p_n &= \sum_{k+l}^{N+1} p_n^{(kl)}(x_1) \tilde{x}_2^k \tilde{x}_3^l, \\
 \sigma_{11} &= \sum_{k+l}^N \sigma_{11}^{(kl)}(x_1) \tilde{x}_2^k \tilde{x}_3^l, & \sigma_{nn} &= g_n \sum_{k+l}^N \sigma_{nn}^{(kl)}(x_1) \tilde{x}_2^k \tilde{x}_3^l, \\
 \sigma_{1n} &= g_n \sum_{k+l}^{N-1} \sigma_{1n}^{(kl)}(x_1) \tilde{x}_2^k \tilde{x}_3^l, & \sigma_{23} &= g_2 g_3 \sum_{k+l}^{N-2} \sigma_{23}^{(kl)}(x_1) \tilde{x}_2^k \tilde{x}_3^l, \\
 g_n &= 1 - \tilde{x}_n^2, & n &= 2, 3.
 \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Здесь $u_m^{(kl)}$, $p_m^{(kl)}$, $\sigma_{mn}^{(kl)}$ ($m, n = 1, 2, 3$) — неизвестные функции координаты x_1 . В дальнейшем аргумент x_1 этих функций, а также знак «тильда» опускаются.

Заметим, что аппроксимации (3.3.8) автоматически удовлетворяют однородным граничным условиям (3.3.3). Полиномиальные представления (3.3.8) позволяют разрешить исходное векторное уравнение изменение импульса (3.3.6) относительно функций $p_j^{(kl)}$. Для этого необходимо в уравнении (3.3.6) приравнять нулю все коэффициенты при соответствующих мономах относительно координат x_2 и x_3 .

Используя аппроксимации, полученные из (3.3.6) и (3.3.8), невозможно в общем случае точно удовлетворить уравнения состояния как в локальном представлении (3.3.2), так и в интегральной форме (3.3.7). Интегральная формулировка позволяет построить совместную конеч-

номерную систему дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) относительно неизвестных функций перемещений $u_m^{(kl)}$ и напряжений $\sigma_{mn}^{(kl)}$, $m, n = 1, 2, 3$. Уравнения, составляющие эту систему, являются нулевыми проекциями вектора η и тензора ξ на пространство полиномов относительно координат x_2 и x_3 :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\eta \cdot \hat{v}) dx_2 dx_3 = 0, \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\xi : \hat{\zeta}) dx_2 dx_3 = 0, \quad (3.3.9)$$

$$\forall \hat{v}_1, \hat{\zeta}_{mm} \in \mathcal{P}_N, \quad \forall \hat{v}_n, \hat{\zeta}_{1n} \in \mathcal{P}_{N-1}, \quad \forall \hat{\zeta}_{23} \in \mathcal{P}_{N-2}.$$

Здесь $n = 2, 3$, $m = 1, 2, 3$; $\hat{v}_j(x_2, x_3)$ и $\hat{\zeta}_{jk}(x_2, x_3)$ — соответственно компоненты вектора \hat{v} и тензора $\hat{\zeta}$; \mathcal{P}_N — пространство полных двумерных полиномов степени N по x_2 и x_3 . Такой выбор полиномиальных пространств для тестовых функций гарантирует равенство числа линейно независимых уравнений ($N_t = 9N^2/2 + 15N/2 + 4$), следующих из соотношений (3.3.9), общему числу неизвестных функций перемещений $u_m^{(kl)}$ и напряжений $\sigma_{mn}^{(kl)}$. В качестве тестовых функций удобно выбрать, например, ортогональные полиномы $L_m(x_2)L_n(x_3)$, где L_n — нормированные многочлены Лежандра.

Функции компонент тензора напряжений $\sigma_{22}^{(kl)}$, $\sigma_{33}^{(kl)}$, $\sigma_{23}^{(kl)}$ можно выразить алгебраически через остальные неизвестные функции перемещений и напряжений. Разумеется, дифференциальный порядок системы ($N_d = (N+1)(3N+2)$) при этом не меняется и равен удвоенному числу неизвестных функций перемещений. В результате получим N_d обыкновенных дифференциальных уравнений. Им соответствуют такое же количество следующих из (3.3.4) краевых условий, накладываемых на функции $\sigma_{1j}^{(kl)}$ и(или) $u_j^{(kl)}$, $j = 1, 2, 3$.

Полученная одномерная краевая задача на собственные значения позволяет приближенно определить собственные частоты и пространственные формы колебаний упругой балки. При этом поля перемещений $\mathbf{u}(x)$, плотности импульсов $\mathbf{p}(x)$ и напряжений $\sigma(x)$ будут точно

удовлетворять уравнение изменения импульса (3.3.6) и граничные условия (3.3.3), (3.3.4).

Так как интегральное соотношение (3.3.7) выполняется приближенно, то отношение функционалов

$$\begin{aligned}\Delta &= \Phi\Psi^{-1} \geq 0, \\ \Phi &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\eta \cdot \eta}{\rho\omega^2} + \xi : \mathbf{C}^{-1} : \xi \right) d\Omega, \\ \Psi &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\rho\omega^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \sigma : \mathbf{C}^{-1} : \sigma) d\Omega,\end{aligned}$$

определяет качество решения для выбранной степени аппроксимации N (см. [51]). Здесь $\Psi[\mathbf{u}, \sigma]$ — величина полной механической энергии балки.

3.3.3. Декомпозиция уравнений колебаний однородной балки. Анализируя краевую задачу, которая следует из аппроксимаций (3.3.8), уравнения изменения импульса (3.3.6), граничных условий (3.3.4) и интегральных проекций уравнений состояния (3.3.9), можно выделить четыре независимые подсистемы, приближенно описывающие растяжение–сжатие, изгибы относительно осей Ox_2 и Ox_3 , а также кручение однородной изотропной балки прямоугольного сечения.

Было отмечено [55], что такая декомпозиция характерна для любой степени аппроксимации функций перемещений $u(x)$, импульсов $p(x)$, напряжений $\sigma(x)$ и возникает благодаря симметрии упругого тела Ω относительно координатных плоскостей Ox_1x_2 и Ox_1x_3 .

Для различных собственных движений балки в табл. 3.3.1 приведены максимальные степени $N_{2,3}(k)$ переменных $x_{2,3}$, которые присутствуют в аппроксимациях перемещений и напряжений (3.3.8). Индекс j принимает значения 1, 2 и 3, а четное число $k = 2n \geq 0$ определяет дифференциальный порядок соответствующей краевой задачи. Четность (нечетность) чисел N_2 и N_3 характеризует свойства симметрии

Таблица 3.3.1: Свойства симметрии полей перемещений и напряжений.

	Растяжение		Изгиб, Ox_2		Изгиб, Ox_3		Кручение	
	N_2	N_3	N_2	N_3	N_2	N_3	N_2	N_3
u_1, σ_{jj}	k	k	k	$k+1$	$k+1$	k	$k+1$	$k+1$
u_2, σ_{12}	$k-1$	$k-2$	$k-1$	$k-1$	k	k	k	$k+1$
u_3, σ_{13}	$k-2$	$k-1$	k	k	$k-1$	$k-1$	$k+1$	k
σ_{23}	$k-3$	$k-3$	$k-1$	$k-2$	$k-2$	$k-1$	k	k

(антисимметрии) функций перемещений и напряжений относительно координатных плоскостей Ox_2 и Ox_3 , соответственно. Если хотя бы одно из чисел $N_{2,3}$ меньше нуля, то соответствующие функции отсутствуют.

Порядок системы дифференциальных уравнений равен $(n+1)(3n+2)$ для растяжения–сжатия, $(n+1)(3n+4)$ для изгиба, $(n+1)(3n+6)$ для кручения. Минимально возможные размерности аппроксимаций в представлении (3.3.8) будут соответственно равны 2, 4 и 6. Следует отметить, что это не единственно возможное конечномерное разложение неизвестных функций. Для некоторых специальных случаев, например как в §3.2 для свободной балки, когда на перемещения не накладываются никакие граничные условия, возможно построение содержательных моделей, в которых число функций перемещений u_j больше числа функций напряжений σ_{1j} ($j = 1, 2, 3$).

В дальнейшем исследуется частный случай колебаний однородной изотропной балки с квадратным поперечным сечением ($a_2 = a_3$). Вводя характерную длину $\tilde{x} = a_2$ и время $\tilde{t} = a_2\sqrt{\rho/E}$, где E — модуль Юнга, можно привести все рассмотренные уравнения линейной упругости к безразмерному виду. В системе остается два параметра: относительная длина балки $a = a_1/a_2$ и коэффициент Пуассона ν . Незвестной величиной является безразмерная частота $\tilde{\omega} = \tilde{t}\omega$. Для упрощения обозначений знак «тильда» опускается.

Для изотропного тела компоненты тензора состояния ξ примут вид

$$\xi_{jj} = \sigma_{jj} - 2G \left(\frac{\partial u_{jj}}{\partial x_{jj}} + \frac{\nu e}{1 - 2\nu} \right), \quad e = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3},$$

$$\xi_{jk} = \sigma_{jk} - G \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right), \quad j, k = 1, 2, 3, \quad j \neq k.$$

Здесь $G = 0.5(1 + \nu)^{-1}$ — безразмерный модуль сдвига.

Для балки с квадратным сечением появляются две дополнительные плоскости симметрии $\chi_{\pm} = (x_3 \pm x_2)/\sqrt{2} = 0$. В этом случае можно произвести дальнейшую декомпозицию задачи о продольных колебаниях на две подзадачи. Неизвестные функции перемещений, импульсов и напряжений выбираются либо симметричными, либо антисимметричными относительно взаимной замены координат x_2 и x_3 .

Первый тип движений собственно и является продольными колебаниями балки, так как перемещения центральной оси балки $u_1^{(00)}(x_1)$ при этом не равны тождественно нулю. Антисимметричные колебания будем называть «дышащими» модами, по аналогии с похожими движениями, найденными для цилиндрических оболочек. При этих колебаниях изменяется форма сечения, но точки центральной оси Ox_1 балки неподвижны ($u_1^{(00)} \equiv 0$).

Аналогичную декомпозицию можно провести и для крутильных колебаний, разделив их по свойству симметрии относительно замены x_2 и x_3 . При этом выделяются собственно крутильные колебания, для которых угол поворота сечения

$$\phi(x_1) = \frac{1}{2} \left(u_3^{(10)} - u_2^{(01)} \right) \quad (3.3.10)$$

не равен тождественно нулю, и «сдвиговые» колебания, для которых $\phi \equiv 0$. Можно показать, что сдвиговые движения задают дышащие моды в системе координат $\chi = \{x_1, \chi_+, \chi_-\}$, повернутой на угол $\pi/4$ относительно оси Ox_1 .

3.3.4. «Дышащие» моды колебаний балки квадратного сечения. Рассмотрим собственные движения балки, при которых продоль-

ные перемещения u_1 симметричны относительно координатных плоскостей $Ox_1x_{2,3}$ и антисимметричны относительно плоскостей $Ox_1\chi_{\pm}$. Четность или нечетность степеней разложения по переменным $x_{2,3}$ для неизвестных функций в аппроксимациях (3.3.8) определена в табл. 3.3.1 (растяжение). Относительно взаимной замены x_2 и x_3 имеем

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= -u_1(x_1, x_3, x_2), & u_2(x_1, x_2, x_3) &= -u_3(x_1, x_3, x_2), \\ \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) &= -\sigma_{11}(x_1, x_3, x_2), & \sigma_{22}(x_1, x_2, x_3) &= -\sigma_{33}(x_1, x_3, x_2), \\ \sigma_{12}(x_1, x_2, x_3) &= -\sigma_{13}(x_1, x_3, x_2), & \sigma_{23}(x_1, x_2, x_3) &= -\sigma_{23}(x_1, x_3, x_2). \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Это означает, что точки на центральной линии Ox_1 балки остаются неподвижными, а движения в координатных плоскостях Ox_1x_2 и Ox_1x_3 происходят в противофазе.

Пример 3.3.1. Зададим степень аппроксимации $N = 2$ в представлениях (3.3.8). Тогда перемещения и напряжения при учете равенств (3.3.11) полностью определяются заданием следующих компонент:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^{(20)}(x_2^2 - x_3^2), & u_2 &= u_2^{(10)}x_2, \\ \sigma_{11} &= \sigma_{11}^{(20)}(x_2^2 - x_3^2), & \sigma_{12} &= \sigma_{12}^{(10)}g_2x_2, & \sigma_{23} &= 0, \\ \sigma_{22} &= \left(\sigma_{22}^{(00)} + \sigma_{22}^{(20)}x_2^2 + \sigma_{22}^{(02)}x_3^2 \right) g_2, & g_2 &= 1 - x_2^2. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Используя аппроксимации (3.3.12) и следуя алгоритму, описанному в п. 3.3.2, можно свести полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений к одному биквадратному дифференциальному уравнению относительно неизвестной функции $u_2^{(10)}$:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 u_2^{(10)}}{dx_1^4} + A_1(\omega, \nu) \frac{d^2 u_2^{(10)}}{dx_1^2} + B_1(\omega, \nu) u_2^{(10)} &= 0, \\ A_1 &= \frac{3 - \nu - 4\nu^2}{1 - \nu} \omega^2 - 6, \\ B_1 &= \frac{2 - 6\nu^2 - 4\nu^3}{1 - \nu} \omega^4 - 21 \frac{1 - \nu - 2\nu^2}{1 - \nu} \omega^2 + 45 \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu}. \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Корни $\kappa_j(\omega, \nu)$, $j = 1, \dots, 4$, соответствующего характеристического уравнения находятся аналитически. При фиксированном значении коэффициента Пуассона ν комплекснозначные функции $\kappa_j(\omega)$ определяют частотно-волновые характеристики свободных колебаний балки. Эти функции не зависят от длины балки и краевых условий.

На рис. 3.3.2 отражена зависимость как абсолютных значений мнимых частей $\lambda_j = |\text{Im } \kappa_j|$ (сплошные кривые), так и действительных частей $\delta_j = |\text{Re } \kappa_j|$ (штриховые кривые) собственных чисел κ_j от частоты ω для $\nu = 0.3$. В этом случае существуют три критических значения частоты ω :

$$\omega_1^{(1)} \simeq 1.493, \quad \omega_2^{(1)} \simeq 1.519, \quad \omega_3^{(1)} \simeq 2.402,$$

показанные на рис. 3.3.2 штрихпунктирными линиями. Эти значения определяют четыре частотные зоны, которые различаются по типу корней κ_j .

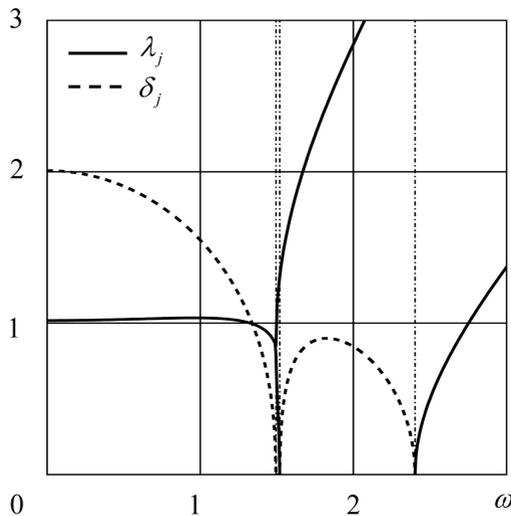


Рис. 3.3.2. Частотно-волновые характеристики «дышащих» колебаний.

Для первой зоны $\omega \in (0, \omega_1^{(1)})$ собственные числа κ_j — это две пары комплексно-сопряженных чисел: $\kappa_{1,2} = \delta_1 \pm i\lambda_1$, $\kappa_{3,4} = -\delta_1 \pm i\lambda_1$.

Во второй и четвертой зонах при $\omega \in (\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}) \cup (\omega_3^{(1)}, +\infty)$ все корни чисто мнимые: $\kappa_{1,3} = \pm i\lambda_1$, $\kappa_{2,4} = \pm i\lambda_2$.

Отметим, что во второй относительно узкой зоне присутствует мнимый корень, абсолютная величина которого уменьшается при увеличении частоты ω . Наконец, в третьей зоне при $\omega \in (\omega_2^{(1)}, \omega_3^{(1)})$ два корня действительные $\kappa_{1,3} = \pm\delta_1$ и два мнимые $\kappa_{2,4} = \pm i\lambda_2$.

Для второй и третьей критической частоты получены аналитические выражения:

$$\omega_2^{(1)} = \sqrt{3/(1+\nu)}, \quad \omega_3^{(1)} = \sqrt{15/(2+2\nu)}.$$

Выражение для частоты $\omega_1^{(1)}(\nu)$ также находится явно в радикалах, но не приводится из-за его громоздкости.

Пример 3.3.2. Перейдем к собственным «сдвиговым» движениям балки, при которых продольные перемещения u_1 антисимметричны относительно плоскостей $Ox_1x_{2,3}$ и симметричны относительно плоскостей $Ox_1\chi_{\pm}$. Необходимые степени разложения по переменным $x_{2,3}$ из соотношений (3.3.8) заданы в табл. 3.3.1 (кручение). Для полей перемещений и напряжений имеем соотношения, отличающиеся от выражений (3.3.11) заменой знака минус в правых частях на плюс. Точки центральной линии Ox_1 балки неподвижны, а точки, лежащие до деформации в плоскостях $Ox_1\chi_{\pm}$, остаются в этих плоскостях.

Пусть в соотношениях (3.3.8) $N = 2$, тогда

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^{(11)} x_2 x_3, & u_2 &= u_2^{(01)} x_3, \\ \sigma_{11} &= \sigma_{11}^{(11)} x_2 x_3, & \sigma_{12} &= \sigma_{12}^{(01)} g_2 x_3, \\ \sigma_{23} &= \sigma_{23}^{(00)} g_2 g_3, & \sigma_{22} &= \sigma_{22}^{(11)} g_2 x_2 x_3, & g_{2,3} &= 1 - x_{2,3}^2. \end{aligned}$$

Приближенные уравнения, вытекающие из соотношений (3.3.9), также сводятся к одному биквадратному дифференциальному уравнению,

в данном случае относительно неизвестной функции $u_2^{(01)}(x_1)$. Оно отличается от уравнения (3.3.13) заменой коэффициента $B_1(\nu, \omega)$ на

$$B_2(\nu, \omega) = \frac{2(1 - 2\nu)(3 - (1 + \nu)\omega^2)^2}{1 - \nu}.$$

Коэффициент $A_1(\nu, \omega)$ остается прежним.

На рис. 3.3.3 для сдвиговых колебаний при $\nu = 0.3$ показаны амплитудно-волновые характеристики: абсолютные значения мнимых частей собственных чисел $\lambda_j = |\text{Im } \kappa_j|$ (сплошные линии) и действительных частей $\delta_j = |\text{Re } \kappa_j|$ (штриховые линии) в зависимости от частоты ω .

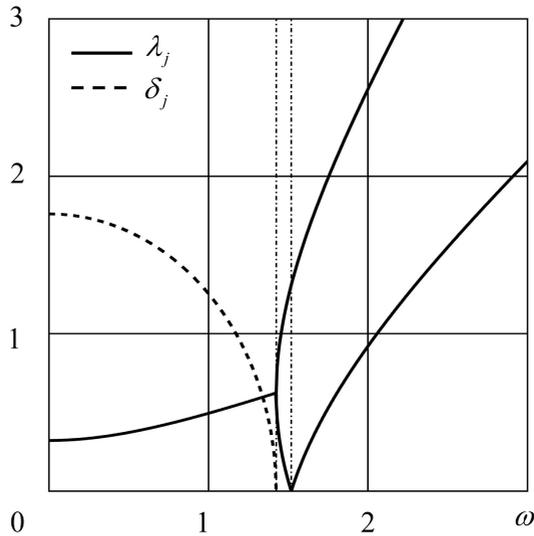


Рис. 3.3.3. Частотно-волновые характеристики «сдвиговых» колебаний.

Для указанного значения коэффициента Пуассона существуют две критические частоты $\omega_1^{(2)} \simeq 1.424$, $\omega_2^{(2)} \simeq 1.493$, которые обозначены на рис. 3.3.3 штрихпунктирными линиями, и три зоны, различающиеся типом корней κ_j . Для первой зоны $\omega \in (0, \omega_1^{(2)})$ собственные числа κ_j

— это две пары комплексно-сопряженных корней. Во второй и третьей зонах при $\omega \in (\omega_1^{(2)}, \omega_2^{(2)}) \cup (\omega_2^{(2)}, +\infty)$ существуют две пары мнимых корней. Отметим, что при любом допустимом значении ν верно равенство $\omega_2^{(2)} = \omega_2^{(1)}$.

3.3.5. Крутильные колебания балки. Рассмотрим крутильные движения балки, при которых продольные перемещения u_1 антисимметричны относительно координатных плоскостей $Ox_1x_{2,3}$ и плоскостей $Ox_1\chi_{\pm}$, образуемых диагоналями поперечного сечения. Степени аппроксимирующих полиномов заданы в табл. 3.3.1 (кручение). Для перемещений и напряжений выполняются свойства симметрии (3.3.11). Точки балки на центральной линии Ox_1 остаются неподвижными.

Для степени $N = 2$ аппроксимации (3.3.8) с учетом заданной четности полиномов и соотношений (3.3.11) задача сводится к одному дифференциальному уравнению второго порядка относительно неизвестной функции $u_2^{(01)}$. Корни характеристического уравнения чисто мнимые и частота линейно зависит от собственного числа: $\omega = \sqrt{G}\lambda$. Классическое решение для крутильных колебаний с теми же параметрами дает соотношение $\omega_c^{(3)} \simeq 0.920\sqrt{G}\lambda$ (см. [81]).

Пример 3.3.3. С увеличением степени аппроксимации (3.3.8) структура собственных колебаний становится более сложной. Так, при $N = 4$ поля перемещений и напряжений задаются в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^{(31)} x_2 x_3 (x_2^2 - x_3^2), & u_2 &= \left(u_2^{(01)} + u_2^{(21)} x_2^2 + u_2^{(03)} x_3^2 \right) x_3, \\ \sigma_{11} &= \sigma_{11}^{(31)} x_2 x_3 (x_2^2 - x_3^2), & \sigma_{12} &= \left(\sigma_{12}^{(01)} + \sigma_{12}^{(21)} (x_2^2 + x_3^2) \right) g_2 x_3, \\ \sigma_{22} &= \left(\sigma_{22}^{(01)} + \sigma_{22}^{(21)} (x_2^2 + x_3^2) \right) g_2 x_2 x_3, \\ \sigma_{23} &= \sigma_{23}^{(00)} g_2 g_3 (x_2^2 - x_3^2), & g_{2,3} &= 1 - x_{2,3}^2. \end{aligned}$$

Система приближенных ДАУ после ряда преобразований сводится к одному дифференциальному уравнению восьмого порядка относительно неизвестной функции $u_2^{(01)}$.

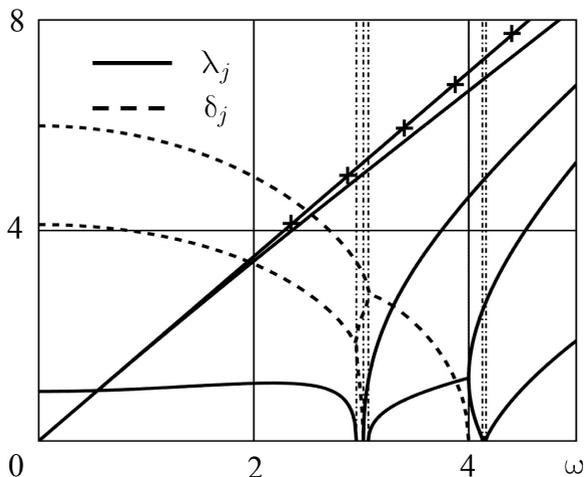


Рис. 3.3.4. Частотно-волновые характеристики крутильных колебаний.

Для этой модели на рис. 3.3.4 показана зависимость волновых чисел $\lambda_j = |\text{Im } \kappa_j|$ (сплошные линии) и $\delta_j = |\text{Re } \kappa_j|$ (штриховые линии) от частоты ω при $\nu = 0.3$. При этом значении коэффициента Пуассона существует семь зон, разделенных по типу корней κ_j характеристического уравнения. Частоты, разделяющие зоны, показаны штрихпунктирными линиями и равны

$$\begin{aligned} \omega_1^{(3)} &\simeq 2.955, & \omega_2^{(3)} &\simeq 3.019, & \omega_3^{(3)} &\simeq 3.066, \\ \omega_4^{(3)} &\simeq 4.000, & \omega_5^{(3)} &\simeq 4.127, & \omega_6^{(3)} &\simeq 4.160. \end{aligned}$$

Для сравнения линией с крестиками приведена классическая линейная частотно-волновая зависимость, которая почти касается одной из кривых $\lambda(\omega)$ при $\omega \rightarrow 0$.

3.3.6. Продольные колебания балки. Степени разложения для продольных колебаний заданы в таблице (растяжение). Функции перемещений и напряжений симметричны относительно взаимной замены

координат x_2 , x_3 и удовлетворяют соотношениям, отличающимся от (3.3.11) заменой знака минус в правых частях на плюс.

Пример 3.3.4. Для степени аппроксимации $N = 2$ поля перемещений и напряжений задаются в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^{(00)} + u_1^{(20)}(x_2^2 + x_3^2), & u_2 &= u_2^{(10)} x_2, \\ \sigma_{11} &= \sigma_{11}^{(00)} + \sigma_{11}^{(20)}(x_2^2 + x_3^2), & \sigma_{12} &= \sigma_{12}^{(10)} g_2 x_3, \\ \sigma_{22} &= \left(\sigma_{22}^{(00)} + \sigma_{22}^{(20)} x_2^2 + \sigma_{22}^{(02)} x_3^2 \right) g_2, & \sigma_{23} &= 0; \quad g_2 = 1 - x_2^2. \end{aligned}$$

В результате, система приближенных ДАУ сводится к бикубическому дифференциальному уравнению относительно функции $u_1^{(00)}(x_1)$, которая задает перемещения точек центральной линии вдоль оси Ox_1 . Корни характеристического уравнения $\kappa_j(\omega, \nu)$, $j = 1, \dots, 6$, находятся в аналитическом виде. На рис. 3.3.5 при $\nu = 0.3$ показаны волновые числа $\lambda_j = |\text{Im } \kappa_j|$ (сплошные кривые) и $\delta_j = |\text{Re } \kappa_j|$ (штриховые кривые) в зависимости от ω .

Существуют два критических значения частоты

$$\omega_1^{(4)} = 2.291, \quad \omega_2^{(4)} = 2.402,$$

определяющие три зоны, которые разделены на рис. 3.3.5 штрих-пунктирными прямыми. Отметим, что для любых значений ν выполняется равенство $\omega_2^{(4)} = \omega_3^{(1)} = \sqrt{15/(2 + 2\nu)}$. Во второй зоне присутствует монотонно убывающая ветвь $\omega(\lambda)$.

Прямая с крестиками показывает зависимость волнового числа от частоты продольных колебаний ($\lambda = \omega_c^{(4)}$) для классической модели тонкого стержня. Эта линия касается кривой $\lambda_1(\omega)$ ($\kappa_1 = i\lambda_1$). Так как классическая модель тонкого упругого стержня не учитывает поперечные движения точек сечения стержня, она дает оценку сверху для собственных частот продольных колебаний.

Таблица 3.3.2: Собственные частоты продольных колебаний.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ω	0.16	0.32	0.47	0.63	0.78	0.92	1.07	1.20	1.33	1.45
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ω	1.56	1.67	1.76	1.86	1.94	2.03	2.11	2.19	2.26	2.30

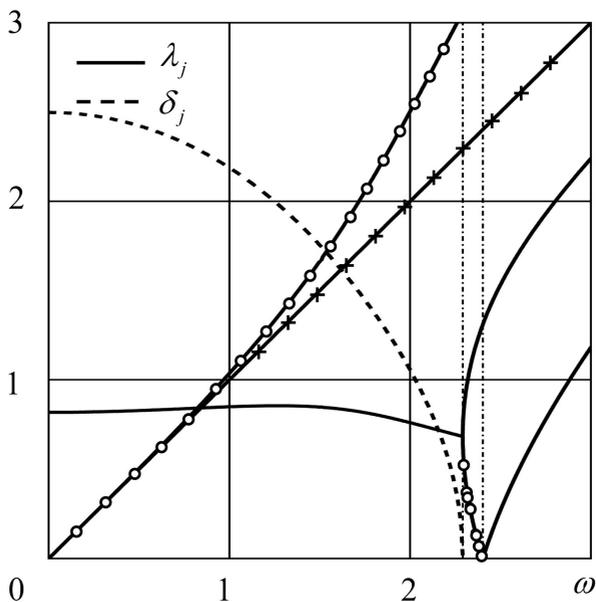


Рис. 3.3.5. Частотно-волновые характеристики продольных колебаний.

Численные значения 20 первых собственных частот приведены в табл. 3.3.2 для продольных колебаний упругой балки ($a = 10$), жестко заземленной на обоих концах:

$$x_1 = \pm 10 : \quad u_1^{(00)}(x_1) = u_1^{(20)}(x_1) = u_2^{(10)}(x_1) = 0.$$

Первой зоне колебаний соответствуют 19 первых частот, а второй зоне — 20-ая частота. Значения $\omega(n)$ отмечены на рис. 3.3.5 светлыми точками на одной из ветвей $\lambda(\omega)$.

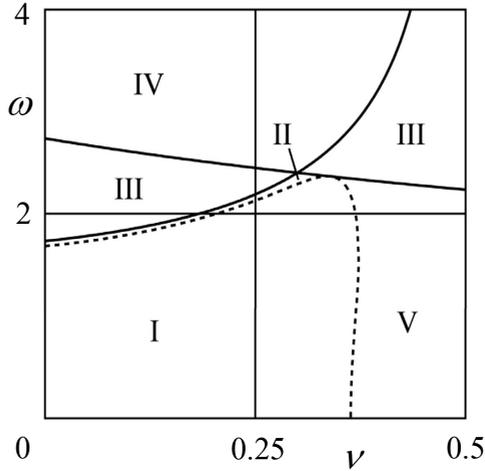


Рис. 3.3.6. Зависимость критических частот от коэффициента Пуассона.

Для классической модели защемленного с обоих концов тонкого стержня с такими же геометрическими и механическими параметрами продольные собственные частоты находятся аналитически в виде $\omega_c(n) = n\pi/(2a)$. Относительная расстройка частот для первой моды по отношению к классическому значению составляет $\Delta\omega = 1.6 \cdot 10^{-3}\%$. Для десятой моды эта величина достигает уже 2%, а для 19 моды – 6%.

Для более полного понимания структуры решения задачи на собственные значения исследуем зависимость форм колебаний от параметров системы. Для однородной изотропной балки единственным параметром, определяющим зависимость волновых чисел κ_j от частоты ω , является коэффициент ν . На рис. 3.3.6 показано расположение критических частот продольных колебаний при разных значениях $\nu \in [0, 0.5]$. При этих частотах происходит структурное перестроение решения.

Переход через критические частоты может существенно изменить

собственные формы упругих колебаний. Как видно из рис. 3.3.6, число зон меняется с увеличением коэффициента Пуассона. В зоне I, отделенной штриховой линией, четыре корня характеристического уравнения комплексные, а два мнимых. В зонах II и IV все корни чисто мнимые. В зоне III два собственных числа действительные, а в зоне V — четыре.

Существует несколько особых значений ν . Так, при $\nu = \nu_1 = 3/10$ зона III стягивается в точку. При $\nu = \nu_2 = (23 - \sqrt{89})/40 \simeq 0.339$ пропадает зона II и появляется пятая зона. При незначительном увеличении ν до $\nu_3 = 4/11 \simeq 0.367$ около нулевого значения ω появляется вторая часть зоны V (зона I отделена от нуля). Первая зона пропадает при $\nu_4 \simeq 0.373$.

3.3.7. Поперечные колебания балки. Для упругой балки квадратного поперечного сечения изгибные движения вокруг осей Ox_2 и Ox_3 имеют эквивалентные частотно-волновые характеристики. Рассмотрим для определенности изгиб вокруг оси Ox_3 . Тогда точки центральной линии балки будут совершать поперечные движения в плоскости Ox_1x_2 .

Пример 3.3.5. Как и для остальных движений, используя декомпозицию, проведенную в п. 3.3.2, выпишем аппроксимации перемещений и напряжений. Четность или нечетность степеней разложения функций по переменным $x_{2,3}$ в соотношениях (3.3.8) определяются из табл. 3.3.1 (изгиб, Ox_3). Для степени аппроксимации $N = 2$ перемещения и напряжения имеют вид

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^{(10)} x_2, & u_2 &= u_2^{(00)}, & u_3 &= 0, \\ \sigma_{11} &= \sigma_{11}^{(10)} x_2, & \sigma_{12} &= \sigma_{12}^{(00)} g_2, & \sigma_{13} &= \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0, \\ \sigma_{22} &= \sigma_{22}^{(10)} x_2 g_2; & g_2 &= 1 - x_2^2. \end{aligned}$$

Видно, что в этом приближении задаются плоские движения точек балки. В рассматриваемой модели допускаются не только изгиб центральной линии, но и сдвиговые движения, $\varepsilon_{12}(x_1, 0, 0) \neq 0$.

Система ДАУ, вытекающая из уравнений (3.3.6) и (3.3.9), сводится к одному биквадратному уравнению относительно функции поперечного перемещения средней линии балки $v = u_2^{(00)}(x_1)$:

$$\frac{d^4 v}{dx_1^4} + (1 + \nu)\omega^2 \left((3 - \nu) \frac{d^2 v}{dx_1^2} - B_3 v \right) = 0, \quad (3.3.14)$$

$$B_3 = (1 - \nu) (3 - 2(1 + \nu)\omega^2).$$

Через эту функцию однозначно определяются неизвестные $\sigma_{11}^{(10)}$, $\sigma_{12}^{(00)}$, $\sigma_{22}^{(10)}$ и $u_1^{(10)}$. Например, вторая функция перемещения выражается следующим образом:

$$u = u_1^{(10)} = \frac{1}{B_3} \left(2 \frac{d^3 v}{dx_1^3} - C_3 \frac{dv}{dx_1} \right), \quad C_3 = 3(1 - \nu) + 4(1 + \nu)\omega^2.$$

Можно показать, что в решении уравнения (3.3.14) при всех ω присутствуют два чисто мнимых (комплексно-сопряженных) корня характеристического уравнения. Существует критическая частота

$$\omega_1^{(5)} = \sqrt{\frac{5}{4(1 + \nu)}},$$

отделяющая две зоны: $\omega \in (0, \omega_1^{(5)})$ и $\omega \in (\omega_1^{(5)}, +\infty)$. В первой зоне два оставшихся корня принимают действительные значения, а во второй — мнимые. Следовательно, общее решение уравнения (3.3.14) для частот первой зоны имеет вид

$$v = c_1 \sin(\lambda_1 x_1) + c_2 \cos(\lambda_1 x_1) + c_3 \operatorname{sh}(\delta_2 x_1) + c_4 \operatorname{ch}(\delta_2 x_1), \quad (3.3.15)$$

а для второй зоны

$$v = c_1 \sin(\lambda_1 x_1) + c_2 \cos(\lambda_1 x_1) + c_1 \sin(\lambda_2 x_1) + c_2 \cos(\lambda_2 x_1), \quad (3.3.16)$$

где $\lambda_{1,2}(\omega)$ и $\delta_2(\omega)$ — неизвестные волновые числа.

Собственные значения ω находятся из условия существования нетривиальных решений (3.3.15) или (3.3.16) при удовлетворении граничных условий (3.3.4).

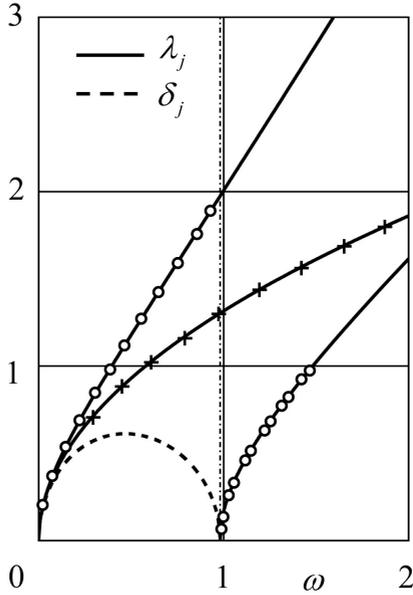


Рис. 3.3.7. Частотно-волновые характеристики поперечных колебаний.

Связь между корнями характеристического уравнения и частотой представлена на рис. 3.3.7 при $\nu = 0.3$. Сплошными кривыми показана зависимость от частоты значений мнимых корней, а штриховыми — действительных. Штрихпунктирная прямая отвечает критическому значению $\omega_1^{(5)} \simeq 0.981$. Линия с крестиками соответствует классическому решению задачи на собственные изгибные колебания балки при тех же значениях параметров.

Краевая задача в выбранном приближении ($N = 2$) определяется условиями

$$u(x_1) = v(x_1) = 0, \quad x_1 = \pm 10. \quad (3.3.17)$$

Численные значения 20 низших собственных частот $\omega(n)$ поперечных колебаний балки, жестко заземленной на обоих концах ($a = 10$), при-

Таблица 3.3.3: Собственные частоты поперечных колебаний.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ω	0.032	0.082	0.15	0.23	0.31	0.40	0.50	0.59	0.69	0.79
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ω	0.89	0.99	1.09	1.09	1.14	1.19	1.22	1.29	1.32	1.39

ведены в табл. 3.3.3. Из них первые 12 частот соответствуют решению (3.3.15) (первая зона), а остальные – решению (3.3.16) (вторая зона). Все эти значения отмечены светлыми точками на рис. 3.3.7. Можно показать, что количество собственных частот, соответствующих решению (3.3.15), ограничено и увеличивается с ростом параметра a .

Различие между полученными частотами и частотами, вычисленными в рамках модели Эйлера–Бернулли, значительно и достигает 3.7% уже для первой моды. Для второй моды это расхождение увеличивается до 11%, а для третьей – почти до 22%. Отметим, что с увеличением параметра a различие между низшими собственными частотами, полученными на основе интегро-дифференциального и классического подходов, уменьшается.

На рис. 3.3.8 показаны собственные формы перемещений в плоскости $x_3 = 0$ для разных значений $\omega(n)$ при $\nu = 0.3$. Сплошными кривыми представлены максимальные смещения внешних точек балки, штрихпунктирная кривая показывает амплитуды перемещений точек центральной оси балки ($x_2 = x_3 = 0$), а штриховые линии указывают на положения осей $x_3 = 0$ некоторых поперечных сечений балки ($x_1 = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8$).

В верхней части рис. 3.3.8 показана первая мода колебаний, $n = 1$. Интересно отметить, что, в отличие от модели Эйлера–Бернулли, угол наклона центральной линии на концах заземленной балки не равен нулю. Это связано с относительно небольшими сдвиговыми деформа-

циями, возникающими в процессе колебаний балки.

С ростом n сдвиг оказывает всё большее влияние на форму собственных колебаний. Видно, что при $n = 12$ гипотеза Бернулли об ортогональности поперечного сечения балки к ее средней линии не применима для анализа этих высокочастотных собственных движений.

Об этом же свидетельствует и нижняя часть рис. 3.3.8 (первая мода во второй зоне, $n = 13$). Заметно, что все поперечные сечения балки повернуты в одну сторону. Поэтому, с некоторой долей условности, такие движения можно назвать сдвиговыми.

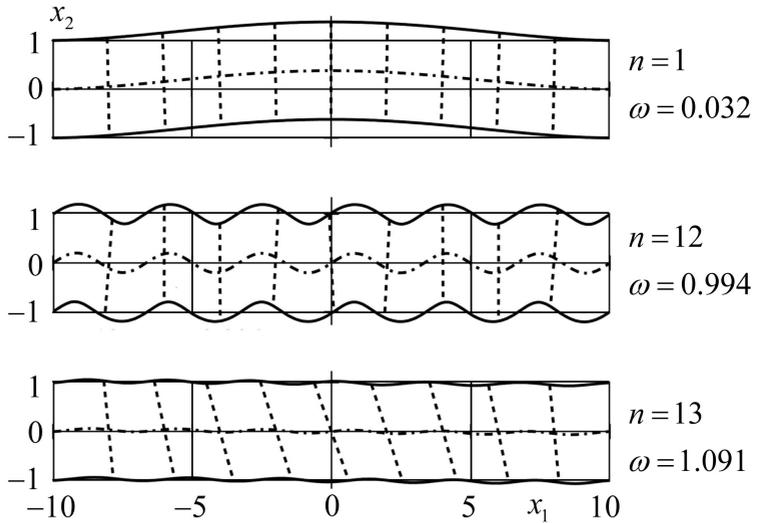


Рис. 3.3.8. Собственные формы поперечных колебаний.

Глава 4.

Параметрическая оптимизация управляемых процессов в распределенных системах

§4.1. Алгоритм оптимизации поперечных перемещений упругой балки

4.1.1. Постановка задачи оптимального управления поперечными движениями упругой балки. Рассмотрим плоские управляемые движения упругой однородной прямолинейной балки. При этом один конец балки свободен, другой — жестко закреплен на тележке, которая может совершать горизонтальные движения. В недеформированном состоянии балка занимает вертикальное положение (рис. 4.1.1).

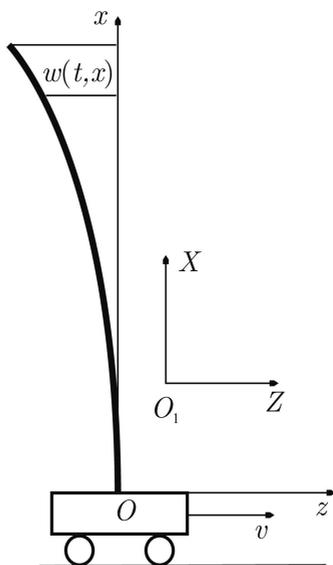


Рис. 4.1.1. Упругая балка, закрепленная на подвижной тележке.

Управляющим воздействием на балку служит горизонтальное ускорение тележки $u(t)$. В начальный момент времени $t = 0$ заданы форма поперечного изгиба $w(t, x)$ и относительная скорость точек балки $w_t(t, x)$ в системе координат Oxz , связанной с тележкой, движущейся со скоростью $v(t)$.

Положение тележки в покоящейся системе координат O_1XY задается переменной z , при этом $\dot{z} = v$ и $\dot{v} = u(t)$. Уравнения движения балки с начальными и краевыми условиями имеют вид

$$\rho(x)w_{tt} + (EI(x)w_{xx})_{xx} = -\rho u(t), \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, T); \quad (4.1.1)$$

$$w(t, 0) = w_x(t, 0) = w_{xx}(t, L) = w_{xxx}(t, L) = 0; \quad (4.1.2)$$

$$w(0, x) = w^0(x), \quad w_t(0, x) = \rho^{-1}p^0(x). \quad (4.1.3)$$

Здесь L и ρ — соответственно длина и линейная плотность балки; EI — ее изгибная жесткость; w^0 и p^0 — заданные, достаточно гладкие функции координаты x ; T — время окончания движения. Нижние индексы t и x означают частные производные по времени и координате. Без нарушения общности можно положить, что в начальный момент времени координата и скорость тележки равны нулю

$$z(0) = v(0) = 0. \quad (4.1.4)$$

Отметим, что краевые и начальные условия (4.1.2), (4.1.3) должны быть согласованы, например, функции $w^0(x)$ обязаны удовлетворять соотношения $w^0(0) = w_x^0(0) = 0$.

Ставится задача о нахождении оптимального управления $u(t)$, которое обеспечивает перемещение тележки за фиксированное время T в конечное состояние

$$z(T) = z_T, \quad v(T) = v_T, \quad (4.1.5)$$

и доставляет минимум некоторому функционалу качества $J[u]$ на классе допустимых управлений \mathcal{U} :

$$J[u] \rightarrow \min_{u \in \mathcal{U}}. \quad (4.1.6)$$

4.1.2. Метод интегро-дифференциальных соотношений. Вводя, как и в §1.4, новые функции времени и координаты $p(t, x)$ (линейная плотность импульса) и $s(t, x)$ (изгибающий момент в сечении балки), краевую задачу (4.1.1)–(4.1.3) можно переписать в следующем виде

$$\eta = w_t - \rho^{-1}p = 0, \quad \xi = w_{xx} - (EI)^{-1}s = 0, \quad (4.1.7)$$

$$p_t + s_{xx} = -\rho u(t), \quad (4.1.8)$$

$$w(t, 0) = w_x(t, 0) = s(t, L) = s_x(t, L) = 0, \quad (4.1.9)$$

$$w(0, x) = w^0(x), \quad p(0, x) = p^0(x). \quad (4.1.10)$$

Чтобы решить краевую задачу (4.1.7)–(4.1.10) применим описанный в §2.1 подход, в котором строгие локальные соотношения (4.1.7) заменяются интегральным равенством

$$\Phi = \int_0^T \int_0^L \varphi(t, x) dx dt = 0, \quad \varphi = \frac{1}{2} (\rho \eta^2 + EI \xi^2). \quad (4.1.11)$$

Предложенная интегро-дифференциальная формулировка (4.1.8)–(4.1.11) сводит краевую задачу движения упругой балки к вариационной: найти решение $p^*(t, x)$, $s^*(t, x)$ и $w^*(t, x)$, которое доставляет минимум функционалу

$$\Phi[p^*, s^*, w^*] = \min_{p, s, w} \Phi[p, s, w] = 0 \quad (4.1.12)$$

при удовлетворении уравнения изменения импульса (4.1.8), краевых и начальных условий (4.1.9), (4.1.10).

Для приближенного решения задачи условной минимизации функционала Φ выберем целое положительное число M и будем искать аппроксимации $\tilde{p}(t, x)$, $\tilde{s}(t, x)$ и $\tilde{w}(t, x)$ функций p^* , s^* и w^* в виде

$$\begin{aligned}\tilde{w}(t, x) &= w^0(x) + tx^2 \sum_{i=1}^{M_w} w_i \psi_w^{(i)}(t, x), \\ \tilde{p}(t, x) &= p^0(x) + t \sum_{i=1}^{M_p} p_i \psi_p^{(i)}(t, x), \\ \tilde{s}(t, x) &= -\frac{a(t)(L-x)^2}{2} - \int_x^L \int_{x_2}^L p_t(t, x_1) dx_1 dx_2,\end{aligned}\tag{4.1.13}$$

где w_i, p_i , — неизвестные вещественные коэффициенты. Базисные функции $\psi_w^{(i)}(t, x)$ и $\psi_p^{(i)}(t, x)$ выбираются так, чтобы аппроксимации \tilde{p} , \tilde{s} и \tilde{w} точно удовлетворяли граничные условия (4.1.9), начальные условия (4.1.10) и уравнение (4.1.8).

Получающаяся в результате конечномерная задача безусловной минимизации функционала (4.1.11), квадратичного по w_i, p_i , позволяет найти приближенное решение $\tilde{p}^*(t, x)$, $\tilde{s}^*(t, x)$ и $\tilde{w}^*(t, x)$ задачи (4.1.7)–(4.1.10) для заданной функции управления $u(t)$.

4.1.3. Параметрическая оптимизация движений упругой балки. Применение метода интегро-дифференциальных соотношений к начально-краевой задаче (4.1.1)–(4.1.6) дает возможность построения разнообразных численных алгоритмов оптимизации управления, один из которых описан далее.

Выбирается конкретный вид аппроксимаций (4.1.13). Затем определяется конечномерное множество допустимых управлений \mathcal{U} :

$$\mathcal{U} = \left\{ u : u(t) = \sum_{i=1}^{N+2} u_i \psi_u^{(i)}(t) \right\}.\tag{4.1.14}$$

Необходимо, чтобы управление $u \in \mathcal{U}$ удовлетворяло терминальные условия (4.1.5). Введенные в (4.1.13) аппроксимации \tilde{p} , \tilde{s} , \tilde{w} подставляются в функционал (4.1.11).

После этого все неизвестные коэффициенты w_i, p_i собираются в вектор проектных параметров $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$, $M = M_w + M_p$, а параметры управления u_i , оставшиеся после выполнения условий (4.1.5), — в вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$. Так как функционал Φ является квадратичным по неизвестным параметрам \mathbf{y} и \mathbf{u} , задача минимизации (4.1.12) сводится к решению линейной системы уравнений

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4.1.15)$$

относительно вектора \mathbf{y} . Здесь $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ и $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ — заданные матрицы, а вектор $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^M$ определяется из терминальных и начальных условий (4.1.5), (4.1.10).

Из решения этой системы

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{q})$$

находятся аппроксимации функций $\tilde{p}^*(t, x, \mathbf{u})$, $\tilde{s}^*(t, x, \mathbf{u})$, $\tilde{w}^*(t, x, \mathbf{u})$, зависящие от неизвестных параметров управления u_i .

После подстановки приближений \tilde{p}^* , \tilde{s}^* , \tilde{w}^* в функционал управления J из (4.1.6) находится минимум получающейся в результате функции $J(\mathbf{u})$. В случае если целевая функция J квадратична по параметрам управления u_i , то задача оптимизации сводится к решению линейной системы уравнений

$$\frac{\partial J(\mathbf{u}, \mathbf{r})}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{D}\mathbf{u} - \mathbf{r} = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ и $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N$ — фиксированные матрица и вектор.

Значение оптимального вектора

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{r}$$

подставляется в функцию управления $u(t, \mathbf{u}) \in \mathcal{U}$, введенную в (4.1.14), и в найденные аппроксимации \tilde{p}^* , \tilde{s}^* , \tilde{w}^* . В результате определяется закон оптимального управления $u^* = u(t, \mathbf{u}^*)$, а также поля плотности

импульса $\tilde{p}^*(t, x, \mathbf{u}^*)$, изгибающих моментов $\tilde{s}^*(t, x, \mathbf{u}^*)$ и перемещений $\tilde{w}^*(t, x, \mathbf{u}^*)$.

4.1.4. Численные примеры оптимизации движений. Применим один из возможных алгоритмов приближенного решения оптимизационной задачи (4.1.4)–(4.1.6), (4.1.8)–(4.1.10), (4.1.12), основанный на полиномиальных представлениях неизвестных функций состояния

$$\begin{aligned}\tilde{w}(t, x) &= w^0(x) + tx^2 \sum_{i+j=0}^{M_1} w_{ij} t^i x^j, \\ \tilde{p}(t, x) &= p^0(x) + t \sum_{i+j=0}^{M_1} p_{ij} t^i x^j\end{aligned}$$

и искомого управления

$$u = \sum_{i=0}^{N+1} u_i t^i. \quad (4.1.16)$$

Пример 4.1.1. Для демонстрации предложенного интегро-дифференциального подхода к оптимизации движения рассмотрим перемещение упругой системы из начального состояния покоя

$$w^0(x) = p^0(x) = 0$$

в некоторое конечное положение ($v(T) = 0$) за фиксированное время T .

Ставится задача определения закона управления движением тележки, при котором в конечный момент времени T полная энергия упругой балки

$$J = E(T), \quad E(t) = \int_0^L \psi(t, x) dx, \quad \psi(t, x) = \frac{p^2}{2\rho} + \frac{EI w_{xx}^2}{2}. \quad (4.1.17)$$

достигает наименьшего значения.

В расчетах движения системы были выбраны следующие безразмерные параметры: длина балки $L = 1$, изгибная жесткость $EI = 1$, линейная плотность $\rho = 1$. При заданных параметрах частота низшей моды собственных колебаний $\omega_1 \sim 1$ (см. п. 2.1.4). Для определенности перемещение тележки задано равным длине балки $z_T = 1$.

Было показано, что если максимальный период собственных колебаний балки $T_1 = 2\pi\omega_1^{-1}$ много меньше времени управления, для нахождения приближенного решения можно использовать асимптотические методы [1]; при $T_1 \gg T$ применяются квазистатические приближения. В примере исследуется промежуточный случай ($T = 4$), для которого, строго говоря, неприменимы вышеперечисленные подходы.

Задача оптимизации решалась на классе полиномиальных управлений (4.1.16) для некоторых значений $N = 0 \div 5$. При $N = 0$ управление $u = u_0 + u_1 t$ однозначно определяется из условий (4.1.5):

$$u_0 = 6z_T T^{-2}, \quad u_1 = -12z_T T^{-3}.$$

Этот пример был рассмотрен в §2.1. При $N > 0$ управление u содержит N неизвестных параметров, которые используются для минимизации функционала качества (4.1.17).

С помощью алгоритма, описанного в п. 4.1.3, и пакета программ MAPLE удалось аналитически построить оптимальное в смысле минимизации функционала (4.1.17) управление движением балки для следующих параметров аппроксимации решения: $M_1 \leq 15$. Размерность системы уравнений (4.1.15) определяется как $M = (M_1 + 1)(M_1 + 2)$.

На рис. 4.1.2 представлены результаты оптимизации движения однородной упругой балки закрепленной на подвижной тележке, полученные на основе метода интегро-дифференциальных соотношений. Сплошной ломаной представлена относительная механическая энергия в конце оптимизируемого процесса

$$J_0(N) = \frac{TJ(\mathbf{u}^*)}{\Psi(\mathbf{u}^*)}, \quad \Psi = \int_0^T E(t, \mathbf{u}^*) dx,$$

как функция от числа свободных параметров управления N . Здесь E — заданная в (4.1.17) энергия, запасаемая в системе во время движения.

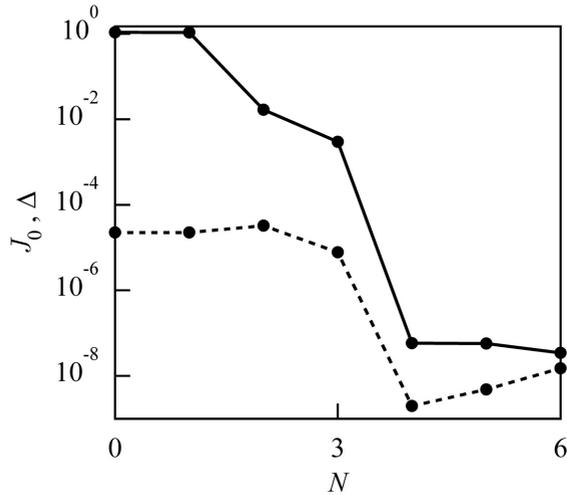


Рис. 4.1.2. Относительные величины терминальной энергии $J_0(N)$ и ошибки дискретизации $\Delta(N)$.

Относительная ошибка дискретизации определяется через функционал Φ согласно

$$\Delta(N) = \frac{\Phi(\mathbf{u}^*)}{\Psi(\mathbf{u}^*)}.$$

Она показана на рис. 4.1.2 ломаной штриховой линией. Как видно из графика увеличение числа параметров управления приводит к существенному уменьшению энергии в конце процесса. При выбранном порядке аппроксимаций $M_1 = 15$ ошибка вычислений Δ ниже относительной терминальной энергии J_0 , но приближается к ней при $N = 6$.

Изменение ошибки дискретизации и терминальной энергии с увеличением степени аппроксимации M_1 при фиксированной размерности $N = 6$ вектора управления \mathbf{u} показано на рис. 4.1.3. Как видно из графика, качество управления и получаемого решения повышается с увеличением размерности аппроксимаций. Только при достаточно больших степенях $M_1 > 13$ относительная ошибка дискретизации Δ становится

меньше нормированной терминальной энергии J_0 и можно говорить о достоверности полученных приближений.

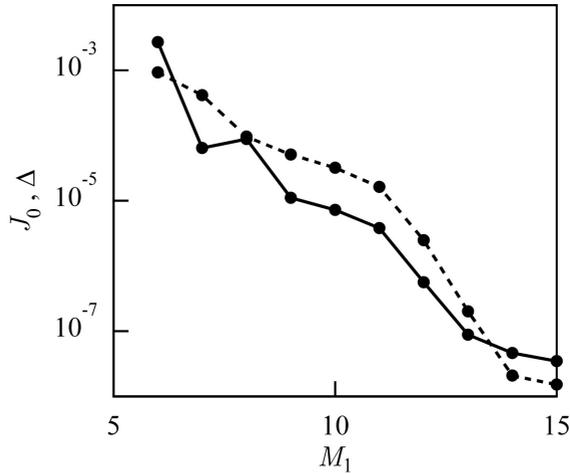


Рис. 4.1.3. Относительные величины терминальной энергии $J_0(M_1)$ и ошибки дискретизации $\Delta(M_1)$.

В предложенном численном алгоритме дальнейшее расширение ресурса управления (увеличение числа N) нужно сочетать с контролем ошибки Δ . Для повышения качества решения необходимо либо увеличивать размерность задачи, либо применять специальные подходы для регуляризации решения, которые будут рассмотрены в §4.3.

Оптимальные перемещения $z(t)$ при $N = 5$ и $N = 6$ ($M_1 = 15$) представлены на рис. 4.1.4 соответственно сплошной и штриховой кривой. При таком изменении степени полиномиального управления оптимизация приводит к слабо различающимся решениям. На этом же рисунке при $N = 6$ показано положение конца балки $w_L = z(t) + w(t, L)$ в неподвижной системе координат O_1XZ (см. рис. 4.1.1).

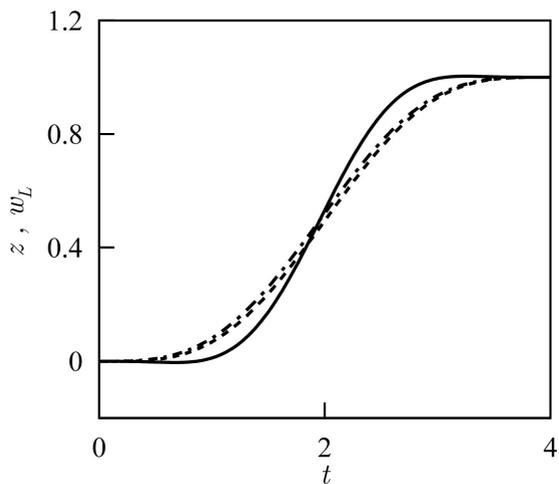


Рис. 4.1.4. Оптимальное перемещение концов балки $z(t)$ и $w_L(t)$ в системе координат O_1XZ .

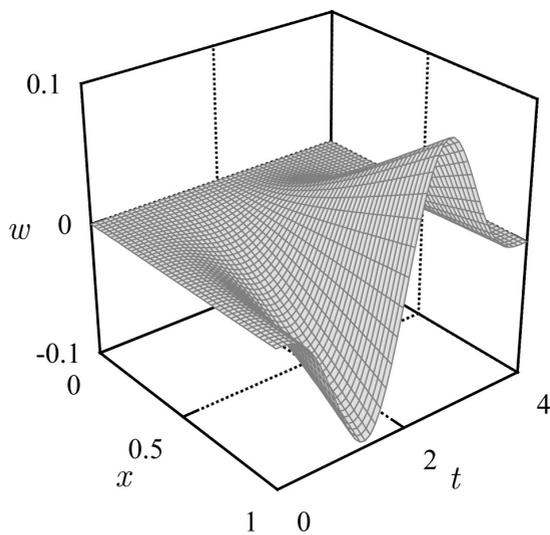


Рис. 4.1.5. Оптимальные перемещения точек балки $w(t, x)$ при $N = 6$.

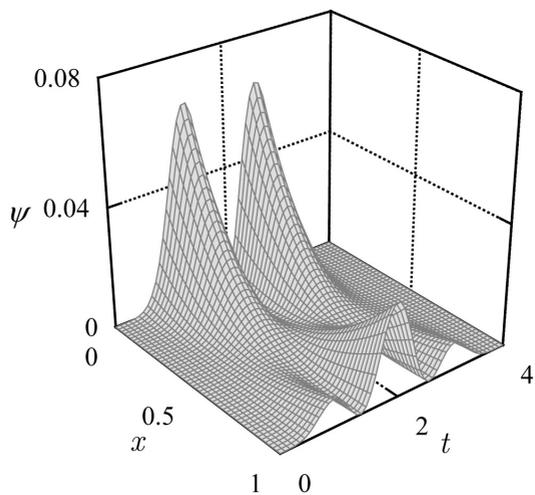


Рис. 4.1.6. Распределение механической энергии $\psi(t, x)$ при $N = 6$.

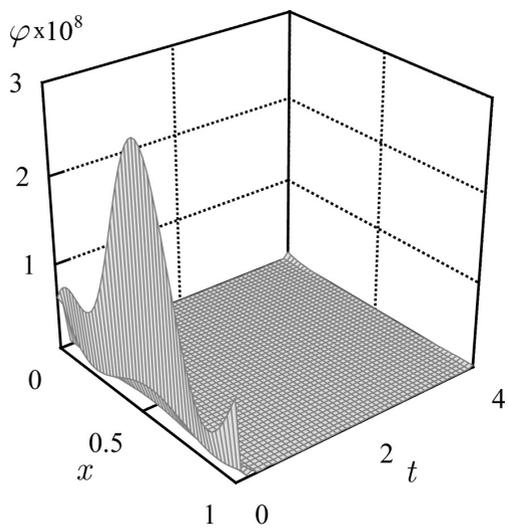


Рис. 4.1.7. Относительная ошибка φ при $M_1 = 15$ и $N = 6$.

На рис. 4.1.5 представлены упругие перемещения точек балки w как функция координат t и x для $N = 6$ и $M_1 = 15$. Распределение в пространстве и времени плотности энергии $\psi(t, x)$ изображено на рис. 4.1.6. Как можно заметить, благодаря оптимизации плотность энергии мала в конце процесса управления.

Для выбранных параметров управления и аппроксимации распределение локальной энергетической ошибки φ , определенной в (4.1.11), изображено на рис. 4.1.7. Наибольшие величины ошибки проявляются в начале процесса движения.

Пример 4.1.2. Важным классом задач управления упругими системами с распределенными параметрами является гашение колебаний за конечное время. Геометрические и механические параметры системы выбираются как в примере 4.1.1. Положим для определенности, что упругая система балка–тележка находилась в начальный момент времени в некотором статическом состоянии ($z(0) = v(0) = 0$, $p^0(x) \equiv 0$). Допустим, что это равновесное состояние создается единичной перерезывающей силой в верхнем сечении, т.е.

$$w^0(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}.$$

Цель управления — оптимальное гашение к моменту времени $T = 4$ упругой энергии системы

$$E_0(t) = \int_0^L \psi_0(t, x) dx, \quad \psi_0(t, x) = \frac{(p + \rho v(t))^2}{2\rho} + \frac{EI w_{xx}^2}{2},$$

$$E_0(0) = E(0), \quad E_0(T) = E(T).$$

с помощью полиномиальных перемещений тележки (4.1.16). При этом тележка должна оказаться в конце процесса в своем начальном состоянии.

Как показывают численные расчеты, минимизация функционала, введенного в (4.1.17), может приводить к достаточно большим значени-

ям оптимального управления $u(t)$. Это вызывает существенные упругие смещения точек балки w во время движения. Чтобы уменьшить управляющее воздействие на балку добавим с некоторым коэффициентом к целевой функции интеграл по времени от квадрата скорости тележки. Ставится задача минимизации следующего функционала

$$J[u] \rightarrow \min_{u \in \mathcal{U}}, \quad J = \alpha \int_0^T v^2(t) dt + E(T),$$

$$z(T) = v(T) = 0.$$

На рис. 4.1.8 выведено оптимальное управление $u(t)$ (сплошная кривая) при заданных параметрах $\alpha = 10^{-5}$, $N = 6$ и $M_1 = 15$. Штриховой кривой на графике показана скорость тележки $v(t)$.

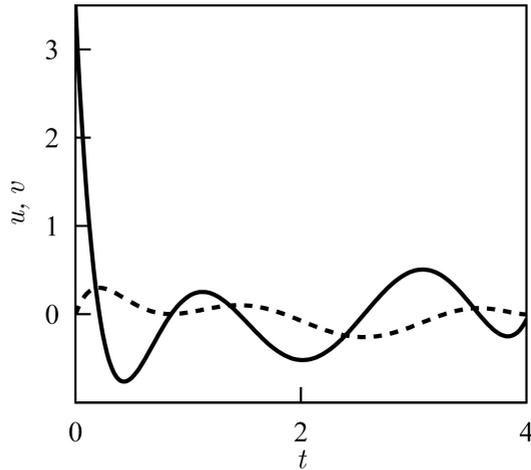


Рис. 4.1.8. Оптимальные ускорение $u(t)$ и скорость $v(t)$ тележки.

Изменение состояния свободного конца балки в фазовой плоскости $\{w(t, 1), p(t, 1)\}$ приведено на рис. 4.1.9 сплошной кривой. Для сравнения штриховая кривая отражает колебания балки в отсутствие управ-

ления ($z(t) \equiv 0$). При активном гашении упругие колебания в системе быстро затухают.

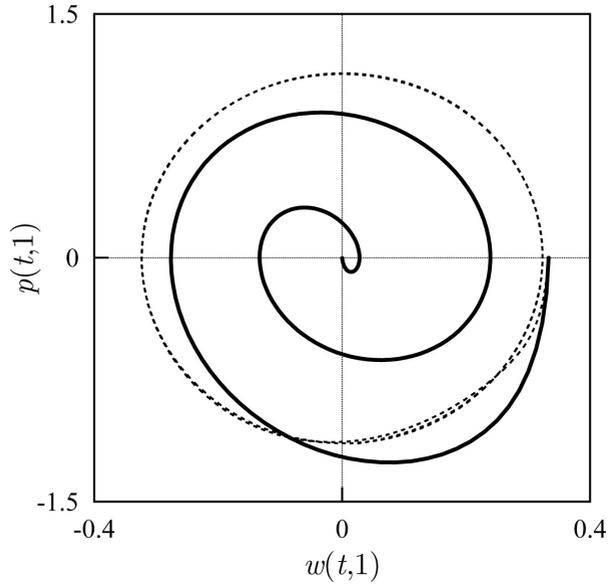


Рис. 4.1.9. Фазовый портрет движения свободного конца балки в системе координат Oxz .

На рис. 4.1.10 отражено изменение во времени величины полной механической энергии балки $E_0(t)$ (сплошная кривая). Средняя энергия

$$\bar{E}_0 = \frac{1}{T} \int_0^T E_0(t) dx,$$

запасаемая в процессе этого движения, равна $\bar{E}_0 = 0.0702$. Начальная и конечная энергия принимают значения соответственно $E_0(0) = 0.167$ и $E_0(T) = 2.68 \cdot 10^{-5}$. Интегральная ошибка дискретизации, выраженная в энергетических единицах, значительно меньше этих величин и равна $T^{-1}\Phi = 8.88 \cdot 10^{-6}$.

Штриховой кривой на графике выведено значение энергии E_0 как функции времени в случае, когда тележка оставалась неподвижной ($N = 0$). Энергия в начале слегка уменьшается, так как в этой временной области вычислительная ошибка достигает своих максимальных значений ($E_0(0) - E_0(0.4) = 4.9 \cdot 10^{-3}$). В дальнейшем величина энергии меняется слабо ($E_0(t) = 0.1618 \pm 0.0001$ для $t > 0.4$).

Как будет показано в следующих параграфах, для повышения точности и эффективности расчетов можно применять другие методы дискретизации задачи. Например, использовать рассмотренные в Главе 2 алгоритмы на основе метода конечных элементов и семидискретизации.

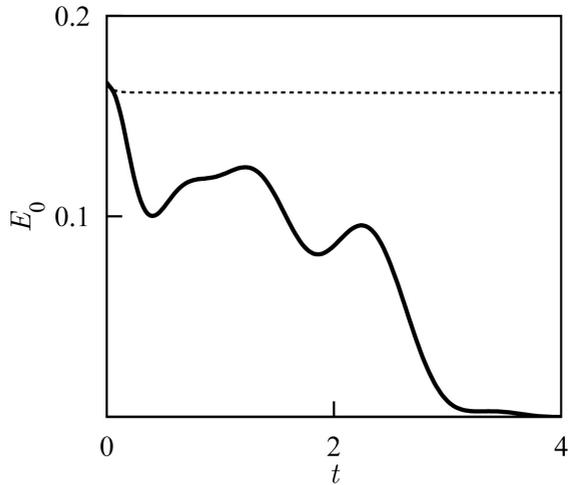


Рис. 4.1.10. Изменение полной механической энергии балки $E_0(t)$.

§4.2. Вариационный подход к оптимизации продольных перемещений призматической балки

4.2.1. Постановка задачи оптимального управления движением упругого тела. Рассмотрим упругое тело, занимающее некоторую ограниченную область Ω с кусочно-гладкой границей Γ . На части границы Γ_u определяются перемещения, на части Γ_σ — внешние нагрузки. При этом, $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$ и $\bar{\Gamma}_u \cup \bar{\Gamma}_\sigma = \Gamma$. На тело могут действовать также известные объемные силы \mathbf{f} . В предположении малости перемещений, скоростей и деформаций движения тела Ω описываются системой дифференциальных уравнений линейной теории упругости в виде, рассмотренном в §1.3:

$$\eta = \mathbf{u}_t - \rho^{-1}(x)\mathbf{p}, \quad \xi = \varepsilon - \mathbf{C}^{-1}(x) : \sigma, \quad (4.2.1)$$

$$\mathbf{p}_t = \nabla \cdot \sigma + \mathbf{f}(x), \quad (4.2.2)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (4.2.3)$$

Здесь σ и ε — тензоры напряжений и деформаций, \mathbf{u} и \mathbf{p} — векторы перемещений и объемной плотности импульса, ρ — объемная плотность тела, \mathbf{C} — тензор модулей упругости. Индекс t обозначает частные производные по времени, знак $\nabla = [\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3]^T$ — оператор градиента в пространстве координат $x = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Ограничимся случаем, когда в каждой точке $x \in \Gamma$, где однозначно определена нормаль к границе, краевые условия можно записать в в следующем виде

$$\begin{aligned} x \in \Gamma_u : \quad \mathbf{u} &= \mathbf{v}(t, x), \\ x \in \Gamma_\sigma : \quad \mathbf{q} &= \sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r}(t, x), \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к границе Γ ; \mathbf{q} — вектор нагрузки на единичную площадку, ортогональную нормали \mathbf{n} . Вектор-функция \mathbf{v} задает граничные перемещения, а \mathbf{r} — внешнюю поверхностную нагрузку.

В начальный момент времени $t = 0$ известны распределения перемещений \mathbf{u} и объемной плотности импульса \mathbf{p} как некоторые достаточно гладкие функции координат x

$$\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}^0(x), \quad \mathbf{p}(0, x) = \mathbf{p}^0(x). \quad (4.2.5)$$

Отметим, что эти начальные условия должны быть согласованы с граничными условиями (4.2.4) [3].

Компоненты граничных векторов \mathbf{v} и \mathbf{r} — либо заданные функции времени t и координат x , либо определенные на некотором классе неизвестных управления

$$\begin{aligned} x \in \Gamma_u \setminus \Gamma_v : \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x); \quad x \in \Gamma_v : \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}; \\ x \in \Gamma_\sigma \setminus \Gamma_r : \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t, x); \quad x \in \Gamma_r : \quad \mathbf{r} \in \mathcal{R}. \end{aligned}$$

Ставится задача нахождения оптимального управления $\mathbf{v}^*(t, x)$ при $x \in \Gamma_v$ и $\mathbf{r}^*(t, x)$ при $x \in \Gamma_r$, которое обеспечивает перемещение тела из начального состояния (4.2.5) за фиксированное время T в определенное конечное множество состояний

$$\mathbf{u}(T, x) \in \mathcal{U}_T, \quad \mathbf{p}(T, x) \in \mathcal{P}_T \quad (4.2.6)$$

и доставляет минимум заданному функционалу качества J на классе допустимых управлений \mathcal{V} и \mathcal{R} :

$$J[\mathbf{v}, \mathbf{r}] \rightarrow \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}, \mathbf{r} \in \mathcal{R}}. \quad (4.2.7)$$

4.2.2. Дискретизация задачи на основе метода интегро-дифференциальных соотношений. Для решения задачи (4.2.1)–(4.2.7) применим метод, описанный в §2.3. Напомним, что соотношения (4.2.1) заменяются следующим интегральным равенством

$$\Phi = \int_0^T \int_{\Omega} \varphi(t, x) d\Omega dt = 0, \quad \varphi = \frac{1}{2} (\rho(x)\eta \cdot \eta + \xi : \mathbf{C}(x) : \xi). \quad (4.2.8)$$

Предложенная интегральная формулировка позволяет свести краевую задачу движения упругого тела (4.2.1)–(4.2.5) к вариационной. Если решение $\mathbf{u}^*(t, x)$, $\mathbf{p}^*(t, x)$, $\sigma^*(t, x)$ системы (4.2.2)–(4.2.5), (4.2.8) существует, то функционал достигает на этом решении своего абсолютного минимума

$$\Phi(\mathbf{u}^*, \mathbf{p}^*, \sigma^*) = \min_{\mathbf{u}, \mathbf{p}, \sigma} \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \sigma) = 0 \quad (4.2.9)$$

при удовлетворении уравнения изменения импульса (4.2.2), кинематического соотношения (4.2.2), а также краевых и начальных условий (4.2.4), (4.2.5).

Для приближенного решения задачи условной минимизации функционала Φ выберем целые положительные числа N_u , N_p , N_σ и будем искать аппроксимации $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{\mathbf{p}}$, $\tilde{\sigma}$ решения \mathbf{u}^* , \mathbf{p}^* , σ^* в виде

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_{k=1}^{N_u} \mathbf{u}^{(k)} \psi_k, \quad \tilde{\mathbf{p}} = \sum_{k=1}^{N_p} \mathbf{p}^{(k)} \psi_k, \quad \tilde{\sigma} = \sum_{k=1}^{N_\sigma} \sigma^{(k)} \psi_k, \quad (4.2.10)$$

где $\{\psi_k(t, x), \quad k = 1, 2, \dots\}$ — некоторая полная счетная система линейно независимых функций, а $\mathbf{u}^{(k)}$, $\mathbf{p}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ — неизвестные вещественные коэффициенты, записанные в векторном и тензорном виде.

Базисные функции ψ_k формируются так, чтобы аппроксимации $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{\mathbf{p}}$, $\tilde{\sigma}$ могли точно удовлетворять уравнение изменения импульса (4.2.2), граничные условия (4.2.4) и начальные условия (4.2.5) при соответствующем выборе постоянных $\mathbf{u}^{(k)}$, $\mathbf{p}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$.

Получающаяся в результате конечномерная задача безусловной минимизации функционала Φ , квадратичного по $\mathbf{u}^{(k)}$, $\mathbf{p}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$, сводится к решению системы линейных уравнений относительно неопределенных коэффициентов и позволяет найти приближенное решение $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{\mathbf{p}}$, $\tilde{\sigma}$ задачи (4.2.1)–(4.2.5) при заданных краевых условиях.

4.2.3. Оптимизация управляемых движений. Применение разбиваемого подхода к задаче управления (4.2.1)–(4.2.7) дает возмож-

ность построения различных численных алгоритмов оптимизации движений, один из которых описан далее.

Сначала выбирается система функций ψ_k и фиксируются числа N_u , N_p , N_σ таким образом, чтобы аппроксимации $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{\mathbf{p}}$, $\tilde{\sigma}$ в (4.2.10) могли точно удовлетворить краевые и начальные условия (4.2.4)–(4.2.5) при определенном выборе коэффициентов $\mathbf{u}^{(n)}$, $\mathbf{p}^{(n)}$, $\sigma^{(n)}$ (см. §2.3). После этого определяется множества допустимых управлений \mathcal{V} и \mathcal{R} , для которых возможно точное выполнение граничных условий (4.2.4). Из этого следует, что граничные вектора \mathbf{v} и \mathbf{r} должны иметь следующую структуру:

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{N_v} \mathbf{v}^{(k)} \psi_k^u(t, x), \quad \mathbf{r} = \sum_{k=1}^{N_v} \mathbf{r}^{(k)} \psi_k^r(t, x).$$

Здесь функции ψ_k^u и ψ_k^r представляют собой некоторые линейные комбинации базисных функций ψ_n . Необходимо также, чтобы управление \mathbf{v} и \mathbf{r} , заданное на Γ_v и Γ_r , обеспечивало выполнение терминальных условий (4.2.6).

Затем удовлетворяется уравнение (4.2.2) относительно неизвестных коэффициентов $\mathbf{u}^{(n)}$, $\mathbf{p}^{(n)}$, $\sigma^{(n)}$ и полученные аппроксимации $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{\mathbf{p}}$, $\tilde{\sigma}$ из (4.2.10) подставляются в функционал Φ , введенный в (4.2.8). Так как Φ является квадратичным по переменным $\mathbf{u}^{(n)}$, $\mathbf{p}^{(n)}$, $\sigma^{(n)}$, $\mathbf{v}^{(n)}$, $\mathbf{r}^{(n)}$, задача минимизации (4.2.7) сводится к решению линейной системы уравнений относительно $\mathbf{u}^{(n)}$, $\mathbf{p}^{(n)}$, $\sigma^{(n)}$.

Из решения этой системы находятся аппроксимации искомым функций $\tilde{\mathbf{u}}(t, x, \mathbf{v}, \mathbf{r})$, $\tilde{\mathbf{p}}(t, x, \mathbf{v}, \mathbf{r})$, $\tilde{\sigma}(t, x, \mathbf{v}, \mathbf{r})$, зависящие от неизвестных параметров $\mathbf{v}^{(n)}$ и $\mathbf{r}^{(n)}$ заданных на Γ_v и Γ_r . После подстановки выражений $\tilde{\mathbf{u}}(t, x, \mathbf{v}, \mathbf{r})$, $\tilde{\mathbf{p}}(t, x, v, r)$, $\tilde{\sigma}(t, x, \mathbf{v}, \mathbf{r})$ в (4.2.7) ищется минимум функционала $J[\mathbf{v}, \mathbf{r}]$ на классе допустимых управлений $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ и $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$. В случае если, как будет предполагаться в дальнейшем, J — квадратичный по параметрам управления, цель оптимизации достигается решением линейной системы уравнений относительно неизвестных $\mathbf{v}^{(n)}$ и $\mathbf{r}^{(n)}$.

4.2.4. Численный алгоритм оптимизации движений. Опишем один из возможных алгоритмов приближенного решения оптимизационной задачи в вариационной постановке (4.2.2)–(4.2.7), (4.2.9), основанный на полиномиальных представлениях искомых функций [51]. Функции \mathbf{u} , \mathbf{p} , σ аппроксимируются полными полиномами от времени t и пространственных переменных x в следующем виде

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}} &= \sum_{\alpha=0}^{N_u} \mathbf{u}^{(ijkl)} t^i x_1^j x_2^k x_3^l, & \tilde{\mathbf{p}} &= \sum_{\alpha=0}^{N_p} \mathbf{p}^{(ijkl)} t^i x_1^j x_2^k x_3^l, \\ \tilde{\sigma} &= \sum_{\alpha=0}^{N_\sigma} \sigma^{(ijkl)} t^i x_1^j x_2^k x_3^l, & \alpha &= i + j + k + l.\end{aligned}\tag{4.2.11}$$

В предложенной записи $\mathbf{u}^{(ijkl)}$, $\mathbf{p}^{(ijkl)}$, $\sigma^{(ijkl)}$ — некоторые неизвестные коэффициенты, выраженные в векторной и тензорной форме, а индексы i, j, k, l пробегает все возможные значения, для которых их сумма α не превышает выбранных целых значений N_u, N_p, N_σ , соответственно для $\tilde{\mathbf{u}}(t, x)$, $\tilde{\mathbf{p}}(t, x)$, $\tilde{\sigma}(t, x)$. Граничные функции \mathbf{v} и \mathbf{r} предполагается также заданными в полиномиальном виде

$$\begin{aligned}x \in \Gamma_u : \quad \mathbf{v} &= \sum_{\alpha=0}^{N_v} \mathbf{v}^{(ijkl)} t^i x_1^j x_2^k x_3^l, \\ x \in \Gamma_q : \quad \mathbf{r} &= \sum_{\alpha=0}^{N_r} \mathbf{r}^{(ijkl)} t^i x_1^j x_2^k x_3^l,\end{aligned}\tag{4.2.12}$$

где степени N_v и N_r фиксированы, а $\mathbf{v}^{(ijkl)}$ и $\mathbf{r}^{(ijkl)}$ — либо заданные коэффициенты, либо неизвестные параметры управления.

Пусть область Ω представляет собой выпуклый многогранник. Описанное выше представление вектора упругих смещений \mathbf{u} , вектора плотности количества движения \mathbf{p} и тензора напряжений σ дает возможность при векторе объемных сил \mathbf{f} , описываемом в виде полинома от t и x , точно удовлетворить граничные условия (4.2.4) с правой частью (4.2.12), полиномиальные начальные условия (4.2.5) и уравнения движения (4.2.2) при соответствующем выборе степеней аппроксимации N_u, N_p, N_σ [43].

Полученная в результате конечномерная задача безусловной минимизации функционала (4.2.9) позволяет найти приближенное решение $\tilde{\mathbf{u}}(t, x, \mathbf{v}, \mathbf{r})$, $\tilde{\mathbf{p}}(t, x, \mathbf{v}, \mathbf{r})$, $\tilde{\sigma}(t, x, \mathbf{v}, \mathbf{r})$ задачи управления для полиномиальных граничных векторов \mathbf{v} и \mathbf{r} из (4.2.12), которые определяются затем из условия минимума функционала (4.2.7).

4.2.5. Управляемые продольные движения тонкого упругого стержня. Для сравнения рассмотрим вначале продольные перемещения тонкого однородного прямолинейного стержня. Пусть один конец стержня свободен от нагрузок. Введем инерциальную систему координат OX , направленную вдоль оси стержня, с началом в точке O , относительно которой положение v другого конца стержня задается полиномиальной функцией времени

$$v = \sum_{n=0}^{N_0+3} v_n t^n. \quad (4.2.13)$$

Выбором системы координат можно добиться того, чтобы $v_0 = v_1 = 0$.

Одномерное линейное уравнение движения стержня, выраженное через частные производные от силы s , которая действует на поперечное сечение стержня в направлении OX , и линейной плотности импульса p вдоль этой же оси, в отсутствии внешних воздействий имеет простой вид

$$p_t = s_x. \quad (4.2.14)$$

Положение произвольной точки стержня в процессе движения задается функцией перемещений u , которая линейно связана с абсолютным положением U этой точки в неподвижной системе координат OX ($U(t, x) = x + u(t, x)$, где x — лагранжева координата точки). Краевые условия на концах записываются следующим образом

$$u(t, 0) = v, \quad s(t, L) = 0, \quad (4.2.15)$$

где L — длина стержня. Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ стержень неподвижен и в нем отсутствуют упругие дефор-

мации, т.е.

$$u(0, x) = p(0, x) = 0. \quad (4.2.16)$$

Функционал, аналогичный введенному в (4.2.8), связывающий силу s , плотность импульса p и перемещение u , имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_r &= \int_0^T \int_0^L \varphi_r(t, x) dx dt, \\ \varphi_r &= \frac{ES}{2} \left(u_x - \frac{s}{ES} \right)^2 + \frac{\rho_l}{2} \left(u_t - \frac{p}{\rho_l} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

Здесь $\rho_l = S\rho$ — линейная плотность стержня, E — модуль упругости, S — площадь поперечного сечения, T — заданное время процесса.

Ставится задача построения управления v , которое переводит стержень из начального положения покоя в терминальное положение

$$t = T: \quad v = v_T, \quad \dot{v} = 0 \quad (4.2.18)$$

и минимизирует в конечный момент времени полную механическую энергию стержня

$$\begin{aligned} J_r[v] &\rightarrow \min_{v \in \mathcal{V}}, \quad J_r = E_r(T), \\ E_r(t) &= \int_0^L \psi_r(t, x) dx, \quad \psi_r = \frac{1}{2} (ESu_x^2 + \rho_l p^2), \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

которая неявно через (4.2.13), (4.2.15) зависит от параметров управления v_k , $k = 2, \dots, N_v + 3$. Для точного выполнения условий (4.2.18) необходимо использовать два параметра управления в (4.2.13). Из этого следует, что $N_v \geq 0$.

В качестве аппроксимирующих функций \tilde{u} , \tilde{p} и \tilde{s} выберем полные полиномы от времени t и координаты x аналогично (4.2.11)

$$\tilde{u} = \sum_{i+j=0}^{N+1} u^{(ij)} t^i x^j, \quad \tilde{p} = \sum_{i+j=0}^N p^{(ij)} t^i x^j, \quad \tilde{s} = \sum_{i+j=0}^N s^{(ij)} t^i x^j.$$

Удовлетворяя уравнение изменения импульса (4.2.14), краевые и начальные условия (4.2.15), (4.2.16), найдем минимум функционала Φ_r относительно оставшихся неизвестных параметров $u^{(ij)}$, $p^{(ij)}$, $s^{(ij)}$ для произвольных коэффициентов v_k , $k = 4, 5, \dots, N_v + 3$. Задача безусловной минимизации квадратичного функционала $\Phi_r \geq 0$ сводится к решению линейной системы, аналогичной (4.1.15):

$$\frac{\partial \Phi_r(\mathbf{y}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{B}\mathbf{v} - \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (4.2.20)$$

где $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{N_y}$ — вектор, компоненты которого составлены из неопределенных параметров $u^{(ij)}$, $p^{(ij)}$, $s^{(ij)}$; $\mathbf{v} = [v_4, \dots, v_{N_v+3}]^T \in \mathbb{R}^{N_v}$ — вектор управления; $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N_y \times N_y}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N_y \times N_v}$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{N_y}$ — матрицы и вектор, заданные через параметры системы.

Как и в сформулированной в §4.1 задаче управления поперечными движениями упругой балки из решения \mathbf{y}^* системы (4.2.20) находятся аппроксимации $\tilde{u}^*(t, x, \mathbf{v})$, $\tilde{p}^*(t, x, \mathbf{v})$, $\tilde{s}^*(t, x, \mathbf{v})$, зависящие от неизвестных параметров управления.

После подстановки приближений \tilde{u}^* , \tilde{p}^* , \tilde{s}^* в функционал из (4.2.19) находится минимум $J_r(\mathbf{v})$. Задача оптимизации сводится к решению системы уравнений

$$\frac{\partial J_r(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{D}\mathbf{v} - \mathbf{r} = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{N_v \times N_v}$ и $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{N_v}$ — известные матрица и вектор.

Значение оптимального вектора $\mathbf{v}^* = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{r}$ определяет закон оптимального управления и искомые поля

$$v^* = v(t, \mathbf{v}^*), \quad \tilde{u}^*(t, x, \mathbf{v}^*), \quad \tilde{p}^*(t, x, \mathbf{v}^*), \quad \tilde{s}^*(t, x, \mathbf{v}^*).$$

4.2.6. Управляемые движения однородной балки квадратного сечения. Рассмотрим задачу оптимизации продольных пространственных движений прямолинейной балки постоянного квадратного сечения (рис. 4.2.1). В качестве управления выберем полиномиальное во времени перемещение левого края балки $A_1 A_2 A_3 A_4$ вдоль ее оси $O_1 O_2$.

Предполагается, что на балку не действуют внешние объемные силы и граничные нагрузки. Считается, что балка выполнена из однородного изотропного материала. Заданы модуль упругости E , коэффициент Пуассона ν и объемная плотность ρ . Зафиксированы геометрические параметры: длина L и размер поперечного сечения $2a$. Исследуется случай, когда в начальный момент времени $t = 0$ в теле отсутствуют упругие смещения и все точки балки находятся в покое.

Введем неподвижную систему координат $OX_1X_2X_3$, нулевая точка O которой в начальный момент времени совпадает с центральной точкой O_1 левого поперечного сечения $A_1A_2A_3A_4$. Ось OX_1 направлена вдоль центральной линии балки O_1O_2 , а OX_2 и OX_3 параллельны соответственно ее боковым сторонам A_1A_2 и A_1A_3 .

В этой системе координат граничные условия записываются в напряжениях

$$\begin{aligned} x_2 = \pm a : \quad \sigma_{12} = \sigma_{22} = \sigma_{23} = 0, \\ x_3 = \pm a : \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0, \\ x_1 = L : \quad \sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0, \\ x_1 = 0 : \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0, \end{aligned} \tag{4.2.21}$$

и перемещениях

$$x_1 = 0 : \quad u_1 = v = \sum_{n=2}^{N_v+3} v_n t^n. \tag{4.2.22}$$

Начальные условия определяются из (4.2.5), где

$$\mathbf{u}^0(x) = \mathbf{p}^0(x) = 0. \tag{4.2.23}$$

Ставится задача нахождения неизвестных параметров v_k управления v , которое переводит за фиксированное время $t = T$ граничное сечение балки при $x_1 = 0$ в заданное положение с нулевой скоростью

$$v(T) = v_T, \quad \dot{v}(T) = 0 \tag{4.2.24}$$

и минимизирует в конечный момент времени полную механическую энергию системы

$$J[v] \rightarrow \min_v, \quad J = E(T),$$

$$E(t) = \int_{\Omega} \psi(t, x) d\Omega = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \int_0^L \psi(t, x) dx_1 dx_2 dx_3, \quad (4.2.25)$$

$$\psi(t, x) = \frac{1}{2} (\varepsilon : \mathbf{C} : \varepsilon + \rho^{-1} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}).$$

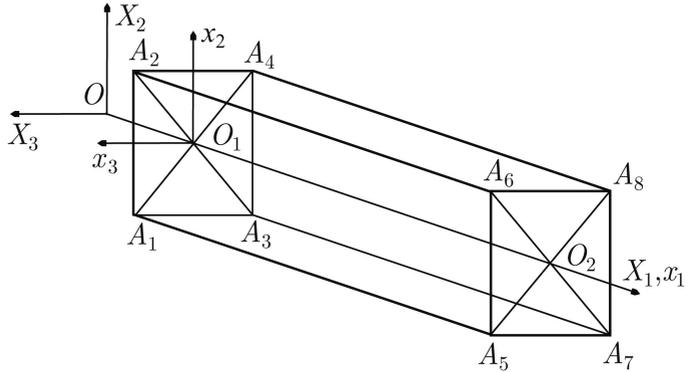


Рис. 4.2.1. Балка, прикрепленная к подвижному основанию.

Зависимость энергии E от управления v определяется через граничное условие (4.2.22). Относительная интегральная ошибка, характеризующая качество решения, выражается через эту энергию следующим образом:

$$\Delta = \frac{\Phi}{\Psi}, \quad \Psi = \int_0^T E(t) dt.$$

Заметим, что одномерная модель упругих движений тонкого однородного прямолинейного стержня, рассмотренная в предыдущем параграфе, является приближением трехмерной динамической задачи для балки квадратного сечения при $aL^{-1} \rightarrow 0$ или $\nu \rightarrow 0$.

Прямое использование полиномиальных аппроксимаций (4.2.11) для задачи (4.2.2)–(4.2.7), (4.2.9) приводит к большим вычислительным трудностям, которые обусловлены ее высокой размерностью. Как и в §3.3, для уменьшения размерности вектора \mathbf{y} , составленного из неизвестных параметров $\mathbf{u}^{(ijkl)}$, $\mathbf{p}^{(ijkl)}$, $\sigma^{(ijkl)}$, оставшихся после удовлетворения граничных и начальных условий (4.2.21), (4.2.22), (4.2.5) с учетом (4.2.23), можно использовать свойства симметрии этой механической системы.

В неподвижной системе координат $OX_1X_2X_3$ для балки с квадратным поперечным сечением при выбранном способе управления (4.2.22) существуют четыре плоскости симметрии, сохраняющиеся во время движения. Это координатные плоскости OX_1X_2 и OX_1X_3 , а также плоскости, образованные осью OX_1 и двумя диагоналями A_1A_4 и A_2A_3 поперечного сечения $A_1A_2A_3A_4$ (см. рис. 4.2.1).

Учитывая структуру уравнения изменения импульса (4.2.2), кинематических соотношений (4.2.3) и функционала Φ в (4.2.8), можно показать, что существенная часть коэффициентов $\mathbf{u}^{(ijkl)}$, $\mathbf{p}^{(ijkl)}$, $\sigma^{(ijkl)}$ при выбранном движении равна нулю:

$$\begin{aligned} u_1^{(ijkl)} &= p_1^{(ijkl)} = \sigma_{11}^{(ijkl)} = \sigma_{22}^{(ijkl)} = \sigma_{33}^{(ijkl)} = 0, \quad k, l = 2n + 1; \\ u_2^{(ijkl)} &= p_2^{(ijkl)} = \sigma_{12}^{(ijkl)} = 0, \quad k = 2n, \quad l = 2n + 1; \\ u_3^{(ijkl)} &= p_3^{(ijkl)} = \sigma_{13}^{(ijkl)} = 0, \quad k = 2n + 1, \quad l = 2n; \\ \sigma_{23}^{(ijlk)} &= 0, \quad k, l = 2n; \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Кроме того, благодаря описанным выше свойствам симметрии устанавливаются следующие связи между неизвестными коэффициентами:

$$\begin{aligned} u_1^{(ijkl)} &= u_1^{(ijlk)}, \quad p_1^{(ijkl)} = p_1^{(ijlk)}, \\ u_2^{(ijkl)} &= u_3^{(ijlk)}, \quad p_2^{(ijkl)} = p_3^{(ijlk)}, \\ \sigma_{\alpha\alpha}^{(ijkl)} &= \sigma_{\alpha\alpha}^{(ijlk)}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \\ \sigma_{23}^{(ijkl)} &= \sigma_{23}^{(ijlk)}, \quad \sigma_{12}^{(ijkl)} = \sigma_{13}^{(ijlk)}. \end{aligned}$$

Для достаточно длинной балки ($a \ll L$) допустимо использовать небольшие степени полиномиальных аппроксимаций по переменным x_2 и x_3 . В качестве иллюстрации применимости предложенного подхода для моделирования и оптимизации движений упругих систем рассмотрим линейные разложения по этим переменным и ограничим суммарную степень по переменным t и x_1 некоторым числом N ($N > N_v$).

Для этого приближения $\tilde{\sigma}_{12} = \tilde{\sigma}_{13} = \tilde{\sigma}_{23} = 0$. Получаем следующие аппроксимации, удовлетворяющие граничные и начальные условия (4.2.21)–(4.2.23) и уравнение (4.2.2) при $\mathbf{f} = 0$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_1 &= \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1-i} u_1^{(ij)} t^i x_1^j + \sum_{i=2}^{N_v+3} v_i t^i, \\
 \tilde{u}_2 &= \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=0}^{N+1-i} u_2^{(ij)} t^i x_1^j x_2, \quad \tilde{u}_3 = \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=0}^{N+1-i} u_3^{(ij)} t^i x_1^j x_3, \\
 \tilde{\sigma}_{11} &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-1-i} \sigma_1^{(ij)} (L - x_1) t^i x_1^j, \quad \tilde{p}_1 = - \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-i} \frac{j+1}{i+1} \sigma_1^{(ij)} t^{i+1} x_1^j, \\
 \tilde{\sigma}_{22} &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} \sigma_2^{(ij)} (a^2 - x_2^2) t^i x_1^j, \quad \tilde{p}_2 = - \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} \frac{2}{i+1} \sigma_2^{(ij)} t^{i+1} x_1^j x_2, \\
 \tilde{\sigma}_{33} &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} \sigma_2^{(ij)} (a^2 - x_3^2) t^i x_1^j, \quad \tilde{p}_3 = - \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} \frac{2}{i+1} \sigma_2^{(ij)} t^{i+1} x_1^j x_3.
 \end{aligned} \tag{4.2.26}$$

Эти функции необходимо подставить в функционал Φ и после этого найти его минимум при произвольных параметрах $v_k = 4, 5, \dots, N_v + 3$. Затем, аналогично алгоритму, описанному в п. 4.2.4, ищется минимум функционала $J[v]$ в (4.2.25) и оптимальное управление $v(t)$, удовлетворяющее терминальные условия (4.2.24).

4.2.7. Численные результаты. В расчетах для модели движения тонкого упругого однородного стержня были выбраны следующие безразмерные параметры: длина стержня $L = 1$, площадь поперечного сечения $S = 0.01$, модуль упругости $E = 1$, линейная плотность $\rho_l = 0.01$. При заданных параметрах стержня период низшей моды собственных

колебаний $T_1 = 2\pi$.

Оптимизационная задача решалась на классе полиномиальных управлений (4.2.13) для $N_v = 6$. При $N_v = 0$ управление определяется однозначно из условий (4.2.16) и (4.2.18). В этом случае

$$v = v_T T^{-3} t^2 (3T - 2t). \quad (4.2.27)$$

При $N_v > 0$ управление v содержит неизвестные параметры, которые используются для минимизации функционала качества $J_r[v]$, заданного в (4.2.19).

Для конкретности перемещение левого конца стержня принято равным $v_T = 0.1$. С помощью алгоритма, описанного в п. 4.2.5, удалось аналитически построить оптимальное в смысле функционала J_r управление движением стержня для степени аппроксимации решения $N = 16$.

Для сравнения модели тонкого прямолинейного стержня, рассмотренного в п. 4.2.5 и приближения (4.2.26), которое учитывает упругие перемещения, ортогональные оси OX_1 , были выбраны аналогичные геометрические и механические параметры тела $L = 1$, $a = 0.05$, $E = 1$, $\rho = 1$, $\nu = 0.3$, а также фиксированы время управления $T = 4$ и перемещение $v_T = 0.1$.

Рис. 4.2.2–6 представляют результаты расчетов продольного движения однородного упругого стержня при найденном оптимальном законе управления v^* ($N_v = 6$). Сплошной кривой на рис. 4.2.2 показана управляющая функция перемещения одного из концов стержня $u(t, 0) \equiv v^*(t)$, а штриховой — перемещение второго конца $u(t, L)$. Как видно из этого графика, удаленный конец стержня некоторое время ($t < 1$) остается в покое из-за конечной скорости распространения упругих смещений ($c = \sqrt{E/\rho} = 1$).

На рис. 4.2.3 сравниваются ускорения левого конца стержня для оптимального движения (сплошная кривая) и для перемещения без оптимизации, заданного согласно закону (4.2.27) (штриховая кривая). Ам-

плитуда оптимального ускорения для данного примера почти в 2 раза превышает аналогичное значение для случая $N_v = 0$.

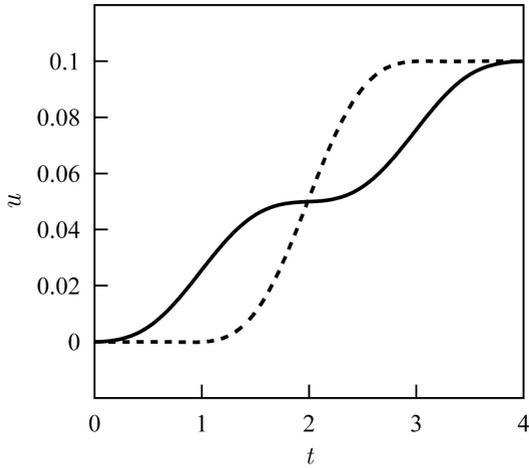


Рис. 4.2.2. Оптимальные перемещения концов стержня $u(t, 0)$ и $u(t, L)$.

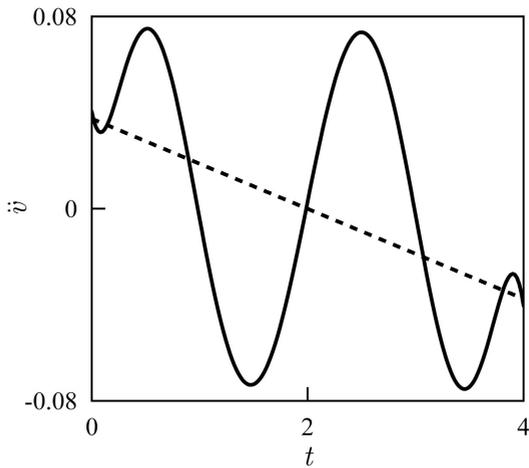


Рис. 4.2.3. Оптимальное и тестовое ускорение $\ddot{v}(t)$ управляемого конца упругого стержня.

Распределение плотности полной механической энергии стержня в плоскости $\{t, x\}$ показано на рис. 4.2.4. В треугольных областях

$$0 < t < x, \quad 0 < T - t < x$$

значение плотности энергии мало, в первой из которых — из-за ограниченной скорости переходных процессов, а во второй — из-за свойств найденного оптимального управления, приводящего стержень в положение с полной энергией, близкой к нулю.

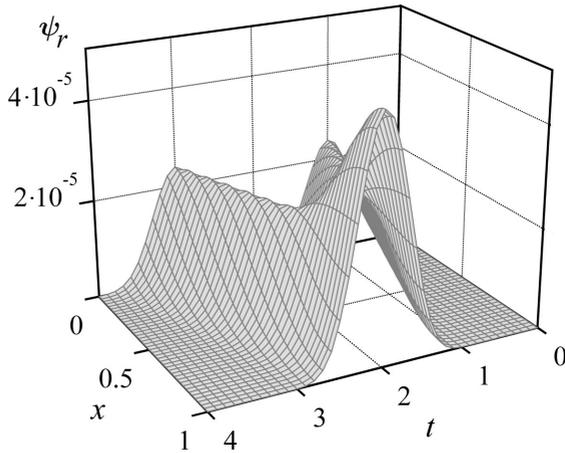


Рис. 4.2.4. Распределение плотности механической энергии $\psi_r(t, x)$.

Действительно, выбирая шесть параметров v_k , $k = 4, \dots, 9$, удается перевести данную упругую систему в окрестность заданного терминального состояния. При этом $J_r = 9.78 \cdot 10^{-10}$, что означает почти полное успокоение стержня в конце процесса. Для сравнения в случае $N_v = 0$ (нет оптимизации) $J_r = 9.35 \cdot 10^{-6}$. Для оптимального процесса интеграл по времени от энергии, находящейся в системе, равен

$$\Psi_r = \int_0^T E_r dt = 3.604 \cdot 10^{-5}, \quad (4.2.28)$$

где $E_r(t)$ полная запасенная энергия стержня в произвольный момент времени t из (4.2.19).

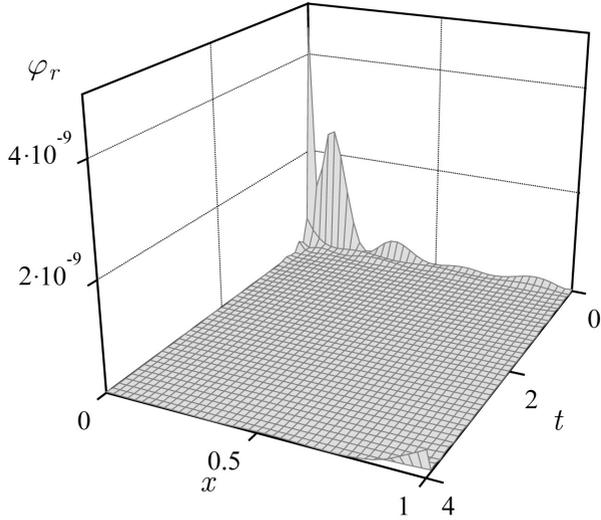


Рис. 4.2.5. Распределение локальной ошибки $\varphi_r(t, x)$.

Плотность ошибки φ_r , определенная в (4.2.17) как функция времени t и координаты x , показана на рис. 4.2.5. Из графика видно, что функция $\varphi_r(t, x)$, имеющая размерность линейной плотности энергии, близка нулю и достигает максимальных значений в начале процесса управления. Эта ошибка обусловлена только конечномерным представлением неизвестных функций \tilde{u} , \tilde{p} , \tilde{s} , так как все вычисления, приведенные в этом параграфе, выполнялись точно с использованием аналитических преобразований, встроенных в программный пакет MAPLE.

Представляет интерес приведенная на рис. 4.2.6 зависимость отношения функционала Φ_r к значению Ψ_r от числа N_y , определяющего количество неизвестных в (4.2.20). Характерно быстрое монотонное уменьшение значения Φ_r с увеличением N_y . При $N_y = 275$ (степень

полиномов $N = 16$) имеем $\Delta_r = \Phi_r \Psi_r^{-1} = 8.01 \cdot 10^{-7}$.

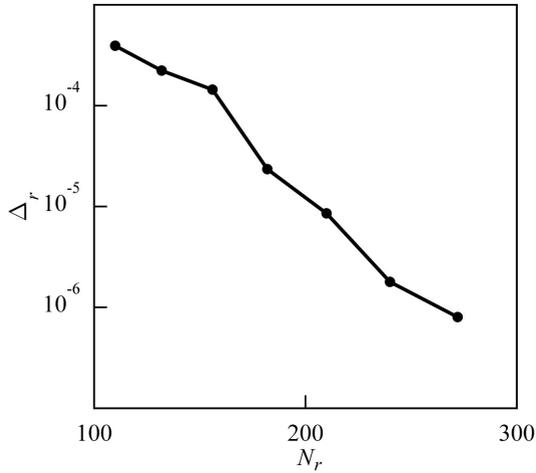


Рис. 4.2.6. Относительная интегральная ошибка $\Delta_r(N_y)$ для оптимального процесса.

При моделировании упругой балки квадратного поперечного сечения удалось получить аналитически приближенное решение для степени $N = 12$, при этом $N_y = 325$. На рис. 4.2.7–10 показаны результаты построения оптимальных движений для этой модели. Из рис. 4.2.7 видно, что управляющая функция, представляющая собой продольное перемещение левого конца стержня $u_1(t, 0, x_2, x_3) = v(t)$ (сплошная линия), практически совпадает с аналогичным управлением в предыдущем примере (см. рис. 4.2.2). Движение центральной точки $u_1(t, L, 0, 0)$ правого сечения (штриховая кривая) несколько отличается от одномерного случая. Проявляются также небольшие ортогональные движения (штрихпунктирной линией выведено перемещение $u_2(t, 0, a, 0) = u_3(t, 0, 0, a)$).

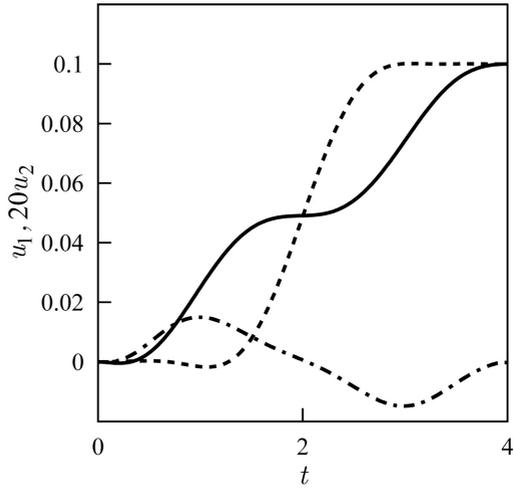


Рис. 4.2.7. Оптимальные перемещения точек призматической балки $u_1(t, 0, 0, 0)$, $u_1(t, L, 0, 0)$ и $u_2(t, 0, a, 0)$.

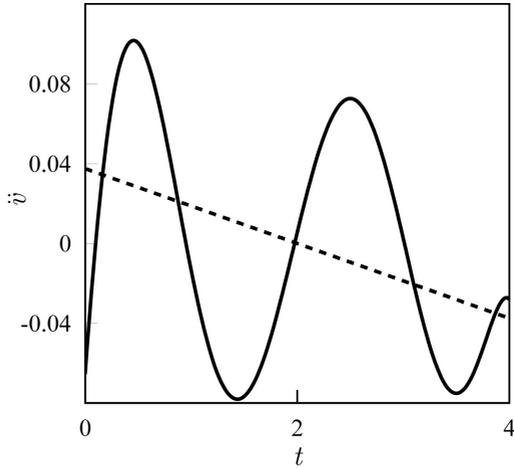


Рис. 4.2.8. Оптимальное и тестовое ускорение $\ddot{v}(t)$ управляемого конца призматической балки.

Близость управлений для обеих моделей обусловлена небольшими размерами поперечного сечения по сравнению с длиной балки. Различие заметно для вторых производных от времени $\ddot{v}(t)$, приведенных сплошной линией для моделей стержня и балки на рис. 4.2.3 и рис. 4.2.8 соответственно. В начальный момент времени управление для пространственной модели отрицательно.

Распределение линейной плотности полной механической энергии

$$\psi_1(t, x_1) = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \psi dx_2 dx_3$$

вдоль оси x_1 и во времени t представлено на рис. 4.2.9. В отличие от модели стержня, для трехмерной балки немного увеличивается область в начале процесса, для которой плотность энергии мала по сравнению со средней плотностью на всем промежутке управления.

На рис. 4.2.10 приведено распределение линейной плотности ошибки по координате x_1 и времени t :

$$\varphi_1(t, x_1) = \int_{-a}^a \int_{-a}^a \varphi dx_2 dx_3.$$

Значения ошибки малы и сосредоточены вблизи начального момента времени $t = 0$. Для увеличения точности решения необходимо увеличивать размерность задачи. Для заданных параметров относительная ошибка составила $\Delta = 5 \cdot 10^{-4}$. Функционал управления равен $J_1 = J[v]|_{N_v=6} \approx 5.26 \cdot 10^{-9}$. Для тестового управления, в котором отсутствуют параметры необходимые для оптимизации,

$$J_0 = J[v]|_{N_v=0} \approx 9.26 \cdot 10^{-6}, \quad J_1 J_0^{-1} = 6 \cdot 10^{-4}.$$

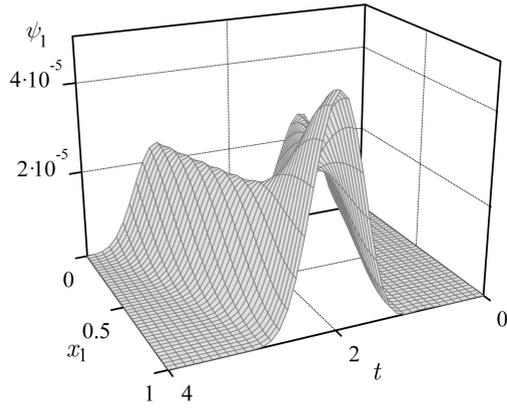


Рис. 4.2.9. Распределение линейной плотности механической энергии $\psi_1(t, x_1)$.

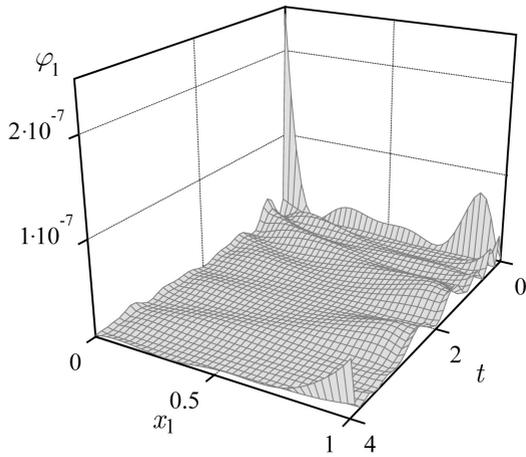


Рис. 4.2.10. Распределение локальной ошибки $\varphi_1(t, x_1)$.

§4.3. Оптимизация управления с регуляризацией решения на основе МКЭ в задаче о движении упругого стержня

4.3.1. Постановка задачи оптимального управления. Исследуем задачу оптимального управления продольными перемещениями однородного упругого стержня в вариационной постановке, рассмотренной в §1.2, §2.2 и §4.2. В соответствии с формулировкой (2.2.1), (2.2.4), (2.2.5) ищется минимум функционала энергетической ошибки

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{\Omega} \varphi(u, r) d\Omega \rightarrow \min_{u, r}, \\ \varphi &= \frac{1}{2} (\eta^2 + \xi^2), \quad \xi = u_x - r_t, \quad \eta = u_t - r_x, \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

при заданных краевых и начальных условиях

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= v(t), \quad r(t, 1) = 0, \\ u(0, x) &= 0, \quad r(0, x) = 0, \quad v(0) = 0. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Здесь на пространственно-временной области $\Omega = (0, T) \times (0, 1)$ заданы функция перемещений точек стержня $u(t, x)$ и вспомогательная динамическая функция $r(t, x)$ такая, что сила в поперечном сечении и линейная плотность импульса определяются соответственно как

$$s = r_t(t, x), \quad p = r_x(t, x). \quad (4.3.3)$$

Ставится задача нахождения управления $v^*(t) \in \mathcal{V}$, которое в конечный момент времени $t = T$ приводит один конец стержня в положение

$$u(T, 0) = v(T) = v_T \quad (4.3.4)$$

и минимизирует функционал

$$J[v] \rightarrow \min_{v \in \mathcal{V}}, \quad J = \alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2, \quad J_1 = E(T), \quad J_2 = \bar{E}, \quad (4.3.5)$$

где

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \frac{\Psi}{T}, \quad \Psi = \int_0^T E(t)dt, \\ E &= \int_0^1 \psi(t, x)dx, \quad \psi = \frac{1}{2} (u_x^2 + r_x^2).\end{aligned}\tag{4.3.6}$$

Здесь α_1 и α_2 — неотрицательные весовые коэффициенты ($\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$).

Можно сказать, что в зависимости от величин этих коэффициентов управление в определенной степени будет стремиться как подавить механическую энергию упругого стержня в конце движения $E(T)$, так и уменьшить среднюю энергию процесса \bar{E} .

Отметим, что в вариационной постановке (4.3.1)–(4.3.2) не требуется равенство нулю производной по времени от функции управления $v(t)$ в начальный момент времени $t = 0$ (ср. §4.2). Нулевые начальные условия на скорости точек стержня $u_t(0, x)$ не вводятся в явном виде. Они будут выполняться в некотором обобщенном смысле, как следствие необходимых условий стационарности функционала Φ (см. §1.2).

4.3.2. Аппроксимация движений стержня и параметризация управления. Для нахождения приближенных движений и параметрической оптимизации управления в задаче (4.3.1)–(4.3.5) используем вариационный алгоритм на основе МКЭ, предложенный в §2.2, и процедуру параметрической оптимизации, описанную в §4.2.

Напомним кратко шаги построения непрерывных кусочно-полиномиальных аппроксимаций неизвестных полей $u(t, x)$ и $r(t, x)$ на треугольной сетке (см. рис. 2.2.1, 2.2.2). С помощью прямых линий

$$\begin{aligned}t &= t_n = (n - 1)\Delta t, \quad x = x_m = (m - 1)\Delta x, \\ \Delta t &= N^{-1}T, \quad \Delta x = M^{-1}, \\ m &= 1, \dots, M + 1, \quad n = 1, \dots, N + 1,\end{aligned}\tag{4.3.7}$$

область Ω разбивается на MN прямоугольников Ω_{mn} . Диагонали прямоугольника Ω_{mn} делят его на четыре треугольника Δ_{mnj} , $j = 1, 2, 3, 4$,

на которых неизвестные функции ищутся как полные полиномы степени K в представлении Бэзье–Бернштейна (2.2.8).

Неизвестные функции $u(t, x)$ и $r(t, x)$ на треугольнике Δ_{mnj} этой сетки заданы через параметры $u_{kl}^{(mnj)}$ и $r_{kl}^{(mnj)}$, число которых равно

$$N_{\Delta} = \frac{1}{2}(K+1)(K+2).$$

Вводится вектор локальных параметров $\hat{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{N_l}$, $N_l = 8MNN_{\Delta}$, составленный из этих коэффициентов. Аппроксимации кинематических и динамических полей представимы в виде

$$\hat{u} = \hat{\mathbf{u}}^T(t, x)\hat{\mathbf{z}}, \quad \hat{r} = \hat{\mathbf{r}}^T(t, x)\hat{\mathbf{z}},$$

где $\hat{\mathbf{u}}$ и $\hat{\mathbf{r}}$ соответствующие векторы разрывных базисных функций.

После этого находится матрица \mathbf{Q} , которая связывает векторы локальных и глобальных параметров согласно

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{Q}\mathbf{z}, \quad \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{N_l \times N_g},$$

а непрерывные кинематические и динамические поля выражаются в матричной форме:

$$\tilde{u}(t, x, z) = \mathbf{u}^T(t, x)\mathbf{z}, \quad \tilde{r}(t, x, z) = \mathbf{r}^T(t, x)\mathbf{z}. \quad (4.3.8)$$

Для задачи оптимально управления (4.3.1)–(4.3.5) вектор глобальных параметров может быть представлен в виде

$$\mathbf{z} = [\mathbf{y}^T \mathbf{v}^T \mathbf{q}^T]^T \in \mathbb{R}^{N_g}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{N_y}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N_v}, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{N_q}, \quad (4.3.9)$$

$$N_g = N_y + N_v + N_q, \quad N_y = 4KMN, \quad N_v = KN - 1.$$

Здесь \mathbf{y} — вектор проектных параметров; \mathbf{v} — вектор параметров управления, которые для выбранных аппроксимаций определяют согласно (4.3.2) перемещение конца стержня $v(t)$ при $t \in (0, T)$; \mathbf{q} — вектор системных параметров, зависящий для рассматриваемого случая единственно от заданного терминального положения конца стержня v_T .

В силу линейности задачи можно ограничиться случаем $v_T = 1$. Тогда в предложенном алгоритме допустимое управление — это непрерывные кусочно-полиномиальные функции

$$\begin{aligned} v(t) &= \tilde{v}(t) = \mathbf{b}^T(t)[\mathbf{v}^T \ 1]^T, \\ \mathbf{b} &= [\mathbf{0}_{N_v+1, N_y} \ \mathbf{I}_{N_v+1} \ \mathbf{0}_{N_v+1, N_q-1}] \mathbf{u}(t, 0), \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

где \mathbf{u} — базисная вектор-функция перемещений из (4.3.8), $\mathbf{0}_{m,n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ обозначает нулевую матрицу соответствующей размерности, $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — единичная матрица.

Подставляя аппроксимации $\tilde{u}(t, x, \mathbf{z})$ и $\tilde{r}(t, x, \mathbf{z})$ из (4.3.8) в выражения для функционала (4.3.1), получаем

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{z}) = \Phi[\tilde{u}, \tilde{r}] = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{F} \mathbf{z}.$$

Учитывая структуру (4.3.9) вектора \mathbf{z} и квадратичную форму функционала $\tilde{\Phi}$, можно представить матрицу $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{N_g \times N_g}$ как

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{yy} & \mathbf{F}_{yv} & \mathbf{F}_{yq} \\ \mathbf{F}_{yv}^T & \mathbf{F}_{vv} & \mathbf{F}_{vq} \\ \mathbf{F}_{yq}^T & \mathbf{F}_{vq}^T & \mathbf{F}_{qq} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{F}_{yy} &= \mathbf{F}_{yy}^T \in \mathbb{R}^{N_y \times N_y}, \quad \mathbf{F}_{vv} = \mathbf{F}_{vv}^T \in \mathbb{R}^{N_v \times N_v}, \\ \mathbf{F}_{qq} &= \mathbf{F}_{qq}^T \in \mathbb{R}^{N_q \times N_q}, \quad \mathbf{F}_{yv} \in \mathbb{R}^{N_y \times N_v}, \\ \mathbf{F}_{yq} &\in \mathbb{R}^{N_y \times N_q}, \quad \mathbf{F}_{vq} \in \mathbb{R}^{N_v \times N_q}. \end{aligned}$$

Минимальное значение функционала $\tilde{\Phi}$ достигается при значении вектора проектных параметров

$$\tilde{\mathbf{y}} = -\mathbf{F}_{yy}^{-1} (\mathbf{F}_{yv} \mathbf{v} + \mathbf{F}_{yq} \mathbf{q}). \quad (4.3.11)$$

4.3.3. Оптимизация управления для приближенной системы. После подстановки аппроксимаций (4.3.10) в (4.3.5) целевая функция управления $\hat{J}(\mathbf{z}) = J[\tilde{u}, \tilde{r}]$, как и функционал $\tilde{\Phi}$ квадратичная по

вектору \mathbf{z} , представима в виде

$$\hat{J}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{J} \mathbf{z} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{yy} & \mathbf{J}_{yv} & \mathbf{J}_{yq} \\ \mathbf{J}_{yv}^T & \mathbf{J}_{vv} & \mathbf{J}_{vq} \\ \mathbf{J}_{yq}^T & \mathbf{J}_{vq}^T & \mathbf{J}_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_{yy} = \mathbf{J}_{yy}^T \in \mathbb{R}^{N_y \times N_y}, \quad \mathbf{J}_{vv} = \mathbf{J}_{vv}^T \in \mathbb{R}^{N_v \times N_v},$$

$$\mathbf{J}_{qq} = \mathbf{J}_{qq}^T \in \mathbb{R}^{N_q \times N_q}, \quad \mathbf{J}_{yv} \in \mathbb{R}^{N_y \times N_v},$$

$$\mathbf{J}_{yq} \in \mathbb{R}^{N_y \times N_q}, \quad \mathbf{J}_{vq} \in \mathbb{R}^{N_v \times N_q}.$$

Подставляя в выражение функционала $\hat{J}(\mathbf{y}, \mathbf{v})$ вектор проектных параметров $\tilde{\mathbf{y}}$, найденный в (4.3.11), получим

$$\tilde{J}(\mathbf{v}) = \hat{J}(\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{v}), \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{vv} & \mathbf{G}_{vq} \\ \mathbf{G}_{vq}^T & \mathbf{G}_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_{yv} = \mathbf{F}_{vy} \mathbf{F}_{yy}^{-1} \mathbf{J}_{yy} \mathbf{F}_{yy}^{-1} \mathbf{F}_{yv} - \mathbf{F}_{vy} \mathbf{F}_{yy}^{-1} \mathbf{J}_{yv} - \mathbf{J}_{vy} \mathbf{F}_{yy}^{-1} \mathbf{F}_{yv} + \mathbf{J}_{vv},$$

$$\mathbf{G}_{yq} = \mathbf{F}_{vy} \mathbf{F}_{yy}^{-1} \mathbf{J}_{yy} \mathbf{F}_{yy}^{-1} \mathbf{F}_{yq} - \mathbf{J}_{vy} \mathbf{F}_{yy}^{-1} \mathbf{F}_{yq} + \mathbf{J}_{vq},$$

$$\mathbf{G}_{vq} = \mathbf{F}_{qy} \mathbf{F}_{yy}^{-1} \mathbf{J}_{yy} \mathbf{F}_{yy}^{-1} \mathbf{F}_{yq} - \mathbf{F}_{qy} \mathbf{F}_{yy}^{-1} \mathbf{J}_{yq} - \mathbf{J}_{qy} \mathbf{F}_{yy}^{-1} \mathbf{F}_{yq} + \mathbf{J}_{qq}.$$

Таким образом, оптимизация конечномерной функции управления (4.3.10) сводится к безусловной минимизации функции $\tilde{J}(\mathbf{v})$, что эквивалентно решению линейной системы уравнений

$$\frac{\partial \tilde{J}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{0}.$$

Оптимальное значение вектора управления \mathbf{v} находится из соотношения

$$\mathbf{v}^* = -\mathbf{G}_{vv}^{-1} \mathbf{G}_{vq} \mathbf{q}.$$

В результате, оптимальный вектор проектных параметров выражается в явном виде как

$$\mathbf{y}^* = \tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{v}^*) = \mathbf{F}_{yy}^{-1} (\mathbf{G}_{vv}^{-1} \mathbf{G}_{vq} - \mathbf{F}_{yq}) \mathbf{q}.$$

Заменяя в (4.3.8) вектор \mathbf{z} на

$$\mathbf{z}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^* \\ \mathbf{v}^* \\ \mathbf{q} \end{bmatrix},$$

получим с учетом (4.3.3) аппроксимации полей перемещений, сил и импульсов

$$\tilde{u}^* = \mathbf{u}^T(t, x)\mathbf{z}^*, \quad \tilde{s}^* = \mathbf{r}_t^T(t, x)\mathbf{z}^*, \quad \tilde{p}^* = \mathbf{r}_x^T(t, x)\mathbf{z}^*.$$

Относительная энергетическая ошибка Δ приближенного решения выражается в виде

$$\Delta = \tilde{\Phi}(\mathbf{z}^*)\tilde{\Psi}^{-1}(\mathbf{z}^*), \quad \tilde{\Psi}(\mathbf{z}) = \Psi[\tilde{u}(t, x, \mathbf{z}), \tilde{r}(t, x, \mathbf{z})], \quad (4.3.12)$$

где Ψ — интеграл от энергии, заданный в (4.3.6).

4.3.4. Регуляризация энергетической ошибки приближенного решения в задаче оптимального управления. Зафиксируем время управления $T = 4$ в задаче (4.3.1)–(4.3.5) и выберем в функционале весовые коэффициенты $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = 0$. Ограничимся случаем, когда для треугольной сетки, на которой задаются аппроксимации, параметры M и N равны, а на каждом элементе задан кубический сплайн ($K = 3$).

В табл. 4.3.1 приведены результаты расчетов, выполненные с помощью пакета прикладных программ MATLAB. Все величины получены для различных значений $M = N$ с помощью алгоритма, описанного выше. В таблице J_1 и J_2 — это приближенные величины терминальной и средней энергии, введенные в (4.3.6), а функционал

$$J_3 = T^{-1}\Phi \quad (4.3.13)$$

указывает на выраженную в энергетических единицах ошибку дискретизации. Приведены также размерности N_y и N_v векторов проектных параметров \mathbf{y} и управления \mathbf{v} .

Таблица 4.3.1: Результаты расчетов при минимизации энергии J_1 .

N	1	2	3	4	5
N_y	36	144	324	576	900
N_v	2	5	8	11	14
J_1	0.0044	$3.8 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$	$3.5 \cdot 10^{-8}$	$5.5 \cdot 10^{-10}$
J_2	0.0495	0.0825	0.1006	0.1305	0.1418
J_3	0.0023	0.0038	0.0079	0.0075	0.0088

Как можно увидеть из табл. 4.3.1, при увеличении размерности аппроксимаций и управления резко уменьшается величина терминальной энергии J_1 при некотором росте средней энергии J_2 . Важно отметить, что при этом энергетическая ошибка решения J_3 имеет тенденцию к существенному росту и начинает значительно превышать величину энергии в конце движения.

Такой эффект не наблюдается в случае, когда управление фиксировано (см. пример 2.2.1). Увеличивая число элементов можно было существенно улучшить качество приближенного решения (h -сходимость). Соотношение $J_3 \gg J_1$ говорит, что полученное значение функционала управления J_1 недостоверно. Оптимизация параметров управления влияет на качество решения и может привести к непредсказуемому росту ошибки дискретизации.

Для того чтобы воздействовать на значение функционала ошибки Φ , можно добавить его с некоторым коэффициентом к целевой функции J и поставить новую задачу оптимизации: найти такое управление $v^*(t) \in \mathcal{V}$, которое в момент времени $t = T$ приводит один конец стержня в положение (4.3.4) и минимизирует функционал

$$J_0[v] \rightarrow \min_{v \in \mathcal{V}}, \quad J_0 = \alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 + \alpha_3 J_3, \quad (4.3.14)$$

где $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_3 \geq 0$ — весовые коэффициенты, а J_1 , J_2 и J_3 — это соответственно терминальная энергия, средняя энергия в системе и

Таблица 4.3.2: Результаты расчетов при минимизации функционала J_0 для различных α_3 .

α_3	0	10^{-5}	10^{-3}	10^{-2}	0.1	1
J_1	$5.5 \cdot 10^{-10}$	$5.0 \cdot 10^{-9}$	$8.2 \cdot 10^{-7}$	$5.3 \cdot 10^{-5}$	0.0024	0.1164
J_2	0.1418	0.1148	0.0922	0.1739	2.7039	20.314
J_3	0.0088	$6.2 \cdot 10^{-4}$	$2.0 \cdot 10^{-4}$	$3.3 \cdot 10^{-4}$	0.0083	0.0490

энергетическая ошибка, которые были введены в (4.3.6) и (4.3.13).

Отметим, что для точного решения исходной бесконечномерной системы должны совпадать значения нового и старого функционалов при заданном управлении $v(t)$, т.к. $\Phi = 0$. Оптимальные параметры управления находятся с помощью алгоритма, описанного в предыдущем пункте при соответствующей замене J на J_0 , и зависят только от относительных значений весовых коэффициентов.

В дальнейшем полагаем, что $\alpha_1 = 1$, а α_2 и α_3 — свободные параметры. Тогда, согласно методу множителей Лагранжа [28], формулировка (4.3.14) эквивалентна изопериметрической вариационной задаче

$$J_1[v] \rightarrow \min_{v \in \mathcal{V}}, \quad J_2 = \beta_2, \quad J_3 = \beta_3,$$

где β_2 и β_3 — некоторые фиксированные значения функционалов.

Обнулим второй весовой коэффициент ($\alpha_2 = 0$). Зафиксируем степень полиномов $K = 3$ и число элементов $M = 5$. Варьируется третий коэффициент α_3 . В табл. 4.3.2 показано изменение функционалов J_i , $i = 1, 2, 3$, при увеличении α_3 .

Из таблицы следует, что, меняя величину α_3 , можно существенно изменить соотношение между конечной энергией J_1 и ошибкой J_3 . Хотя при этом многократно увеличиваются абсолютные значения этих функционалов, а также средняя механическая энергия J_2 , запасаемая стержнем при реализации полученного закона управления.

Попробуем ограничить значение J_2 , меняя коэффициент α_2 . Зафик-

Таблица 4.3.3: Результаты расчетов при минимизации функционала J_0 для различных α_2 .

α_2	0	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	0.5	0.1
J_1	0.0024	0.0022	0.0016	0.0011	0.0012	0.0017
J_2	2.7039	2.0404	0.5008	0.0853	0.0631	0.0611
J_3	0.0083	0.0061	0.0016	$5.4 \cdot 10^{-4}$	$4.8 \cdot 10^{-4}$	$5.6 \cdot 10^{-4}$

сируем весовые коэффициенты $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_3 = 0.1$. В табл. 4.3.3 приведены величины трех функционалов для различных α_2 . До определенного предела с ростом α_2 , как можно видеть, уменьшаются величины всех трех энергий J_i .

Таким образом, с помощью изменения значений весовых коэффициентов в функционале управления J_0 удается, например для $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0.5$ и $\alpha_3 = 0.1$, построить закон управления, который переводит упругий стержень из начального состояния покоя в терминальное положение с малой остаточной энергией $E(T)$. Средняя энергия \bar{E} , запасаемая в процессе предложенного движения, не велика. Ошибка в расчетах J_3 , вызванная дискретизацией кинематических и динамических полей, много меньше средней энергии и значительно ниже терминальной.

Пример 4.3.1. Как и выше, рассмотрим вынужденные продольные движения однородного упругого стержня. Краевые и начальные условия заданы согласно (4.3.2), где перемещения конца стержня при $x = 0$ определяются кусочно-полиномиальной функцией (4.3.10).

Фиксированы время процесса $T = 4$, весовые коэффициенты $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0.5$ и $\alpha_3 = 0.1$. Узловые линии конечно-элементной сетки проведены с фиксированными шагами (4.3.7) по координатам t и x . Задана степень полиномов $K = 5$ и параметр сетки $M = N = 5$. Для этой расчетной схемы размерность задачи равна $N_y = 2500$, а размерность вектора параметров управления — $N_v = 24$.

На рис. 4.3.1 представлены значения абсолютных смещений точек

стержня $\tilde{u}^*(t, x)$ в зависимости времени t и координаты x . В начале движения функция перемещений строго равна нулю. При $x = 0$ эти перемещения показывают функцию управления $v^*(t) = \tilde{u}^*(t, 0)$, оптимального в смысле минимизации функционала $J_0[v]$ для выбранной приближенной системы. В конце движения $t = T$ относительные перемещения

$$\Delta \tilde{u} = \tilde{u}^*(t, x) - v_T$$

близки к нулю.

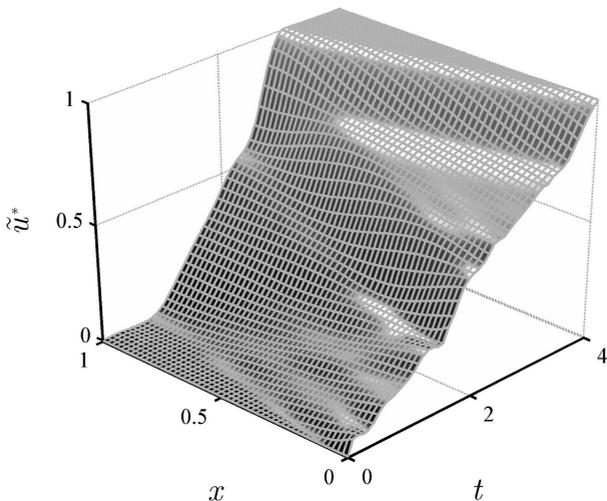


Рис. 4.3.1. Оптимальные перемещения $\tilde{u}^*(t, x)$.

Как заметно из рис. 4.3.2, 4.3.3 функции сил $\tilde{s}^*(t, x)$ и импульсов $\tilde{p}^*(t, x)$ близки к нулю в конце оптимального процесса. На этих рисунках видно также, что аппроксимации строго выполняют начальные и краевые условия $\tilde{p}^*(0, x) = 0$ и $\tilde{s}^*(t, 1) = 0$.

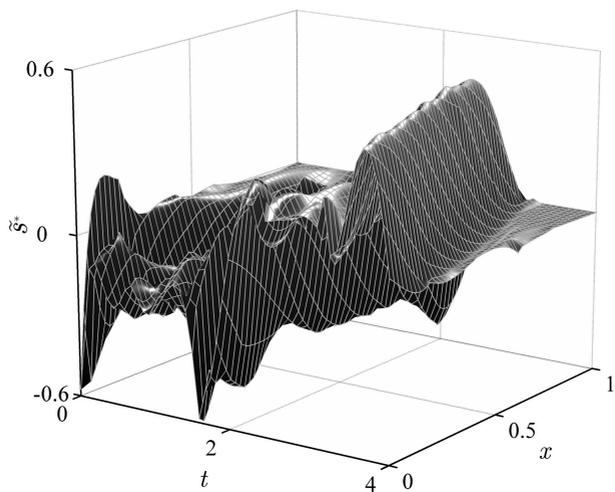


Рис. 4.3.2. Оптимальное поле продольных сил $\tilde{s}^*(t, x)$.

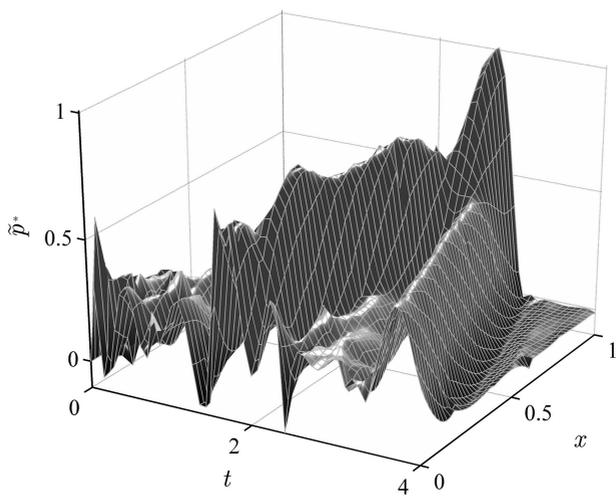


Рис. 4.3.3. Оптимальное поле плотности импульса $\tilde{p}^*(t, x)$.

На рис. 4.3.4 показано распределение локальной ошибки вычислений при фиксированных параметрах сетки. Как видно функция ошибки для оптимального движения

$$\tilde{\varphi}^*(t, x) = \varphi(\tilde{u}^*(t, x), \tilde{r}^*(t, x)),$$

введенная в (4.3.1), достигает своего максимального значения в начале движения. Для рассчитанного движения относительная интегральная ошибка, определенная в (4.3.12), равна $\Delta = 1.8 \cdot 10^{-3}$. Остаточная энергия стержня в конце процесса равна $E(T) = 8.3 \cdot 10^{-4}$, что значительно ниже средней механической энергии процесса $\bar{E} = 0.0716$.

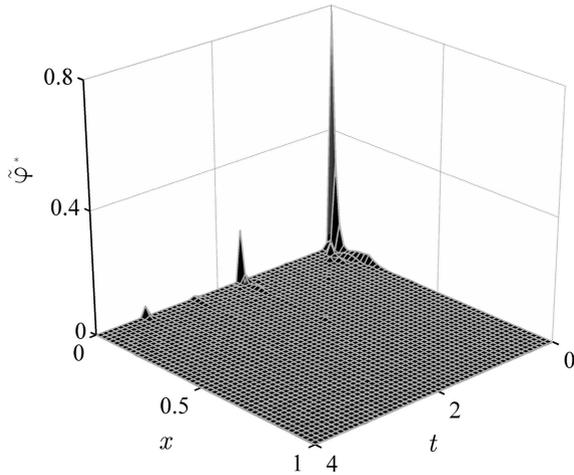


Рис. 4.3.4. Распределение ошибки аппроксимации $\tilde{\varphi}^*(t, x)$.

§4.4. Проекционный подход в задачах оптимального управления упругими системами

4.4.1. Семидискретизация на основе МКЭ в задаче об оптимальном поперечном перемещении упругой балки. Как и в п. 2.5.4, рассмотрим проекционную постановку задачи об изгибных движениях упругой однородной балки, приведенную к безразмерному виду,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \eta(t, x)v(x)dx &= 0, \quad \int_0^1 \xi(t, x)v(x)dx = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}, \\ \eta &= w_t - p, \quad \xi = w_{xx} - s, \\ p &= p^0(x) + \tilde{r}_{xx}(t, x), \quad s = -\tilde{r}_t(t, x), \\ w &= w^0(x) + u(t) - u(0) + \tilde{w}(t, x); \\ x = 0: \quad \tilde{w} &= 0, \quad \tilde{w}_x = 0, \\ x = 1: \quad \tilde{r} &= 0, \quad \tilde{r}_x = 0, \\ t = 0: \quad \tilde{w} &= 0, \quad \tilde{r} = 0, \\ u(0) &= w^0(0), \quad u(T) = u_T. \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Здесь $\tilde{w}(t, x)$ и $\tilde{r}(t, x)$ — соответственно кинематическая и динамическая функции, которые определяют неизвестные безразмерные поля плотности импульса $p(t, x)$, изгибающего момента $s(t, x)$ и поперечных перемещений $w(t, x)$; $w^0(x)$ и $p^0(x)$ — начальное распределение перемещений и импульсов; $u(t)$ — управляющая функция смещения конца балки.

Ставится задача нахождения оптимального управления, которое с учетом ограничений (4.4.1) переводит упругую систему в терминальное состояние с минимальным значением функционала

$$\begin{aligned} J_1[u] &\rightarrow \min_{u \in \mathcal{U}}, \quad J_1 = E(T), \\ E(t) &= \int_0^1 \psi(t, x)dx, \quad \psi(t, x) = \frac{1}{2} (p^2 + w_{xx}^2). \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

При численном решении задачи (4.4.1)–(4.4.2) используем метод конечных элементов для дискретизации неизвестных переменных по про-

странственной координате x , как было предложено в §2.5. Для этого отрезок $x \in (0, 1)$ разбивается на равные элементы

$$I_i = \{x : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad x_i = i/M, \quad i = 1, \dots, M.$$

Поля \tilde{r} , \tilde{w} и v задаются через полиномы Бернштейна (2.5.7) на пространстве функций, кусочно-полиномиальных по координате x :

$$\tilde{w} \in \mathcal{S}_w = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{w}(t, x) : \quad \tilde{w} = \sum_{j=0}^{N+1} w_{ij}(t) B_{j, N+1}(z_i(x)), \\ x \in I_i, \quad i = 1, \dots, M; \\ \tilde{w} \in C^1, \quad \tilde{w}(t, 0) = \tilde{w}_x(t, 0) = 0 \end{array} \right\},$$

$$\tilde{r} \in \mathcal{S}_p = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{r}(t, x) : \quad \tilde{r} = \sum_{j=0}^{N+1} r_{ij}(t) B_{j, N+1}(z_i(x)), \\ x \in I_i, \quad i = 1, \dots, M; \\ \tilde{r} \in C^1, \quad \tilde{r}(t, 1) = \tilde{r}_x(t, 1) = 0 \end{array} \right\}, \quad (4.4.3)$$

$$v \in \mathcal{S}_v = \left\{ \begin{array}{l} v(t) : \quad v = \sum_{j=0}^{N-1} v_{ij} B_{j, N-1}(z_i(x)), \\ x \in I_i, \quad i = 1, \dots, M \end{array} \right\},$$

где использованы локальные координаты

$$z_i = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$

Согласно (2.5.37) и (2.5.38) функции $\tilde{w}(t, x)$, $\tilde{r}(t, x)$ и $v(x)$ представимы в векторном виде

$$\tilde{w} = \mathbf{a}_1^T(x) \mathbf{y}_1(t), \quad \tilde{r} = \mathbf{a}_2^T(x) \mathbf{y}_2(t), \quad v = \mathbf{b}^T(x) \mathbf{v}. \quad (4.4.4)$$

Здесь введены векторы функций искомых переменных и тестовый вектор

$$\mathbf{y}_1(t) = [w_1(t), \dots, w_M(t)]^T \in \mathbb{R}^{N_1}, \quad w_i(t) = \{w_{i,2}(t), \dots, w_{i,N+1}(t)\},$$

$$\mathbf{y}_2(t) = [r_1(t), \dots, r_M(t)]^T \in \mathbb{R}^{N_1}, \quad r_i(t) = \{r_{i,0}(t), \dots, r_{i,N-1}(t)\},$$

$$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N_1}, \quad N_1 = MN,$$

а также векторы пробных и тестовых базисных функций

$$\mathbf{a}_1(x) = \frac{\partial \tilde{w}(x, \mathbf{y}_1)}{\partial \mathbf{y}_1}, \quad \mathbf{a}_2(x) = \frac{\partial \tilde{r}(x, \mathbf{y}_2)}{\partial \mathbf{y}_2}, \quad \mathbf{b}(x) = \frac{\partial v(x, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}. \quad (4.4.5)$$

Аппроксимации функций импульсов $p(x, \mathbf{y}_2)$, моментов $s(x, \dot{\mathbf{y}}_2)$ и перемещений $w(x, \mathbf{y}_1, u(t))$ точно удовлетворяют уравнение изменения импульса и краевые условия. Уравнения состояния выполняются в интегральном смысле. Приближенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений можно записать в векторной форме

$$\int_0^1 \eta(x, \dot{\mathbf{y}}_1, \mathbf{y}_2, u(t)) \mathbf{b}_1(x) dx = \mathbf{0}, \quad \int_0^1 \xi(x, \dot{\mathbf{y}}_2, \mathbf{y}_1) \mathbf{b}_2(x) dx = \mathbf{0}. \quad (4.4.6)$$

Векторные функции $\mathbf{y}_1(t)$ и $\mathbf{y}_2(t)$ должны удовлетворять однородным начальным условиям

$$\mathbf{y}_1(0) = \mathbf{y}_2(0) = \mathbf{0}. \quad (4.4.7)$$

Задача Коши (4.4.6), (4.4.7) имеет единственное решение $\tilde{\mathbf{y}}_1(t, u)$, $\tilde{\mathbf{y}}_2(t, u)$, зависящее от произвольной функции управления $u(t)$.

4.4.2. Алгоритм параметрической оптимизации и регуляризации приближенного решения. Для описания подхода к параметрической оптимизации ограничимся классом полиномиальных управлений перемещением конца упругой балки

$$\mathcal{U} = \left\{ u(t) : u = w^0(0) + \frac{u_T - w^0(0)}{T} t + \sum_{k=1}^K u_k t^k (t - T) \right\}, \quad (4.4.8)$$

которые выполняют начальные и терминальные условия, введенные в последней строке (4.4.1). Здесь u_i неизвестные параметры управления, которые можно собрать в вектор

$$\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_K]^T \in \mathbb{R}^K.$$

Решение для других классов управления, которые представляют собой конечномерные линейные пространства, будет строиться аналогично.

Подставляя выражение (4.4.8) для управления $u(t)$ в систему уравнений (4.4.6) и учитывая вид аппроксимаций (4.4.3)–(4.4.5) и функций состояния η, ξ из (4.4.1) (см. также §2.5), можно представить эти уравнения в матричной форме

$$\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} + \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}(t) = [\mathbf{y}_1^T(t), \mathbf{y}_2^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{2N_1}. \quad (4.4.9)$$

Здесь \mathbf{y} — искомая вектор-функция, а введенные в (4.4.9) матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2N_1 \times 2N_1}$, $\mathbf{B}(t) \in \mathbb{R}^{2N_1 \times K}$ и вектор $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N_1}$ определяются через параметры задачи и записываются в форме

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix},$$

где

$$\mathbf{C}_1 = \int_0^1 \mathbf{b}(x) \mathbf{a}''_2^T(x) dx, \quad \mathbf{C}_2 = - \int_0^1 \mathbf{b}(x) \mathbf{a}''_1^T(x) dx;$$

$$\mathbf{B}_1(t) = \int_0^1 \mathbf{b}(x) dx \cdot \mathbf{p}^T(t), \quad \mathbf{p}(t) = \{t^k(T-t)\} \in \mathbb{R}^K;$$

$$\mathbf{M}_1 = \int_0^1 \mathbf{b}(x) \mathbf{a}_1^T(x) dx, \quad \mathbf{M}_2 = \int_0^1 \mathbf{b}(x) \mathbf{a}_2^T(x) dx;$$

$$\mathbf{q}_1 = \int_0^1 \left(p^0(x) + \frac{w^0(0) - v_T}{T} \right) \mathbf{b}(x) dx, \quad \mathbf{q}_2 = - \int_0^1 w_{xx}^0(x) \mathbf{b}(x) dx.$$

Решение системы (4.4.9) с начальными условиями (4.4.7) представимо в виде

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} (\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u} + \mathbf{q}) d\tau. \quad (4.4.10)$$

Как уже обсуждалось в предыдущем параграфе, оптимизация управления для приближенной динамической системы (4.4.6)–(4.4.7) может

привести к значительному ухудшению качества решения. Для регуляции ошибки, возникающей в результате пространственной дискретизации исходной начально-краевой задачи, добавим к целевой функции J_1 функционал энергетической ошибки с некоторым весовым коэффициентом

$$J = J_1 + \alpha J_2, \quad J_2 = T^{-1} \Phi, \quad \alpha \geq 0, \quad (4.4.11)$$

$$\Phi = \int_0^T \int_0^1 \varphi dx dt, \quad \varphi = \frac{1}{2} (\eta^2 + \xi^2).$$

Используя решение (4.4.10) приближенной системы в аппроксимации (4.4.4), можно выразить функционал J с учетом (4.4.1), (4.4.2), (4.4.4), (4.4.11) как функцию от вектора управления \mathbf{u} и поставить задачу о безусловной минимизации этой квадратичной функции

$$\tilde{J}(\mathbf{u}) \rightarrow \min_{\mathbf{u}}, \quad \tilde{J}(\mathbf{u}) = J[\tilde{\mathbf{y}}, u] = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{D} \mathbf{u} - \mathbf{r}^T \mathbf{u} + c.$$

Здесь матрица $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{K \times K}$, вектор $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^K$ и скаляр c определяются параметрами задачи. Оптимальное управление в соответствии с (4.4.8) находится в виде $u^*(t) = u(t, \mathbf{u}^*)$, где

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{r}.$$

Подставляя этот вектор в выражение для функции $\tilde{\mathbf{y}}(t, \mathbf{u})$ из (4.4.10) получим оптимальные траектории

$$\mathbf{y}^*(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} (\mathbf{B}(\tau) \mathbf{D}^{-1} \mathbf{r} + \mathbf{q}) d\tau,$$

которые используются согласно (4.4.1), (4.4.4) для построения полей перемещений $\tilde{w}^*(t, x)$, плотностей импульсов $\tilde{p}^*(t, x)$ и изгибающих моментов $\tilde{s}^*(t, x)$.

4.4.3. Анализ качества решения при параметрической оптимизации движений балки. Как и в примере 4.1.1, рассмотрим

однородные начальные условия $w^0(x) = p^0(x) = 0$. Зафиксируем время окончания процесса $T = 2$ и конечное положение $u_T = 1$.

Аппроксимации (4.4.1), (4.4.3) и оптимальное перемещение конца балки (4.4.8) находятся согласно проекционному алгоритму, описанному выше. Для фиксированной степени полиномов и числа элементов $M = N = 4$, а также заданной размерности вектора управляющих параметров $K = 9$ исследуем качество управления и приближения, определяемое в энергетических единицах соответственно через функционалы J_1 и J_2 .

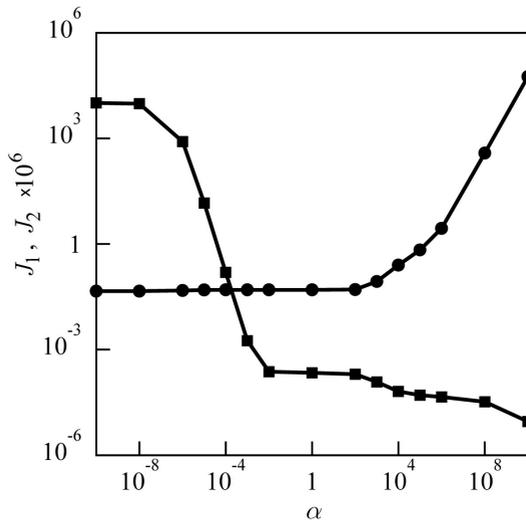


Рис. 4.4.1. Терминальная энергия $J_1(\alpha)$ и энергетическая ошибка $J_2(\alpha)$.

На рис. 4.4.1 отражена зависимость этих величин от весового коэффициента α . Кружками, соединенными сплошными линиями, показана величина остаточной энергии в конце процесса J_1 , а ломаная, помеченная квадратами, соответствует интегральной ошибке аппроксимации

управляемого движения J_2 . Как можно заметить, при малых значениях $\alpha < 10^{-4}$ ошибка дискретизации и округления превышает величину энергии в конце процесса. Для этого интервала не приходится говорить о достоверности полученных результатов. Напротив, для больших величин $\alpha > 10^2$ быстро возрастает терминальная энергия J_1 . Существует область $10^{-2} < \alpha < 10^2$, где оба интересующих нас функционала практически не меняются и $J_2 \ll J_1$, что позволяет судить о полученных значениях энергии J_1 , как о достаточно точных.

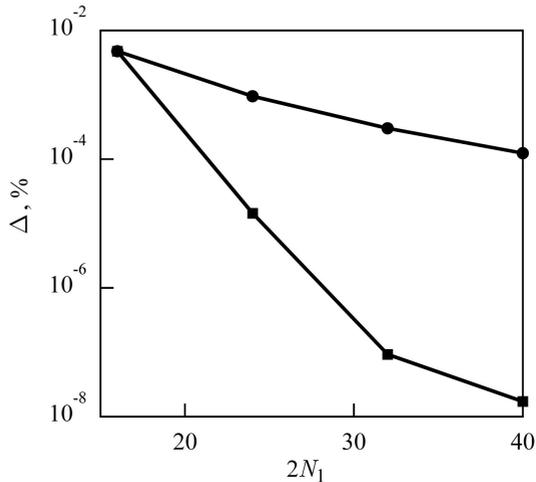


Рис. 4.4.2. Относительная ошибка решения $\Delta(N_1)$ для проекционного подхода.

На это же указывает и относительная интегральная ошибка

$$\Delta = \frac{\Phi}{\Psi}, \quad \Psi = \int_0^T E(t) dt.$$

Зафиксируем коэффициент $\alpha = 100$ и будем изменять параметры аппроксимации M или N . На рис. 4.4.2 приведены оценки точности решения Δ в зависимости от дифференциального порядка $2N_1 = 2MN$

приближенной системы (4.4.9). При увеличении числа конечных элементов для фиксированной степени полиномов $N = 2$ (h -сходимость, ломаная линия с кружками на графике, $M = 4 \div 10$), а также с ростом степени для заданного числа элементов $M = 4$ (p -сходимость, ломаная с квадратами, $N = 2 \div 5$) наблюдается уменьшение величины ошибки. Как и средняя энергия системы $\bar{E} = T^{-1}\Psi \approx 0.28$, терминальная энергия при этом слабо изменяется $J_1 \approx 5 \cdot 10^{-8}$.

На рис. 4.4.3 показано изменение положения краевых точек упругой балки в процессе движения для $M = N = 4$, $K = 9$, $\alpha = 100$. Сплошная кривая соответствует функции оптимального управления $u^*(t) = w(t, 0)$, а штриховая — перемещению свободного конца $w(t, 1)$. Управление довольно плавно разгоняет систему в начале движения и также плавно тормозит в конце.

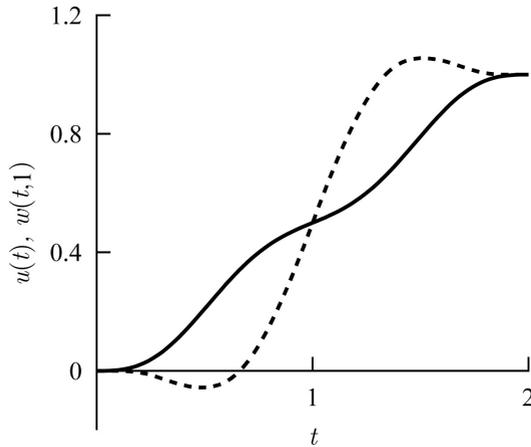


Рис. 4.4.3. Оптимальное управление $u(t)$ и перемещение конца балки $w(t, 1)$.

Распределение относительных смещений точек балки $\tilde{w}^*(t, x)$ представлено на рис. 4.4.4. Для выбранных параметров в системе возбуж-

даются упругие колебания, но стратегия перемещения такова, что в момент T они сходят почти на нет.

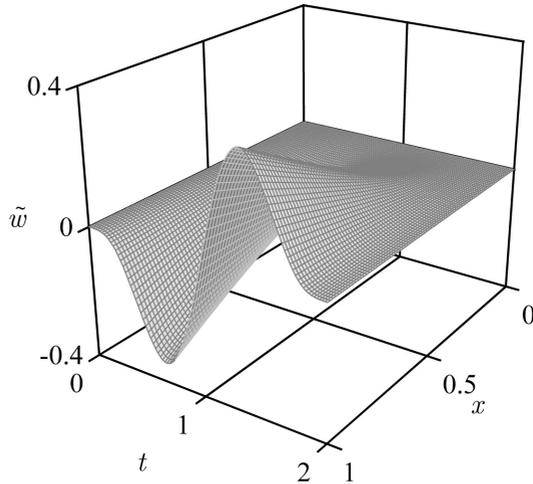


Рис. 4.4.4. Поле оптимальных перемещений $\tilde{w}(t, x)$.

Это же подтверждает распределение плотности механической энергии ψ в пространстве и времени, показанное на рис. 4.4.5. Отметим, что функция $\psi(t, x)$, определяющая интенсивность упругих колебаний, близка к симметричной относительно прямой $t = T/2$.

На рис. 4.4.6 представлены значения локальной ошибки $\varphi(t, x)$, малость которой подтверждает высокое качество полученного приближенного решения задачи оптимального управления. В отличие от вариационного подхода, описанного в §4.1, ошибка распределяется по всему интервалу времени без четко выраженного максимума в начале процесса (ср. рис. 4.1.7). Видны всплески ошибки на стыках пространственных элементов.

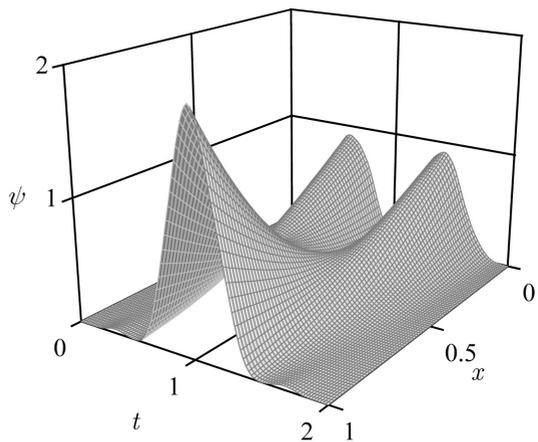


Рис. 4.4.5. Распределение линейной плотности энергии $\psi(t, x)$.

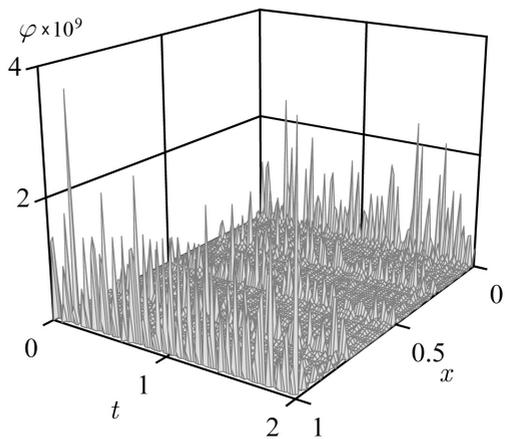


Рис. 4.4.6. Локальная ошибка численного решения $\varphi(t, x)$.

Глава 5.

Прикладные задачи управления динамическими объектами с распределенными элементами

§5.1. Оптимальный поворот нагруженного упругого звена с электроприводом

5.1.1. Постановка задачи о повороте звена электромеханического манипулятора. Рассматривается механическая система, представляющая собой тонкий упругий стержень, который может совершать вращательные движения в плоскости OXY [4] (см. рис. 5.1.1). Один конец стержня неподвижен в инерциальном пространстве $OXYZ$, на другом конце расположено абсолютно твердое тело A , линейные размеры которого малы по сравнению с длиной стержня l . Ось вращения перпендикулярна плоскости OXY . В точке O расположен электропривод, содержащий электродвигатель постоянного тока с независимым возбуждением и абсолютно жесткий редуктор [92].

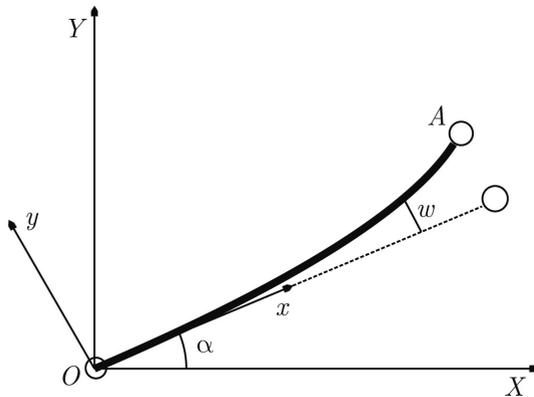


Рис. 5.1.1. Упругое звено, нагруженное точечной массой.

Для описания движения вводится вращающаяся вместе со стержнем система координат $Oxyz$. Плоскости OXY и Oxy совпадают. Ось x коллинеарна касательной к нейтральной линии стержня в точке O . Предполагается, что упругие деформации системы описываются в рамках линейной теории тонких прямолинейных стержней. Относительные упругие смещения $w = w(t, x)$ малы и перпендикулярны прямой Ox . Скорость вращения стержня как целого мала по сравнению с частотой низшей моды упругих колебаний. В [4] выведены используемые далее уравнения, описывающие эту модель в рамках перечисленных выше предположений.

Уравнение состояния и граничные краевые условия для вращающегося стержня имеют вид

$$\rho(x)w_{tt} + (\kappa(x)w_{xx})_{xx} = -\rho(x)x\ddot{\alpha}(t), \quad x \in (0, l), \quad t \in (t_0, T); \quad (5.1.1)$$

$$x = 0: \quad w = 0, \quad w_x = 0; \quad (5.1.2)$$

$$x = l: \quad w_{xx} = 0, \quad (\kappa(x)w_{xx})_x - m_0(w_{tt} + l\ddot{\alpha}(t)) = 0.$$

Здесь α — угол между Ox и OX , m_0 — масса на конце стержня A , точки означают обыкновенные производные по времени t , штрихи — по координате x , нижние индексы t и x — частные производные по времени и координате. Линейная плотность стержня ρ и жесткость на изгиб κ могут быть функциями x . Начальные условия принимаются в следующем общем виде:

$$w(t_0, x) = f(x), \quad w_t(t_0, x) = g(x), \quad (5.1.3)$$

где $f(x)$, $g(x)$ — достаточно гладкие функции, согласованные с условиями (5.1.2).

Изменение момента импульса всей системы относительно оси вращения OZ описывается интегро-дифференциальным уравнением (уравнением моментов) и начальными условиями

$$\int_0^l \rho^*(x)(x\ddot{\alpha} + w_{tt})x dx = \mu_1, \quad \alpha(t_0) = \alpha^0, \quad \dot{\alpha}(t_0) = \omega^0. \quad (5.1.4)$$

Здесь μ_1 — момент сил, создаваемый электроприводом относительно оси O . Точечная масса A на конце стержня учтена добавлением к $\rho(x)$ дельта-функции интенсивности m , т.е. полагается

$$\rho^*(x) = \rho(x) + m_0\delta(l-x), \quad x \in [0, l].$$

Требование существования частных производных функции $w(t, x)$ по x до четвертого порядка включительно является, как показано [177], весьма сильным, т.к. уравнение (5.1.1) выводится из интегро-дифференциального уравнения, где требуется существование производных $w(t, x)$ по x до второго порядка включительно (см. [84] и §1.4).

Система уравнений электропривода [92] имеет вид

$$L \frac{dj}{dt} + Rj + F \frac{d\beta}{dt} = u(t), \quad j(t_0) = j^0, \quad (5.1.5)$$

$$J_0 \frac{d^2\beta}{dt^2} = \mu - \frac{\mu_1}{\nu}, \quad \alpha = \frac{\beta}{\nu}, \quad \mu = Fj, \quad (5.1.6)$$

где L — индуктивность, F — магнитный поток, R — омическое сопротивление, j — ток в обмотке электродвигателя, J_0 — момент инерции якоря, β — угол поворота ротора, ν — передаточное число редуктора, $u(t)$ — напряжение. Уравнение (5.1.5) описывает баланс напряжений в цепи якоря двигателя, а (5.1.6) — вращение якоря.

Исключая из уравнений (5.1.1), (5.1.4)–(5.1.6) переменные μ (электромагнитный момент), μ_1 , j , β , получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} & L J_0 \nu^2 \frac{d^3\alpha}{dt^3} + R J_0 \nu^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} + F^2 \nu^2 \frac{d\alpha}{dt} + \\ & + \int_0^l \rho^*(x) \left\{ L \left(x \frac{d^3\alpha}{dt^3} + w_{ttt} \right) + R \left(x \frac{d^2\alpha}{dt^2} + w_{tt} \right) \right\} x dx = F \nu u(t). \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

Используя уравнения (5.1.1), (5.1.4)–(5.1.6), находим начальное зна-

чение для $\ddot{\alpha}$:

$$\ddot{\alpha}(t_0) = \frac{\kappa(0)w_{xx}(t_0, 0) + F\nu j^0}{J_0\nu^2}, \quad w_{xx}(t_0, 0) = f''(0). \quad (5.1.8)$$

Далее рассматривается система уравнений (5.1.1), (5.1.7), краевые условия (5.1.2) и начальные условия (5.1.3), (5.1.4), (5.1.8). При заданном управлении $u(t)$ поставленная краевая задача по x и задача Коши по t может быть исследована методами математической физики [84]. Решение задачи управления далее для определенности строится для нулевых начальных условий, отвечающих состоянию покоя стержня и двигателя и случаю однородного стержня ($\rho = \text{const}$, $\kappa = \text{const}$).

Для системы (5.1.1), (5.1.7) ставится задача о выборе программного управления напряжением $u(t)$, которое поворачивает первоначально покоящийся недеформированный стержень на заданный угол с торможением и гашением упругих колебаний в конце процесса $t = T$ и доставляет минимум некоторому функционалу качества $J[u]$ на классе допустимых управлений \mathcal{U} , для которых существует решение задачи

$$\begin{aligned} J[u] &\rightarrow \min_{u \in \mathcal{U}}; \\ \alpha(t_0) &= \alpha^0, \quad \alpha(T) = \alpha_T, \\ \dot{\alpha}(t_0) &= \ddot{\alpha}(t_0) = 0, \\ w(t_0, x) &= w_t(t_0, x) = 0. \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

5.1.2. Управляемые повороты однородного упругого стержня. В этом параграфе решение уравнения (5.1.1) с начальными и краевыми условиями (5.1.2), (5.1.3) строится методом разделения переменных (методом Фурье) [60]. Перейдя к безразмерным переменным

$$x_* = \frac{x}{l}, \quad u_* = \frac{u}{l}, \quad t_* = \frac{t}{\tau}, \quad \tau = l^2 \sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} \quad (5.1.10)$$

и опуская в дальнейшем звездочки внизу, из (5.1.1)–(5.1.3) получаем

$$w_{tt} + w_{xxxx} = -x\ddot{\alpha}, \quad x \in (0, 1), \quad (5.1.11)$$

$$w(t, 0) = w_x(t, 0) = w_{xx}(t, 1) = 0,$$

$$w_{xxx}(t, 1) = m(w_{tt}(t, 1) + \ddot{\alpha}),$$

где $m = m_0/\rho l$ — безразмерная масса точки A .

Упругие смещения представим в виде

$$w(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Theta_k(t) X_k(x), \quad (5.1.12)$$

где $X_k(x)$ — собственные функции ($x \in [0, 1]$), являющиеся решением задачи

$$\begin{aligned} X_n^{IV} &= \lambda_n^4 X_n, \\ X_n(0) &= X_n'(0) = X_n''(1) = 0, \quad X_n'''(1) = -m\lambda_n^4 X_n(1). \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

Последовательность $\lambda_n = \lambda_n(m)$ ($n = 1, 2, \dots$) — это собственные значения, представляющие собой корни трансцендентного характеристического уравнения

$$1 + \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda + m\lambda(\operatorname{sh} \lambda \cos \lambda - \operatorname{ch} \lambda \sin \lambda) = 0. \quad (5.1.14)$$

Собственные функции $X_n(x)$ краевой задачи (5.1.13) имеют вид

$$X_n(x) = \operatorname{ch} \lambda_n x - \cos \lambda_n x - \frac{\operatorname{ch} \lambda_n - \cos \lambda_n}{\operatorname{sh} \lambda_n - \sin \lambda_n} (\operatorname{sh} \lambda_n x - \sin \lambda_n x). \quad (5.1.15)$$

Отметим, что в силу симметрии (5.1.14), (5.1.15) можно ограничиться положительными собственными значениями λ_n ($n \geq 1$) и собственными функциями $X_n(x)$. Функции $X_n(x)$ ортогональны в пространстве $L_2(0, 1)$ с весом $\rho^*(x)$ и скалярным произведением

$$\int_0^1 X_r(x) X_q(x) \rho^*(x) dx = \delta_{rq} \|X_r\|^2, \quad (5.1.16)$$

где δ_{rq} — символ Кронекера.

Умножая (5.1.11) на $X_n(x)\rho^*(x)$, интегрируя по x ($x \in [0, 1]$) и деля на $\|X_n\|^2$, с учетом (5.1.12), (5.1.16) получаем при помощи метода

Гринберга [29] счетную систему уравнений для коэффициентов Фурье $\Theta_n(t)$ в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\Theta}_n + \lambda_n^4 \Theta_n &= C_n \ddot{\alpha}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ C_n &= -\frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^1 X_n(x) \rho^*(x) x dx = -\frac{2}{\lambda_n^2 \|X_n\|^2}, \quad (5.1.17) \\ \|X_n\|^2 &= 1 + m \left(\frac{\operatorname{sh} \lambda_n \cos \lambda_n - \operatorname{ch} \lambda_n \sin \lambda_n}{\operatorname{sh} \lambda_n + \sin \lambda_n} \right)^2. \end{aligned}$$

Если $\ddot{\alpha}(t)$ — известная функция времени, то можно из (5.1.11) найти коэффициенты Фурье $\Theta_n(t)$, они запишутся как

$$\Theta_n(t) = \frac{C_n}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n^2(t - \tau) \ddot{\alpha}(\tau) d\tau. \quad (5.1.18)$$

Интегрируя уравнение (5.1.7) с учетом сделанных ранее упрощений и перехода к старому времени (5.1.10) $t = \tau t_*$, подставим в (5.1.7) значения второй и третьей производной по времени от функции перемещений $w(t, x)$, используя (5.1.1). В результате, интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} A \frac{d^3 \alpha}{dt^3} + B \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + D \frac{d\alpha}{dt} - \frac{G}{\tau^2} w_{txx}(t, 0) - \frac{H}{\tau^2} w_{xx}(t, 0) &= u^*(t), \\ A = LJ_0 \nu^2, \quad B = RJ_0 \nu^2, \quad D = F^2 \nu^2, & \quad (5.1.19) \\ G = \rho l^4 L, \quad H = \rho l^4 R, \quad u^*(t) = F \nu u(t). \end{aligned}$$

Соотношение (5.1.19) можно рассматривать как интегро-дифференциальное уравнение относительно α с разностным ядром [57]; согласно (5.1.12), (5.1.18) величина $\ddot{\alpha}$ входит в $w(t, x)$ (а также в $w_{txx}(t, 0)$ и $w_{xx}(t, 0)$) под знаком интеграла. Уравнение (5.1.19) согласно (5.1.12) можно также рассматривать как дифференциальное, содержащее суммы $\dot{\Theta}_n$ и Θ_n .

Совместно с системой (5.1.17) получаем бесконечномерную связанную систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Действительно, подставляя в (5.1.19)

значение $w_{txx}(t, 0)$ и $w_{xx}(t, 0)$ из (5.1.12) и учитывая (5.1.15), (5.1.17), запишем счетную систему уравнений, начальных и конечных условий (согласно (5.1.9)) в виде

$$\begin{aligned} A \frac{d^3 \alpha}{dt^3} + B \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + D \frac{d \alpha}{dt} - \tau^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} (G \dot{\Theta}_k + H \Theta_k) &= u^*(t), \\ \ddot{\Theta}_n + \tau^{-2} \lambda_n^4 \Theta_n &= C_n \ddot{\alpha}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ J[u^*] &\rightarrow \min_{u^*}, \quad u^* \in \mathcal{U}^*, \\ \alpha(t_0) &= \alpha^0, \quad \alpha(T) = \alpha_T, \\ \ddot{\alpha}(t_0) &= \dot{\alpha}(t_0) = \Theta_n(t_0) = \dot{\Theta}_n(t_0) = 0. \end{aligned} \tag{5.1.20}$$

Точное решение задачи (5.1.20) найти обычно не удается. Для приложений представляет интерес развитие приближенных методов, таких, как конечномодовое приближение ($k, n = 1, 2, \dots, N < \infty$) [17, 19, 87, 105], квазистатическое приближение [12, 13, 66], случай асимптотически большой жесткости [4], случай асимптотически малых и плавных управляющих воздействий [5]. Указанные задачи рассматривались в основном для идеального привода.

Ниже исследуется случай большой жесткости упругого звена, строятся допустимые квазиоптимальные (рациональные) управления и оценивается точность управления для исходной упругой системы.

5.1.3. Построение различных законов управления абсолютно жестким звеном. Введем параметр $\mu = T^{-1}\tau$, стремящийся к нулю при $\kappa \rightarrow \infty$. Представим согласно теории возмущений решение системы (5.1.20) в виде ряда по степеням малого параметра μ

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \mu \alpha_1 + \mu^2 \alpha_2 + \dots, \\ \Theta_n &= \Theta_{0,n} + \mu \Theta_{1,n} + \mu^2 \Theta_{2,n} + \dots, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{5.1.21}$$

Подставляя (5.1.21) в (5.1.20) и приравнивая члены с одинаковыми степенями по μ , находим для нулевого приближения $\Theta_{0,n} = 0$, а α_0 находится из линейного дифференциального уравнения вида (случай

абсолютно жесткого звена)

$$LJ^* \frac{d^3 \alpha_0}{dt^3} + RJ^* \frac{d^2 \alpha_0}{dt^2} + D \frac{d\alpha_0}{dt} = u^*(t),$$

$$J^* = J_0 \nu^2 + \rho l^3 \left(\frac{1}{3} + m \right).$$
(5.1.22)

Разделим уравнение (5.1.22) на RJ^* и перейдем к новому времени $t^* = t/\tau^*$, где $\tau^* = F^{-2} \nu^{-2} RJ^*$ — электромеханическая постоянная времени. В дальнейшем звездочка в t^* опускается. Уравнение (5.1.22) запишется с произвольными начальными данными ($t_0 = 0$) как

$$\varepsilon \frac{d^3 \alpha}{dt^3} + \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + D \frac{d\alpha}{dt} = u, \quad \varepsilon = \frac{F^2 \nu^2 L}{R^2 J^*}, \quad u = \frac{RJ^*}{F^2 \nu^2} u^*;$$

$$\alpha(0) = \alpha^0, \quad \dot{\alpha}(0) = \omega^0, \quad \ddot{\alpha}(0) = \gamma^0.$$
(5.1.23)

Ставится задача синтеза оптимального по быстродействию управления напряжением в системе (5.1.23) с конечными условиями в виде

$$T \rightarrow \min_u, \quad |u| \leq u_0, \quad \alpha(T) = \dot{\alpha}(T) = \ddot{\alpha}(T) = 0.$$
(5.1.24)

Программные управления для задачи (5.1.23), (5.1.24) рассматривались, например, в [68]. Вопрос синтеза релейных систем обсуждается в [71, 86, 91]. Для построения законов оптимального управления подобными системами в виде синтеза можно использовать степенную проблему моментов [36].

Применяя принцип максимума Понтрягина [72], находим, что оптимальное управление u принимает значения $\pm u_0$. Переменная α на каждом участке постоянства управления описывается выражением

$$\alpha(t) = B_0 + B_1 e^{\eta_1 t} + B_2 e^{\eta_2 t} + ut,$$
(5.1.25)

где η_1 и η_2 — корни характеристического уравнения

$$\varepsilon \eta^2 + \eta + 1 = 0, \quad \eta_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon},$$

$$\eta_1 = -1 + O(\varepsilon), \quad \eta_2 \sim -\varepsilon^{-1} \rightarrow -\infty, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Для системы

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}u,$$

в которой собственные числа матрицы \mathbf{A} действительны и векторы

$$\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}$$

(n — порядок системы) линейно независимы, управление по теореме Фельдбаума имеет не более $n - 1$ переключений [72]. В системе (5.1.23) эти условия выполняются ($n = 3$), если $\varepsilon < 0.25$.

Используя свойство линейной стационарной системы дифференциальных уравнений (обратимости решений во времени), найдем трехпараметрическое семейство точек, из которых система при условии быстрогодействия приходит в конечное нулевое фазовое положение за два переключения

$$\mathbf{y}^{\pm} = \pm u_0 \left\{ e^{-\mathbf{A}t_2} \int_0^{\tau_3} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{b} d\tau - e^{-\mathbf{A}t_1} \int_0^{\tau_2} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{b} d\tau + \int_0^{\tau_1} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{b} d\tau \right\},$$

$$\tau_1 = t_1, \quad \tau_2 = t_2 - t_1, \quad \tau_3 = T - t_2.$$

Здесь T — время окончания процесса, t_1 и t_2 — моменты первого и второго переключения.

Интегрируя (5.1.22) по t от $t = T$ до $t = 0$, получаем систему трансцендентных уравнений относительно t_1, t_2, T , разрешенных относительно начальных условий:

$$\alpha^0 = \pm u_0 \left(2t_1 - 2t_2 + T - \frac{P_1}{\eta_1^2} + \frac{P_2}{\eta_2^2} \right),$$

$$\omega^0 = \mp u_0 \left(\frac{P_1}{\eta_1} + \frac{P_2}{\eta_2} \right), \quad \gamma^0 = \mp u_0 (P_1 - P_2), \quad (5.1.26)$$

$$P_i = \frac{1 - 2e^{-\eta_i t_1} + 2e^{-\eta_i t_2} - e^{-\eta_i T}}{\varepsilon(\eta_2 - \eta_1)}, \quad i = 1, 2.$$

Решая численно уравнения (5.1.26) относительно момента окончания процесса T и моментов переключения t_1 и t_2 , для заданных на-

чальных значений α , $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$ можно построить программу управления напряжением, с любой заданной точностью приводящую систему (5.1.22) в конечное нулевое фазовое положение.

В качестве примера была построена функция $u(t)$ для следующих начальных данных и параметров системы (5.1.22): $\alpha(0) = 1$, $\dot{\alpha}(0) = 0$, $\ddot{\alpha}(0) = 0$, $|u| \leq 0.01$, $\varepsilon = 0.1$. Знак u после включения напряжения положительный ($u(0) > 0$). Оптимальные значения t_1 , t_2 , T равны

$$t_1 = 100.31, \quad t_2 = 100.69, \quad T = 100.77.$$

Полагая в (5.1.26) значение $t_1 = 0$, получим поверхность переключения, с которой можно попасть в нулевую точку с помощью не более чем одного переключения. Для любой области значений α , $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$ и с любой степенью точности можно численно построить эту поверхность, которая делит фазовое пространство на две области. При этом, если в момент времени t имеем $\ddot{\alpha}(t) > \gamma^*$ ($\ddot{\alpha}(t) < \gamma^*$), то соответственно $u < 0$ ($u > 0$). Здесь γ^* — значение третьей фазовой координаты поверхности переключения для текущих значений $\alpha(t)$ и $\dot{\alpha}(t)$.

Полагая далее $t_2 = 0$, получаем линию переключения, с которой без переключений можно прийти в нулевую точку. Таким образом, построив поверхность и линию переключения, получаем синтез оптимального по быстрдействию управления напряжением в системе (5.1.22) с начальными и конечными условиями (5.1.23), (5.1.24).

Рассмотрим менее общий случай, поставив задачу построения закона управления напряжением в системе (5.1.22) с нулевыми начальными условиями по $\dot{\alpha}$ и $\ddot{\alpha}$, переводящего эту систему за конечное время t_δ в заданную δ -окрестность нулевой фазовой точки, т.е. перевод из начального состояния покоя в заданное (покой). Приведем два таких закона. Первый из них представляет собой релейное (постоянное на отрезке $t \in [0, t_\delta]$ и нулевое вне его) управление. При этом

$$u = \pm u_0, \quad t \in [0, t_\delta]; \quad u = 0, \quad t \notin [0, t_\delta]. \quad (5.1.27)$$

В момент времени $t > t_\delta$ фазовые координаты при таком управлении согласно (5.1.25) имеют вид

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= C_0 + C_1 \exp(\eta_1 t) - C_2 \exp(\eta_2 t), \\ \dot{\alpha}(t) &= C_1 \eta_1 \exp(\eta_1 t) - C_2 \eta_2 \exp(\eta_2 t), \\ \ddot{\alpha}(t) &= C_1 \eta_1^2 \exp(\eta_1 t) - C_2 \eta_2^2 \exp(\eta_2 t), \\ C_0 &= ut_\delta + \alpha^0, \quad C_i = u \frac{\exp(\eta_i t_\delta) - 1}{\varepsilon \eta_i^2 (\eta_2 - \eta_1)}, \quad i = 1, 2.\end{aligned}\tag{5.1.28}$$

Из (5.1.28) видно, что если выбрать

$$t_\delta = T_1 = |\alpha^0 u_0^{-1}|, \quad u = u_0 \operatorname{sign} \alpha^0,$$

то управление (5.1.27) приводит систему (5.1.23) в δ -окрестность точки $\{\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}\} = \{0, 0, 0\}$ за время $t_{1,\delta} = T_1 + \eta_1^{-1} O(\ln u_0^{-1} \delta)$ в случае $\varepsilon \ll 1$. Если при этом $T_1/\tau^* \gg 1$ (в размерных переменных), то появляется возможность заменить релейное управление, оптимальное по быстродействию, на более простое управление (5.1.27) с относительно малой потерей по быстродействию ($(t_{1,\delta} - T_1)/T_1 \ll 1$).

Второй «сглаженный» закон управления задается функцией, дважды дифференцируемой на участке $t \in [0, t_\delta]$. Она имеет вид

$$u = \begin{cases} \pm u_0 \sin^2 \zeta t, & t \in [0, t_\zeta] \\ \pm u_0, & t \in [t_\zeta, \Delta] \\ \pm u_0 \cos^2 \zeta (\Delta - t), & t \in [\Delta, t_\delta] \\ 0, & t \notin [0, t_\delta] \end{cases}\tag{5.1.29}$$

при

$$\Delta = t_\delta - t_\zeta, \quad t_\zeta = \frac{\pi}{2\zeta}.$$

Здесь ζ — параметр, определяющий длительность «выхода» управления на экстремальное значение.

Интегрируя систему (5.1.22) с начальными условиями $\dot{\alpha}(0) = 0$, $\ddot{\alpha}(0) = 0$, $\alpha(0) = \alpha^0$, получим, что в момент времени $t \geq t_\delta$ фазовые

координаты определяются выражениями (5.1.28), где

$$C_0 = \alpha^0 + u\Delta, \\ C_i = \frac{(1 - e^{-\eta_i \Delta}) (\eta_1 \eta_2 (B + u_0/2) - 2\zeta \eta_i A)}{\eta_i^2 (\eta_2 - \eta_1)}, \quad i = 1, 2, \quad (5.1.30)$$

$$A = \frac{u_0}{2} \frac{2\zeta}{(1 - 4\epsilon\zeta^2)^2 + 4\zeta^2}, \quad B = -\frac{u_0}{2} \frac{1 - 4\epsilon\zeta^2}{(1 - 4\epsilon\zeta^2)^2 + 4\zeta^2}.$$

Выбрав $\Delta = |\alpha^0/u_0|$ и $u(t_\zeta) = u_0 \text{sign} \alpha^0$, получим, что при $t > t_\delta$ фазовая точка стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, как $u_0 \zeta^2 O(\exp[\eta_1(t-T)])$. Применение закона (5.1.29) оправдано, как будет показано далее, при управлении упругой системой (5.1.20).

5.1.4. Оценка амплитуды упругих колебаний при различных законах управления. Предложено три вида управления системой (5.1.23), которые удовлетворяют определенным критериям точности позиционирования и быстродействия. Оценим упругие смещения, возникающие в системе (5.1.20), к которой применяются описанные выше законы. Полагая, что влияние упругой податливости конструкции является малым возмущением, будем считать, что ускорение $\ddot{\alpha}(t)$ определяется из поведения жесткой модели вращения звена, и при заданном управлении $\ddot{\alpha}(t)$ — известная функция времени.

Для релейного включения напряжения (5.1.27) переменная $\ddot{\alpha}$ имеет вид

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{u}{\epsilon} \frac{\exp(\eta_1 t) - \exp(\eta_2 t)}{\eta_1 - \eta_2}. \quad (5.1.31)$$

Найдем значение $\Theta_n(t)$ из (5.1.18), подставляя $\ddot{\alpha}(t)$ из (5.1.31). Интегрируя правую часть (5.1.18), имеем

$$\Theta_n(t) = \frac{C_n u}{\epsilon \nu_n} \left[\nu_n \left(\frac{1}{\nu_n^2 + \eta_2^2} - \frac{1}{\nu_n^2 + \eta_1^2} \right) \cos \nu_n t + \right. \\ \left. + \left(\frac{\eta_2}{\nu_n^2 + \eta_2^2} - \frac{\eta_1}{\nu_n^2 + \eta_1^2} \right) \sin \nu_n t \right] + O(e^{\eta_1 t}), \quad \nu_n = \frac{\lambda_n^2}{\tau^{*2}}. \quad (5.1.32)$$

Остаточные колебания в момент времени $t \geq t_1$ оцениваются выражением, аналогичным (5.1.32).

Заметим, что выбором параметров t_δ и ζ можно существенно уменьшить остаточные колебания при $t \geq t_1$ для выбранной (например нижней, $n = 1$) моды колебаний n .

Применяя к системе (5.1.20) «сглаженное» управление (5.1.29) и считая верными предположения, сделанные выше, получаем

$$\ddot{\alpha}(t) = -\eta_1^2 C_1 e^{\eta_1 t} + \eta_2^2 C_2 e^{\eta_2 t} + 2\zeta(A \cos 2\zeta t + B \sin 2\zeta t), \quad (5.1.33)$$

где коэффициенты C_1 , C_2 , A , B находятся из (5.1.30). Для $\Theta_n(t)$ в момент времени $t = t_\zeta = \pi/2\zeta$, полагая, что $\eta_1 t_\zeta \gg 1$, получаем выражения

$$\begin{aligned} \Theta_n(t_\zeta) = & \frac{C_n u}{\nu_n} \left[\frac{4\zeta^2}{\varepsilon(\eta_2 - \eta_1)} \left\{ (1 - \eta_2^{-1} - \varepsilon) \frac{\eta_1 \sin \nu_n t_\zeta - \nu_n \cos \nu_n t_\zeta}{\nu_n^2 + \eta_1^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + (1 - \eta_1^{-1} - \varepsilon) \frac{\eta_2 \sin \nu_n t_\zeta - \nu_n \cos \nu_n t_\zeta}{\nu_n^2 + \eta_2^2} \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{2\zeta^2}{\nu_n^2 - 4\zeta^2} \{ \nu_n - \nu_n \cos \nu_n t_\zeta + \sin \nu_n t_\zeta \} \right] + O\left(\eta_1^{-2} t_\zeta^{-2}\right). \end{aligned} \quad (5.1.34)$$

Сравним функции $\Theta_n(t)$ для (5.1.32) и (5.1.34): при управлении $\ddot{\alpha}(t)$ из (5.1.31) для $\Theta_n(t)$ получаем оценку

$$\Theta_n(t) \sim \frac{C_n u_0}{\varepsilon(\nu_n^2 + \eta_2^2)(\eta_2 - \eta_1)},$$

а при «плавном» управлении $\ddot{\alpha}(t)$ из (5.1.33)

$$\Theta_n(t) \sim \frac{C_n u_0 \zeta^2}{\varepsilon(\nu_n^2 + \eta_2^2)(\eta_2 - \eta_1)}.$$

Выбором достаточно малого $\zeta \ll 1$ в «плавном» законе управления (5.1.29) можно существенно уменьшить амплитуду упругих колебаний.

5.1.5. Проекционный подход к оптимизации движений упругого звена. Рассмотрим подход, основанный на методе интегрированных соотношений, который был описан в §4.4. Ограничимся случаем, когда переходные процессы в электроприводе оказывают не существенное влияние на движение упругого звена и положим, что индуктивность обмотки двигателя пренебрежимо мала ($L = 0$).

Введем новые динамические переменные — линейную плотность импульса $p(t, x)$ и изгибающий момент в поперечном сечении стержня $s(t, x)$ согласно

$$\eta = \rho(x)(w_t + x\ddot{\alpha}(t)) - p = 0, \quad \xi = \kappa(x)w_{xx} - s = 0, \quad (5.1.35)$$

где η и ξ — функции состояния.

Уравнение движения стержня в новых переменных примет вид

$$p_t + s_{xx} = 0, \quad (5.1.36)$$

Закон изменения импульса (5.1.36) будет выполняться автоматически, если ввести неизвестные вспомогательные функции — кинематическую $\tilde{w}(t, x)$ и динамическую $\tilde{r}(t, x)$ так, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} w &= f(x) + \tilde{w}(t, x), \\ p &= \rho(x)g(x) + \tilde{r}_{xx}(t, x), \quad s = m_0(x-l)p_t(t, l) - \tilde{r}_t(t, x). \end{aligned} \quad (5.1.37)$$

Здесь f и g — соответственно начальные распределения упругих перемещений и скоростей точек стержня, введенные в (5.1.3).

Граничные условия (5.1.2) можно выразить через функции \tilde{w} и \tilde{r} в форме

$$\begin{aligned} x = 0: \quad \tilde{w} &= 0, \quad \tilde{w}_x = 0, \\ x = l: \quad \tilde{r} &= 0, \quad \tilde{r}_x = 0, \end{aligned} \quad (5.1.38)$$

а начальные условия (5.1.3) с учетом $t_0 = 0$ примут вид

$$t = 0: \quad \tilde{w} = 0, \quad \tilde{r} = 0. \quad (5.1.39)$$

Учитывая, что $L = 0$, уравнение (5.1.19) для угла поворота звена α запишется в новых переменных как

$$\begin{aligned} \tilde{J}_0 (\ddot{\alpha} + \tau_d^{-1}\dot{\alpha}) - s(t, 0) &= \tilde{u}(t), \\ \tilde{u} &= R^{-1}F\nu u(t), \quad \tau_d = RJ_0F^{-2}\nu^{-2}, \quad \tilde{J}_0 = J_0\nu^2, \end{aligned} \quad (5.1.40)$$

где \tilde{y} — новая переменная управления, имеющая размерность момента сил, τ_d — характерное время переходных процессов электропривода, \tilde{J}_0 — эффективный момент инерции привода. Знак «тильда» в дальнейшем опускается.

Всегда можно выбрать ориентацию неподвижной системы координат $OXYZ$ (см. рис. 5.1.1), чтобы начальный угол поворота звена равнялся нулю. Тогда начальные условия из (5.1.4) примут вид

$$\alpha(0) = 0, \quad \dot{\alpha}(0) = \omega^0. \quad (5.1.41)$$

Для приближенного решения задачи (5.1.35), (5.1.37)–(5.1.41) используется проекционный подход на основе МИДС и МКЭ, который обсуждался в §2.5 и §4.4. Для составления совместной системы ОДУ приравниваются нулю интегральные проекции функций состояния

$$\int_0^l \eta(t, x)v(x)\mu(x)dx = 0, \quad \int_0^l \xi(t, x)v(x)dx = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V},$$

$$\mu = 1 + \frac{m_0}{\rho(1)}\delta(x-1).$$

С учетом влияния точечной массы m_0 , закрепленной на конце стержня, первая интегральная проекция берется с безразмерным весовым коэффициентом μ , где δ — дельта-функция. Поля \tilde{r} , \tilde{w} и v заданы согласно (4.4.3) как кусочно-полиномиальные функции по x :

$$\tilde{w} \in \mathcal{S}_w = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{w}(t, x) : \quad \tilde{w} = \sum_{j=0}^{N+1} w_{ij}(t)B_{j, N+1}(z_i(x)), \\ x \in I_i, \quad i = 1, \dots, M; \\ \tilde{w} \in C^1, \quad \tilde{w}(t, 0) = \tilde{w}_x(t, 0) = 0 \end{array} \right\},$$

$$\tilde{r} \in \mathcal{S}_p = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{r}(t, x) : \quad \tilde{r} = \sum_{j=0}^{N+1} r_{ij}(t)B_{j, N+1}(z_i(x)), \\ x \in I_i, \quad i = 1, \dots, M; \\ \tilde{r} \in C^1, \quad \tilde{r}(t, 1) = \tilde{r}_x(t, 1) = 0 \end{array} \right\},$$

$$v \in \mathcal{S}_v = \left\{ \begin{array}{l} v(t) : v = \sum_{j=0}^{N-1} v_{ij} B_{j,N-1}(z_i(x)), \\ x \in I_i, \quad i = 1, \dots, M \end{array} \right\},$$

где

$$I_i = [x_{i-1}, x_i], \quad x_0 = 0, \quad x_i = \frac{il}{M}, \quad z_i = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$

Введенное в (5.1.40) масштабированное управляющее напряжение $u(t)$ выбирается из класса полиномиальных функций

$$u = u_0 + \sum_{k=1}^K u_k t^k, \quad \mathbf{u} = [u_1, \dots, u_K]^T, \quad (5.1.42)$$

где $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^K$ — вектор управляющих параметров, а коэффициент u_0 используется для удовлетворения терминального условия (см. ниже).

Ставится задача найти такое управление $u(t)$, которое за конечное время T переводит электромеханическое звено из начального положения в конечное

$$\alpha(t) = \alpha_T$$

и минимизирует следующий энергетический функционал

$$\begin{aligned} E_T(u) &\rightarrow \min_u, \\ E_T &= E_1 + \gamma E_2, \quad \gamma \geq 0, \quad E_1 = E(T), \quad E_2 = T^{-1} \Phi, \\ E(t) &= \int_0^1 \psi(t, x) dx + \frac{J_0 \dot{\alpha}^2(t)}{2}, \quad \psi = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu p^2}{\rho} + \kappa w_{xx}^2 \right), \\ \Phi &= \int_0^T \int_0^1 \varphi(t, x) dx dt, \quad \varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu \eta^2}{\rho} + \frac{\xi^2}{\kappa} \right). \end{aligned}$$

Здесь E_1 — терминальная энергия звена, включающая в себя механическую энергию упругого стержня, а также кинетическую энергию точечной массы и ротора электродвигателя; E_2 — интегральная ошибка приближенной системы, выраженная в энергетических единицах; γ —

весовой коэффициент, который позволяет регулировать вычислительную ошибку; ψ — линейная плотность энергии стержня с присоединенной массой m_0 ; φ — функция распределения ошибки. В этой постановке полная механическая энергия системы в конце процесса минимизируется с учетом ошибки дискретизации.

Далее согласно алгоритму, описанному в §4.4, находится оптимальный вектор управляющих параметров \mathbf{u}^* и соответствующие ему функция управления $u^*(t) = u(t, \mathbf{u}^*)$, аппроксимации полей перемещений $\tilde{w}^*(t, x) = w(t, x, \mathbf{u}^*)$, плотности импульса $\tilde{p}^*(t, x) = p(t, x, \mathbf{u}^*)$ и изгибающих моментов $\tilde{s}^*(t, x) = s(t, x, \mathbf{u}^*)$.

Пример 5.1.1. Для конкретной задачи оптимизации движений упругого электромеханического звена выберем геометрические и физические параметры системы

$$l = 1, \quad \kappa = \left(1 - \frac{x}{8}\right)^4, \quad \rho = \left(1 - \frac{x}{8}\right)^2, \\ m_0 = \frac{1}{10} \int_0^1 \rho dx, \quad J_0 = \frac{1}{10} \int_0^1 \rho x^2 dx, \quad \tau_d = 0.1.$$

Зафиксируем параметры аппроксимации $M = N = 4$ и управления $T = 3$, $K = 8$, $\alpha_T = 1$, $\gamma = 10$. Эти параметры означают, что совершается поворот на один радиан неоднородного (сужающегося к нагруженному концу) стержня. Дифференциальный порядок приближенной системы ОДУ равен $MN + 2 = 34$.

С помощью полиномиального управления напряжением (5.1.42) удастся достигнуть малой величины терминальной энергии $\bar{E}_1 = 1.8 \cdot 10^{-10}$ по сравнению со средней энергией, распределенной в упругом стержне, $\bar{E} = 0.743$. Относительная ошибка, полученная для оптимального режима, не превышает значения $\Delta = \bar{E}^{-1} E_2 = 1.1 \cdot 10^{-10}$.

На рис. 5.1.2 сплошной кривой показано напряжение $u^*(t)$, подаваемое на обмотку электродвигателя. Оптимальное управление имеет два переключения знака и плавно сходит на нет в конце движения. Угол

поворота стержня $\alpha(t)$ приведен на рисунке штриховой линией, а угловая скорость вращения $\dot{\alpha}(t)$ — штрихпунктирной. Как можно заметить, звено совершает реверсивное движение в начале процесса.

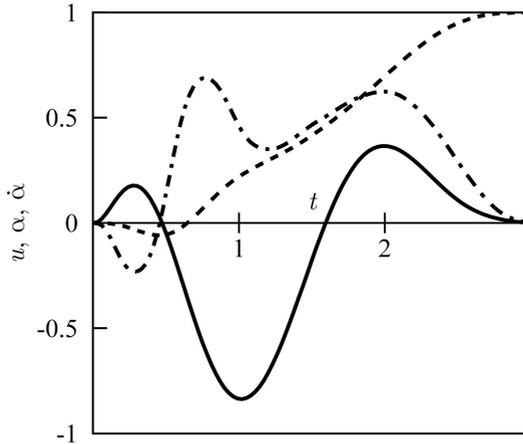


Рис. 5.1.2. Оптимальное управление $u(t)$, угол поворота $\alpha(t)$ и угловая скорость вращения $\dot{\alpha}(t)$.

Упругие смещения в стержне $w(t, x)$ изображены на рис. 5.1.3, а соответствующее им распределение линейной плотности импульса — на рис. 5.1.4. Заметны упругие колебания, возникающие в процессе управляемого движения, с максимальными импульсами в середине выбранного интервала времени. В конечный момент $t = T$ перемещения и импульсы точек стержня практически отсутствуют, что подтверждает приведенное выше малое значение терминальной энергии E_1 .

Распределение энергии в звене $\psi(t, x)$ показано на рис. 5.1.5. Отметим, что поворот звена плавно начинается и заканчивается, что не вызывает заметных высокочастотных колебаний в системе. Это отражается и на величине локальной ошибки вычислений $\varphi(t, x)$, приведенной на рис. 5.1.6. Здесь можно отменить всплески ошибки на концах

стержня и в точках стыковки элементов, что не повлияло на общий высокий уровень качества полученного решения.

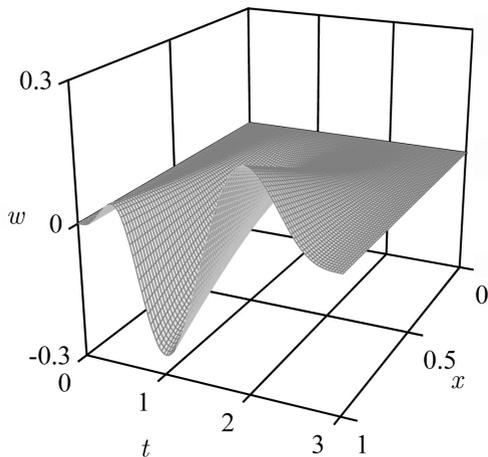


Рис. 5.1.3. Упругие перемещения точек стержня $w(t, x)$.

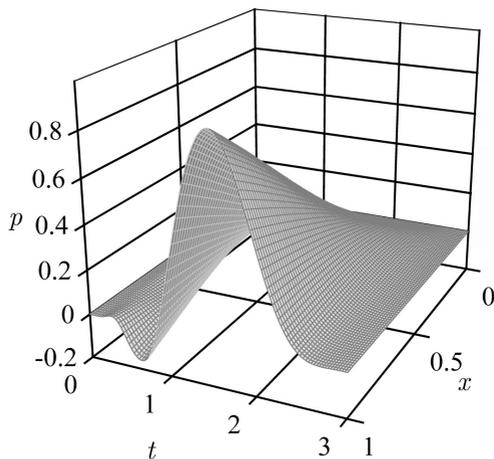


Рис. 5.1.4. Распределение линейной плотности импульса..

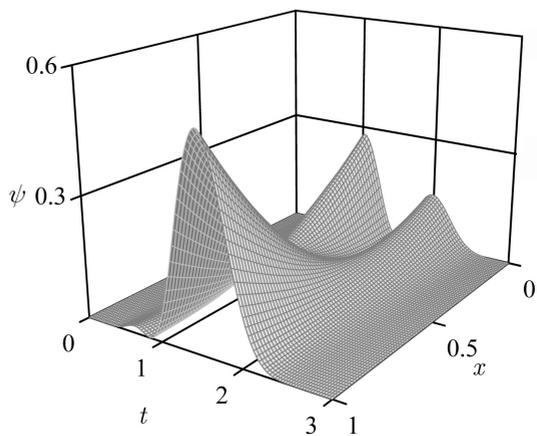


Рис. 5.1.5. Линейная плотность механической энергии стержня $\psi(t, x)$.

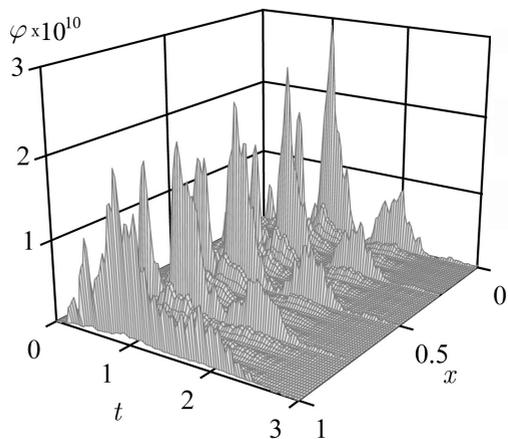


Рис. 5.1.6. Распределение локальной ошибки $\varphi(t, x)$.

§5.2. Моделирование и оптимизация движений мачтового автопогрузчика с вязкоупругими элементами

5.2.1. Структура мачтового автопогрузчика с протяженными элементами. Автопогрузчики мачтового типа — это механизмы для транспортировки и подъема грузов, которые имеют широкое практическое применение, например, в автоматизированных складских системах. В этом параграфе выводятся уравнения, моделирующие динамику экспериментальной установки, которая представляет собой типичную структуру погрузочного устройства с податливыми протяженными элементами.

Лабораторный прототип мачтового автопогрузчика, который был создан на кафедре мехатроники Университета г. Ростока, Германия (см. фотографию на рис. 5.2.1), представляет собой конструкцию, состоящую из двух балок, которые крепятся к горизонтально перемещаемой тележке. Цель управления — перемещение рассматриваемой гибкой конструкции в окрестность заданной позиции таким образом, чтобы в фиксированный конечный момент времени запасенная механическая энергия системы сводилась к минимуму.

Для разработки алгоритма управления, реализуемого в режиме реального времени, проведен амплитудно-частотный анализ системы. Как следствие, была получена упрощенная модель, на основе балочных уравнений Эйлера–Бернулли с граничными условиями специального вида. Для описания вязкоупругих колебаний конструкции и построения законов управления предложена модификация метода Галеркина, которая основана на интегро-дифференциальном подходе и методе конечных элементов. Представлены результаты численного моделирования, которые сравниваются с данными измерений.



Рис. 5.2.1. Лабораторная установка.

Схематическое изображение экспериментальной установки приведено на рис. 5.2.2 (слева). Гибкая конструкция состоит из двух одинаковых балок, вертикально закрепленных на подвижной тележке. Плоские движения системы описываются в неинерциальной декартовой системе координат $Oxyz$ с вертикальной осью x и горизонтальной осью z . Начало координат O расположено посередине между точками крепления балок к тележке.

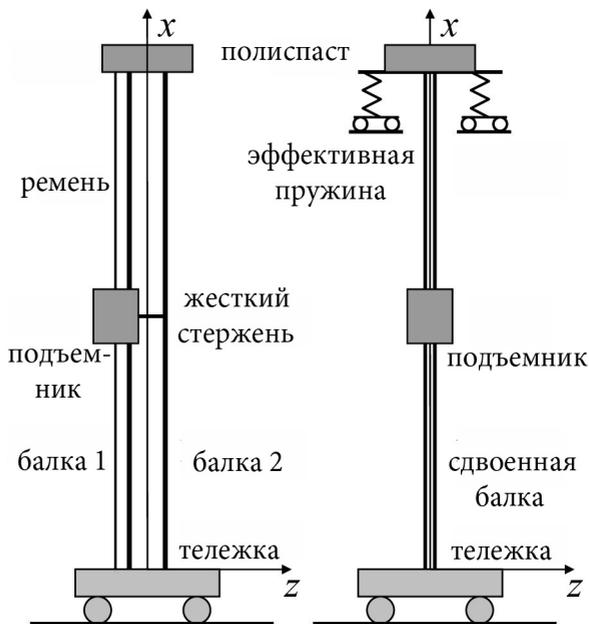


Рис. 5.2.2. Схемы модели мачтового подъемника:
исходная (слева) и упрощенная (справа).

Балки соединены друг с другом в верхней части конструкции через полиспастный блок (на схеме *полиспаст*), предназначенный для подъема полезной нагрузки, прикрепляемой к подъемному блоку (*подъемник*). Подъемник может скользить по направляющим вдоль левой балки (*балка 1*), которая с помощью жесткого стержня шарнирно соединена в центре с правой балкой (*балка 2*).

Для математического описания системы используются следующие параметры: длина балок l , площадь их поперечного сечения A , момент инерции сечения I , расстояние между балками $2b$, модуль Юнга E и плотность материала балок ρ , массы полиспаста m_l и подъемника m_a ,

их моменты инерции I_l и I_a , вертикальное положение подъемника $a(t)$, высота шарнирного соединения балок $l/2$.

Скорость тележки $v(t)$ рассматривается как входной сигнал управления для этой динамической системы с распределенными параметрами.

5.2.2. Собственные колебания системы связанных упругих балок. Используем вначале для описания движений мачтового автоподъемника модель упругой балки Эйлера–Бернулли. В этом пункте не будет учитываться вязкость материала, из которого изготовлены балки. Проанализируем собственные колебания конструкции. Для этого зададим положение подъемника в недеформированном состоянии на высоте $a = l/2$ и зафиксируем тележку ($v(t) = 0$). Рассматриваются только поперечные и продольные упругие движения в плоскости Oxz .

Собственные формы $w_j(x)$ и $u_j(x)$, $j = 1, 2$, связанных горизонтальных и вертикальных колебаний первой и второй балки описываются следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} s_j'' - A\rho\omega^2 w_j = 0, & EIw_j'' - s_j = 0, \\ f_j' + A\rho\omega^2 u_j = 0, & EAu_j' - f_j = 0, \end{cases} \quad x \in (0, a) \cup (a, l), \quad (5.2.1)$$

где ω — неизвестная собственная частота, $s_j(x)$ — изгибающий момент, а $f_j(x)$ — продольная сила в поперечном сечении j -ой балки. Штрихи означают производные по координате x .

Функции упругих перемещений для нижнего ($x < a$) и верхнего ($x > a$) участка каждой балки находятся из общего решения системы (5.2.1):

$$\begin{aligned} w_j &= c_{jk}^{(1)} \sin \lambda x + c_{jk}^{(2)} \cos \lambda x + c_{jk}^{(3)} \operatorname{sh} \lambda x + c_{jk}^{(4)} \operatorname{ch} \lambda x; \\ u_j &= d_{jk} \sin \mu x; \quad \lambda = \sqrt[4]{\frac{A\rho\omega^2}{EI}}, \quad \mu = \sqrt{\frac{\rho}{E}}\omega; \\ j &= 1, 2; \quad x \in (0, a) : k = 1; \quad x \in (a, l) : k = 2. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

Граничные условия, заданные на нижних и верхних концах балок, можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 x = 0 : \quad & w_j(0) = 0, \quad w'_j(0) = 0, \quad u_j(0) = 0; \\
 x = l : \quad & w_1(l) = w_2(l), \quad 2bw'_1(l) = 2bw'_2(l) = u_1(l) - u_2(l), \\
 & m_l\omega^2(u_1(l) + u_2(l)) = 2f_1(l) + 2f_2(l), \\
 & m_l\omega^2 w_1(l) = -s'_1(l) - s'_2(l), \\
 & I_l\omega^2 w'_1(l) = s_1(l) + s_2(l) + b(f_1(l) - f_2(l)).
 \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

В предложенной модели из-за шарнирной связи между балками на высоте $x = l/2$ на продольные и поперечные движения накладываются дополнительные ограничения

$$\begin{aligned}
 x = a : \\
 w_j(a-0) = w_j(a+0), \quad u_j(a-0) = u_j(a+0), \\
 w'_j(a-0) = w'_j(a+0), \quad w_1(a) = w_2(a), \\
 m_a\omega^2 w_1(a) = s'_1(a+0) + s'_2(a+0) - s'_1(a-0) - s'_2(a-0), \\
 m_a\omega^2 u_1(l) = f_1(a-0) - f_1(a+0), \quad f_2(a+0) = f_2(a-0), \\
 I_a\omega^2 w'_1(a) = s_1(a-0) - s_1(a+0), \quad s_2(a+0) = s_2(a-0).
 \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Члены с коэффициентами m_a и I_a возникают в (5.2.3) благодаря жесткому соединению механизма подъемника с первой балкой.

Коэффициенты $c_{jk}^{(n)}$, d_{jk} в (5.2.2) и частота ω находятся из условия вырождения системы краевых и межэлементных соотношений (5.2.3), (5.2.4).

5.2.3. Упрощенная модель конструкции. Чтобы вывести упрощенную модель, более подходящую для построения управления лабораторной установкой в режиме реального времени, оценим три нижние частоты собственных колебаний конструкции мачтового подъемника. Как показывают экспериментальные данные, только эти моды заметно возбуждаются при реализации типичных законов движения тележки.

Таблица 5.2.1: Собственные числа для упругих и вязкоупругих моделей.

Мода	1	2	3
Две связанные балки (метод Фурье), п. 5.2.2			
$\lambda, \text{м}^{-1}$	1.72	3.87	7.44
$\mu, \text{м}^{-1}$	$7.72 \cdot 10^{-3}$	$3.91 \cdot 10^{-2}$	0.145
$\omega, \text{с}^{-1}$	39.30	198.98	737.94
Удвоенная балка (метод Фурье), п. 5.2.3			
$\Delta\lambda, \%$	$5.8 \cdot 10^{-6}$	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$1.45 \cdot 10^{-3}$
$\Delta\omega, \%$	$1.17 \cdot 10^{-5}$	$2.1 \cdot 10^{-4}$	$2.9 \cdot 10^{-3}$
Модель вязкоупругой балки (метод Фурье), п. 5.2.4			
$\omega, \text{с}^{-1}$	39.30	198.28	700.12
$\nu, \text{с}^{-1}$	0.713	18.03	251.70
Модель вязкоупругой балки (МКЭ), пп. 5.2.6, 5.2.7			
$\Delta\omega, \%$	$9.61 \cdot 10^{-9}$	$2.78 \cdot 10^{-6}$	$6.43 \cdot 10^{-4}$
$\Delta\nu, \%$	$8.85 \cdot 10^{-7}$	$5.02 \cdot 10^{-6}$	$1.31 \cdot 10^{-3}$

Следующие геометрические и механические параметры системы, полученные в результате идентификации на основе данных измерений, использовались при анализе колебаний:

$$l = 1.07 \text{ м}, b = 0.0245 \text{ м}, \rho = 2700 \text{ кг}\cdot\text{м}^3,$$

$$m_l = 0.906 \text{ кг}, m_a = 0.95 \text{ кг}, E = 70 \text{ ГПа},$$

$$A = 3.10 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, I = 2.138 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4.$$

Численно было показано, что для реальной установки моменты инерции I_l и I_a в уравнениях (5.2.3), (5.2.4) не влияют существенно на величины первых трех собственных частот ω_n , $n = 1, 2, 3$. Поэтому они полагаются в дальнейшем равными нулю.

Собственные числа системы (5.2.1), (5.2.3), (5.2.4), полученные методом Фурье [60], представлены в табл. 5.2.1. Как можно заметить, волновые числа продольных колебаний μ_n при $n \leq 3$ много меньше, чем соответствующие числа поперечных колебаний λ_n . Это означает,

что тригонометрические функции $u_j(x)$ ($j = 1, 2$) из (5.2.2), описывающие растяжение и сжатие балок, с достаточной степенью точности могут быть заменены на их линейные аппроксимации по координате x . Кроме того, функции продольных перемещений $w_1(x)$ и $w_2(x)$ слабо отличаются друг от друга.

Все это позволяет использовать для прикладных целей упрощенную модель мачтового автопогрузчика (см. рис. 5.2.2, справа), включающую одну балку Эйлера–Бернулли с удвоенными параметрами поперечного сечения — площади $2A$ и момента инерции $2I$.

Уравнения колебаний для новой модели можно записать в форме

$$s'' - 2A\rho\omega^2 w = 0, \quad 2EIw'' - s = 0, \quad x \in (0, a) \cup (a, l),$$

где $w(x)$ — поперечные перемещения упругой балки, а $s(x)$ — изгибающий момент в ее сечении. Упрощенные краевые и межэлементные условия предстанут в виде

$$\begin{aligned} x = 0: \quad & w(0) = 0, \quad w'(0) = 0; \\ x = l: \quad & m_l \omega^2 w(l) = -s'(l), \quad s(t, l) = -\kappa w'(l); \\ x = a: \quad & w(t, a - 0) = w(t, a + 0), \quad w'(t, a - 0) = w'(t, a + 0), \\ & s(t, a + 0) = s(t, a - 0), \\ & m_a \omega^2 w(a) = s'(a + 0) - s'(a - 0). \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Здесь κ — эффективный коэффициент упругого закрепления верхнего конца балки. Его величина $\kappa = 2AEb^2l^{-1}$ напрямую следует из квазистатического приближения продольных сил f_j в (5.2.3).

Как можно увидеть из табл. 5.2.1, обе модели, как исходная, так и упрощенная, дают близкие значения волновых чисел λ и частот ω для первых трех мод собственных колебаний. Что особенно важно в приложениях, упрощенная модель содержит только одну неизвестную переменную перемещений w по сравнению с четырьмя для исходной

конструкции. Как следствие, эта упрощенная модель может быть использована для более эффективной оптимизации управления при малых потерях в точности решения.

5.2.4. Вязкоупругая модель мачтового погрузчика. Протяженные балочные элементы конструкции рассматриваемой лабораторной установки сделаны из алюминиевого сплава, который ведет себя в рамках проектных параметров как вязкоупругая среда. Как показано на рис. 5.2.3, экспериментальные измерения подтверждают экспоненциальный характер затухания амплитуды свободных колебаний упругой конструкции.

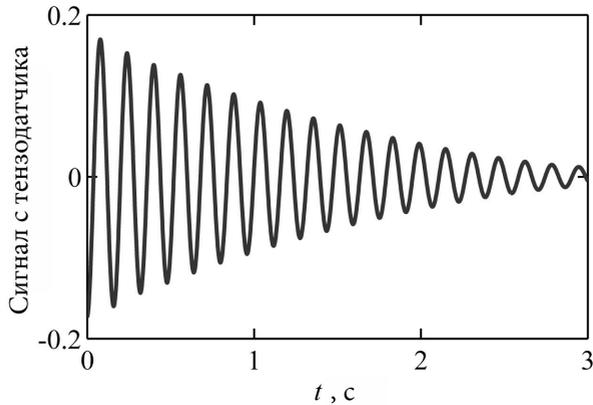


Рис. 5.2.3. Образец экспериментальных данных показаний тензодатчика.

Чтобы учесть обнаруженную в эксперименте диссипацию, рассмотрим одну из моделей вязкоупругого поведения материала, например Кельвина–Фойгта [158]. В рамках этой модели динамическая система уравнений в частных производных, описывающая движения обсуждав-

шейся выше конструкции, представима в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} &= 0, \quad t \in (0, T), \quad x \in (0, a) \cup (a, l), \\ \eta &= \frac{\partial w}{\partial t} + v(t) - \frac{p}{2A\rho} = 0, \\ \xi &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\delta_v}{EI} \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} - \frac{s}{2EI} = 0, \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

где $w(t, x)$ — поперечные перемещения точек балки, $s(x)$ — изгибающий момент, $p(t, x)$ — линейная плотность импульса, а δ_v — коэффициент вязкости. Функции состояния $\eta(t, x)$ и $\xi(t, x)$ введены для сокращения последующих записей.

Аналогично соотношениям (5.2.5), краевые и межэлементные условия записываются как

$$\begin{aligned} \left[m_l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{dv}{dt} \right) - \frac{\partial s}{\partial x} \right]_{x=l} &= \left[s + \kappa \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=l} = 0, \\ w|_{x=a+0} &= w|_{x=a-0}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a+0} = \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a-0}, \\ w|_{x=0} &= \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad s|_{x=a+0} = s|_{x=a-0}, \\ m_a \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{dv}{dt} \right]_{x=a} &= \frac{\partial s}{\partial x} \Big|_{x=a-0} - \frac{\partial s}{\partial x} \Big|_{x=a+0}. \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Для системы (5.2.6), (5.2.7) свободные поперечные перемещения w можно представить в виде

$$\begin{aligned} w &= \left(c_k^{(1)} e^{\lambda^+ x} + c_k^{(2)} e^{\lambda^- x} + c_k^{(3)} e^{-\lambda^+ x} + c_k^{(4)} e^{-\lambda^- x} \right) e^{\phi t}; \\ \lambda^\pm &= \frac{\sqrt{\pm \phi \sqrt{-A\rho(EI + \delta_v \phi)^3}}}{EI + \delta_v \phi}, \quad \phi = -\nu + i\omega; \\ x \in (0, a) : \quad k &= 1; \quad x \in (a, l) : \quad k = 2. \end{aligned}$$

где ω — частота, а $\nu \geq 0$ — коэффициент затухания свободных движений балки. Комплексные константы $c_k^{(j)}$, $k = 1, 2$ и $j = 1, 2, 3, 4$, находятся из условий (5.2.7).

Для любой моды собственных движений, $n = 1, 2, \dots$, можно показать, что если $\delta_v \neq 0$, то собственные числа λ_n не могут принимать чисто мнимые или действительные значения и $\nu_n > 0$. В используемой модели вязкоупругого тела только конечное число низших мод ($n \leq n^*$) представляют собой затухающие колебания $\omega_n \neq 0$, а остальные — апериодичны ($\omega_n = 0$).

С помощью экспериментальных данных, полученных при исследовании свободных колебаний лабораторной установки, проведена оценка нескольких низших собственных чисел. Так для выбранного положения подъемника первая частота и соответствующий коэффициент демпфирования равны: $\hat{\omega}_1 \approx 39.3 \text{ с}^{-1}$ и $\hat{\nu}_1 \approx 0.7 \text{ с}^{-1}$. При фиксированных значениях параметров модели, введенных в п. 5.2.3, этим числам более всего соответствует коэффициент вязкости $\delta_v = 0.14 \text{ Нм}^2\text{с}$.

Первые три собственные частоты ω_n и соответствующие коэффициенты затухания ν_n , полученные методом Фурье для модели вязкоупругой балки, помещены в табл. 5.2.1. Все приведенные частоты строго ниже соответствующих частот упругой модели удвоенной балки. Отметим, что для выбранных параметров только пять первых мод являются колебательными ($n^* = 5$).

5.2.5. Задача оптимального управления. Чтобы сформулировать задачу оптимального управления в замкнутой форме, необходимо задать начальные условия

$$w(0, x) = w^0(x), \quad p(0, x) = p^0(x), \quad (5.2.8)$$

где функция $w^0(x)$ означает распределение поперечных перемещений в момент времени $t = 0$, а $p^0(x)$ — начальное распределение импульсов.

Рассмотрим управляемые движения вязкоупругой балки, описываемые системой уравнений в частных производных (5.2.6) с краевыми и начальными условиями (5.2.7), (5.2.8). В этой системе входное управление — это функция $v(t)$, которая соответствует скорости тележки, а

T — момент окончания процесса управления.

Задача заключается в нахождении на заданном множестве \mathcal{V} такого закона управления $v^*(t)$, который за фиксированное время T позволяет переместить тележку из ее начального положения $z = 0$ в конечное состояние $z = z_T$ с нулевой скоростью $v(T) = 0$. При этом минимизируется функционал $J_0[v]$, который представляет собой полную механическую энергию конструкции:

$$J_0[v] \rightarrow \min_{v \in \mathcal{V}}, \quad J_0 = E(T),$$

$$E = \int_0^l \psi dx + \frac{m_a}{2} w_t^2(t, a) + \frac{m_l}{2} w_t^2(t, l) + \frac{\kappa}{2} w_x^2(t, l). \quad (5.2.9)$$

В данной задаче энергия E содержит не только слагаемое, которое зависит от распределенных параметров (линейной плотности энергии балки)

$$\psi = EI w_{xx}^2 + \frac{p^2}{4A\rho},$$

но и слагаемые, которые определяются сосредоточенными элементами конструкции. Такими элементами являются две точечные массы, подъемник и полиспаг, а также угловая пружина, определяющая эффективное упругое закрепление верхнего конца балки (см. рис. 5.2.2).

Чтобы решить начально-краевую задачу, применяется описанный в §2.5 и §4.4 проекционный подход на основе МИДС, в котором локальные равенства $\eta = \xi = 0$ из (5.2.6) и начальные условия (5.2.9) заменяются на интегральные соотношения. При этом первое уравнение в (5.2.6), представляющее динамическое равновесие, а также граничные условия (5.2.7) выполняются точно.

5.2.6. Конечно-элементная дискретизация. Выразим функцию изгибающего момента s , учитывая первое уравнение в (5.2.6) и граничные условия при $x = l$, как

$$s = - \int_x^l \left\{ \int_{y_1}^l h(t, y) dy - m_l (w_{tt}(t, l) + \dot{v}(t)) \right\} dy_1 - \kappa w_x(t, l), \quad (5.2.10)$$

где

$$h(t, x) = p_t + m_a (w_{tt} + \dot{v}(t)) \delta(x - a).$$

После этого зададим пространственную сетку с узлами

$$x_0 = 0, \quad x_M = l, \quad x_j - x_{j-1} = l/M, \quad I_j = [x_{j-1}, x_j], \quad j = 1, \dots, M,$$

где M — число элементов. Чтобы найти решение оптимизационной задачи (5.2.9) на основе конечно-элементной дискретизации, обсуждавшейся в §4.4, функции $w(t, x)$ и $p(t, x)$ аппроксимируются сплайнами

$$w \in \mathcal{S}_w^{(N+1)} = \left\{ \begin{array}{l} w(t, x) : w = w_0(x) + \sum_{j=0}^{N+1} w_{ij}(t) \frac{x^j}{l^j}, \\ x \in I_i, i = 1, \dots, M; \\ w \in C^1, x \in [0, l], w_{10}(t) = w_{11}(t) = 0 \end{array} \right\},$$

$$p \in \mathcal{S}_p^{(N-1)} = \left\{ \begin{array}{l} p(t, x) : p = p_0(x) + \sum_{j=0}^{N-1} p_{ij}(t) \frac{x^j}{l^j}, \\ x \in I_i, i = 1, \dots, M \end{array} \right\}, \quad (5.2.11)$$

$$\mathbf{w}(t) = [w_1, \dots, w_M]^T, \quad w_i = \{w_{i2}, \dots, w_{i,N+1}\},$$

$$\mathbf{p}(t) = [p_1, \dots, p_M]^T, \quad p_i = \{p_{i0}, \dots, p_{i,N-1}\}.$$

Здесь $\mathbf{w}(t)$, $\mathbf{p}(t)$ — векторные функции, которые задают неизвестные перемещения $w(x, \mathbf{w})$ и распределения импульсов $p(x, \mathbf{p})$, а N — число, определяющее степень полиномов на каждом элементе.

Чтобы свести исходную систему в частных производных к приближенной системе ОДУ, приравняются нулю интегральные проекции функций состояния в виде

$$\int_0^l \eta(t, x, \mathbf{w}, \mathbf{p}, v) \chi(x) dx = 0, \quad \int_0^l \xi(t, x, \mathbf{w}, \mathbf{p}) \chi(x) dx = 0,$$

$$\forall \chi \in \mathcal{S}_\chi^{(N)} = \left\{ \begin{array}{l} \chi(x) : \chi = \sum_{j=0}^N \chi_{ij} \frac{x^j}{l^j}, \\ x \in I_i, i = 1, \dots, M \end{array} \right\}. \quad (5.2.12)$$

Здесь η и ξ получены после подстановки соотношений (5.2.10) и (5.2.11) в (5.2.6). В соответствии с (5.2.11) на векторы перемещений и импульсов накладываются однородные начальные условия

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{p}(0) = \mathbf{0}. \quad (5.2.13)$$

Для оценки качества аппроксимаций решения системы (5.2.6) предлагается следующее интегральное выражение (относительная ошибка)

$$\Delta = \frac{\Phi}{\Psi}, \quad \Psi = \int_0^T E(t) dt,$$

$$\Phi = \int_0^T \int_0^l \varphi(t, x) dx dt, \quad \varphi = A\rho\eta^2 + EI\xi^2.$$

Для построения оптимального закона управления используется полиномиальные функции скорости тележки

$$v \in \mathcal{V} = \left\{ v : v(t) = \frac{t-T}{T} \sum_{k=1}^{K+1} v_k \frac{t^k}{T^k} \right\} \Rightarrow v(T) = 0.$$

Управление v содержит только K независимых коэффициентов v_k , так как один параметр, например, v_{K+1} будет выражаться через другие согласно терминальному условию

$$z(T) = \int_0^T v(t, \mathbf{v}, v_{K+1}) dt = z_T.$$

После решения задачи Коши (5.2.12), (5.2.13) для произвольных значений вектора параметров управления $\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_K]^T$, получаемые вектор-функции $\tilde{\mathbf{w}}(t, \mathbf{v})$ и $\tilde{\mathbf{p}}(t, \mathbf{v})$ используются для минимизации модифицированного функционала

$$J_1(\mathbf{v}) \rightarrow \min_{\mathbf{v}}, \quad J_1 = \tilde{J}_0(v) + \frac{\gamma_1}{T} \tilde{\Psi}(\mathbf{v}) + \frac{\gamma_2}{T} \tilde{\Phi}(\mathbf{v}), \quad (5.2.14)$$

в который добавлены соответствующие члены с безразмерными весовыми коэффициентами $\gamma_{1,2}$ для улучшения качества оптимального решения. Знак «тильда» в (5.2.14) означает, что функционалы \tilde{J}_0 , $\tilde{\Psi}$ и

$\tilde{\Phi}$ выражены через приближенное решение \tilde{w}, \tilde{p} , полученное на основе аппроксимаций (5.2.11). Оптимальный вектор \mathbf{v}^* определяет функцию управления $v^*(t) = v(t, \mathbf{v}^*)$, используемую в дальнейших численных расчетах и экспериментах.

5.2.7. Численные и экспериментальные результаты. Для оценки эффективности и качества предложенной стратегии оптимального программного управления проведен ряд численных расчетов. Решение системы (5.2.12) производилось с использованием аналитических преобразований, выполненных с помощью пакета прикладных программ MAPLE.

Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ балка находится в недеформированном неподвижном состоянии, т.е.

$$w_0(x) = p_0(x) \equiv 0.$$

Даны следующие параметры управляемой системы (5.2.9) и аппроксимаций (5.2.11):

$$T = 2 \text{ с}, z_T = 0.5 \text{ м}, K = 6, \gamma_1 = 0.01, \gamma_2 = 100, M = 4, N = 3.$$

Точность задания первых трех собственных частот ω_n и коэффициентов затухания ν_n , найденных с помощью предложенного проекционного подхода, показаны в табл. 5.2.1. Полученная в результате целевая функция энергии равна $J_0 \approx 4.18 \times 10^{-8}$ Дж для оптимального управления $v^*(t)$, показанного на рис. 5.2.4. Это много больше энергетической ошибки $\Phi T^{-1} \approx 2.39 \times 10^{-13}$ Дж, но много меньше средней механической энергии системы $\Psi T^{-1} \approx 0.0794$ Дж. Для выбранных параметров аппроксимаций M and N , относительная ошибка решения равна $\Delta = 3.02 \times 10^{-10} \%$.

Перемещение свободного конца балки показано на рис. 5.2.5. Амплитуда остаточных колебаний после остановки тележки ($v(t) \equiv 0$ при $t > T$) мала по сравнению с величиной максимального отклонения точек балки во время активного управления.

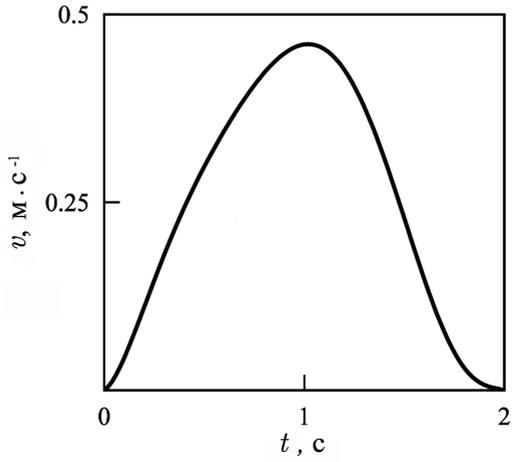


Рис. 5.2.4. Оптимальная скорость тележки $v^*(t)$ (управление).

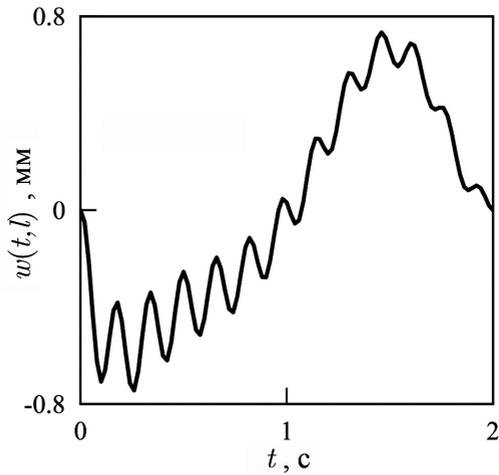


Рис. 5.2.5. Численное решение:
относительные движения полиспада $w(t,l)$.

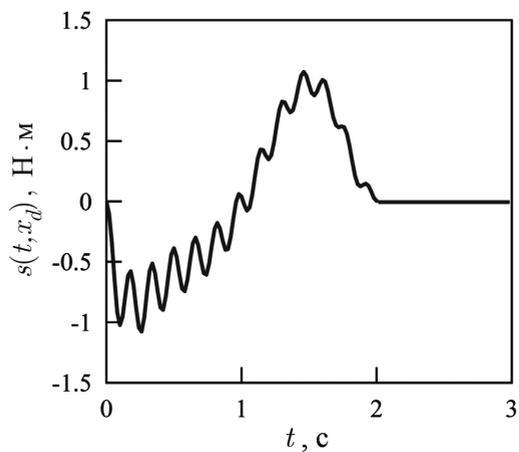


Рис. 5.2.6. Численное решение: изгибающий момент $s(t, x_d)$ в поперечном сечении балки при $x = 0.09$ м.

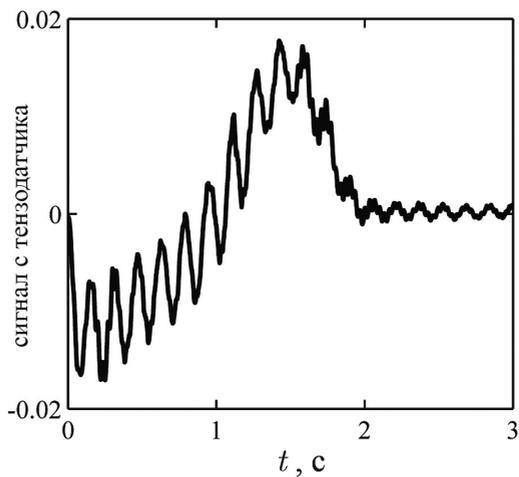


Рис. 5.2.7. Экспериментальные данные: показания тензодатчика при выполнении оптимального движения.

На рис. 5.2.6 представлено изменение во времени изгибающего момента s в выходной точке системы $x = x_d = 0.09$ м, в которой с помощью тензодатчика могут быть измерены деформации. Полученное оптимальное управление $v^*(t)$, показанное на рис. 5.2.4, использовалось как входной сигнал в блоке управления экспериментальной установки.

Данные показаний тензодатчика, расположенного на высоте $x = x_d$, были записаны во время экспериментального движения лабораторной модели мачтового автопогрузчика. Они выведены на рис. 5.2.7. Важно отметить, что выходной сигнал тензодатчика прямо пропорционален изгибающему моменту в этой точке балки. Из приведенных данных можно заключить, что момент, полученный в численном эксперименте (рис. 5.2.6), качественно подобен показаниям, полученным во время реального движения (рис. 5.2.7).

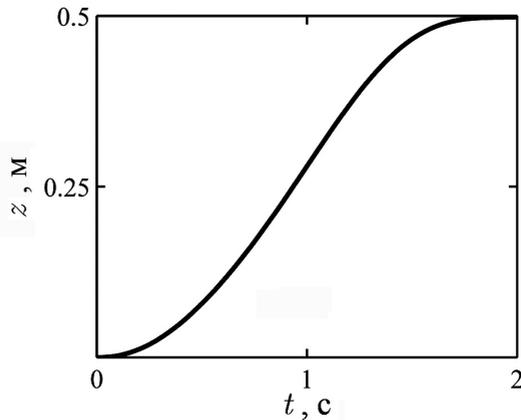


Рис. 5.2.8. Экспериментальные данные:
измеренное перемещение тележки.

Следует указать на то, что в лабораторном эксперименте после отключения управления возникают более интенсивные остаточные коле-

бания, чем было предсказано при численном моделировании. Следует продолжить работы по уточнению параметров системы, использовать более достоверные модели вязкой среды и, возможно, учитывать в расчетах динамику системы управления и тележки. Тем не менее, даже для упрощенной модели при $t > T$ движения конструкции незначительны и, как показано на рис. 5.2.8, система в момент $t = 2$ с достигает желаемого положения $z_T = 0.5$ м с высокой степенью точности.

§5.3. Управление потоком вязкой сжимаемой жидкости в протяженном элементе трубопровода

5.3.1. Модель протяженного элемента трубопровода. Управляемая передача жидкостей и газов по трубопроводам с заданным давлением и скоростью является важной задачей в современных транспортных системах. Для этого требуется разработка надежных стратегий управления трубопроводными сетями. Типичные элементы трубопровода состоят из протяженных конструкций, например, длинных секции труб, транспортирующих некоторую жидкость. Достоверные динамические модели этих элементов должны учитывать распределенные характеристики системы, такие как сжимаемость среды и ее вязкость, для расчета изменений давления и объемного расхода.

Рассмотрим элемент трубопровода, представляющий собой протяженную прямолинейную секцию трубы, в которой течет жидкость, подаваемая управляющим насосом (см. рис. 5.3.1). Одномерные движения вязкой сжимаемой жидкости внутри абсолютно жесткой цилиндрической трубы описываются в декартовой системе координат с осью x , направленной вдоль нейтральной линии трубы, и началом в центре крайнего поперечного сечения секции.

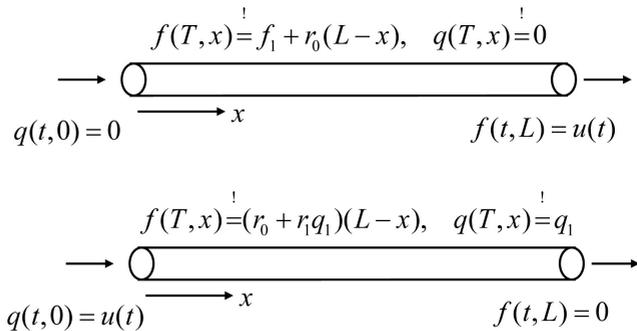


Рис. 5.3.1. Элементы трубопровода, транспортирующего жидкость.

Предполагается, что осредненное по поперечному сечению давление $\bar{p} = p_0 + p(t, x)$ и массовый расход жидкости через это сечение $\bar{q} = q_0 + q(t, x)$ не сильно отклоняются от соответствующих номинальных значений $p_0 > 0$ и q_0 . В последующем моделирование и управление рассматривается в терминах неизвестных переменных $p(t, x)$ и $q(t, x)$.

В модели сжимаемой жидкости давление p считается линейной функцией от изменения объемной плотности жидкости ρ относительно некоторой номинальной величины $\rho_0 = \text{const}$:

$$p = \rho_0^{-1} \kappa \rho(t, x). \quad (5.3.1)$$

Здесь $\kappa = \text{const}$ — модуль объемной деформации.

Уравнение изменения расхода жидкости записывается в форме

$$q_t + (A(x)p)_x + r(x, q, p) = 0, \quad (5.3.2)$$

где A — площадь поперечного сечения, r — суммарная линейная плотность сил сопротивления жидкости совместно с конвективными членами и внешними нагрузками, которые определяются, например, гравитационными силами [64]. Отметим, что функция r обычно нелинейно зависит от координаты x , давления p и массового расхода q . В рамках предположения о малом отклонении неизвестных функций p и q от их номинальных значений, можно учитывать только линейные члены распределенной нагрузки $r = r_0(x) + r_1(x)q$.

Номинальное давление в трубопроводе предполагается достаточно высоким, чтобы выполнялись условия неразрывности жидкой среды

$$A(x)\rho_t + q_x = 0. \quad (5.3.3)$$

Рассматриваются следующие смешанные краевые условия, записанные через функции давления и расхода

$$q(t, 0) = u^0(t), \quad p(t, L) = u^1(t). \quad (5.3.4)$$

Здесь L — длина участка трубопровода, схематически показанного на рис. 5.3.1. Переменные u^0 и u^1 — это либо заданные функции времени t , либо неизвестное управление.

Завершая формулировку начально-краевой задачи, к уравнениям (5.3.1)–(5.3.4) необходимо добавить начальные условия на объемную плотность ρ и массовый расход жидкости q :

$$\rho(0, x) = \rho^0(x), \quad q(0, x) = q^0(x). \quad (5.3.5)$$

Чтобы применить интегро-дифференциальный подход, описанный в предыдущих главах, введем новые функции эффективных перемещений $w(t, x)$ и нормальной силы в поперечном сечении $f(t, x)$ так, чтобы

$$\rho = -\frac{A_1 \rho_0}{A(x)} w_x, \quad p = \frac{f}{A(x)}, \quad A_1 = A(L). \quad (5.3.6)$$

После этого уравнения сжимаемости (5.3.1) и неразрывности (5.3.3) могут быть переписаны с использованием неизвестных функций f , q и w в виде

$$f = -A_1 \kappa w_x, \quad -A_1 \rho_0 w_{tx} + q_x = 0. \quad (5.3.7)$$

Учитывая, что эффективные перемещения w определены согласно (5.3.6) с точностью до произвольной функции t , уравнения состояния (5.3.7) перепишем в форме

$$\eta = \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{q}{A_1 \rho_0} = 0, \quad \xi = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{f}{A_1 \kappa} = 0. \quad (5.3.8)$$

Введенные переменные η и ξ — это функции состояния.

Уравнение изменения расхода (5.3.2) сводится к соотношению

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + r_1(x)q - \frac{1}{A(x)} \frac{\partial A(x)}{\partial x} f + r_0(x) = 0. \quad (5.3.9)$$

Соответственно, граничные условия (5.3.4) можно переписать как

$$w(t, 0) = \frac{1}{A_1 \rho_0} \int_0^t u^0(\tau) d\tau, \quad f(t, L) = A_1 u^1(t), \quad (5.3.10)$$

а начальные условия (5.3.5) — в виде

$$w(0, x) = w^0(x) = -\frac{1}{A_1 \rho_0} \int_0^x A(y) \rho^0(y) dy, \quad q(0, x) = q^0(x). \quad (5.3.11)$$

5.3.2. Оптимальное управление силой. На первом этапе рассматривается управляемое изменение давления жидкости на одном конце трубы, в то время как другое торцевое сечение герметично перекрыто или фиксирован номинальный расход жидкости $q_0 + q(t, L) = q_0$. Процессы в такой системе описываются уравнениями в частных производных (5.3.8) и (5.3.9) с заданными параметрами $L, A_1, \rho_0, \kappa, r_{0,1}$. Предполагается, что все эти величины не зависят от координаты x .

Уравнения (5.3.8)–(5.3.11) можно свести к безразмерной форме, подставляя новые переменные и константы согласно

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{x}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{L}, \quad \tilde{q} = \frac{\tau q}{A_1 L \rho_0}, \\ \tilde{f} &= \frac{f}{A_1 \kappa}, \quad \tau = L \sqrt{\frac{\rho_0}{\kappa}}, \quad \tilde{r}_0 = \frac{L r_0}{A_1 \kappa}, \quad \tilde{r}_1 = \tau r_1. \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

В дальнейшем знак «тильда» опускается. Система (5.3.8), (5.3.9) сводится к одному уравнению относительно перемещений $w(t, x)$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + r_1 \frac{\partial w}{\partial t} + r_0 = 0. \quad (5.3.13)$$

Граничные условия (5.3.10) (см. верхнюю часть рис. 5.3.1) могут быть преобразованы в соотношения

$$w(t, 0) = 0, \quad f(t, 1) = \frac{u^1(t)}{\kappa} = u(t), \quad (5.3.14)$$

где u — управляющая сила.

Ограничимся случаем, когда жидкость в трубопроводе изначально находилась в стационарном состоянии, которое в соответствии с (5.3.11) и (5.3.13) характеризуется следующими начальными условиями

$$w(0, x) = w^0(x) = \frac{r_0(x-2)x}{2}, \quad q(0, x) = 0. \quad (5.3.15)$$

Ставится задача нахождения оптимального управления силой $u^*(t)$ из заданного класса \mathcal{U} , которое переводит систему трубопровода за фиксированное время T из начального состояния (5.3.15) в конечное равновесное состояние с заданным распределением давления вдоль трубы и нулевым расходом

$$f(T, x) \stackrel{!}{=} f_T(x), \quad q(T, x) \stackrel{!}{=} 0.$$

Здесь $f_T = f_1 + r_0(1 - x)$ — линейная функция распределения нормальной силы в поперечном сечении.

В терминах оптимального управления это означает, что минимизируется целевая функция $J_0[u]$, задающая эффективную остаточную энергию жидкости в конце процесса, т.е.

$$\begin{aligned} J_0[u] &\rightarrow \min_{u \in \mathcal{U}}, \\ J_0 &= E(T), \quad E(t) = \int_0^1 \psi(t, x) dx, \\ \psi &= \frac{(f - f_T)^2 + q^2}{2}, \quad u(0) = 0, \quad u(T) = f_1. \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

5.3.3. Вариационный подход на основе МИДС. Главная идея рассматриваемого подхода [143] заключается в том, что уравнения состояния задаются в интегральной форме. Тогда исходная начально-краевая задача может быть сведена к минимизации функционала

$$\Phi[f, q, w] = \int_0^T \Theta(f, q, w_t, w_x) dt \rightarrow \min_{f, q, w} \quad (5.3.17)$$

при строгом выполнении уравнения изменения импульса (5.3.9), а также начальных и граничных условий (5.3.14), (5.3.15). Здесь введена функция энергетической невязки

$$\Theta = \frac{1}{2} \int_0^1 (\eta^2 + \xi^2) dx, \quad \eta = w_t - q, \quad \xi = w_x + f, \quad (5.3.18)$$

в которой функции состояния η и ξ в (5.3.18) задаются в соответствии с (5.3.8) и (5.3.12) в безразмерной форме.

Для дискретизации задачи (5.3.9), (5.3.14), (5.3.15), (5.3.17) разрешим сначала уравнение (5.3.9). Для этого функции силы f и массового расхода q выразим через новую переменную $s(t, x)$ как

$$f = -e^{-r_1 t} s_t + u(t) - (x - 1)r_0, \quad q = e^{-r_1 t} s_x. \quad (5.3.19)$$

Тогда соотношение (5.3.9) выполняется автоматически.

С учетом граничных условий (5.3.14), выберем аппроксимации полей $w(t, x)$ и $s(t, x)$ в виде

$$\begin{aligned} w &= e^{-r_1 t} \tilde{w} + w^0(x), \quad s = \tilde{s}, \\ \tilde{w} &= \mathbf{a}_1^T(x) \tilde{\mathbf{y}}_1(t), \quad \tilde{s} = \mathbf{a}_2^T(x) \tilde{\mathbf{y}}_2(t), \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

$$\mathbf{a}_1(0) = \mathbf{a}_2(1) = 0, \quad \mathbf{a}_{1,2}(x) \in \mathbb{R}^N, \quad \tilde{\mathbf{y}}_{1,2}(t) \in \mathbb{R}^N.$$

Здесь $\mathbf{a}_{1,2}(x)$ — векторы базисных функций, а $\tilde{\mathbf{y}}_{1,2}(t)$ — неизвестные вектор-функции времени.

После подстановки аппроксимаций (5.3.19), (5.3.20) в функционал Φ , минимизационная задача (5.3.17) переписывается в виде

$$\Phi[\tilde{\mathbf{y}}] = \int_0^T e^{-2r_1 t} \tilde{\Theta}(t, \dot{\tilde{\mathbf{y}}}, \tilde{\mathbf{y}}) dt \rightarrow \min_{\tilde{\mathbf{y}}}, \quad (5.3.21)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = [\tilde{\mathbf{y}}_1^T(t), \tilde{\mathbf{y}}_2^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{2N},$$

при следующих из (5.3.15) однородных начальных ограничениях

$$\tilde{\mathbf{y}}(0) = 0. \quad (5.3.22)$$

Здесь введена масштабированная функция ошибки

$$\tilde{\Theta} = \frac{1}{2} \int_0^1 (\tilde{\eta}^2 + \tilde{\xi}^2) dx, \quad \tilde{\eta} = \tilde{w}_t - r_1 \tilde{w} - \tilde{s}_x, \quad \tilde{\xi} = \tilde{w}_x - \tilde{s}_t + e^{r_1 t} u(t).$$

Уравнения Эйлера и условия трансверсальности, следующие из необходимых условий стационарности функционала Φ в вариационной задаче (5.3.21), (5.3.22) могут быть выписаны в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \dot{\tilde{\mathbf{y}}}} - \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \tilde{\mathbf{y}}} = \mathbf{0}; \quad \left. \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \dot{\tilde{\mathbf{y}}}} \right|_{t=T} = \mathbf{0}. \quad (5.3.23)$$

Не смотря на некоторые ограничения этого вариационного подхода, которые обсуждались в §2.5, численное решение задачи (5.3.13)–(5.3.15) может рассматриваться как оптимальное по отношению к значению энергетической нормы, задаваемой неотрицательным функционалом ошибки Φ в (5.3.17). Можно оценить качество получаемых аппроксимаций с помощью следующей относительной ошибки:

$$\Delta = \frac{\Phi[f, q, w]}{\Psi[q, w]}, \quad (5.3.24)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \varphi dx dt, \quad \Psi = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 \psi dx dt.$$

Здесь линейная плотность энергии $\psi(t, x)$ и распределение локальной ошибки $\varphi(t, x)$ заданы в форме

$$\psi = w_x^2 + q^2, \quad \varphi = \eta^2 + \xi^2, \quad (5.3.25)$$

$$\eta = w_1 - q, \quad \xi = w_x + f.$$

5.3.4. Проекционный подход на основе МИДС. Еще один подход, предложенный в [138], основан на модификации метода Петрова–Галеркина. Согласно этому подходу вместо локальных уравнений состояния (5.3.8) рассматриваются их интегральные проекции на специальным образом подобранные функциональные пространства $\mathcal{V}_{1,2}$, конечномерные по координате x :

$$\int_0^T \int_0^1 \eta(w, q) v_1(t, x) dx dt = 0, \quad \forall v_1 \in \mathcal{V}_1; \quad (5.3.26)$$

$$\int_0^T \int_0^1 \xi(w, f) v_2(t, x) dx dt = 0, \quad \forall v_2 \in \mathcal{V}_2.$$

Здесь используются функции η и ξ , определенные в (5.3.25). В данной постановке, неизвестные поля сил f , массового расхода q и перемещений w ограничены дифференциальным уравнением (5.3.9), а также краевыми и начальными условиями (5.3.14), (5.3.15).

Чтобы получить приближенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, используем семидискретные аппроксимации, введенные в (5.3.19) и (5.3.20). Составим из базисных функций пространств $\mathcal{V}_{1,2}$ векторные функции $\mathbf{b}_1(x) \in \mathbb{R}^N$ и $\mathbf{b}_2(x) \in \mathbb{R}^N$. Тогда из (5.3.26) следует система $2N$ дифференциальных уравнений первого порядка, записанных в векторной форме

$$\int_0^1 (\tilde{w}_t - r_1 \tilde{w} - \tilde{s}_x) \mathbf{b}_1(x) dx = \mathbf{0},$$

$$\int_0^1 (\tilde{w}_x - \tilde{s}_t + e^{r_1 t} u(t)) \mathbf{b}_2(x) dx = \mathbf{0},$$
(5.3.27)

к которым необходимо добавить начальные условия (5.3.22).

Не смотря на то, что система (5.3.22), (5.3.27) не является оптимальной, в смысле минимизации функционала Φ , она обладает рядом преимуществ, которые обсуждались в §2.5:

1. Дифференциальный порядок этой системы в два раза ниже, чем у системы (5.3.22), (5.3.23).
2. Нужно решать задачу Коши вместо краевой по времени задачи (5.3.22), (5.3.23).

При этом можно использовать оценки качества (5.3.24), полученные для вариационной задачи о движении жидкости в трубопроводе.

5.3.5. Процедура метода конечных элементов. Чтобы решить начально-краевую задачу (5.3.8), (5.3.9), (5.3.14), (5.3.15), используем проекционный подход, описанный выше и модификацию метода конечных элементов. В разработанном алгоритме локальные равенства $\eta = \xi = 0$, введенные в (5.3.8), заменены интегральными соотношениями (5.3.27), а уравнение (5.3.9) и условия (5.3.14), (5.3.15) выполнены точно.

Учитывая уравнение изменения расхода (5.3.9) и краевые условия при $x = 1$, функции q и f исключаются в соответствии с (5.3.19). После этого вводится пространственная сетка

$$x_0 = 0, \quad x_j = M^{-1}j, \quad I_j = [x_{j-1}, x_j], \quad j = 1, \dots, M,$$

где M число элементов. Чтобы найти приближенное решение оптимизационной задачи (5.3.16), функции w и s выбираются в пространстве кусочно-полиномиальных сплайнов

$$\begin{aligned} \tilde{w} \in \mathcal{S}_w^{(N)} &= \left\{ \begin{array}{l} \tilde{w}(t, x) : \quad \tilde{w} = \sum_{j=0}^N w_{ij}(t) B_{j,N}(z_i), \\ x \in I_i, \quad i = 1, \dots, M; \\ \tilde{w} \in C^0, \quad x \in [0, 1], \quad w_{10}(t) = 0 \end{array} \right\}, \\ \tilde{s} \in \mathcal{S}_s^{(N)} &= \left\{ \begin{array}{l} \tilde{s}(t, x) : \quad \tilde{s} = \sum_{j=0}^N s_{ij}(t) B_{N-j,N}(z_i), \\ x \in I_i, \quad i = 1, \dots, M; \\ \tilde{s} \in C^0, \quad x \in [0, 1], \quad s_{M,0}(t) = 0 \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (5.3.28)$$

Здесь

$$z_i = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}},$$

а $B_{j,n}(x)$ — полиномы Бернштейна (см. §2.5). Условия непрерывности в (5.3.28) выполняются через уравнения

$$w_{i+1,0} = w_{i,N}, \quad s_{i+1,0} = s_{i,N}, \quad i = 1, \dots, M - 1.$$

Чтобы упростить запись, в соответствии с (5.3.20) вводятся векторы

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}_1(t) &= [w_1(t), \dots, w_M(t)]^T, \quad w_i = \{w_{i1}(t), \dots, w_{iN}(t)\}, \\ \tilde{\mathbf{y}}_2(t) &= [s_1(t), \dots, s_M(t)]^T, \quad s_{M+1-i} = \{s_{i,1}(t), \dots, s_{i,N}(t)\}, \\ \mathbf{a}_1(x) &= \mathbf{a}_2(1-x) = \frac{\partial \tilde{w}(x, \tilde{\mathbf{y}}_1)}{\partial \tilde{\mathbf{y}}_1}. \end{aligned} \quad (5.3.29)$$

Число N определяет порядок полиномиальной аппроксимации на элементе сетки. В приближенной системе (5.3.22), (5.3.27) векторы тестовых функций задаются в форме

$$\mathbf{b}_1(x) = \mathbf{b}_2(1-x) = \{b_n(x)\} \in \mathbb{R}^{MN}, \quad x \in [0, 1];$$

$$b_{N(i-1)+j}(x) = \begin{cases} B_{j-1, N-1}(z_i), & x \in I_i \\ 0, & x \notin I_i \end{cases},$$

$$i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N.$$

Чтобы построить программное управление задаются полиномиальные функции управляющей силы

$$u \in \mathcal{U} = \left\{ u : u(t) = \frac{f_1 t}{T} + \frac{t-T}{T} \sum_{k=1}^K \frac{u_k t^k}{T^k} \right\}.$$

Отсюда следует, что

$$u(0) = 0, \quad u(T) = f_1.$$

Решается задача Коши (5.3.22), (5.3.27) относительно вектор-функции $\tilde{\mathbf{y}} = [\tilde{\mathbf{y}}_1^T, \tilde{\mathbf{y}}_2^T]^T$ для произвольного вектора управляющих параметров $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_K]^T$. После этого полученный вектор $\tilde{\mathbf{y}}^*(t, \mathbf{u})$ подставляется в аппроксимации (5.3.19), (5.3.20), (5.3.28), (5.3.29) для нахождения приближенных полей сил $f = f^*(t, x, \mathbf{u})$, расхода $q = q^*(t, x, \mathbf{u})$ и перемещений $w = w^*(t, x, \mathbf{u})$. Эти функции используются в функционалах $\tilde{J}_0(\mathbf{u}) = J_0[f^*, q^*]$ и $\tilde{\Phi}(\mathbf{u}) = \Phi[f^*, q^*, w^*]$ из (5.3.16), (5.3.17). В заключение минимизируется выражение

$$J_1 = \tilde{J}_0(\mathbf{u}) + \frac{\gamma}{T} \tilde{\Phi}(\mathbf{u}), \quad \gamma \geq 0,$$

в соответствии с

$$J_1(\mathbf{u}) \rightarrow \min_{\mathbf{u}}.$$

Здесь введено слагаемое с весовым коэффициентом γ , которое влияет на качество оптимального решения. Вектор \mathbf{u}^* , полученный в результате оптимизации управления $u^*(t) = u(t, \mathbf{u}^*)$, используется в дальнейшем численном моделировании.

5.3.6. Сравнение движения идеальной и вязкой жидкости.

Для демонстрации эффективности предложенного алгоритма оптимизации рассмотрим два управляемых процесса в трубопроводе. Первый из них отражает течение без сопротивления идеальной сжимаемой жидкости в однородной трубе с перекрытым концом ($A = 1$ и $r_0 = r_1 = 0$). Во втором процессе учитывается сопротивление жидкости, характеризуемое коэффициентами $r_0 = r_1 = 1$. В этом параграфе выбраны параметры управления $T = 4$, $f_1 = 1$, $K = 9$, $\gamma = 10$, число элементов $M = 4$ и порядок аппроксимации $N = 3$.

Изменение оптимального управления с течением времени $u^*(t)$ для обоих процессов отражено на рис. 5.3.2. Закон программного управления для идеальной и вязкой жидкости показан соответственно сплошной и штриховой кривой. Можно отметить, что оптимальная управляющая сила $f(t, 1) = u^*(t)$ выше, если учитывается сопротивление в потоке жидкости. Кроме того, в случае вязкой жидкости нарушается монотонный характер управления.

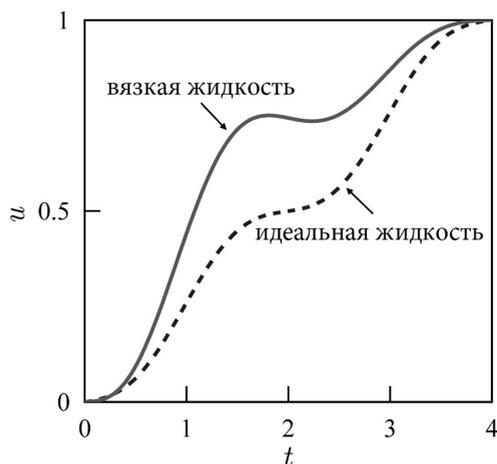


Рис. 5.3.2. Оптимальная граничная сила $u^*(t)$.

На рис. 5.3.3, 5.3.4 показано распределение в пространстве и времени давления жидкости в трубе ($p(t, x) = f(t, x)$) для идеального и вязкого течения. Отметим, что предложенная стратегия управления позволяет перевести жидкость в конечное состояние с давлением, которое очень близко к желаемому распределению $f_T(x)$. В обоих процессах почти незаметны остаточные течения в трубе.

Значение функционала управления, определенного в (5.3.16), равно $J_0 = 9.6 \cdot 10^{-8}$ для идеальной жидкости. Соответствующая интегральная ошибка, введенная в (5.3.17), для выбранной аппроксимации достаточно мала: $\Delta = 1.6 \cdot 10^{-9}$. Для модели с сопротивлением, обе эти величины значительно меньше и составляют $J_0 = 3.9 \cdot 10^{-10}$ и $\Delta = 7.1 \cdot 10^{-11}$. Это означает, что вязкость в линейной модели жидкости может улучшать качество приближенного решения. Более того, силы сопротивления помогают снизить интенсивность остаточных колебаний. Этот факт отражен на рис. 5.3.5, где показано распределение вдоль участка трубопровода остаточного давления $\Delta p = f(T, x) - f_T(x)$. Как можно заметить, максимальное отклонение этой функции от заданной много меньше для потока вязкой жидкости, чем для идеальной.

Еще один способ оценки качества приближенной системы уравнений — это частотный анализ. Основываясь на методе Фурье, для однородного участка трубопровода можно получить точные выражения собственных форм колебаний жидкости w_n для краевой задачи (5.3.13), (5.3.14). Они имеют вид

$$\begin{aligned} w_n &= e^{\phi_n t} \sin \lambda_n x, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \lambda_n &= \frac{\pi}{2} + (n-1)\pi, \quad \phi_n = -\nu + i\omega_n, \\ \omega_n &= \sqrt{\lambda_n^2 - \frac{r_1^2}{4}}, \quad \nu = \frac{r_1}{2}, \end{aligned}$$

где λ_n — волновые числа, ω_n — частоты и $\nu \geq 0$ — коэффициент затухания для свободного течения жидкости.

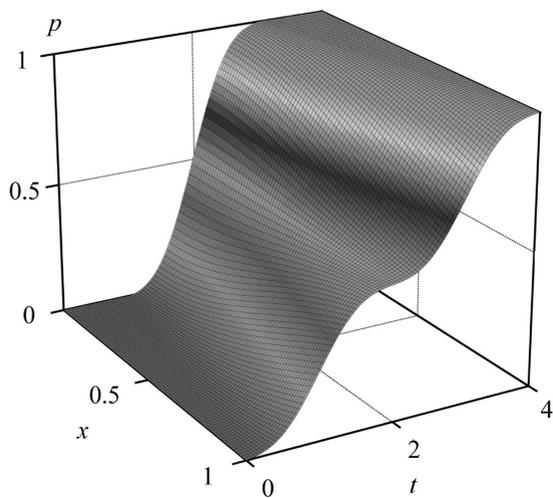


Рис. 5.3.3. Распределение давления для потока идеальной жидкости.

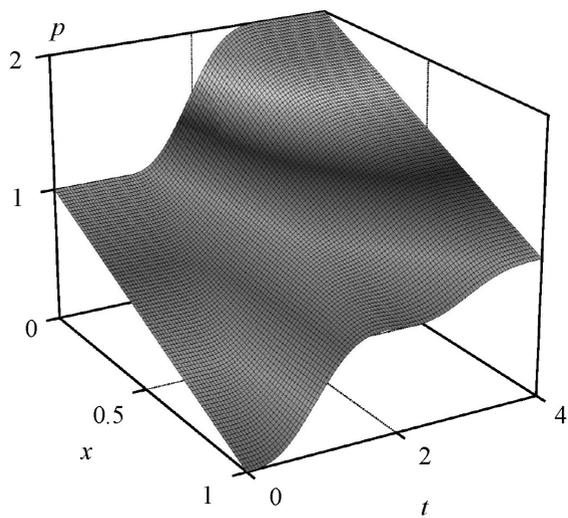


Рис. 5.3.4. Распределение давления для потока вязкой жидкости.

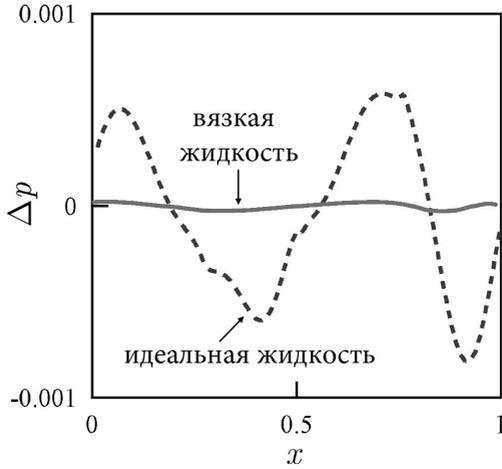


Рис. 5.3.5. Распределение остаточного давления.

Первые четыре частоты ω_n и относительные ошибки

$$\Delta\omega_n = (\tilde{\omega}_n - \omega_n)/\tilde{\omega}_n,$$

где $\tilde{\omega}_n$ — частоты полученные методом конечных элементов, даны в табл. 5.3.1 для модели идеальной и вязкой жидкости. Собственные частоты для потока с внутренним сопротивлением строго ниже соответствующих величин для идеального случая. Отметим, что малые значения относительных частотных растроек $\Delta\omega_n$ указывают на достоверность полученных приближенных форм движения $\tilde{w}_n(x)$.

5.3.7. Оптимизация потока в водопроводе. Далее в размерной форме рассматривается движение воды в трубопроводе с кинематическим управлением граничным потоком. Предполагается, что можно задавать массовый поток $u(t)$ вязкой жидкости, подаваемой во входное сечение ($x = 0$) однородного участка трубопровода. Задано постоянное давление p_0 на выходном сечении $x = L$ (см. нижнюю часть рис. 5.3.1).

Таблица 5.3.1: Собственные числа для системы с идеальным и вязким течением жидкости.

Мода	1	2	3	4
Течение идеальной жидкости, $\kappa_0 = \kappa_1 = 0$				
ω	1.57	4.71	7.84	11.00
$\Delta\omega$	$8.6 \cdot 10^{-15}$	$5.0 \cdot 10^{-10}$	$7.7 \cdot 10^{-8}$	$2.0 \cdot 10^{-6}$
Течение вязкой жидкости, $\kappa_0 = \kappa_1 = 1$				
ω	1.49	4.69	7.84	10.98
$\Delta\omega$	$2.5 \cdot 10^{-11}$	$1.7 \cdot 10^{-7}$	$7.8 \cdot 10^{-6}$	$1.03 \cdot 10^{-4}$

Соответствующие граничные условия записываются в форме

$$w(t, 0) = \frac{1}{A_1 \rho_0} \int_0^t u(\tau) d\tau, \quad p(t, L) = 0.$$

Аналогично задаче рассмотренной в п. 5.3.3, предполагается, что жидкость в трубе предварительно находилась в заданном стационарном состоянии (5.3.15).

Ставится задача нахождения оптимальной функции массового расхода $u^*(t)$ на заданном классе \mathcal{U} , которая приводит систему за фиксированное время T из начального состояния (5.3.15) в конечное близкое к стационарному течению с заданным распределением давления и расхода

$$f(T, x) \stackrel{!}{=} f_T(x), \quad q(T, x) \stackrel{!}{=} q_1 = \text{const},$$

т.е. минимизирует функционал

$$\begin{aligned}
 J_0[u] &\rightarrow \min_{u \in \mathcal{U}}, \quad J_0 = E(T), \quad E(t) = \int_0^L \psi(t, x) dx, \\
 \psi &= \frac{(f - f_T)^2}{2A_1 \kappa} + \frac{(q - q_1)^2}{2A_1 \rho_0}, \quad f_T = (r_0 + r_1 q_1)(L - x), \\
 u(0) &= 0, \quad u(T) = q_1,
 \end{aligned} \tag{5.3.30}$$

где q_1 — предполагаемый терминальный расход жидкости.

Для расчетов управляемого потока воды в прямолинейном участке трубопровода с диаметром трубы d были выбраны следующие параметры:

$$\begin{aligned} L &= 100 \text{ м}, d = 0.01 \text{ м}, A = A_1 = \pi d^2/4, \rho_0 = 1000 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}, \\ \kappa &= 2.2 \text{ ГПа}, r_0 = 0.265 \text{ Н}\cdot\text{м}^{-1}, r_1 = 3.93 \text{ с}^{-1}, \\ T &= 1 \text{ с}, q_1 = 0.05 \text{ кг}\cdot\text{с}^{-1}, K = 9, \gamma = 100. \end{aligned}$$

При численном моделировании использовался проекционный алгоритм на основе МКЭ, описанный в п. 5.3.5, с параметрами аппроксимации $M = N = 4$. Достигнутое значение целевой функции, введенной в (5.3.30), составило $J_0 = 4.1 \cdot 10^{-14}$ Дж, а относительная интегральная ошибка, определенная в (5.3.24) равна $\Delta = 5 \cdot 10^{-15}$.

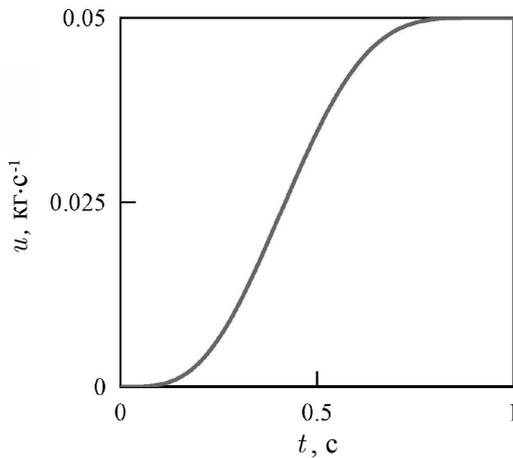


Рис. 5.3.6. Оптимальный массовый расход через входное сечение $u^*(t)$.

Изменение во времени функции управления, иначе массового расхода $u^*(t)$, показано на рис. 5.3.6. Стоит отметить плавный и монотонный характер закона управления. Распределение давления $p(t, x)$ в пространстве и времени изображено на рис. 5.3.7. Так же как и для элемента трубопровода, который обсуждался в п. 5.3.6, выбранная стра-

тегия управления позволяет перевести поток жидкости из начального состояния в конечное без заметных колебаний.

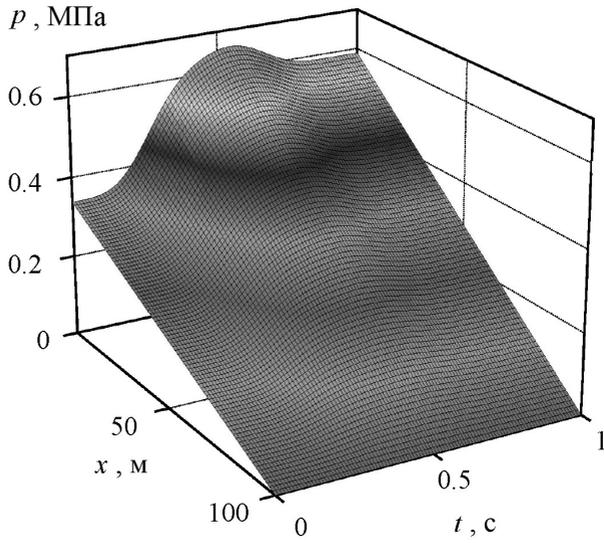


Рис. 5.3.7. Распределение давления в потоке воды.

Заключение

Цель проведенных исследований заключалась в вариационной формулировке и изучении ряда прямых и обратных задач динамики для управляемых механических систем содержащих распределенные и сосредоточенные параметры.

Даны вариационные постановки начальных и начально-краевых задач о вынужденных движениях упругих систем, которые описываются линейными дифференциальными уравнениями как в обыкновенных, так и в частных производных, а также смешанными граничными и начальными условиями. Полученные интегро-дифференциальные формулировки сводятся либо к нахождению минимума квадратичных функционалов состояния системы, либо к определению их стационарных точек при заданных дифференциальных ограничениях.

Выведены необходимые условия стационарности рассмотренных функционалов и определено, что ограничения вместе с уравнениями Лагранжа–Эйлера, а также естественными граничными и терминальными условиями вариационной задачи эквивалентны исходным определяющим соотношениям системы. Была показана связь предложенных вариационных постановок задач динамики с классическими вариационными принципами Гамильтона–Остроградского, сформулированными для краевых и периодических условий по времени.

Эти результаты обобщены на случаи электромеханических систем, вязкоупругих конструкций с протяженными элементами, акустической модели вязкого течения сжимаемой жидкости в трубопроводе.

На основе новых вариационных формулировок и метода Ритца разработаны алгоритмы численного решения задач динамики упругих систем с распределенными параметрами. Алгоритмы основаны на различных подходах к дискретизации исходной бесконечномерной задачи, включая полиномиальное представление неизвестных функций, конеч-

но-элементные аппроксимации, а также дискретизацию по части координат и бесконечномерное представление по одной оставшейся переменной.

Развит проекционный подход к численному решению динамических задач, представляющий собой модификацию метода Петрова–Галеркина на основе интегрального представления уравнений состояния. Проведен сравнительный анализ полученных различными подходами приближенных систем уравнений, представляющих собой либо алгебраические, либо обыкновенные дифференциальные уравнения.

Разработана регулярная процедура построения уточняющих моделей колебаний балок на основе вариационного и проекционного подходов и линейной теории упругости. Для полученных плоских и пространственных балочных моделей проведен частотно-волновой анализ свободных движений. Найдены частоты и формы поперечных и продольных колебаний для различных граничных условий. Обнаружены частотные зоны, для которых характерны особые моды собственных перемещений точек протяженного упругого тела.

На основе развитых интегро-дифференциальных подходов к численному решению задач о движении механических систем с распределенными параметрами разработаны алгоритмы параметрической оптимизации управления. При этом, построение оптимальных законов управления для квадратичных целевых функционалов сводится к последовательному решению двух линейных систем приближенных уравнений. Предложена процедура регуляризации полученного решения с учетом явных энергетических оценок качества аппроксимаций.

Проведено моделирование, анализ и оптимизация управления для ряда прикладных задач динамики систем, содержащих как сосредоточенные, так и распределенные параметры. Исследованы повороты нагруженного упругого звена манипулятора, управляемого электроприводом. Выполнено моделирование и оптимизация перемещений вязко-

упругой конструкции мачтового подъемника. Построены оптимальные законы управления потоком вязкой сжимаемой жидкости, транспортируемой по протяженному участку трубопровода.

Определенные результаты математического моделирования сравнивались с экспериментальными данными, которые подтвердили эффективность предложенных подходов к моделированию и оптимизации динамических процессов в системах с распределенными параметрами.

Литература

- [1] *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987.
- [2] *Акуленко Л.Д.* Квазистационарное финитное управление движением гибридных колебательных систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 183–192.
- [3] *Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н.* Об управляемом вращении упругого стержня // ПММ. 1982. Том 46. Вып. 4. С. 587–595.
- [4] *Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н.* Об управлении поворотом упругого звена манипулятора // Изв. АН СССР. Тех. кибернетика. 1984. № 1. С. 167–173
- [5] *Акуленко Л.Д., Гукасян А.А.* Управление плоским движением упругого звена манипулятора // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 3.
- [6] *Акуленко Л.Д., Каушинис С.К., Костин Г.В.* Амплитудно-частотный анализ и моделирование динамики управляемых движений электромеханической системы выборки информации // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 5. С. 43–50.
- [7] *Акуленко Л.Д., Каушинис С.К., Костин Г.В.* Влияние сухого трения на управление движением электромеханических систем // Изв. РАН. Тех. кибернетика. 1994. № 1. С. 65–74.
- [8] *Акуленко Л.Д., Костин Г.В.* Метод возмущений в задачах динамики неоднородных упругих стержней // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 3. С. 452–464.
- [9] *Акуленко Л.Д., Костин Г.В., Нестеров С.В.* Численно-аналитический метод исследования свободных колебаний неоднородных стержней // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 180–191.

- [10] *Акуленко Л.Д., Костин Г.В., Нестеров С.В.* Влияние диссипации на пространственные нелинейные колебания струны // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 1. С. 19–28.
- [11] *Акуленко Л.Д., Костин Г.В., Нестеров С.В.* Колебания и распад жидкой самогравитирующейся массы // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 5. С. 152–163.
- [12] *Акуленко Л.Д., Михайлов С.А.* Синтез управления вращениями упругого звена электромеханического упругого робота // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1988. № 4.
- [13] *Акуленко Л.Д., Михайлов С.А., Черноусько Ф.Л.* Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 3.
- [14] *Баландин Д.В., Коган М.М.* Оптимальное гашение колебаний высотных сооружений при сейсмических воздействиях // Изв. РАН. ТиСУ. 2004. №5. С. 60–66.
- [15] *Баничук Н.В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980.
- [16] *Баничук Н.В.* Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986.
- [17] *Бербюк В.Е.* Об управляемом вращении системы двух твердых тел с упругими элементами//ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2.
- [18] *Бербюк В.Е.* Динамика и оптимизация робототехнических систем. Киев: Наукова думка, 1989.
- [19] *Бербюк В.Е., Демидюк М.В., Ивах Г.Ф.* Задача оптимизации конструкций и законов управления движением электромеханических манипуляторов // Изв. АН СССР. Техн. кибернет. 1987. № 3.

- [20] *Бернштейн С.Н.* Собрание сочинений. Т. 1. Конструктивная теория функций. М.: Изд-во АН СССР, 1952.
- [21] *Болотник Н.Н., Лукасян А.А.* Управление движением манипулятора с учетом упругих колебаний стрелы // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4.
- [22] *Братусь А.С., Иванова А.П.* Локальные решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана и их применение к задаче оптимального управления колебаниями упругих распределенных систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2004. №2. С. 34–42.
- [23] *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
- [24] *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965.
- [25] *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987.
- [26] *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966.
- [27] *Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г.* Осцилляционные матрицы и малые колебания механических систем. М.: Гостехиздат, 1941.
- [28] *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. М.: Физматлит, 1961.
- [29] *Гринберг Г.А.* Новый метод решения некоторых краевых задач для уравнений математической физики, допускающих разделение переменных // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1946. Т. 10. № 2.
- [30] *Гулд С.* Вариационные методы в задачах о собственных значениях. М.: Мир, 1970.

- [31] *Доннелл Л.Г.* Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982.
- [32] *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978.
- [33] *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2001.
- [34] *Ковалева А.С.* Управление колебательными и виброударными системами. М.: Наука, 1990.
- [35] *Комков В.* Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. М.: Мир, 1975.
- [36] *Коробов В.И., Скляр Г.М.* Оптимальное быстроедействие и степенная проблема моментов // Мат. сб. 1987. Т. 134. № 2. С. 186–206.
- [37] *Костин Г.В.* Динамика управляемых вращений нагруженного упругого звена в манипуляционной системе с электромеханическим приводом // Изв. АН СССР. Тех. кибернетика. 1989. № 6. С. 130–138.
- [38] *Костин Г.В.* Моделирование управляемых движений электромеханического манипуляционного робота с упругими звеньями // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1991. № 4. С. 182–188.
- [39] *Костин Г.В.* Влияние гармонических возмущений на управляемые движения механической системы // Изв. РАН. ТиСУ. 2005. № 2. С. 16–25.
- [40] *Костин Г.В.* Оптимальное по быстрдействию управление механической системой с учетом сил трения и гармонического возмущения // Изв. РАН. ТиСУ. 2005. № 4. С. 57–63.

- [41] *Костин Г.В.* Построение оптимального управления движением упругих тел методом интегродифференциальных соотношений // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 4. С. 21–31.
- [42] *Костин Г.В.* Моделирование вынужденных движений упругой балки на основе метода интегродифференциальных соотношений // ПММ. 2013. Том 77. Вып. 1. С. 83–101.
- [43] *Костин Г.В., Саурин В.В.* Интегродифференциальный подход к решению задач линейной теории упругости // Доклады АН. 2005. Т. 404. № 5. С. 628–631.
- [44] *Костин Г.В., Саурин В.В.* Построение управляемых движений упругого стержня методом интегро-дифференциальных соотношений // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. № 1. С. 60–67.
- [45] *Костин Г.В., Саурин В.В.* Оптимизация движений упругого стержня методом интегродифференциальных соотношений // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. № 2. С. 56–64.
- [46] *Костин Г.В., Саурин В.В.* Моделирование и оптимизация движений упругих систем методом интегродифференциальных соотношений // Доклады АН. 2006. Т. 408. № 6. С. 750–753.
- [47] *Костин Г.В., Саурин В.В.* О свободных колебаниях балок // Доклады АН. 2006. Т. 411. № 5. С. 617–621.
- [48] *Костин Г.В., Саурин В.В.* Метод интегродифференциальный соотношений в задаче о собственных колебаниях балки // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сборник. Н-Новгород. 2006. Вып. 68. С. 139–149.
- [49] *Костин Г.В., Саурин В.В.* Метод интегродифференциальных соотношений в линейной теории упругости // Изв. РАН. МГТ. 2007. № 2. С. 36–49.

- [50] *Костин Г.В., Саурин В.В.* Асимптотический подход к задаче о свободных колебаниях балки // ПММ. 2007. Том 71. Вып. 4. С. 670–680.
- [51] *Костин Г.В., Саурин В.В.* Вариационная формулировка задач оптимизации движений упругих тел // Доклады АН. 2007. Т. 415. № 2. С. 180–184.
- [52] *Костин Г.В., Саурин В.В.* Асимптотический подход к анализу напряженно-деформированного состояния упругих тел // Доклады АН. 2008. Т. 423. № 6. С. 753–757.
- [53] *Костин Г.В., Саурин В.В.* Метод интегродифференциальных соотношений для анализа собственных колебаний мембран // ПММ. 2009. Том 73. Вып. 3. С. 459–473.
- [54] *Костин Г.В., Саурин В.В.* Вариационные подходы к решению начально-краевых задач динамики линейных упругих систем // ПММ. 2009. Том 73. Вып. 6. С. 934–953.
- [55] *Костин Г.В., Саурин В.В.* Моделирование пространственных движений упругой балки на основе метода интегродифференциальных соотношений // Современные проблемы механики сплошной среды. Том 2. Труды XIV международной конференции, гг. Ростов-на-Дону, Азов, 19-24 июня, 2010. Ростов-на-Дону: Из-во ЮФУ. С. 165-169
- [56] *Костин Г.В., Саурин В.В.* Моделирование и анализ собственных колебаний упругой призматической балки на основе проекционного подхода // ПММ. 2011. Том 75. Вып. 6. С. 995–1010.
- [57] *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. Введение в теорию. М.: Наука, 1975.

- [58] *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
- [59] *Крылов Н.М.* Методы приближенного решения задач математической физики. Избр. труды. Т. 2. Киев: Изд-во АН УССР. 1961.
- [60] *Курант Р., Гильберт Д.* Методы в математической физике. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1951.
- [61] *Лаверовский Э.К., Формальский А.М.* Стабилизация заданной позиции упругого стержня // ПММ. 1989. Том 53. Вып. 5.
- [62] *Лакота Н.А., Рахманов Е.В., Шведов В.Н.* Управление упругим манипулятором на траектории // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 2.
- [63] *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
- [64] *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
- [65] *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: ГИФМЛ, 1961.
- [66] *Михайлов С.А., Черноушко Ф.Л.* Исследование динамики манипулятора с упругими звеньями // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 2.
- [67] *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
- [68] *Мороз А.И.* Синтез оптимального по времени управления для линейных систем третьего порядка - II // АиТ. 1969. № 7.
- [69] *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

- [70] *Нестеров С.В., Акуленко Л.Д., Костин Г.В.* Метод ускоренной сходимости для определения собственных частот неоднородного стержня // Доклады РАН. 1996. Т. 349. № 5. С. 624–627.
- [71] *Павлов А.А.* Синтез релейных систем, оптимальных по быстродействию. М.: Наука, 1966.
- [72] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
- [73] *Работнов Ю.Н.* Механика деформированного твердого тела. М.: Наука, 1979.
- [74] *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985.
- [75] *Романов И.В., Шамаев А.С.* Управление колебаниями мембран и пластин с помощью граничных сил // Доклады АН. 2011. Т. 438. №3. С. 318–322.
- [76] *Саурин В.В.* О вариационных подходах в линейной теории упругости // Доклады АН. 2007. Т. 415. № 4. С. 486–490.
- [77] *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977.
- [78] *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
- [79] *Стрэтт Дж.В. (Лорд Релей)* Теория звука. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1940.
- [80] *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.

- [81] *Тимошенко С.П.* Сопротивление материалов. Т. 1. М.: Физматгиз, 1960.
- [82] *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967.
- [83] *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1979.
- [84] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
- [85] *Уткин В.И., Орлов Ю.В.* Теория бесконечномерных систем управления на скользящих режимах. М.: Наука, 1990.
- [86] *Фельдбаум А.А.* О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства // Автоматика и телемеханика. 1955. Т. 16. № 2. С. 129–149.
- [87] *Черноусько Ф.Л.* Динамика управляемых движений упругого манипулятора // Изв. АН СССР. Тех. кибернетика. 1981. № 5.
- [88] *Черноусько Ф.Л.* Декомпозиция и субоптимальное управление в динамических системах // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6.
- [89] *Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А.* Методы управления нелинейными механическими системами. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
- [90] *Черноусько Ф.Л., Банничук Н.В.* Вариационные задачи механики и управления (Численные методы). М.: Наука, 1973.
- [91] *Черноусько Ф.Л., Шматков А.М.* Оптимальное по быстродействию управление в одной системе третьего порядка // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 723–731.
- [92] *Чиликин М.Г., Ключев В.И., Сандлер А.С.* Теория автоматизированного электропривода. М.: Наука, 1977.

- [93] *Adams R.A.* Sobolev Spaces. New York: Academic Press, 1975.
- [94] *Ahmed N.U., Teo K.L.* Optimal Control of Distributed Parameter Systems. New York: North Holland, 1981.
- [95] *Akulenko L.D., Nesterov S.V.* High-Precision Methods in Eigenvalue Problems and their Applications. Charman & Hall/CRC. 2005.
- [96] *Aschemann H., Kostin G.V., Rauh A., Saurin V.V.* Approaches to control design and optimization in heat transfer problems // Изв. РАН. ТИСУ. 2010. № 3. С. 40–51.
- [97] *Atluri S.N., Zhu T.* A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics // Comput. Mech. 1998. V. 22. P. 117–127.
- [98] *Babuska I., Strouboulis T.* The Finite Element Method and its Reliability. New York: Oxford University Press. 2001.
- [99] *Balas M.J.* Finite-dimensional control of distributed parameter systems by Galerkin approximation of infinite dimensional controllers // J. Math. Anal. Appl. 1986. V. 114, P. 17–36.
- [100] *Banks S.P.* (ed.) State-Space and Frequency-Domain Methods in the Control of Distributed Parameter Systems. London: Peregrinus, 1983.
- [101] *Bauchau O.A.* A beam theory for anisotropic materials // J. Appl. Mech. 1985. V.107. P. 416–422.
- [102] *Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L.* Element-free Galerkin method // Int. J. Num. Methods Eng. 1994. V. 37. P. 229–256.
- [103] *Berdichevsky V.L.* Variational Principles of Continuum Mechanics. V. 1. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2009.

- [104] *Bochev P.B., Gunzburger M.D.* Least-Squares Finite Element Methods. Applied Mathematical Sciences. V. 166. New-York: Springer, 2009.
- [105] *Book W.J.* Analysis of Massless Elastic Chains with Servo Controlled Joints//Trans. ASME J. Dynamic Syst. Measur. and Control. 1979. V. 101. N. 3.
- [106] *Butkovsky A.G.* Distributed Control Systems. New York: Elsevier, 1969.
- [107] *Chernousko F.L.* Control of elastic systems by bounded distributed forces // Appl. Math. Comp. 1996. V. 78. P. 103–110.
- [108] *Chernousko F.L., Ananievski I.M., Reshmin S.A.* Control of Non-linear Dynamical Systems: Methods and Applications. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.
- [109] *Christofides P.D.* Nonlinear and Robust Control of PDE Systems: Methods and Applications to Transport-Reaction Processes. Birkhäuser, 2001.
- [110] *Courant R.* Variational methods for the solution of problem of equilibrium and vibration // Bull. Am. Math. Soc. 1943. V. 49, P. 1–23.
- [111] *Curtain R., Zwart H.* (eds.) An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory. New York: Springer Verlag, 1995.
- [112] *Farin G.* Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design. San Diego: Academic Press, 1997.
- [113] *Fliess M., Lévine J., Martin P., Rouchon P.* Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and examples // Int. J. Control 1995. V. 61. P. 1327–1361.

- [114] *Gerdtts M., Greif G., Pesch H.J.* Numerical optimal control of the wave equation: optimal boundary control of a string to rest in finite time // *Math. Comput. Simul.* 2008. V. 79. N. 4. P. 1020–1032.
- [115] *Gugat M.* Optimal control of networked hyperbolic systems: evaluation of derivatives // *Adv. Model. Optim.* 2005. V. 7. P. 9–37.
- [116] *He J.-H.* Generalized variational principles for thermopiezoelectricity // *Archive of Applied Mechanics.* 2002. V. 72. P. 248–256.
- [117] *Hesthaven J.S., Warburton T.* Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis and Applications. Springer Texts in Applied Mathematics. V. 54. New York: Springer-Verlag, 2008.
- [118] *Hinze M., Pinnau R., Ulbrich M.* Optimization with PDE Constraints. Springer, 2009.
- [119] *Kharitonov A., Sawodny O.* Flatness-based disturbance decoupling for heat and mass transfer processes with distributed control // *Proc. the IEEE International Conference on Control Applications CCA.* Munich. Germany, P. 674–679. 2006.
- [120] *Kostin G.V., Aschemann H., Saurin V.V., Rauh A.* Optimal real-time control of flexible rack feeders using the method of integrodifferential relations // *Preprints MATHMOD 2012 Vienna - Full Paper Volume (the 7th Vienna Conference on Mathematical Modelling , Vienna, Austria, February 14-17)/ [ed. I. Troch, F. Breiteneker] Vienna: ARGESIM, Report no. S38, 2012.*
- [121] *Kostin G.V., Saurin V.V.* Analytical derivation of basis functions for argyris triangle // *Zeitschrift fur angewandte mathematik und mechanik (ZAMM),* 81(Suppl. 4), 2001. P. 871–872.

- [122] *Kostin G.V., Saurin V.V.* The method of integrodifferential relations for linear elasticity problems // Archive of Applied Mechanics. 2006. V. 76. N. 7-8. P. 391–402
- [123] *Kostin G.V., Saurin V.V.* Method of integro-differential relation for optimal beam control // PAMM Proc. Appl. Math. Mech. 2006. V. 6. Issue 1. 77th GAMM Annual Meeting, Berlin. P. 817–818.
- [124] *Kostin G.V., Saurin V.V.* A variational approach to optimal control problems for elastic body motions // PAMM Proc. Appl. Math. Mech. 2007. V. 7. Issue 1. Sixth International Congress on Industrial Applied Mathematics (ICIAM07) and 78th GAMM Annual Meeting, Zurich. P. 4130019–4130020.
- [125] *Kostin G.V., Saurin V.V.* Optimal control for 3D elastic body motions // Proc. Int. Summer School-Conf. APM. June-July 2007, St. Petersburg, Russia.
- [126] *Kostin G.V., Saurin V.V.* A variational formulation in fracture mechanics // Proc. IFC Interquadrennial Conference, July 07-12, 2007, Moscow, Russia.
- [127] *Kostin G.V., Saurin V.V.* Integrodifferential approach to optimal control problems of elastic beam motions // Proc. 3rd IFAC Workshop PSYCO'07, August 29-31, 2007, St. Petersburg, Russia. Periodic Control Systems, V. 3, Part 1
- [128] *Kostin G.V., Saurin V.V.* Motion analysis and optimization for beam structures // Proc. 9th Conference on Dynamical Systems Theory and Applications, DSTA-2007, December 17-20, Lodz, Poland. P. 407–414.
- [129] *Kostin G.V., Saurin V.V.* Variational analysis in dynamical problems of linear elasticity // PAMM Proc. Appl. Math. Mech. 2008. V. 8. Issue 1. 79th GAMM Annual Meeting, Bremen. P. 10301–10302.

- [130] *Kostin G.V., Saurin V.V.* A variational formulation in fracture mechanics // International Journal of Fracture. 2008. V 150. N 1-2. P. 195-211.
- [131] *Kostin G.V., Saurin V.V.* Motion analysis and optimization for beam structures. In Modeling, Simulation and Control of Nonlinear Engineering Dynamical Systems: State-of-the-Art, Perspectives and Applications / [ed. J. Awrejcewicz]. Springer, Netherlands. 2008. P. 201-210.
- [132] *Kostin G.V., Saurin V.V.* A variational approach to 3d rod motion modeling and optimization // Proc. of XXII ICTAM, 25-29 August 2008, Adelaide, Australia.
- [133] *Kostin G.V., Saurin V.V.* Variational approach and spline technique to optimization of controlled beam motions // Proc. ENOC-2008, Saint Petersburg, Russia, June 30-July 4, 2008.
- [134] *Kostin G.V., Saurin V.V.* Variational formulation of optimal control problems for elastic body motions // In "Advances in Mechanics: Dynamics and Control: Proc. of 14th International Workshop on Dynamics and Control" / [ed. F.L. Chernousko, G.V. Kostin, V.V. Saurin] Moscow: Nauka, 2008. P. 183–189.
- [135] *Kostin G.V., Saurin V.V.* Modeling and variational analysis of control problems for elastic body motions // Proc. Conference on Mathematical Modelling MATHMOD 09 (February 11-13, 2009, Vienna, Austria) / [ed. I. Troch, F. Breitenecker] Vienna, 2009. P. 468–478.
- [136] *Kostin G.V., Saurin V.V.* Variational technique to 3D dynamical control problems in linear elasticity // Proc. 15th International Workshop on Dynamics and Control (May 31 - June 3, 2009, Tossa de

- Mar, Spain) / [ed. by J. Rodellar, E. Reithmeier] Barcelona: CIMNE, 2009. P. 95–102.
- [137] *Kostin G.V., Saurin V.V.* Asymptotic Approach to Free Beam Vibration Analysis // Journal of Aerospace Engineering. 2009. V 22. N 4. P. 456-459.
- [138] *Kostin G.V., Saurin V.V.* An integrodifferential approach and optimal control design for elastic beam motions // Proc. CAO2011: ECOMAS Thematic Conference on Computational Analysis and Optimization (June 9-11, 2011, Jyvaskyla, Finland) / [ed. S. Repin, T. Tiihonen, T. Tuovinen] Jyvaskyla: University of Jyvaskyla, 2011. P. 106–109.
- [139] *Kostin G.V., Saurin V.V.* An integrodifferential approach to reliable optimal control design for elastic beam motions // Proc. 7th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2011) (July 24-29, 2011, Rome, Italy) / [ed. D. Bernardini, G. Rega and F. Romeo] Rome: Sapienza University of Rome, 2011.
- [140] *Kostin G.V., Saurin V.V.* Design of optimal boundary control for elastic beam motions based on an integrodifferential approach // Proc. PHYSCON 2011, Leon, Spain, September 5-8, IPACS Electronic library, 2011
- [141] *Kostin G.V., Saurin V.V.* Variational approach to static and dynamic elasticity problems. In Recent Advances in Mechanics / [ed. A. N. Kounadis, E. E. Gdoutos]. Springer, 2011. P. 131-158.
- [142] *Kostin G.V., Saurin V.V.* Integrodifferential Relations in Linear Elasticity. De Gruyter Studies in Mathematical Physics 10. Berlin: De Gruyter, 2012.

- [143] *Kostin G.V., Saurin V.V., Aschemann H., Rauh A.* Modelling and optimization of control processes for compressible liquid flow in pipeline systems // Preprints MATHMOD 2012 Vienna - Full Paper Volume (the 7th Vienna Conference on Mathematical Modelling , Vienna, Austria, February 14-17)/ [ed. I. Troch, F. Breitenecker] Vienna: ARGESIM, Report no. S38, 2012.
- [144] *Kostin G.V., Steinbach M.C., Bock H.G., Longman R.W.* Modeling of Dynamics of Industrial Robots with Flexible Electric Drive // Proc.1st Int. Conf. on Control of Oscillation and Chaos, August 1997, St. Petersburg, Russia.
- [145] *Krabs W.* Optimal Control of Undamped Linear Vibrations. Lemgo: Heldermann, 1995.
- [146] *Kravchuk A.S., Neittaanmaki P.J.* Variational and Quasi-Variational Inequalities in Mechanics. Dordrecht: Springer, 2007.
- [147] *Krstic M., Smyshlyaev A.* Adaptive Control of Parabolic PDEs. Princeton University Press, 2010.
- [148] *Kwon K.C., Park S.H., Jiang B.N., Youn S.K.* The least-squares meshfree method for solving linear elastic problems // Comp. Mech. 2003. V. 30, P. 196–211.
- [149] *Lagnese J.E., Leugering G., Schmidt E.J.P.G.* Modeling, Analysis and Control of Dynamic Elastic Multi-Link Structures. Boston: Birkhäuser. 1984.
- [150] *Leineweber D., Bauer E.I., Bock H., Schloeder J.* An efficient multiple shooting based reduced SQP strategy for large dynamic process optimization. Part 1: Theoretical aspects // Comp. Chem. Eng. 2003. V. 27. P. 157–166.

- [151] *Leugering G.* A domain decomposition of optimal control problems for dynamic networks of elastic strings // *Comp. Optim. Appl.* 2000. V. 16. P. 5-29.
- [152] *LeVeque R.J.* Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems. Philadelphia: SIAM. 2007.
- [153] *Levinson M.* On Bickford's consistent higher order beam theory // *Mechanics Research Communications*. 1985. V. 12. P. 1-9.
- [154] *Lions J.L.* Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // *SIAM Rev.* 1988. V. 30. N. 1. P. 1-68.
- [155] *Love A.E.H.* A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: University Press, 1927.
- [156] *Meurer T., Kugi A.* Tracking control for boundary controlled parabolic PDEs with varying parameters: Combining backstepping and differential flatness // *Automatica*. 2009. V. 45, P. 1182-1194.
- [157] *Meurer T., Zeitz M.* A novel design of flatness-based feedback boundary control of nonlinear reaction-diffusion systems with distributed parameters. In: Kang, W., Xiao, M., Borges, C. (eds.) *New Trends in Nonlinear Dynamics and Control*, Vol. 295 of *Lecture Notes in Control and Information Science*. P. 221-236. Springer. 2003.
- [158] *Meyers M.A., Chawla K.K.* Mechanical Behavior of Materials. Cambridge: University Press, 2009.
- [159] *Morse P.M., Feshbach H.* Methods of Theoretical Physics. V. 1, 2. New York: Wiley, 1953.
- [160] *Pfeiffer F.* Combined Path and Force Control for Elastic Manipulators // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 1992. V. 6. N. 3.

- [161] *Rauh A., Auer E., Aschemann H.* Real-time application of interval methods for robust control of dynamical systems // Proc. IEEE Intl. Conference on Methods and Models in Automation and Robotics MMAR 2009. Miedzyzdroje. Poland (2009)
- [162] *Rauh A., Kostin G.V., Aschemann H., Saurin V.V. Naumov V.* Verification and experimental validation of flatness-based control for distributed heating systems // International Review of Mechanical Engineering. 2010. V. 4. N. 2. P. 188–200.
- [163] *Rauh A., Menn I., Aschemann H.* Robust control with state and disturbance estimation for distributed parameter systems // Proc. 15th Intl. Workshop on Dynamics and Control / [ed. J. Rodellar, E. Reithmeier] pp. 135–142. Barcelona: International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE). 2009.
- [164] *Rauh A., Minisini J., Hofer E.P.* Verification techniques for sensitivity analysis and design of controllers for nonlinear dynamical systems with uncertainties. Int. J. Appl. Math. Comp. Sci. AMCS. 2009. V. 19. N. 3, P. 425–439.
- [165] *Rauh A., Senkel L., Aschemann H., Kostin G.V., Saurin V.V.* Reliable finite-dimensional control procedures for distributed parameter systems with guaranteed approximation quality // Proc. IEEE Multi-Conference on Systems and Control, Dubrovnik, Croatia, 2012.
- [166] *Reddy J.N.* Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. Boca Raton: CRC Press, 2004.
- [167] *Reddy J.N.* An Introduction to the Finite Element Method. McGraw-Hill Education, 2005.
- [168] *Reissner E.* The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // J. Appl. Mech. 1945. V. 12. P. A69–A77.

- [169] *Saurin V.V., Kostin G.V.* An integrodifferential approach to optimal damping of elastic structure vibrations // Proc. 15th International Workshop on Dynamics and Control (May 31 - June 3, 2009, Tossa de Mar, Spain)/ [ed. J. Rodellar, E. Reithmeier] Barcelona: CIMNE, 2009. P. 143–150.
- [170] *Saurin V.V., Kostin G.V.* Variational approach to static and dynamic elasticity problems // Proc. P.S. Theocaris Symposium on Recent Advance in Mechanics (September 17-19, 2009, Athens, Greece)/ [ed. N.A. Koumadis, E.E. Gdoutos] Athens: Pericles S. Theocaris Foundation, 2009. P. 21–22.
- [171] *Saurin V.V., Kostin G.V.* A projective approach and adaptive control strategy for heat transfer problems // Proc. CAO2011: ECOMAS Thematic Conference on Computational Analysis and Optimization (June 9-11, 2011, Jyväskylä, Finland) / [ed. S. Repin, T. Tiihonen, T. Tuovinen] Jyväskylä: University of Jyväskylä, 2011. P. 102–105.
- [172] *Saurin V.V., Kostin G.V.* An adaptive control strategy for dynamical systems with distributed parameters // Proc. 7th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2011) (July 24-29, 2011, Rome, Italy)/ [ed. D. Bernardini, G. Rega and F. Romeo] Rome: Sapienza University of Rome, 2011.
- [173] *Saurin V.V., Kostin G.V.* A modified Galerkin approach to adaptive control design in heat transfer problems with parameter uncertainties // Proc. PHYSCON 2011, Leon, Spain, September 5-8, IPACS Electronic library, 2011
- [174] *Saurin V.V., Kostin G.V., Rauh A., Aschemann H.* Variational approach to adaptive control design for distributed heating systems under disturbances // Int. Review of Mechanical Engineering. 2011. V 5. N 2. P. 244-256.

- [175] *Saurin V.V., Kostin G.V., Rauh A., Aschemann H.* Adaptive control strategies in heat transfer problems with parameter uncertainties based on a projective approach. In "Modeling, Design, and Simulation of Systems with Uncertainties" / [ed. A. Rauh, E. Auer] Springer, 2011. P. 309–332.
- [176] *Saurin V.V., Kostin G.V., Rauh A., Senkel L., Aschemann H.* An integrodifferential approach to adaptive control design for heat transfer systems with uncertainties // Preprints MATHMOD 2012 Vienna - Full Paper Volume (7th Vienna Conference on Mathematical Modelling , Vienna, Austria, February 14-17) / [ed. I. Troch, F. Breiteneker] Vienna: ARGESIM, Report no. S38, 2012.
- [177] *Schwab C.* *p*- and *hp*- Finite Element Methods: Theory and Applications in Solid and Fluid Mechanics. Numerical Mathematics and Scientific Computation. New York: Oxford University Press, 1998.
- [178] *Shield R.* Variational principles for some nonstandard elastic problems // J. Applied Mechanics. 1987. V. 54. P. 768–771.
- [179] *Stein E.* (ed.) Error-Controlled Adaptive Finite Elements in Solid Mechanics. New York: John Wiley, 2002.
- [180] *Stein E., Borst R.D., Hughes T.* (eds.) Encyclopedia of Computational Mechanics. Fundamentals. V. 1. Chichester: Wiley, 2004.
- [181] *Steinbach M.C., Bock H.G., Kostin G.V., Longman R.W.* Mathematical Optimization in Robotics: Towards Automated High-Speed Motion Planning // Surveys on Mathematics for Industry. 1998. V. 7. N. 4. P. 303–340.
- [182] *Strang G., Fix J.* An Analysis of the Finite Element Method. Englewood: Prentice-Hall, 1973.

- [183] *Strouboulis T., Babuska I., Gangaraj S.K., Copps K., Datta D.K.* A posteriori estimation of the error in the error estimate // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1999. V. 176. P. 387–418.
- [184] *Tabarrok B., Rimrott F.P.J.* Variational Methods and Complementary Formulations in Dynamics. Springer, 1994.
- [185] *Tao G.* Adaptive Control Design and Analysis. New Jersey: Wiley & Sons Inc., Hoboken, 2003.
- [186] *Tröltzsch F.* Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen: Theorie, Verfahren und Anwendungen. Teubner: 2. Auflage. 2010 (In German).
- [187] *Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C., Topp L.J.* Stiffness and deflection analysis of complex structures // J. Aeronautical Sciences. 1956. V. 23. P. 805–824.
- [188] *Winkler F.J., Lohmann B.* Flatness-based control of a continuous furnace // Proc. 3rd IEEE Multi-conference on Systems and Control (MSC), Saint Petersburg, Russia, P. 719–724. 2009.
- [189] *Zienkiewicz O.C.* The Finite Element in Engineering Science. London: McGraw-Hill, 1971.
- [190] *Zuyev A., Sawodny O.* Stabilization and observability of a rotating Timoshenko beam model // Math. Probl. Eng. 2007. V. 2007. Article ID 31267.