

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ
ИМ. А. Ю. ИШЛИНСКОГО РАН

На правах рукописи
УДК 531.36; 62-50

Анохин Николай Владимирович

**УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ МЕХАНИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ
С ДЕФИЦИТОМ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ
В ОКРЕСТНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ**

специальность 01.02.01 —
теоретическая механика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
проф., д.ф.-м.н.
Ананьевский И.М.

Москва – 2014

Содержание

Введение	3
1 Задача управления для линейной системы	11
1.1 Постановка задачи управления для линейной системы	11
1.2 Приведение системы со скалярным управлением к форме Бруновского	12
1.3 Приведение системы с многомерным управлением к форме Бруновского	14
2 Решение задачи управления	18
2.1 Синтез управления	18
2.2 Обоснование закона управления	20
2.3 Применение закона управления к нелинейной системе	23
2.4 Закон управления в случае $m > 1$	24
2.5 Полная процедура построения управления	29
2.6 Иллюстративный пример	30
3 Управление плоским многозвенным маятником	33
3.1 Постановка задачи	33
3.2 Уравнения движения	34
3.3 Управляемость линейной модели маятника	37
3.4 Управление многозвенным маятником в окрестности произвольного положения равновесия	39
3.5 Управляемость трехзвенного маятника	43
3.6 Численное моделирование	44
4 Управление многозвенным маятником с двухстепенными шарнирами	49
4.1 Управляемость линейной модели	49
4.2 Уточнение условия на β	52
4.3 Результаты компьютерного моделирования	54
Заключение	56
Литература	64

Введение

Диссертация посвящена построению алгоритмов управления для механических систем с дефицитом управляющих воздействий.

Рассматриваются системы, динамика которых описывается уравнениями Лагранжа второго рода и у которых число степеней свободы превосходит размерность вектора управляющих обобщенных сил. Исследование такого рода систем имеет большое значение для приложений, так как на практике часто требуется уменьшить количество двигательных элементов, осуществляющих управление. Например, в космонавтике оборудование каждого звена робота-манипулятора электродвигателем влечет за собой увеличение веса и стоимости космического аппарата и уменьшение массы полезной нагрузки. Более того, если алгоритмы управления такого робота основаны на обязательном использовании всех двигателей, то выход из строя одного из них означает выход из строя всего робота. Этого можно избежать, разработав законы управления манипулятором, эффективные при одном или нескольких неработающих двигателях, то есть решив соответствующие задачи управления с дефицитом управляющих воздействий.

В данной работе изучаются задачи управления механическими системами в окрестности положения равновесия, причем это положение равновесия, как правило, неустойчиво. Особенность задач управления неустойчивыми системами состоит в том, что желаемый режим функционирования невозможно организовать в отсутствие управления. Необходимость управления неустойчивым динамическими системами часто возникает при решении прикладных задач. Примерами таких задач являются конструирование шагающего механизма, звенья которого представляют из себя неустойчивые перевернутые маятники, или моделирование транспортного средства типа Segway, составляющего вместе с пассажиром неустойчивый маятник, закрепленный шарнирно на движущейся платформе.

Большинство исследований в области управления движением механических систем с дефицитом управляющих воздействий в окрестности положения равновесия посвящено задачам стабилизации системы около этого положения равновесия. В этом случае строятся алгоритмы, которые обеспечивают лишь асимптотическую устойчивость состояния покоя, то есть приводят систему в это состояние за бесконечное время. Нередко при этом на управления не накладывается никаких ограничений. Поскольку в реальных системах ресурсы управления, как правило, ограничены, то важную роль приобретают методы решения задач, в которых ограничения на управление присутствуют.

В отличие от упомянутых выше исследований в настоящей работе рассматривается вопрос о точном приведении механической системы в заданное состояние равновесия за конечное время, причем рассматриваются задачи с ограничениями на управление. Зачастую ограниченным управлением система может быть приведена в желаемое положение не из любого начального состояния. В этом случае возникает понятие области управляемости – множества точек фазового пространства, из которого систему можно привести в терминальное положение при заданных ограничениях на управление. В данной работе вопросу об области управляемости внимание не уделяется, так как изучаются задачи локального синтеза, то есть ищутся ограниченные управления в форме обратной связи, обеспечивающие приведение системы в из некоторой окрестности положения равновесия в это положение равновесия за конечное время.

В диссертации на примере задачи синтеза управления нелинейным многозвенным перевернутым маятником развивается подход к построению ограниченного управления в форме обратной связи для нелинейных механических систем с дефицитом управляющих воздействий. Исследование динамики управляемых движений многозвенного маятника привлекает внимание многих специалистов по механике и теории управления. Это внимание обусловлено в первую очередь тем, что многозвенный маятник представляет собой классический пример механической системы с дефицитом управляющих воздействий. В том случае, если не во всех шарнирных соединениях маятника приложены управляющие моменты, число степеней свободы системы превосходит размерность вектора управляющих воздействий, то есть возникает дефицит управлений. Это обстоятельство существенно затрудняет решение задач управления многозвенным маятником,

динамика которого и без того сложна ввиду нелинейности уравнений движения и взаимного влияния звеньев друг на друга.

Исследованию динамики многозвенных маятников посвящено множество работ. В [31, 72, 73, 82, 83, 85] изучалось движение двухзвенного маятника с управляющим моментом в межзвенном шарнире. В [44, 61, 71, 86] двухзвенный маятник приводится в верхнее положение равновесия при помощи момента, приложенного к шарниру в точке подвеса. В настоящей работе развиваемый подход применен для решения задачи управления маятником с произвольным количеством звеньев.

В общем виде решаемая задача управления формулируется следующим образом. Пусть динамика системы описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = F(x, u), \quad u \in U, \quad (1)$$

где x – n -мерный вектор обобщенных координат, u – m -мерный вектор управления, а U – подмножество пространства R^m , и пусть точка 0 является положением равновесия, то есть $F(0, 0) = 0$. Требуется найти управление в форме обратной связи $u(x)$, которое приводит систему (1) из некоторой окрестности нуля в нуль за конечное (нефиксированное) время.

Общая теория решения задач управления динамическими системами развита в работах Р. Беллмана [14, 15], Н.Н. Красовского [30], Л.С. Понтрягина [42]. Значительный вклад в теорию управления механическими системами внесли А. Брайсон [17], Р. В. Гамкрелидзе [19], Дж. Лейтман [80], Ф.Л. Черноусько [59–61]. Решению задач управления движением механических систем посвящены работы Л. Д. Акуленко [3], Н. Н. Болотника [16], А. С. Ковалевой [28], А. А. Первозванского [37], Е. С. Пятницкого [38, 39], В. И. Уткина [53], А. М. Формальского [55, 56], Х. Нимейера [81], А. ван дер Схафта [87], А. Шефера [84].

Задачи управления и стабилизации механических систем с дефицитом управляющих воздействий рассматривались в работах Л.Д. Акуленко [2, 4], И.М. Аняньевского [5–9], М.С. Габриэляна [18], Ю.Ф. Голубева [21], О.Р. Каюмова [26], Ю.Г. Мартыненко [33–35], Д.Е. Охоцимского [36], С.А. Решмина [44, 45, 47], А.М. Формальского [57, 58], И. Фантони [76], К. Фурута [77], А. Исидори [78], С. Лэм [79].

В классической теории автоматического регулирования управление является линейной функцией от текущего состояния системы [43, 54] и убывает при приближении траектории системы к терминальному состоянию. Такой подход не использует ресурсы управления в полной мере и обеспечивает лишь асимптотическое приведение системы в терминальное состояние за бесконечное время. В настоящей работе предлагается подход к решению сформулированной выше задачи, основанный на методах теории устойчивости движения, при котором управление зависит от фазовых координат нелинейно. Получающийся закон управления может трактоваться как линейная обратная связь, коэффициенты усиления которой зависят от фазовых переменных. Коэффициенты возрастают и стремятся к бесконечности по мере того, как траектория системы приближается к терминальному состоянию, однако управление остается ограниченным и удовлетворяет наложенным ограничениям. За счет этого удастся добиться конечного времени движения. При этом управляющая функция получается гладкой всюду, кроме терминальной точки. Важно подчеркнуть, что в каждый момент времени фазовые координаты системы предполагаются доступными измерению, то есть известными. Заметим также, что для линейной системы в отсутствие ограничений на управление предложенный синтез управления является глобально эффективным.

Перейдем к более подробному изложению диссертации по главам. Диссертация состоит из четырех глав.

В главе 1 дается постановка основной задачи управления. Существенное условие, накладываемое на рассматриваемую систему – это условие полной управляемости ее линейной части. Для линейной системы

$$\dot{x} = Cx + Du, \quad x \in R^n,$$

это условие состоит в том, что ранг матрицы управляемости

$$(D \mid CD \mid \dots \mid C^{n-1}D)$$

равен размерности системы n [24, 25].

Помимо формулировки основной задачи в первой главе дается описание некоторых используемых в дальнейшем конструкций. Изложен алгоритм приведения

линейной системы к каноническому виду Бруновского [74]. Этот алгоритм представлен как для случая скалярного управления, так и для векторного. Для системы в канонической форме Бруновского формулируется вспомогательная задача управления.

Сформулированная задача синтеза управления изучалась, в частности, в [29]. В диссертации предложен иной подход к ее решению, который отличается простотой как в построении закона управления, так и в его обосновании.

В главе 2 описана процедура построения управления для вспомогательной задачи управления системой в каноническом виде Бруновского. Предлагаемый подход основан на втором методе Ляпунова, в частности, использует конструкцию квадратичной функции Ляпунова, общей для двух устойчивых линейных систем дифференциальных уравнений. Такая конструкция лежит в русле теории линейных матричных неравенств, активно развиваемой в последние годы и нашедшей широкое применение в современной теории управления [13, 40, 41].

Показано, что управление, построенное для вспомогательной задачи управления, то есть для линейной системы в канонической форме, в окрестности терминального состояния остается эффективным и для нелинейной системы, другими словами, является решением сформулированной выше основной задачи управления.

В качестве иллюстрации предложенный алгоритм построения управления применен к простой управляемой системе вида

$$\ddot{x} = u, \quad x \in R.$$

Представлены некоторые результаты численного моделирования динамики такой системы.

В главах 3 и 4 решены задачи локального синтеза управления нелинейными многозвенными маятниками. Рассматриваются n -звенные маятники двух типов: плоский и с двухстепенными шарнирами. Каждый из этих маятников имеет 2^n различных положений равновесия, в которых какие-то звенья ориентированы вверх, а какие-то – вниз. Среди всех положений равновесия лишь одно – нижнее – является устойчивым, остальные же – неустойчивы. Предполагается, что маятник управляется моментом, приложенным к первому звену.

В главе 3 разрабатываемый подход применяется к задаче локального приведения n -звенного плоского маятника в произвольное неустойчивое положение равновесия. Показана полная управляемость линеаризованной в окрестности произвольного положения равновесия модели маятника, управляемого моментом, приложенным к первому звену. Затем строится ограниченное по модулю управление в форме обратной связи, приводящее маятник из окрестности положения равновесия в это положение равновесия за конечное время. Эффективность полученного закона управления продемонстрирована с помощью компьютерного моделирования динамики трехзвенного маятника.

В главе 4 решается аналогичная задача управления для маятника с двухстепенными шарнирами. В отличие от плоского маятника, управляемого скалярным моментом, управление маятником с двухстепенными шарнирами представляет собой двумерный вектор. Это обстоятельство требует применения модифицированного построения управления, изложенного в главе 2.

Приведем основные результаты, представленные в диссертации.

- Предложен подход, который позволяет для линейных вполне управляемых динамических систем строить управления в форме обратной связи, приводящие систему в начало координат за конечное время. Если на управление наложены ограничения, то указаны области, в которых управление удовлетворяет ограничениям.

- Показано, что предложенный подход применим для решения задачи синтеза ограниченного управления в окрестности состояния покоя для гладких нелинейных динамических систем (в том числе, механических) с целью приведения системы в это состояние покоя за конечное время. На примере нелинейного многозвенного маятника показана эффективность данного подхода для решения задач синтеза ограниченных управлений нелинейными механическими системами с дефицитом управляющих воздействий.

- Решены задачи локального синтеза управления нелинейными многозвенными маятниками в окрестности произвольного неустойчивого положения равновесия с помощью одного момента, приложенного к первому или последнему звену. Для многозвенного плоского маятника, а также для многозвенного маятника с двухстепенными шарнирами установлена полная управляемость их уравнений, линеаризованных в окрестности любого положения равновесия. В окрестности

любых положений равновесия нелинейных маятников построены ограниченные управления в форме обратной связи, приводящие маятник в положение равновесия за конечное время.

**Основные результаты, представленные в диссертации,
опубликованы в следующих работах.**

Статьи

И.М. Ананьевский, Н.В. Анохин, А.И. Овсеевич. Синтез ограниченного управления линейными динамическими системами с помощью общей функции Ляпунова. Доклады академии наук. 2010, т. 434, №3. с. 319-323.

Н.В. Анохин. Приведение многозвенного маятника в положение равновесия с помощью одного управляющего момента // Известия РАН. Теория и системы управления. №5, С. 44 - 53.

I.M. Ananievski, N.V. Anokhin, A.I. Ovseevich. Design of Bounded Feedback Controls for Linear Dynamical Systems by Using Common Lyapunov Functions. Chinese Journal of Theoretical & Applied Mechanics Letters. V. 1, 013001-1-013001-3 (2011).

И.М. Ананьевский, Н.В. Анохин, А.И. Овсеевич. Общая функция Ляпунова в задаче синтеза управления линейными динамическими системами. Сборник научных статей, посвященный 80-летию академика В.М. Матросова. 2013. с. 92-104.

Конференции

Ananyevskiy, N. Anokhin. Control of a multi-link inverted pendulum by a single torque. Preprints MATHMOD 2012 Vienna - Full Paper Volume (the 7th Vienna Conference on Mathematical Modelling , Vienna, Austria, February 14-17) [ed. by D. Bernardini, G. Rega and F. Romeo] Vienna: ARGESIM, Report no. 444, 2012.

И.М. Ананьевский, Н.В.Анохин. Управление многозвенным маятником в окрестности положения равновесия. 5-я Мультиконференция по проблемам управления. 9-11 октября 2012 г. Санкт-Петербург. Материалы конференции "Управление в технических системах"(УТС-2012). Санкт-Петербург, 2012. с. 45-48.

И.М. Ананьевский, Н.В. Анохин, А.И. Овсеевич. Управление по обратной связи для линейных динамических систем на основе общей функции Ляпунова. Тезисы докладов XI Международной конференции "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления Москва, 1-4 июня 2010 г. с. 19-20.

И.М. Ананьевский, Н.В.Анохин. Управление перевернутым многозвенным маятником с помощью одного момента. XII Международная конференция "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления 5 - 8 июня 2012 г. Тезисы докладов. с. 19-20.

И.М. Ананьевский, Н.В. Анохин. Управление многозвенным маятником в окрестности положения равновесия с помощью одного момента. Международная конференция по математической теории управления и механике. Суздаль, 5-9 июля 2013. Тезисы докладов.

Глава 1

Задача управления для линейной системы

В первой главе формулируется основная задача управления, а также дается описание необходимого для дальнейшего изложения алгоритма приведения линейной системы к каноническому виду Бруновского. Алгоритм представлен как для случая скалярного управления, так и для векторного. Для системы в канонической форме Бруновского формулируется вспомогательная задача управления.

1.1 Постановка задачи управления для линейной системы

Полагая правую часть системы (1) достаточно гладкой и применяя процедуру линеаризации в окрестности 0 по x и u , перепишем эту систему в эквивалентном виде

$$\dot{x} = Cx + Du + f(x, u), \quad |f(x, u)| < c(|x|^2 + |u|^2), \quad x \in R^n, \quad u \in U \subset R^m. \quad (1.1)$$

Сформулируем новую задачу управления для линейной системы.

З а д а ч а 1. Пусть линейная система

$$\dot{x} = Cx + Du \quad (1.2)$$

удовлетворяет условию полной управляемости Калмана. Требуется построить такое ограниченное управление $u = u(x)$, что для любых достаточно малых $x_0 \in R^n$ решение системы (1.2) с начальным состоянием $x(0) = x_0$ попадает в точку 0 за конечное время.

Для решения задачи управления системой 1.1 сначала построим управление, решающее аналогичную задачу 1 для линейной системы. Затем покажем, что

полученное управление эффективно и для нелинейной системы (1.1) (и, следовательно, для системы (1)).

В излагаемом в данной работе подходе сформулированная задача синтеза решается не непосредственно для линейной системы общего вида (1.2), а для системы в канонической форме Бруновского

$$z^{(n)} = v, \quad z, v \in R.$$

Так как речь идет о задачах локального синтеза управления, то как нетрудно видеть, эти задачи эквивалентны. В 1.2 описана процедура, с помощью которой можно привести вполне управляемую систему вида (1.2) со скалярным управлением, то есть при $m = 1$, к совокупности независимых систем в форме Бруновского. В 1.3 дана аналогичная процедура приведения систем с многомерным управлением, то есть при $m > 1$, к совокупности m независимых систем в форме Бруновского.

Несмотря на то, что линейная система с многомерным управлением сводится к совокупности независимых подсистем вида $z^{(n)} = v$, $z \in R$, как будет видно в дальнейшем, алгоритм построения управления в случае многомерного управления имеет свою особенность.

1.2 Приведение системы со скалярным управлением к форме Бруновского

Пусть $m = 1$. Тогда $D \in R^n$ – вектор размерности n . Следуя [74], опишем алгоритм приведения системы (1.2) к канонической форме Бруновского с помощью линейной замены координат и добавления линейной обратной связи. Введем для этого вспомогательную матрицу размерности $n \times n$

$$F = \left(D, CD, \dots, C^{n-1}D \right).$$

Так как по предположению система (1.2) вполне управляема, матрица F обратима. Пусть $f \in R^n$ – вектор, составленный из элементов последней строки матрицы F^{-1} . Тогда из определения обратной матрицы следует, что выполнены

условия

$$(f, D) = 0, (f, CD) = 0, \dots, (f, C^{n-2}D) = 0, (f, C^{n-1}D) = 1. \quad (1.3)$$

Здесь и далее (\cdot, \cdot) означает скалярное произведение.

Преобразуем координаты $x \mapsto z$ с помощью матрицы перехода S , определяемой соотношениями

$$z = \begin{pmatrix} f^\top \\ f^\top C \\ f^\top C^2 \\ \dots \\ f^\top C^{n-1} \end{pmatrix} x = Sx. \quad (1.4)$$

Нетрудно показать, что матрица S также обратима.

Система (1.2) примет вид

$$\dot{z} = SCS^{-1}z + SDu$$

где

$$SCS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ & & f^\top C^n S^{-1} & & \end{pmatrix}, \quad SD = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Введем новое управление v добавлением обратной связи к u

$$v = f^\top C^n S^{-1}z + u. \quad (1.5)$$

Таким образом, применяя преобразования (1.4) и (1.5) к системе (1.2), получаем каноническую систему Бруновского, представленную в векторном виде

$$\dot{z} = Az + Bv,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Если управление v ограничено в некоторой окрестности нуля, то новое управление u , очевидно, тоже. Действительно, в окрестности $V = \{x : |x| \leq X\}$ справедливы неравенства

$$|v| \leq |f^\top C^n S^{-1} z| + |u| \leq |f^\top C^n| X + \bar{U}.$$

Поэтому переход к новым переменным и добавление линейной обратной связи изменяет лишь верхнюю границу в ограничениях на управление, сводя исходную задачу локального синтеза для системы (1.2) к аналогичной задаче для системы в форме Бруновского.

1.3 Приведение системы с многомерным управлением к форме Бруновского

Рассмотрим теперь систему (1.2) в предположении, что $m > 1$ и ранг матрицы D равен m (что, очевидно, не ограничивает общности). Обозначим d_1, \dots, d_m столбцы матрицы D .

Построим матрицу F размера $n \times n$, состоящую из столбцов

$$(d_1, C d_1, \dots, C^{s_1-1} d_1, d_2, C d_2, \dots, C^{s_2-1} d_2, \dots, d_m, C d_m, \dots, C^{s_m-1} d_m),$$

так, что ранг матрицы F равен n . При построении существенно, чтобы для каждого d_k , матрица F включала в себя все столбцы $d_k, \dots, C^{s_k-1} d_k$ подряд, т. е., чтобы каждый из этих столбцов был линейно независим от остальных столбцов F . Этого можно добиться, рассматривая последовательно по одному столбцу из последовательности

$$(d_1, d_2, \dots, d_m, C d_1, C d_2, \dots, C d_m, \dots, C^{n-1} d_1, C^{n-1} d_2, \dots, C^{n-1} d_m).$$

Каждый новый столбец $C^j d_k$, $j = 0, \dots, n-1$ включается в F , если он линейно независим от рассмотренных до него столбцов. Иначе столбцы $C^j d_k, C^{j+1} d_k, \dots, C^{n-1} d_k$ исключаются из рассмотрения. Построенная матрица F имеет ранг n , следовательно, она обратима.

Пусть $f_k, k \in 1, \dots, m$ – строка матрицы F^{-1} с номером $\sum_{j=1}^k s_j$. Тогда

$$\begin{cases} f_k C^{i-1} d_j = 0, \text{ если } j \neq k \text{ или } i \neq s_k \\ f_k C^{s_k-1} d_k = 1, \text{ иначе.} \end{cases} \quad (1.6)$$

Используя векторы f_k , построим матрицу перехода S к новым координатам z

$$z = Sx = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1 C \\ \dots \\ f_1 C^{s_1-1} \\ f_2 \\ f_2 C \\ \dots \\ f_2 C^{s_2-1} \\ \vdots \\ f_m \\ f_m C \\ \dots \\ f_m C^{s_m-1} \end{pmatrix} x.$$

Используя эту замену, запишем систему (1.2) в новых координатах z

$$\dot{z} = SCS^{-1}z + SDu.$$

Матрица SCS^{-1} является квадратной матрицей $n \times n$, состоящей из $m \times m$ блоков C'_{ij} с размерами $s_i \times s_j$, имеющих вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ & & \gamma_j^j & & \end{pmatrix}, \text{ если } i = j$$

и

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \gamma_j^i & & \end{pmatrix}, \text{ если } i \neq j,$$

где вектор γ_j размерности n равен

$$\gamma_j = (\gamma_j^1, \dots, \gamma_j^m) = f_j C^{s_j} S^{-1}.$$

Матрица SD имеет размер $n \times m$ и состоит из m блоков размерами $s_j \times m$, где j -й блок имеет вид

$$\begin{pmatrix} f_j \\ f_j C \\ \dots \\ f_j C^{s_j-1} \end{pmatrix} (d_j \dots d_m).$$

Будем вычислять элементы этой матрицы построчно слева направо. Рассмотрим элемент $f_j C^{i-1} d_k$, такой что $i < s_j$, то есть не стоящий в последней строке. Если $C^{i-1} d_k$ входит в матрицу F , то согласно соотношениям (1.6) $f_j C^{i-1} d_k = 0$. Если $C^{i-1} d_k$ не входит в матрицу F , то по построению, этот вектор линейно зависим от предыдущих рассмотренных векторов, то есть является их линейной комбинацией – следовательно $f_j C^{i-1} d_k = 0$. Таким образом все элементы блока не из последней строки нулевые. Нижняя строка имеет вид $f_j C^{s_j-1} D$.

Перейдем к новым управлениям, добавляя к исходному вектору управлений обратную связь

$$v_k = f_j C^{s_j-1} D u + f_j C^{s_j} S^{-1} z.$$

В результате этого перехода исходная система распадается на m независимых подсистем размерности s_1, \dots, s_m вида

$$\dot{z}_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} z_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_k.$$

Таким образом, используя процедуры, описанные в 1.2 и 1.3, можно привести любую вполне управляемую систему вида (1.2) к одной или нескольким независимым системам в канонической форме Бруновского. Следовательно, и исходная задача управления сводится к аналогичной задаче управления для систем в форме Бруновского.

Глава 2

Решение задачи управления

В данной главе излагаются алгоритмы построения решения для задачи управления системой, линейная часть которой представлена в канонической форме Бруновского.

2.1 Синтез управления

Рассмотрим сначала случай, когда управление в системе (1.2) скалярное и система приводится к единственной системе в канонической форме Бруновского вида (2.2). Сформулируем задачу локального синтеза ограниченного управления для этого случая и опишем закон управления, задающий ее решение.

Задача 2. Для системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in R^n, \quad u \in R, \quad (2.1)$$

в которой

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

построить такое управление $u = u(x)$, удовлетворяющее ограничению

$$|u| \leq 1, \quad (2.3)$$

чтобы любое решение достигало точки 0 за конечное время.

Введем в рассмотрение скалярную функцию $T(x) > 0$, которая будет определена ниже, и диагональные матрицы

$$\delta(T) = \begin{pmatrix} T^{-n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T^{-n+1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & T^{-1} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -n+1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Матрица $\delta(T)$, очевидно, обладает свойствами:

$$\delta A \delta^{-1} = T^{-1} A, \quad \delta B = T^{-1} B, \quad \frac{d}{dT} \delta = T^{-1} M \delta. \quad (2.5)$$

Сделаем замену переменных

$$y = \delta(T)x \quad (2.6)$$

и, используя соотношения (2.5), перепишем уравнение (2.1) в виде

$$\dot{y} = T^{-1} (Ay + Bu + M\dot{T}y) \quad (2.7)$$

Выберем вектор $a \in R^n$, $a^\top = (a_1, \dots, a_n)$, так, чтобы матрица

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

была устойчива. Элементы $-a_i$, $i = 1, \dots, n$, вектора $-a$ представляют собой коэффициенты характеристического полинома матрицы \hat{A} , поэтому в качестве $-a_i$ достаточно взять коэффициенты любого гурвицева полинома.

Зададим управляющую функцию $u(x)$ соотношением

$$u = (a, \delta(T)x) = (a, y) \quad (2.9)$$

(напомним, что (\cdot, \cdot) означает скалярное произведение).

Уравнение (2.7) примет вид

$$\dot{y} = T^{-1} \left(\hat{A}y + M\dot{T}y \right). \quad (2.10)$$

По теореме Ляпунова существуют такие симметрические положительно определенные матрицы Q и P , что

$$Q\hat{A} + \hat{A}^*Q = -P. \quad (2.11)$$

Зададим функцию $T(x)$ неявно соотношением

$$T^{-2\beta}(Q\delta(T)x, \delta(T)x) = 1, \quad x \neq 0, \quad \beta > 0. \quad (2.12)$$

В следующем разделе будет показано, что функция $T(x)$ определена корректно, то есть уравнение (2.12) относительно T имеет единственное положительное решение для любого $x \in R^n$, $x \neq 0$. Решая в каждой точке фазового пространства это уравнение и подставляя значение функции $T(x)$ в выражение для управления (2.9), получаем искомый синтез, который, как будет показано ниже, решает поставленную задачу управления.

2.2 Обоснование закона управления

Покажем, что управление, построенное с помощью предлагаемого метода, приводит систему (2.1) в начало координат за конечное время. Положим

$$S(\beta) = Q(\beta I - M) + (\beta I - M)Q,$$

где I – единичная матрица.

Убедимся, что положительная константа β может быть выбрана так, чтобы симметрическая матрица $S(\beta)$ будет положительно определена. Представим для этого матрицу $S(\beta)$ в виде

$$S(\beta) = \beta [Q(I - M/\beta) + (I - M/\beta)Q].$$

При $\beta \rightarrow \infty$ матрица $I - M/\beta$ стремится к единичной, следовательно, учитывая положительную определенность Q , $S(\beta)$ стремится к положительно определен-

ной матрице $2\beta Q$. Таким образом, существует такое $\beta > 0$, что матрица $S(\beta)$ положительно определена.

Из положительной определенности матрицы $S(\beta)$ и из (2.11) вытекает, что матрица Q задает “общую” функцию Ляпунова $V(x) = (Qx, x)$ для двух систем линейных дифференциальных уравнений с устойчивыми матрицами \hat{A} и $M - \beta I$. Другими словами, матрица Q является решением системы двух линейных матричных неравенств

$$\begin{aligned} Q\hat{A} + \hat{A}^*Q &< 0, \\ Q(M - \beta I) + (M - \beta I)Q &< 0. \end{aligned}$$

Из определения матрицы $\delta(T)$ вытекает, что при фиксированном x правая часть выражения (2.12) – функция

$$\Phi(T) = T^{-2\beta}(Q\delta(T)x, \delta(T)x)$$

– обладает свойствами

$$\lim_{T \rightarrow 0} \Phi(T) = \infty, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \Phi(T) = 0, \quad (2.13)$$

а ее производная равна

$$\frac{d}{dT}\Phi(T) = -T^{-2\beta-1}(S(\beta)\delta x, \delta x).$$

Следовательно, при достаточно больших β производная функции $\Phi(T)$ отрицательна, а уравнение (2.12) относительно T имеет единственное положительное решение для любого $x \in R^n$, $x \neq 0$.

Отметим, что функция $T(x) > 0$ гладкая (а при целых значениях числа β и аналитическая) в R^n , $x \neq 0$. Из определения (2.4) матрицы $\delta(T)$ и уравнения (2.12) вытекает, что функцию $T(x)$ можно доопределить в нуле $T(0) = 0$ с сохранением непрерывности, так как

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} T(x) = 0.$$

В наших построениях функция $T(x)$ выступает в роли функции Ляпунова.

Найдем производную \dot{T} в силу системы (2.10). Продифференцировав для этого (2.12), получим

$$2\beta T^{-2\beta-1} \dot{T}(Qy, y) = T^{-2\beta-1} \left[\left(Q(\hat{A}y + M\dot{T}y), y \right) + \left(Qy, \hat{A}y + M\dot{T}y \right) \right]$$

или

$$-\dot{T} \left((Q(M - \beta I) + (M - \beta I)Q)y, y \right) = \left((Q\hat{A} + \hat{A}^*Q)y, y \right).$$

Откуда вытекает

$$\dot{T} = -\frac{(Py, y)}{(S(\beta)y, y)}. \quad (2.14)$$

Для матриц P и $S(\beta)$ выполнены соотношения

$$p_-|y|^2 \leq (Py, y) \leq p_+|y|^2, \quad s_-|y|^2 \leq (Sy, y) \leq s_+|y|^2,$$

где p_- , p_+ и s_- , s_+ – наименьшие и наибольшие собственные числа матриц P и S соответственно. Используя эти соотношения и (2.14), имеем

$$\dot{T} \leq -\frac{p_-}{s_+} < 0.$$

Учитывая, что функция T положительна, а ее производная по времени отрицательна и отделена от нуля на траекториях системы (2.10) (а следовательно, и на траекториях системы (2.1), управляемой с помощью функции (2.9)), получаем, что T обращается в нуль через конечный промежуток времени. Следовательно, так как терминальное положение соответствует нулю функции T , траектория системы (2.1) также приходит в нуль за конечное время.

Нетрудно показать, что ограничения на управление (2.3) выполнены в окрестности нуля

$$U = \{x \in R^n : T^{2\beta}(x) \leq q|a|^{-2}\},$$

где $q > 0$ – минимальное собственное число матрицы Q .

Таким образом, сформулированная выше задача управления для линейной системы (2.1) решена.

2.3 Применение закона управления к нелинейной системе

Применим построенное в (2.1) управление к исходной нелинейной системе, представленной в виде

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(x, u), \quad |f(x, u)| < c(|x|^2 + |u|^2). \quad (2.15)$$

Без ограничения общности предполагается, что линейная часть системы (2.15) имеет форму Бруновского.

Подставив управление (2.9) в уравнение (2.15), получим

$$\dot{y} = T^{-1} \left(\hat{A}y + M\dot{T}y + T\delta f(\delta^{-1}y, (a, y)) \right). \quad (2.16)$$

Здесь $x = \delta^{-1}y$ и $u = (a, y)$ – аргументы вектор-функции $f(x, u)$.

Продифференцировав уравнение (2.12) по времени в силу системы (2.16), получим, аналогично (2.14), следующую оценку для производной функции T :

$$\dot{T} = -\frac{(Py, y) + 2T(Qy, \delta f)}{(S(\beta)y, y)}. \quad (2.17)$$

Оценим слагаемое $T(Qy, \delta f)$ в числителе этой дроби. В силу (2.12) имеем

$$(Qy, y) = T^{2\beta}$$

т.е. при малых T справедливо $T^\beta \sim y$. Следовательно,

$$|T(Qy, \delta f(\delta^{-1}y, (a, y)))| \leq \gamma T T^\beta T^{-n} (|\delta^{-1}y|^2 + |(a, y)|^2) \leq \gamma_1 T^{\beta+1-n} |y|^2$$

и неравенство $\dot{T} \leq \sigma < 0$ выполнено при условии

$$\beta > n - 1. \quad (2.18)$$

Таким образом, производная \dot{T} отрицательна и отделена от нуля. Отсюда вытекает, что траектории системы (2.16) приходят в терминальное положение за конечное время. Следовательно, система (2.15), управляемая по закону (2.9), приводится в терминальное положение за конечное время.

2.4 Закон управления в случае $m > 1$

Пусть размерность m вектора управления в основной задаче больше единицы. В этом случае, как было показано ранее, линеаризованная система (1.2) приводится к набору независимых подсистем вида (2.2). Для каждой из этих подсистем в отдельности управление может быть построено согласно изложенному выше алгоритму. При таком способе управления каждая из подсистем придет в нулевое положение равновесия, однако времена движения окажутся, вообще говоря, различными. Хотя задача 1 для линеаризованной системы будет полностью решена, такой подход не гарантирует, что построенные управления будут эффективны для исходной нелинейной системы. В этом разделе предлагается модификация изложенного метода управления для случая $m > 1$. Как будет показано ниже, предлагаемая модификация управления оказывается эффективной и для решения задачи управления исходной нелинейной системой (1.1).

В случае $m > 1$ исходная система (1.1) представима в виде совокупности подсистем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 + f_1(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_m), & x_1 \in R^{n_1}, \\ \dots & \\ \dot{x}_m = A_m x_m + B_m u_m + f_m(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_m), & x_m \in R^{n_m}, \end{cases} \quad (2.19)$$

где $n = \sum_{i=1}^m n_i$, а матрицы A_i, B_i имеют вид (2.2) и размерности $n_i \times n_i$ и $n_i \times 1$ соответственно. При этом остаточные члены линеаризации f_i в (1.1) удовлетворяют соотношениям

$$|f_i(x)| < C(|x|^2 + |u|^2), \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.20)$$

Здесь $u = (u_1, \dots, u_m) \in R^m$, а вектор $x \in R^n$ размерности n составлен из векторов x_1, \dots, x_m .

Наряду с системой (2.19) будем рассматривать ее линейную часть

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1, \\ \dots & \\ \dot{x}_m = A_m x_m + B_m u_m. \end{cases} \quad (2.21)$$

Введем в рассмотрение скалярную функцию $T(x) > 0$, которая будет определена ниже, и для произвольного натурального числа k зададим диагональные матрицы

$$\delta_k(T) = \begin{pmatrix} T^{-k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T^{-k+1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & T^{-1} \end{pmatrix}, \quad M_k = \begin{pmatrix} -k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -k+1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $\delta_{n_i}(T)$ обладают свойствами:

$$\delta_{n_i} A_i \delta_{n_i}^{-1} = T^{-1} A_i, \quad \delta_{n_i} B_{n_i} = T^{-1} b_{n_i}, \quad \frac{d}{dT} \delta = T^{-1} M_{n_i} \delta_{n_i}. \quad (2.22)$$

Размерности квадратных матриц δ_{n_i} , A_i и M_{n_i} здесь одинаковы и равны $n_i \times n_i$.

Аналогично замене переменных (2.6) сделаем переход к новым координатам

$$y_i = \delta_{n_i}(T) x_i. \quad (2.23)$$

Заметим, что функция T в (2.23) оказывается одной для всех подсистем из (2.19). Уравнение для функции T будет дано ниже.

Следуя предложенному подходу, выберем векторы $a^i = (a_1^i, \dots, a_{n_i}^i)$, $i = 1, \dots, m$, так, чтобы матрицы \hat{A}_i , определенные соотношениями

$$\hat{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1^i & a_2^i & a_3^i & \dots & a_{n_i}^i \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

были устойчивы. Существуют такие положительно определенные матрицы Q_i и P_i , что

$$Q_i \hat{A}_i + \hat{A}_i^\top Q_i = -P_i < 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.25)$$

Составим векторы y и a из векторов y_i и a^i соответственно, $i = 1, \dots, m$, то есть положим

$$y = (y_1, \dots, y_m), \quad a = (a^1, \dots, a^m),$$

и зададим управляющую функцию соотношением

$$u = (a_i, y_i). \quad (2.26)$$

Подставляя (2.23) и (2.26) в исходные уравнения (2.19), аналогично (2.10) получаем

$$\dot{y} = T^{-1} \left(\hat{A}y + M\dot{T}y + T\delta f(\delta^{-1}y) \right), \quad (2.27)$$

а для линейной системы (2.21) – уравнение

$$\dot{y} = T^{-1} \left(\hat{A}y + M\dot{T}y \right). \quad (2.28)$$

В уравнениях (2.27) и (2.28) использованы блочно-диагональные $n \times n$ -матрицы

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{A}_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \hat{A}_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{A}_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \hat{A}_m \end{pmatrix},$$

$$\delta(T) = \begin{pmatrix} \delta_{n_1}(T) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{n_2}(T) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \delta_{n_{m-1}}(T) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_{n_m}(T) \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} M_{n_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & M_{n_2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & M_{n_{m-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & M_{n_m} \end{pmatrix}.$$

Зададим функцию T неявно уравнением

$$T^{-2\beta}(Q\delta(T)x, Q\delta(T)x) = 1, \quad \beta > 0, \quad (2.29)$$

где матрица Q - блочно-диагональная матрица, составленная из матриц Q_i :

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & Q_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & Q_m \end{pmatrix}.$$

Из положительной определенности матриц Q_i следует положительная определенность матрицы Q .

Положим, как и ранее,

$$S(\beta) = Q(\beta I - M) + (\beta I - M)Q,$$

Матрица $S(\beta)$ положительно определена при достаточно больших β . Как и в разделе 2.2, можно показать существование и единственность решения уравнения (2.29) относительно T .

Продифференцировав по времени уравнение (2.29) в силу системы (2.28), получим

$$\dot{T} = -\frac{(Py, y)}{(S(\beta)y, y)} \leq \tau < 0, \quad (2.30)$$

где блочно-диагональная положительно определенная матрица P составлена из положительно определенных матриц P_i :

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & P_m \end{pmatrix}.$$

Так как функция T общая для всех подсистем (2.21) и равна нулю только в начале координат, то все подсистемы (2.21) приводятся в нуль одновремен-

но, а именно, в момент, когда становится равной нулю функция T . Конечность времени приведения обеспечивается тем, что производная (2.30) функции T отрицательна и отделена от нуля.

Нетрудно видеть, что ограничения на управление (2.3) выполнены в окрестности нуля

$$U = \{x \in R^n : T^{2\beta}(x) \leq q|a|^{-2}\},$$

где $q > 0$ – минимальное собственное число матрицы Q .

Покажем, что построенное управление эффективно для нелинейной системы (2.19), а следовательно и для исходной системы. Продифференцировав по времени нелинейное уравнение (2.29) в силу системы (2.27), получим

$$\dot{T} = -\frac{(Py, y) + 2T(Qy, \delta f)}{(S(\beta)y, y)}. \quad (2.31)$$

Из уравнения (2.29) следует, что

$$y \leq C_1 T^\beta,$$

а из определения матрицы δ – что при малых T выполнены следующие неравенства для норм матриц δ и δ^{-1} :

$$\|\delta(T)\| \leq C_2 T^{-\max_i(n_i)}, \quad \|\delta^{-1}(T)\| \leq C_3 T.$$

Используя эти соотношения и оценку (2.20) для $|f(x, u)|$, получаем

$$|2T(Qy, \delta f)| \leq C_4 T \cdot T^\beta \cdot T^{-\max_i(n_i)} |y|^2 = CT^{\beta+1-\max_i(n_i)} |y|^2.$$

Следовательно для отрицательной определенности числителя в выражении (2.31) для \dot{T} , учитывая малость T , достаточно, чтобы

$$\beta > \max_i(n_i) - 1.$$

При выполнении последнего неравенства числитель в выражении (2.30) для производной функции T положителен и отделен от нуля. Знаменатель, учитывая положительную определенность матрицы $S(\beta)$, также положителен и отделен от

нуля. Следовательно,

$$\dot{T} \leq \sigma < 0,$$

то есть функция T обращается в 0 за конечное время. Отсюда вытекает, что система (2.19) приходит в терминальное положение за конечное время.

Как уже отмечалось ранее, если размерность m вектора управления больше единицы, линеаризованная система (2.21) представляет собой набор независимых подсистем в форме Бруновского, для каждой из которых в отдельности может быть найдена функция T и построено свое управление. При этом время прихода в нулевое положение равновесия у каждой из подсистем будет свое, вообще говоря, отличное от времен прихода других подсистем. Это обстоятельство служит препятствием применению такого способа управления к нелинейной системе (1.1). Действительно, если одна из подсистем окажется в малой окрестности нуля, а какие-то другие – еще нет, то в уравнениях, отвечающих этой подсистеме, линейная часть будет меньше нелинейного остатка, то есть динамика подсистемы будет определяться нелинейными слагаемыми. Предложенная в этом разделе модификация алгоритма построения управления для случая $m > 1$ использует одну, общую для всех подсистем, функцию T , обращение которой в нуль означает одновременный приход всех подсистем в начало координат, а также достижение исходной нелинейной системой положения равновесия.

В главе 4 исследована задача управления многозвенным маятником с двухстепенными шарнирами с помощью момента, приложенного к первому звену. Метаматическая модель такого маятника служит примером системы, у которой размерность m вектора управления равна двум.

2.5 Полная процедура построения управления

Приведем полную процедуру построения управления для решения задачи 1 для случая скалярного управления.

1. Линеаризовать уравнения (1), отбросив нелинейные члены. Проверить управляемость полученной линейной системы.
2. Привести линеаризованные уравнения (1.2) к канонической форме Бруновского согласно процедуре описанной в (1.2).

3. Выбрать вектор a , так чтобы матрица \hat{A} была устойчива и матрицу Q , удовлетворяющую соотношению (2.11).
4. Выбрать значение β согласно (2.18).
5. В текущей точке траектории системы решить уравнение (2.12) относительно T . В общем случае это уравнение не удастся решить аналитически, тем не менее его можно эффективно решить численно.
6. Вычислить в текущей точке управление согласно (2.9).
7. Преобразовать управление в исходные координаты, используя соотношение (1.5). Применить полученное управление к исходной системе (1).

Приведенной пошаговой процедурой заканчивается изложение предлагаемого метода решения задачи 1. Заметим, что в отсутствие ограничений на управление данный подход порождает глобальный синтез управления для линейной системы, то есть позволяет приводить линейную систему (1.2) в начало координат за конечное время из любого начального состояния. Если же на управление наложены ограничения, то и линейная система (1.2), и нелинейная система (1) приводятся в начало координат лишь из некоторой окрестности нуля.

В следующих главах изложенный подход применен к задачам управления многосвязными маятниками в окрестности положения равновесия.

2.6 Иллюстративный пример

Применим предложенный подход для решения задачи управления (1.2) системой

$$\ddot{\varphi} = u, \quad \varphi \in R.$$

Простота и низкая размерность данной системы позволяют представить основные характеристики движения такой системы графически.

Перепишем систему к векторной форме. Положим

$$x_1 = \varphi, \quad x_2 = \dot{\varphi}.$$

В новых переменных система сразу принимает канонический вид Бруновского

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u. \quad (2.32)$$

Следуя алгоритму построения управления, выберем вектор a и матрицу Q следующим образом:

$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (2.12) при данном выборе Q и $\beta = 1$ примет вид

$$T^6 - 2x_2^2 T^2 - 2x_1 x_2 T - x_1^2 = 0.$$

Решая это уравнение относительно T , получаем функцию $T(x_1, x_2)$, через которую выражается закон управления и которая служит функцией Ляпунова для системы (2.32). График этой функции представлен на Рисунке 2.1.

График соответствующей управляющей функции $u(x_1, x_2)$ в окрестности начала координат изображен на Рисунке 2.2.

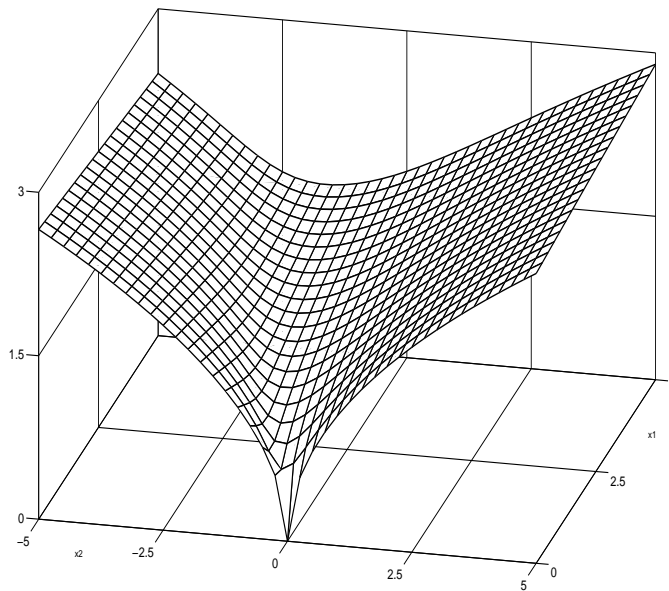


Рисунок 2.1: Функция $T(x_1, x_2)$.

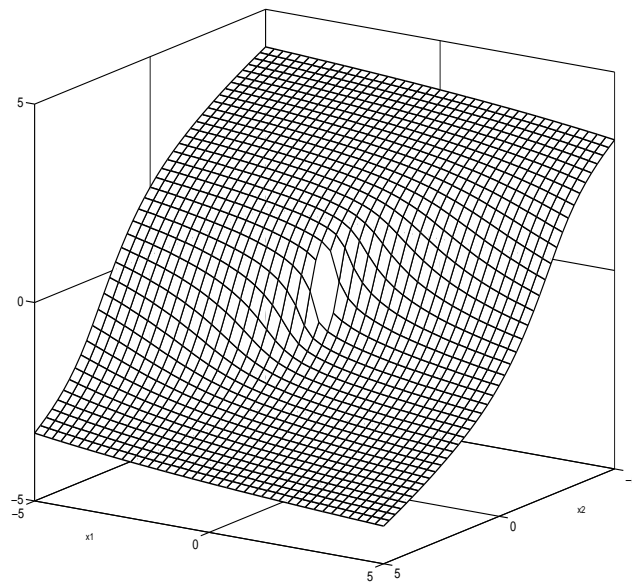


Рисунок 2.2: Управляющая функция $u(x_1, x_2)$.

Глава 3

Управление плоским многозвенным маятником

В данной главе развиваемый в диссертации подход применен для решения задачи управления перевернутым плоским многозвенным маятником в окрестности положения равновесия. Построен закон управления в форме обратной связи, позволяющий приводить маятник за конечное время в положение равновесия ограниченным моментом, приложенным к первому звену.

3.1 Постановка задачи

Мы будем рассматривать многозвенный маятник как механическую систему, состоящую из n материальных точек с массами $m_1 \dots m_n$ и n абсолютно твердых невесомых стержней с длинами $l_1 \dots l_n$ (Рисунок 1). Первый стержень крепится с помощью идеальных шарнирных соединений с одной стороны к неподвижной опоре, а с другой – к первой материальной точке. Далее для всех $k = 2, \dots, n$ стержень с номером k соединяет материальные точки $k - 1$ и k . Предполагается, что система находится в поле тяжести и может двигаться в вертикальной плоскости.

Многозвенный маятник имеет 2^n различных положений равновесия, в каждом из которых некоторые из стержней ориентированы вниз, а остальные – вверх. Рассмотрим сначала маятник в окрестности верхнего положения равновесия. В этом случае все звенья маятника направлены вверх. Затем обобщим решение задачи управления на случай произвольного положения равновесия.

Обозначим через ψ_k , $k = 1, \dots, n$, угол между k -м стержнем и вертикалью (Рисунок 3.1).

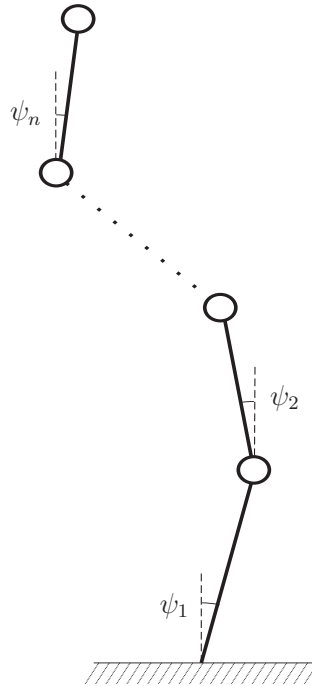


Рисунок 3.1: Многозвенный маятник в окрестности верхнего положения равновесия

Пусть к первому звену маятника приложен управляющий момент u . Задача состоит в том, чтобы построить такое управление как функцию фазовых переменных $u = u(\psi, \dot{\psi})$, где $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ – вектор угловых координат звеньев многозвенника, а $\dot{\psi} = (\dot{\psi}_1, \dots, \dot{\psi}_n)$ – вектор соответствующих угловых скоростей, чтобы для любого начального состояния из некоторой окрестности положения равновесия маятник приводился в это положение равновесия за конечное время. При этом управление должно удовлетворять ограничениям

$$|u(\psi, \dot{\psi})| < \bar{U}.$$

Предполагается, что углы и угловые скорости всех звеньев доступны измерению в каждый момент времени.

3.2 Уравнения движения

Выпишем кинетическую и потенциальную энергии многозвенного маятника, а затем получим линеаризованные в окрестности верхнего положения равно-

весия уравнения Лагранжа, описывающие динамику линейной модели такого маятника.

Декартовы координаты и скорости k -й материальной точки задаются выражениями

$$\begin{aligned} x_k &= \sum_{i=1}^k l_i \sin \varphi_i, & y_k &= \sum_{i=1}^k l_i \cos \varphi_i, \\ \dot{x}_k &= \sum_{i=1}^k l_i \cos \varphi_i \dot{\varphi}_i, & \dot{y}_k &= - \sum_{i=1}^k l_i \sin \varphi_i \dot{\varphi}_i. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Используя данные соотношения, выпишем выражение для кинетической энергии k -го звена многозвенника

$$H_k = \frac{1}{2} m_k \sum_{i,j=1}^k l_i l_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j.$$

Полная кинетическая энергия многозвенника равна

$$H = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k \sum_{i,j=1}^k l_i l_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j.$$

Таким образом, элементы $n \times n$ -матрицы кинетической энергии $A(\varphi)$ многозвенного маятника имеют вид

$$A_{ij}(\varphi) = \sum_{k=\max(i,j)}^n m_k l_i l_j \cos(\varphi_i - \varphi_j). \quad (3.2)$$

Используя соотношения (3.1), найдем выражение для потенциальной энергии многозвенного маятника. Потенциальная энергия k -го звена равна

$$\Pi_k = m_k g y_k = m_k g \sum_{i=1}^k l_i \cos \varphi_i,$$

следовательно, полная потенциальная энергия маятника может быть представлена в форме

$$\Pi = \sum_{k=1}^n m_k g \sum_{i=1}^k l_i \cos \varphi_i = \sum_{i=1}^n g l_i \cos \varphi_i \sum_{k=i}^n m_k.$$

Введем $n \times n$ -матрицу

$$P(\varphi) = \text{diag}\left\{-gl_i \cos \varphi_i \sum_{k=i}^n m_k\right\}. \quad (3.3)$$

Для того чтобы выписать линеаризованные в окрестности положения равновесия уравнения движения маятника, линеаризуем в окрестности начала координат матрицы $A(\varphi)$ и $P(\varphi)$. Используя соотношения (3.16), получаем

$$A_{ij} = A_{ij}(0) = l_i l_j \sum_{k=\max(i,j)}^n m_k. \quad (3.4)$$

Для линеаризованной $n \times n$ -матрицы потенциальной энергии P , принимая во внимание (3.17), имеем

$$P = P(0) = \text{diag}\left\{gl_i \sum_{k=i}^n m_k\right\}. \quad (3.5)$$

С учетом полученных выражений для матриц кинетической и потенциальной энергий линеаризованные в окрестности рассматриваемого положения равновесия уравнения Лагранжа для многосвязного маятника могут быть записаны в виде

$$A\ddot{\varphi} + P\varphi = u. \quad (3.6)$$

Для приведения линейной системы уравнений (3.6) к нормальной форме Коши выпишем матрицу, обратную к матрице A . Легко проверить, что эта матрица имеет трехдиагональный вид

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{k,k-1} & a_{k,k} & a_{k,k+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

где

$$a_{k,k-1} = -\frac{1}{m_{k-1}l_{k-1}l_k}, \quad a_{k,k} = \frac{m_{k-1} + m_k}{m_{k-1}m_k l_k^2}, \quad a_{k,k+1} = -\frac{1}{m_k l_k l_{k+1}}.$$

Перейдем к новым координатам $x \in R^{2n}$, положив $x_i = \varphi_i$, $x_{n+i} = \dot{\varphi}_i$, $i = 1, \dots, n$. Система уравнений (3.6) примет вид

$$\dot{x} = Cx + Du, \quad (3.8)$$

где C — блочная матрица размера $(2n \times 2n)$, а D — вектор размерности $2n$:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A^{-1}P & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ A^{-1}E \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

I — единичная $n \times n$ -матрица, а E — n -мерный вектор вида $E = (1, 0, \dots, 0)^\top$.

3.3 Управляемость линейной модели маятника

Для решения сформулированной задачи управления многозвенным маятником с помощью изложенного выше подхода необходимо убедиться, что линейная модель является вполне управляемой. Следуя [79], проверим справедливость критерия Калмана. Используя обозначения (3.8), получаем, что для управляемости должно выполняться равенство

$$\text{rank} \begin{pmatrix} D & CD & C^2D & \dots & C^{2n-1}D \end{pmatrix} = 2n. \quad (3.10)$$

Принимая во внимание вид (3.22) матриц C и D , перепишем условие (3.10) в виде

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 0 & A^{-1}b & 0 & -A^{-1}PA^{-1}b & \dots & (-A^{-1}P)^{n-1}A^{-1}b \\ A^{-1}b & 0 & -A^{-1}PA^{-1}b & \dots & (-A^{-1}P)^{n-1}A^{-1}b & 0 \end{pmatrix} = 2n. \quad (3.11)$$

Так как столбцы с четными номерами ортогональны столбцам с нечетными номерами, то равенство (3.11) справедливо, очевидно, тогда и только тогда, когда выполнено

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A^{-1}b & -A^{-1}PA^{-1}b & \dots & (-A^{-1}P)^{n-1}A^{-1}b \end{pmatrix} = n. \quad (3.12)$$

Умножим матрицу, стоящую в левой части (3.12), на невырожденную матрицу A . Получим

$$R = \begin{pmatrix} b & -PA^{-1}b & \dots & (-PA^{-1})^{n-1}b \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Ранг полученной матрицы, очевидно, равен рангу исходной, то есть

$$\text{rank } R = n.$$

Таким образом управляемость исходной системы эквивалентна управляемости системы

$$\dot{x} = -PA^{-1}x + bu. \quad (3.14)$$

Исследуем систему (3.14) на управляемость. Так как матрица P диагональная, а матрица A^{-1} трехдиагональная, то матрица $-PA^{-1}$ тоже имеет трехдиагональный вид, причем из вида матриц (3.19) и (3.20) следует, что на всех трех диагоналях стоят только ненулевые элементы.

Рассмотрим k -й столбец матрицы R – вектор

$$R(k) = (-PA^{-1})^{k-1}b, \quad k \in 1 \dots n.$$

Докажем, что k -й элемент вектора $R(k)$ ненулевой, а элементы с номерами $k+1, \dots, n$ равны нулю. Используем индукцию по k . Для $k=1$ предположение выполнено. Допустим, что оно верно для $R(k)$, $k > 1$. Тогда

$$K(k+1)_{k+1} = [-PA^{-1}]_{k+1,k}R(k)_k \neq 0.$$

Далее, так как $\forall j > k : R(k)_j = 0$ и $\forall i > k+1, \forall j < k : [-PA^{-1}]_{i,j} = 0$, то $\forall i > k+1 : R(k+1)_i = 0$. Таким образом индукционный переход доказан.

Из доказанного следует, что матрица R из (3.13) – матрица управляемости для системы (3.14) – верхняя треугольная с ненулевыми элементами на главной диагонали. Ранг такой матрицы равен n . Откуда заключаем, что система (3.14), а значит и система (3.8) вполне управляемы.

Таким образом, линейная модель плоского многозвенного маятника в окрестности верхнего положения равновесия является вполне управляемой, и к реше-

нию задачи управления таким маятником может быть применен предложенный в главе 2 подход.

3.4 Управление многозвенным маятником в окрестности произвольного положения равновесия

В предыдущих разделах данной главы предложен и обоснован подход к решению задачи управления плоским многозвенным маятником в окрестности верхнего положения равновесия. Как уже отмечалось, такой маятник имеет 2^n положений равновесия, в каждом из которых часть звеньев ориентирована “вверх”, а остальные звенья ориентированы “вниз”. Покажем применимость предложенного подхода к решению задачи о приведении многозвенного маятника из малой окрестности произвольного положения равновесия в это положение равновесия за конечное время с помощью ограниченного по модулю момента, приложенного к первому звену. Для этого достаточно доказать полную управляемость системы, полученной в результате линеаризации уравнений движения маятника в окрестности рассматриваемого положения равновесия. Выпишем линеаризованную систему уравнений.

Пусть по-прежнему m_i и l_i – масса и длина i -го звена многозвенника, а ψ_i – угол отклонения i -го звена от вертикали. Декартовы координаты материальной точки с номером k задаются выражениями

$$x_k = \sum_{i=1}^k l_i \sin \psi_i, \quad y_k = \sum_{i=1}^k l_i \cos \psi_i.$$

Во введенных выше обозначения терминальное положение характеризуется значениями $\psi_i = 0$, если i звено ориентировано вверх, и $\psi_i = \pi$, если i звено ориентировано вниз. Перейдем к новым переменным, в которых терминальное положение совпадает с началом координат.

Введем для этого вектор θ размерности n , определяющий ориентацию звеньев маятника в рассматриваемом положении равновесия:

$$\theta_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i\text{-е звено ориентированно вверх;} \\ 1, & \text{если } i\text{-е звено ориентированно вниз.} \end{cases}$$

Используя вектор θ , перейдем к новым координатам $\varphi = \psi - \theta\pi$. Заметим, что все φ_i равны нулю, когда маятник находится в рассматриваемом положении равновесия.

Декартовы координаты и скорости k -й материальной точки задаются выражениями

$$\begin{aligned} x_k &= \sum_{i=1}^k l_i \sin(\varphi_i + \theta_i\pi), & y_k &= \sum_{i=1}^k l_i \cos(\varphi_i + \theta_i\pi), \\ \dot{x}_k &= \sum_{i=1}^k l_i \cos(\varphi_i + \theta_i\pi) \dot{\varphi}_i, & \dot{y}_k &= - \sum_{i=1}^k l_i \sin(\varphi_i + \theta_i\pi) \dot{\varphi}_i. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Используя данные соотношения, выпишем выражение для кинетической энергии k -го звена многозвенника:

$$H_k = \frac{1}{2} m_k \sum_{i,j=1}^k l_i l_j \cos(\varphi_i - \varphi_j + \theta_i\pi - \theta_j\pi) \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j.$$

Полная кинетическая энергия многозвенника равна

$$H = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k \sum_{i,j=1}^k l_i l_j \cos(\varphi_i - \varphi_j + (\theta_i - \theta_j)\pi) \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j.$$

Таким образом, элементы $n \times n$ -матрицы кинетической энергии $A(\varphi)$ многозвенного маятника имеют вид

$$A_{ij}(\varphi) = \sum_{k=\max(i,j)}^n m_k l_i l_j \cos(\varphi_i - \varphi_j + (\theta_i - \theta_j)\pi). \quad (3.16)$$

Используя соотношения (3.15), найдем выражение для потенциальной энергии многозвенного маятника. Потенциальная энергия k -го звена равна

$$\Pi_k = m_k g y_k = m_k g \sum_{i=1}^k l_i \cos(\varphi_i + \theta_i\pi),$$

следовательно, полная потенциальная энергия маятника может быть представлена в форме

$$\Pi = \sum_{k=1}^n m_k g \sum_{i=1}^k l_i \cos(\varphi_i + \theta_i \pi) = \sum_{i=1}^n g l_i \cos(\varphi_i + \theta_i \pi) \sum_{k=i}^n m_k.$$

Введем $n \times n$ -матрицу

$$P(\varphi) = \text{diag}\{-g l_i \cos(\varphi_i + \theta_i \pi) \sum_{k=i}^n m_k\}. \quad (3.17)$$

Для того чтобы выписать линеаризованные в окрестности положения равновесия уравнения движения маятника, линеаризуем в окрестности начала координат матрицы $A(\varphi)$ и $P(\varphi)$. Используя соотношения (3.16), получаем

$$A_{ij} = A_{ij}(0) = (-1)^{\theta_i + \theta_j} l_i l_j \sum_{k=\max(i,j)}^n m_k. \quad (3.18)$$

Для линеаризованной $n \times n$ -матрицы потенциальной энергии P , принимая во внимание (3.17), имеем

$$P = P(0) = \text{diag}\{(-1)^{\theta_i + 1} g l_i \sum_{k=i}^n m_k\}. \quad (3.19)$$

Итак, линеаризованные в окрестности рассматриваемого положения равновесия уравнения Лагранжа для многозвенного маятника имеют вид (3.6), где матрицы A и P задаются выражениями (3.18) и (3.19).

Для приведения линейной системы уравнений (3.6) к нормальной форме Коши выпишем матрицу, обратную к матрице A . Легко проверить, что эта матрица имеет трехдиагональный вид

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{k,k-1} & a_{k,k} & a_{k,k+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

где

$$a_{k,k-1} = -\frac{(-1)^{\theta_{k-1}+\theta_k}}{m_{k-1}l_{k-1}l_k}, \quad a_{k,k} = \frac{m_{k-1} + m_k}{m_{k-1}m_k l_k^2}, \quad a_{k,k+1} = -\frac{(-1)^{\theta_k+\theta_{k+1}}}{m_k l_k l_{k+1}}.$$

Перейдем к новым координатам $x \in R^{2n}$, положив $x_i = \varphi_i$, $x_{n+i} = \dot{\varphi}_i$, $i = 1, \dots, n$. Система уравнений (3.6) примет вид

$$\dot{x} = Cx + Du, \quad (3.21)$$

где, как и ранее, C – блочная матрица размера $(2n \times 2n)$, а D – вектор размерности $2n$:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A^{-1}P & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ A^{-1}E \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

I – единичная $n \times n$ -матрица, а E – n -мерный вектор вида $E = (1, 0, \dots, 0)^\top$.

С помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше, можно доказать, что матрица управляемости для системы (3.21) – верхняя треугольная с ненулевыми элементами на диагонали, что влечет полную управляемость системы (3.21). Это гарантирует эффективность применения предложенного подхода к решению задачи о приведении плоского нелинейного многозвенного маятника из малой окрестности произвольного положения равновесия в это положение равновесия за конечное время с помощью ограниченного по модулю момента, приложенного к первому звену.

Таким образом, установлено, что линейная модель многозвенного маятника является вполне управляемой системой, если управляющий момент приложен к его нижнему звену.

Заметим, что если для управления маятником используется единственный внешний момент, приложенный к последнему звену, то, рассуждая как и выше, можно показать управляемость линейной модели и в этом случае. Матрица управляемости для системы (3.14) здесь оказывается также невырожденной: она имеет ненулевые элементы на главной диагонали и нули – выше нее.

Если же внешний момент прикладывается к одному из средних звеньев, то свойство управляемости может нарушаться. В следующем разделе приведен пример трехзвенного маятника, линейная модель которого не является вполне управляемой.

3.5 Управляемость трехзвенного маятника

Рассмотрим сначала общий вид динамической системы размерности три, а потом, учитывая уравнение (3.14), приведем пример трехзвенника, не являющегося вполне управляемым. Управление в таком трехзвеннике приложено не к первому, а к среднему звену, причем управляющий момент – внешний, действующий только на одно звено.

Пусть в динамической системе $\dot{z} = A_3 z + B_3 u$ матрицы A_3 и B_3 имеют вид

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ 0 & c_3 & a_3 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

причем элементы на главной диагонали и обеих соседних диагоналях матрицы A ненулевые. Тогда матрица управляемости записывается как

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_1(a_1 + a_2) \\ 1 & a_2 & c_2 b_1 + a_2^2 + b_2 c_3 \\ 0 & c_3 & c_3(a_2 + a_3) \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы Q_3

$$d_3 = -b_1 c_3 (a_2 + a_3 - a_1 - a_2) = b_1 c_3 (a_1 - a_3)$$

равен нулю тогда и только тогда, когда $a_1 = a_3$. Таким образом, существует матрица A_3 такая, что система размерности 3 не является вполне управляемой.

Рассмотрим трехзвенник, управляемый внешним моментом, приложенным к среднему звену. Матрица $-A^{-1}P$ для такого трехзвенника имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{(-1)^{\theta_1}}{m_1 l_1} g(m_1 + m_2 + m_3) & -\frac{(-1)^{\theta_2}}{m_1 l_2} g(m_1 + m_2 + m_3) & 0 \\ -\frac{(-1)^{\theta_1}}{m_1 l_1} g(m_2 + m_3) & \frac{(-1)^{\theta_2}(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 l_2} g(m_2 + m_3) & -\frac{(-1)^{\theta_3}}{m_2 l_3} g(m_2 + m_3) \\ 0 & -\frac{(-1)^{\theta_2}}{m_2 l_2} g m_3 & \frac{(-1)^{\theta_3}(m_2 + m_3)}{m_2 m_3 l_3} g m_3 \end{pmatrix},$$

следовательно, система не является управляемой, если

$$\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 l_1} = \frac{m_2 + m_3}{m_2 l_3}.$$

Для маятника, у которого все звенья направлены вверх, это условие выполнено, например, при

$$m_1 = m_2 = m_3, \quad l_1 = 3, \quad l_3 = 2.$$

3.6 Численное моделирование

Применим предложенный подход для решения задачи управления трехзвенным маятником с помощью момента, приложенного к первому звену, при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned} n &= 3, \quad \beta = 1.1; \\ m_1 &= 0.4, \quad m_2 = 0.2, \quad m_3 = 0.1; \\ l_1 &= l_2 = l_3 = 0.1. \end{aligned}$$

Будем рассматривать движение маятника в окрестности положения равновесия, в котором первое и третье звенья ориентированы вверх, а второе – вниз. Построим управление в форме обратной связи, приводящее маятник в это положение равновесия за конечное время.

При выбранных значениях параметров матрица C и вектор D в уравнениях движения (3.8) имеют вид

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 171.675 & -73.575 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 171.675 & -220.725 & 49.050 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -147.150 & 147.150 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 250 \\ 250 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а матрица преобразования системы к форме Бруновского

$$S \approx \begin{pmatrix} -0.277 & 0.277 & -0.277 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.277 & 0.277 & -0.277 \\ 0 & 0 & -27.183 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -27.183 \\ 0 & 4000 & -4000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4000 & -4000 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6}.$$

Следуя алгоритму построения управления, выберем вектор

$$a = (-1, -6, -15, -20, -15, -6).$$

При таком выборе вектора a матрица A_1 устойчива, так как все ее собственные числа равны -1 .

В качестве решения системы матричных неравенств (2.11) взята положительно определенная матрица

$$Q = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 32 & 18 & 10 & 1 \\ 15 & 113 & 117 & 132 & 50 & 6 \\ 32 & 117 & 331 & 217 & 146 & 13 \\ 18 & 132 & 217 & 334 & 127 & 22 \\ 10 & 50 & 146 & 127 & 148 & 12 \\ 1 & 6 & 13 & 22 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

Для каждого текущего значения z вдоль траектории движения нелинейного трехзвенного маятника решаем численно уравнение (2.12) с матрицей Q , получая значение функции T . Используя соотношение (2.9), вычисляем управление, которое и подставляем в уравнения движения трехзвенного маятника.

Для моделирования движений трехзвенного маятника использовался пакет программ MATLAB Simulink. Были выбраны следующие значения начальных угловых координат и скоростей маятника

$$\begin{aligned} \psi_1 &= 0.037063, & \dot{\psi}_1 &= -0.244207, \\ \psi_2 &= \pi - 0.006604, & \dot{\psi}_2 &= 0.142172, \\ \psi_3 &= -0.005528, & \dot{\psi}_3 &= 0.0092958. \end{aligned}$$

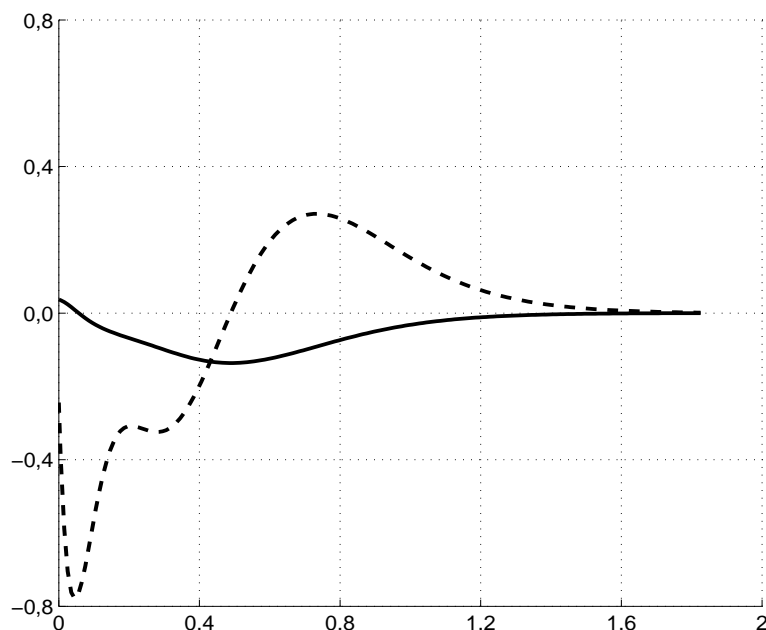


Рисунок 3.2: Координата φ_1 и скорость $\dot{\varphi}_1$ первого звена как функция времени

На Рисунке 3.2 - 3.4 представлены угловые координаты и скорости $\varphi_i = \psi_i - \theta_i\pi$, $\dot{\varphi}_i = \dot{\psi}_i$, $i = 1, 2, 3$, как функции времени. Сплошные линии отвечают угловым координатам, штриховые – угловым скоростям. Управление представлено на Рисунке 3.5, на Рисунке 3.6 – фазовые траектории звеньев трехзвенника. Траектория первого звена изображена толстой сплошной линией, траектория второго звена – обычной сплошной линией, третьего звена – тонкой сплошной линией, траектория i -го звена представлена в координатах $\varphi_i, \dot{\varphi}_i$.

Из рисунков видно, что траектории системы приходят в терминальное положение за конечное время, составляющее около 1.8 секунды.

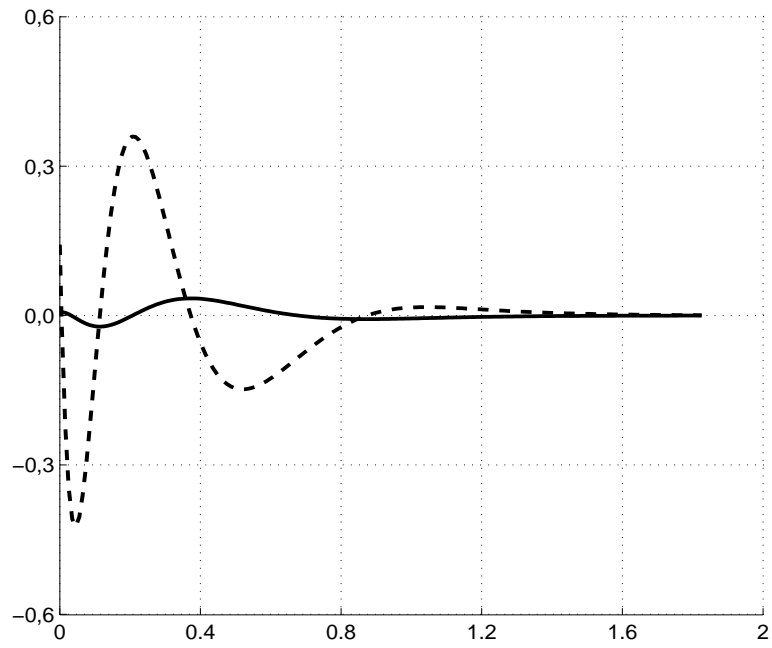


Рисунок 3.3: Координата $\pi - \varphi_2$ и скорость $\dot{\varphi}_2$ второго звена как функция времени

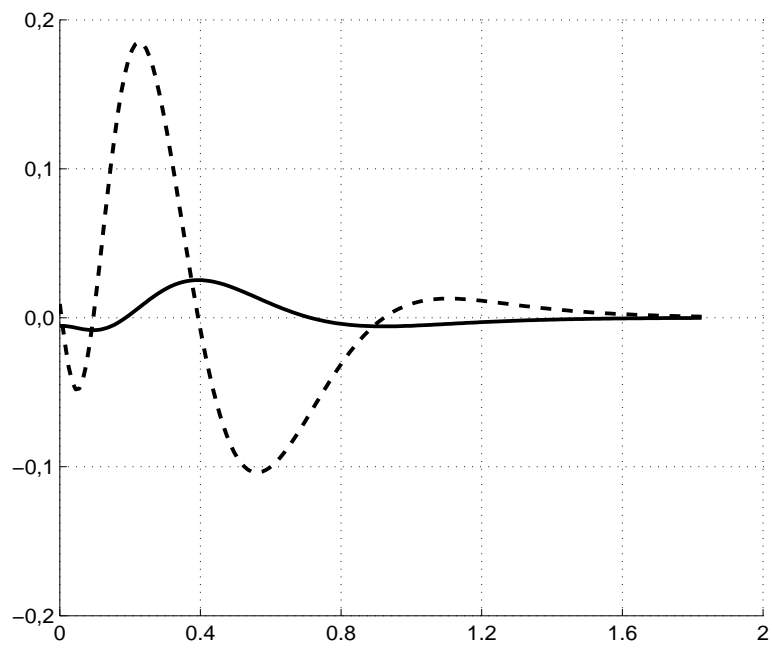


Рисунок 3.4: Координата φ_3 и скорость $\dot{\varphi}_3$ третьего звена как функция времени

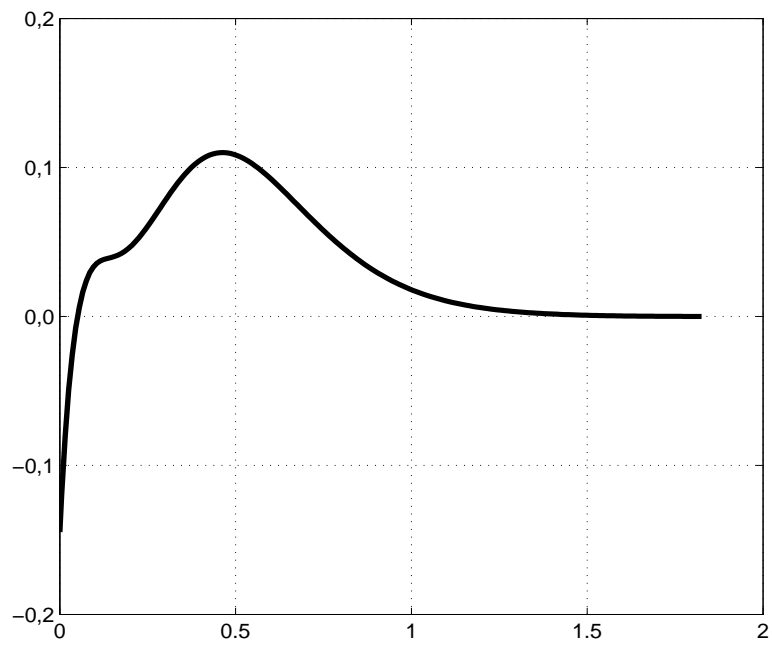


Рисунок 3.5: Управляющая функция u как функция времени

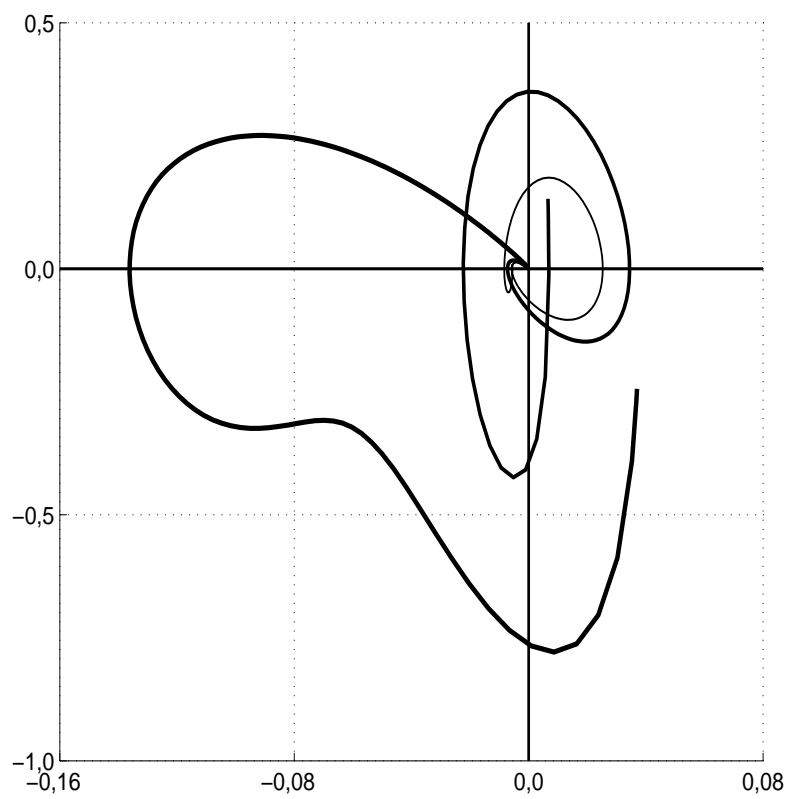


Рисунок 3.6: Фазовые траектории трехзвенного маятника. Утолщенной линией показана зависимость $\dot{\varphi}_1(\varphi_1)$, обычной – зависимость $\dot{\varphi}_2(\pi - \varphi_2)$, тонкой – $\dot{\varphi}_3(\pi - \varphi_3)$.

Глава 4

Управление многозвенным маятником с двухстепенными шарнирами

В данной главе рассматривается задача управления пространственными движениями многозвенного маятника с двухстепенными шарнирами с помощью момента, приложенного к первому звену. В отличие от плоского маятника, управляемого скалярным моментом, управление маятником с двухстепенными шарнирами представляет собой двумерный вектор. Это обстоятельство требует применения модифицированного алгоритма построения управления, изложенного в разделе 2.4.

4.1 Управляемость линейной модели

Рассмотрим n -звенный маятник с двухстепенными шарнирами, управляемый моментом, приложенным к первому звену. Как и в плоском случае, представим такой маятник как механическую систему, состоящую из n материальных точек с массами $m_1 \dots m_n$, расположенных на концах абсолютно твердых невесомых стержней с длинами $l_1 \dots l_n$ (Рисунок 4.1). Первый стержень соединен с помощью идеального двухстепенного шарнира с неподвижной опорой, а i -й стержень – с помощью такого же двухстепенного шарнира соединен с $(i - 1)$ -м, $i = 2, \dots, n$. Предполагается, что система находится в поле силы тяжести, которое направлено против оси Z абсолютной системы координат $OXYZ$.

Для описания динамики маятника введем обобщенные координаты следующим образом. Свяжем с i -м звеном маятника систему координат $O_i x_i y_i z_i$, центр которой расположен в i -м шарнире O_i , а оси параллельны осям абсолютной

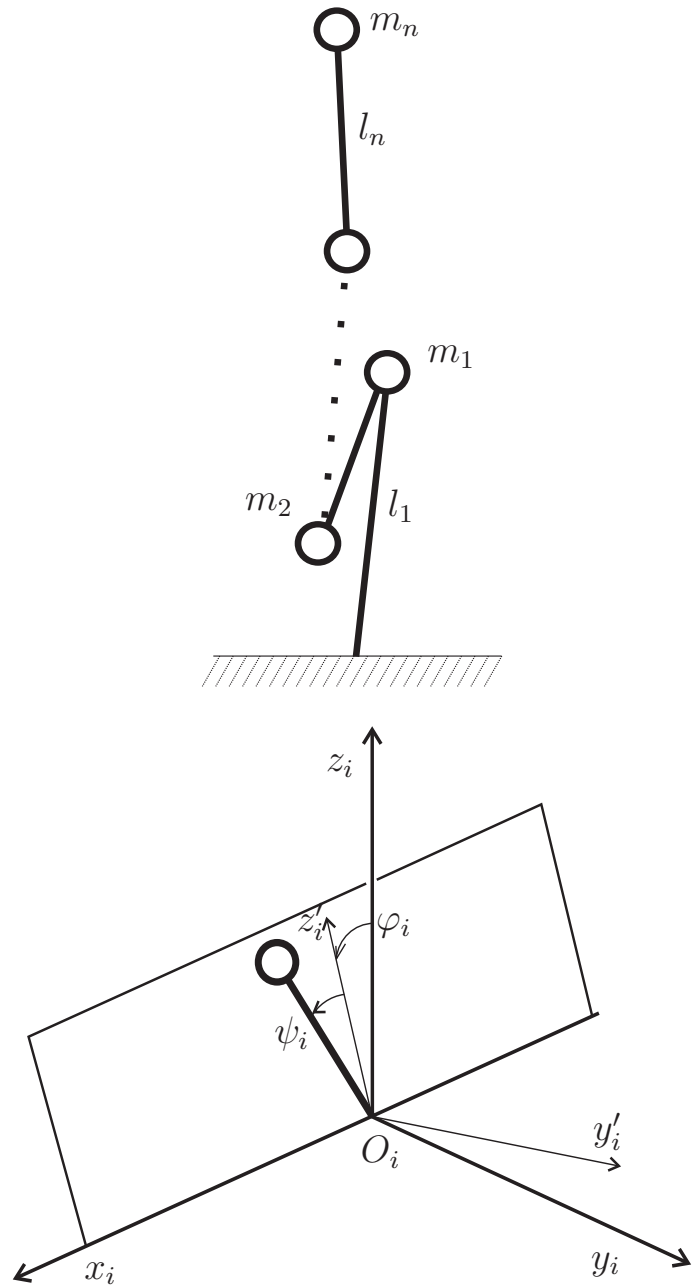


Рисунок 4.1: Многозвенный маятник с двухстепенными шарнирами

системы координат $OXYZ$. Наряду с ней введем еще одну систему координат $O_i x_i y'_i z'_i$, также с центром в i -м шарнире, ось $O_i z'_i$ которой лежит в одной плоскости с осью $O_i x_i$ и i -м звеном (Рисунок 4.1). Обозначим через φ_i угол между осями $O_i z_i$ и $O_i z'_i$, а через ψ_i угол между i -м звеном и осью $O_i z'_i$.

К первому звену маятника приложены два скалярных управляющих момента u_1 и u_2 , вращающих звено вокруг осей $O_i x_i$ и $O_i y'_i$ соответственно.

Как и в плоском случае, рассматриваемый маятник имеет 2^n различных положений равновесия, в которых часть звеньев направлены вверх, а остальные – вниз.

Задача 3. Построить такое управление $u = (u_1, u_2)$ как вектор-функцию обобщенных координат и скоростей $\varphi, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$, где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$, чтобы для любого начального состояния из некоторой окрестности заданного положения равновесия маятник приводился в это положение равновесия за конечное время. При этом управление в этой окрестности должно удовлетворять ограничению

$$|u(\varphi, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\psi})| < \bar{U}.$$

Предполагается, что углы и угловые скорости всех звеньев доступны измерению в каждый момент времени.

Как и ранее, введем вектор θ размерности n , определяющий ориентацию звеньев маятника в рассматриваемом положении равновесия:

$$\theta_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i\text{-е звено ориентировано вверх;} \\ 1, & \text{если } i\text{-е звено ориентировано вниз.} \end{cases}$$

Используя вектор θ , перейдем к новым переменным $\xi = \psi - \theta\pi$, $\eta = \varphi - \theta\pi$. В новых переменных рассматриваемое положение равновесия маятник совпадает с началом координат фазового пространства.

Докажем, что изложенный в разделе 2.4 закон управления решает задачу 3. Для этого достаточно установить полную управляемость линеаризованной в окрестности рассматриваемого положения равновесия системы уравнений, описывающей динамику маятника.

Нетрудно показать, что такая линейная система уравнений может быть записана в форме

$$\bar{A}\ddot{\chi} + \bar{P}\dot{\chi} = Bu, \quad \chi = (\xi, \eta) \in R^{2n}, \quad (4.1)$$

где

$$\bar{A}(0) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad \bar{P}(0) = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Здесь $b^\top = (1, 0, \dots, 0)$, а матрицы A и P совпадают с линеаризованными матрицами кинетической и потенциальной энергий плоского n -звенного маятника и имеют вид

$$A_{ij} = (-1)^{\theta_i + \theta_j} l_i l_j \sum_{k=\max(i,j)}^n m_k, \quad P = \text{diag} \left\{ (-1)^{\theta_i + 1} g l_i \sum_{k=i}^n m_k \right\}.$$

Таким образом, линеаризованные в окрестности верхнего положения равновесия уравнения движения маятника с двухстепенными шарнирами распадаются на две одинаковые независимые подсистемы вида

$$A\ddot{\xi} + P\xi = bu_1, \quad A\ddot{\eta} + P\eta = bu_2. \quad (4.2)$$

Ранее была доказана полная управляемость этих подсистем. Следовательно, система (4.2) вполне управляема, поэтому описанный выше подход применим к решению сформулированной задачи управления для многозвенного маятника с двухстепенными шарнирами.

4.2 Уточнение условия на β

В разделе 2.4 было установлено, что при выполнении условия

$$\beta > \max_i(n_i) - 1$$

полученное управление эффективно и для нелинейной системы (2.15). Покажем, что в рассматриваемых задачах управления многозвенными маятниками это условие можно ослабить.

Уравнения движения многозвенного маятника, управляемого моментом, приложенным в первом шарнире, в окрестности произвольного положения равнове-

сия могут быть записаны в виде

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(x, u), \quad |f(x)| < c(|x|^2). \quad (4.3)$$

Отличие от уравнений (2.15) заключается в оценке нелинейного слагаемого (остатка при линеаризации). Это обстоятельство позволяет иначе оценить слагаемое $2T(Qy, \delta f(\delta^{-1}(T)y))$ в числителе выражения (2.31) для производной \dot{T} .

В силу (2.29) имеем $(Qy, y) = T^{2\beta}$. Следовательно, в некоторой окрестности нуля на траектории системы выполняются неравенства

$$|y| \leq C_1 T^\beta, \quad T \leq C_2 |y|^{1/\beta}, \quad C_1, C_2 > 0. \quad (4.4)$$

Из определения матрицы δ получаем следующие оценки для норм матриц δ и δ^{-1} , справедливые при малых T :

$$|\delta(T)| \leq C_3 T^{-\max_k(s_k)}, \quad |\delta^{-1}(T)| \leq C_4 T, \quad C_3, C_4 > 0. \quad (4.5)$$

Так как $f(x) < c(|x|^2)$, то

$$|f(\delta^{-1}(T)y)| \leq C_5 T^2 |y|^2, \quad C_5 > 0. \quad (4.6)$$

Используя соотношения (4.4) – (4.6), получаем

$$2T(Qy, \delta f(\delta^{-1}y)) \leq C_6 T^{3+\beta-\max_k(s_k)} |y|^2 \leq C_7 |y|^{5+\beta-\max_k(s_k)}, \quad C_6, C_7 > 0.$$

Следовательно, при выполнении условия

$$\beta > \max_k(s_k) - 3 \quad (4.7)$$

производная (2.31) функции T равна

$$\dot{T} = -\frac{(Py, y) + 2T(Qy, \delta f)}{(S(\beta)y, y)}$$

и в некоторой окрестности нуля удовлетворяет неравенству

$$\dot{T} \leq \sigma < 0,$$

которое гарантирует, что траектория нелинейной системы (4.3) достигает начала координат за конечное время.

Неравенство (4.7) является достаточным условием приведения в терминальное положение равновесия как плоского маятника, так и маятника с двухстепенными шарнирами.

4.3 Результаты компьютерного моделирования

Для демонстрации предложенного алгоритма управления проведем численное моделирование трехзвенного маятника с двухстепенными шарнирами. Выберем следующие параметры модели

$$\begin{aligned} n &= 3, \beta = 1.1; \\ m_1 &= 0.4, m_2 = 0.2, m_3 = 0.1; \\ l_1 &= l_2 = l_3 = 0.1. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай приведения маятника из окрестности положения равновесия, в котором все звенья маятника ориентированы вверх, в это положение равновесия. Так как маятник является системой с двумерным управлением, воспользуемся модифицированной процедурой построения управления, описанной в 2.4.

Матрицы A и P , входящие в систему линеаризованных уравнений движения (4.1), при выбранных значениях параметров имеют вид

$$A \approx 10^{-3} \times \begin{pmatrix} 7.0 & -3.0 & 1.0 \\ -3.0 & 3.0 & -1.0 \\ 1.0 & -1.0 & 1.0 \end{pmatrix}, \quad P \approx \begin{pmatrix} -0.69 & 0 & 0 \\ 0 & 0.29 & 0 \\ 0 & 0 & -0.10 \end{pmatrix}.$$

Используя полученные матрицы кинетической и потенциальной энергии, выпишем линеаризованные уравнения движения маятника в форме Коши

$$\dot{x} = Cx + Du, \quad x \in R^{12}, \quad u \in R^2,$$

где C и D – блочно-диагональные матрицы

$$C = \begin{pmatrix} \bar{C} & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \bar{D} & 0 \\ 0 & \bar{D} \end{pmatrix},$$

и

$$\bar{C} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 171.675 & -73.575 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 171.675 & -220.725 & 49.050 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -147.150 & 147.150 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{D} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 250 \\ 250 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица S перехода к канонической форме Бруновского для данной системы также имеет блочно-диагональный вид

$$S = \begin{pmatrix} \bar{S} & 0 \\ 0 & \bar{S} \end{pmatrix},$$

где

$$\bar{S} \approx 10^{-3} \times \begin{pmatrix} -0.0003 & 0.0003 & -0.0003 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0003 & 0.0003 & -0.0003 \\ 0 & 0 & -0.0272 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0272 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Следуя алгоритму построения управления, выберем векторы

$$a_1 = a_2 = (-1, -6, -15, -20, -15, -6).$$

При таком выборе векторов a_i матрицы $A_1 = A_2$, определенные соотношениями (2.24) устойчивы, так как все их собственные числа равны -1 . Матрицы Q_1 и Q_2 выберем одинаковыми так, чтобы были выполнены соотношения (2.25)

$$Q_1 = Q_2 = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 32 & 18 & 10 & 1 \\ 15 & 113 & 117 & 132 & 50 & 6 \\ 32 & 117 & 331 & 217 & 146 & 13 \\ 18 & 132 & 217 & 334 & 127 & 22 \\ 10 & 50 & 146 & 127 & 148 & 12 \\ 1 & 6 & 13 & 22 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

Для каждого текущего значения x вдоль траектории движения нелинейного трехзвенного маятника решаем численно уравнение (2.30) для $T(x)$, подставляя блочно-диагональную матрицу

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}.$$

Используя полученное в данной точке x значение функции T , согласно соотношениям (2.26) вычисляем управления $u_i = (a_i, \delta_i(T)x_i)$, $i \in \{1, 2\}$, которые и подставляем в уравнения движения трехзвенного маятника.

Для моделирования движений трехзвенного маятника использовался пакет программ MATLAB Simulink. Были выбраны следующие значения начальных угловых координат и скоростей маятника

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0.094, & \dot{\varphi}_1 &= 0.66, & \psi_1 &= 0.09, & \dot{\psi}_1 &= 1.96 \\ \varphi_2 &= 0.008, & \dot{\varphi}_2 &= -0.29, & \psi_2 &= 0.0080, & \dot{\psi}_2 &= -0.6 \\ \varphi_3 &= 0.0049, & \dot{\varphi}_3 &= -0.1565, & \psi_3 &= 0.0077, & \dot{\psi}_3 &= 0.3887 \end{aligned}$$

Зависимости угловых координат и скоростей движения первого, второго и третьего звеньев трехзвенного маятника от времени представлены на Рисунках 4.2, 4.3 и 4.4 соответственно. На верхней части а) каждого из рисунков изображены графики функций $\varphi_i(t)$ и $\dot{\varphi}_i(t)$, на нижней части б) – графики функций $\psi_i(t)$, $\dot{\psi}_i(t)$. На каждом из рисунков угловым координатам соответствуют сплошные линии, а угловым скоростям – пунктирные.

На Рисунках 4.5, 4.6 и 4.7 представлены фазовые траектории движения первого, второго и третьего звеньев соответственно. Кривым $\dot{\varphi}_i(\varphi_i)$ отвечают обычные линии, а кривым $\dot{\psi}_i(\psi_i)$ – утолщенные.

Управляющие моменты $u_1(t)$ и $u_2(t)$ изображены на Рисунке 4.8 утолщенной и обычной линиями соответственно. Из Рисунков 4.2 – 4.7 видно, что управления, построенные с помощью модифицированного метода, описанного в 2.4, приводят трехзвенный маятник в верхнее неустойчивое положение равновесия. При выбранных начальных условиях приведение занимает около 2 секунд. Таким образом, управление, построенное для линеаризованной системы оказывается эффективным и для исходной нелинеаризованной.

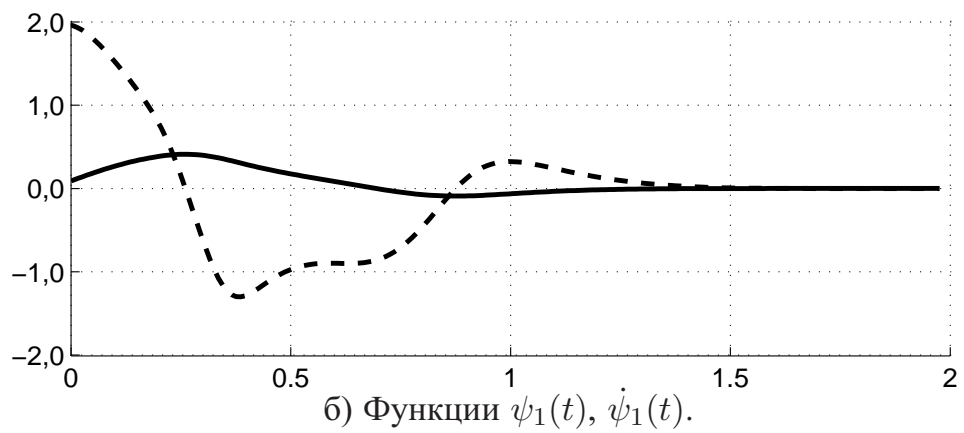
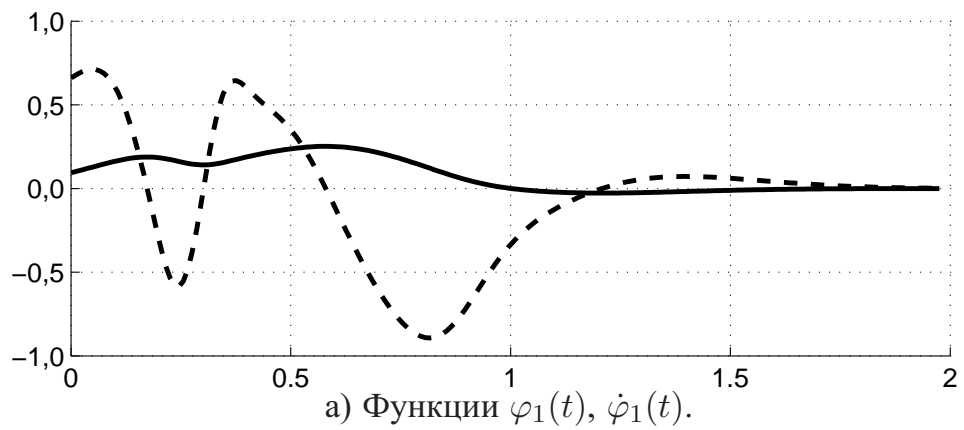


Рисунок 4.2: Угловые координаты и скорости первого звена трехзвенника. Координаты показаны сплошными линиями, скорости – пунктирными.

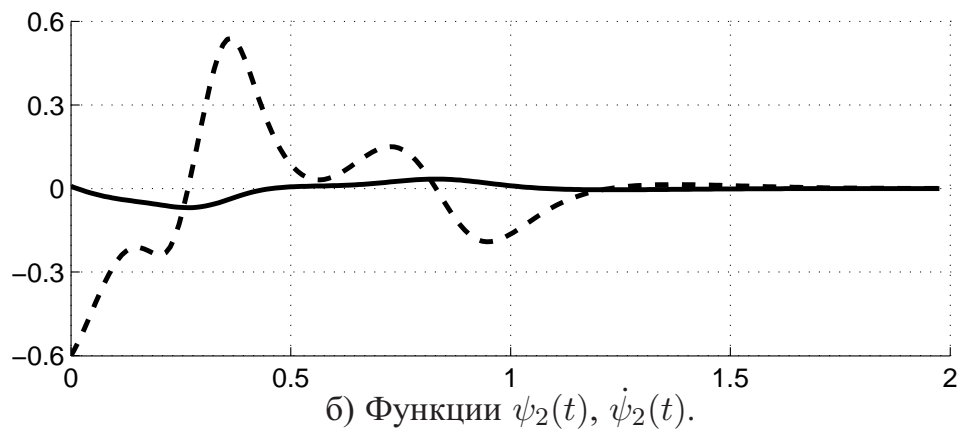
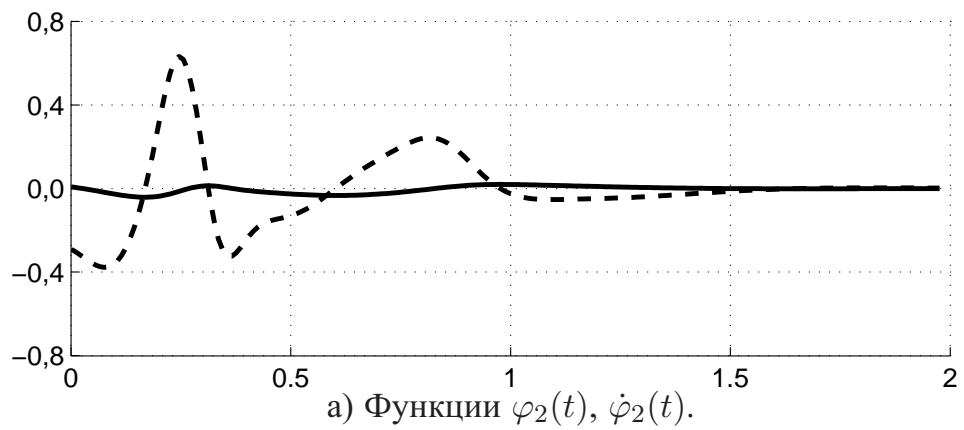


Рисунок 4.3: Угловые координаты и скорости второго звена трехзвенника. Координаты показаны сплошными линиями, скорости – пунктирными.

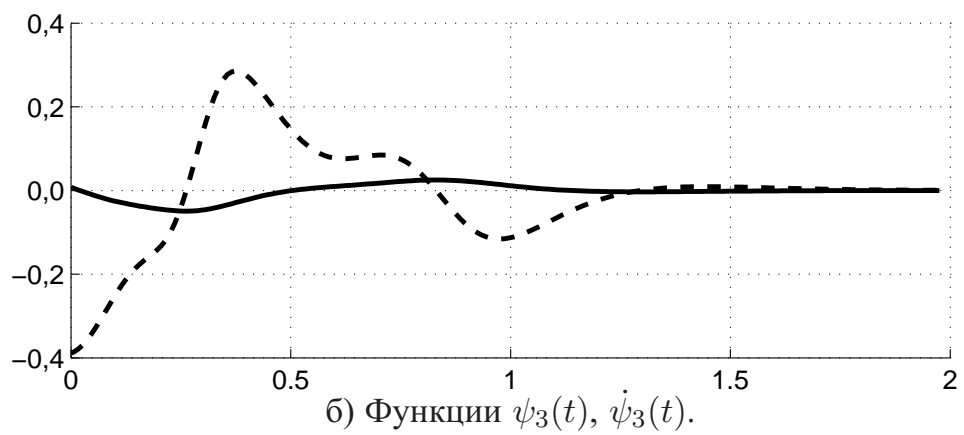
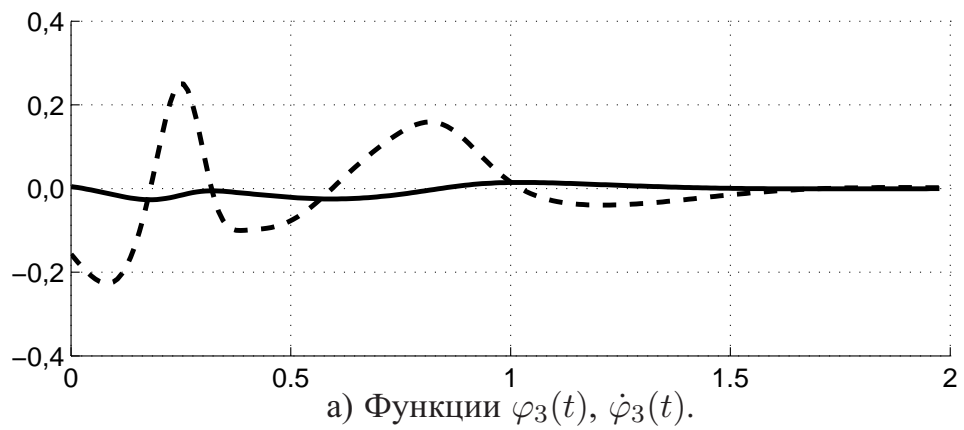


Рисунок 4.4: Угловые координаты и скорости третьего звена трехзвенника. Координаты показаны сплошными линиями, скорости – пунктирными.

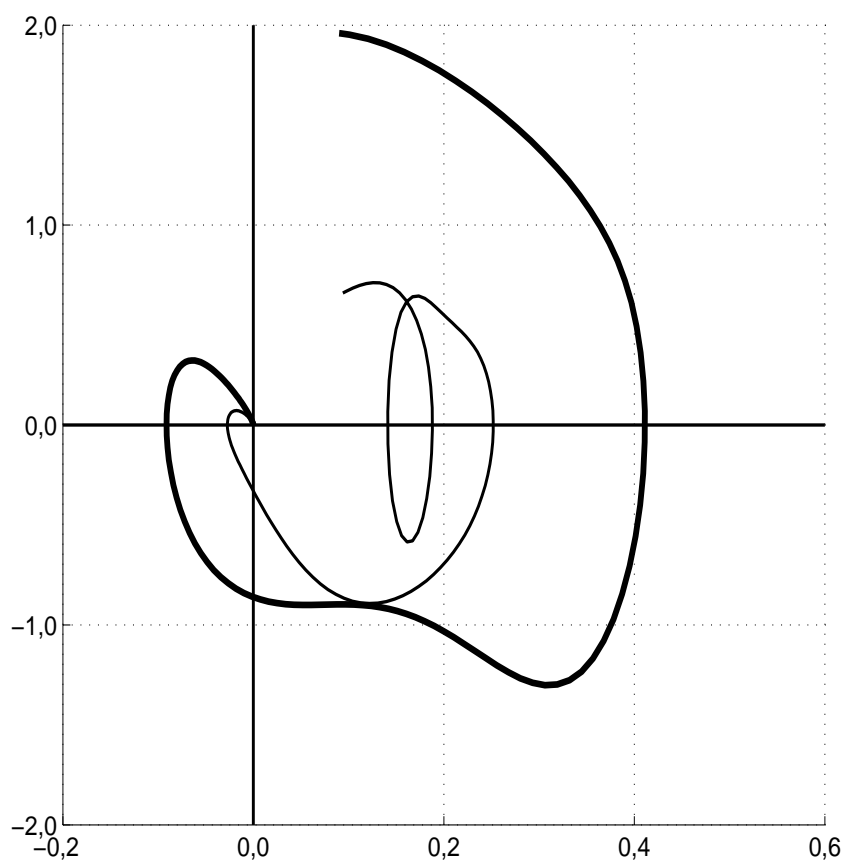


Рисунок 4.5: Фазовые траектории движения первого звена. Зависимость $\dot{\varphi}_1(\varphi_1)$ показана тонкой линией, зависимость $\dot{\psi}_1(\psi_1)$ – утолщенной.

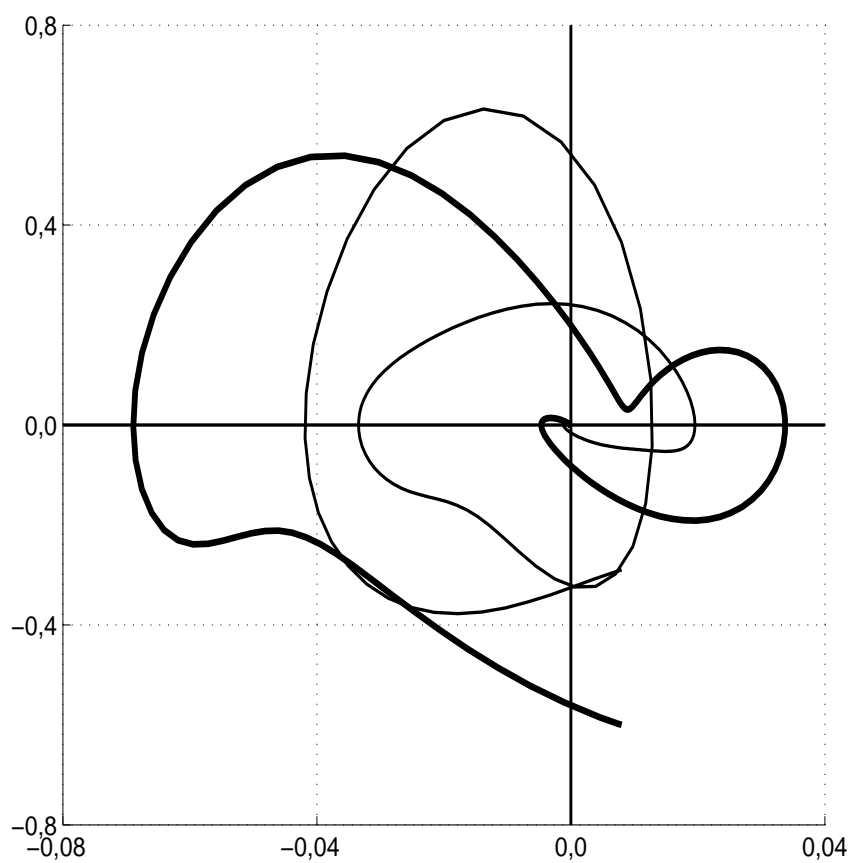


Рисунок 4.6: Фазовые траектории движения второго звена. Зависимость $\dot{\varphi}_2(\varphi_2)$ показана тонкой линией, зависимость $\dot{\psi}_2(\psi_2)$ – утолщенной.

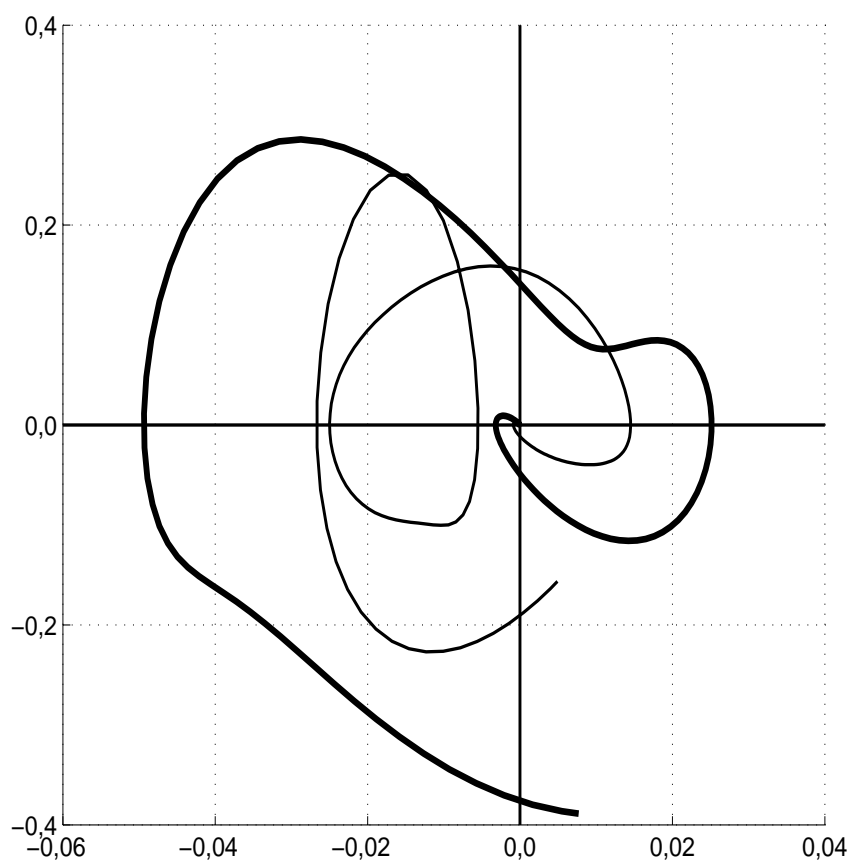


Рисунок 4.7: Фазовые траектории движения третьего звена. Зависимость $\dot{\varphi}_3(\varphi_3)$ показана тонкой линией, зависимость $\dot{\psi}_3(\psi_3)$ – утолщенной.

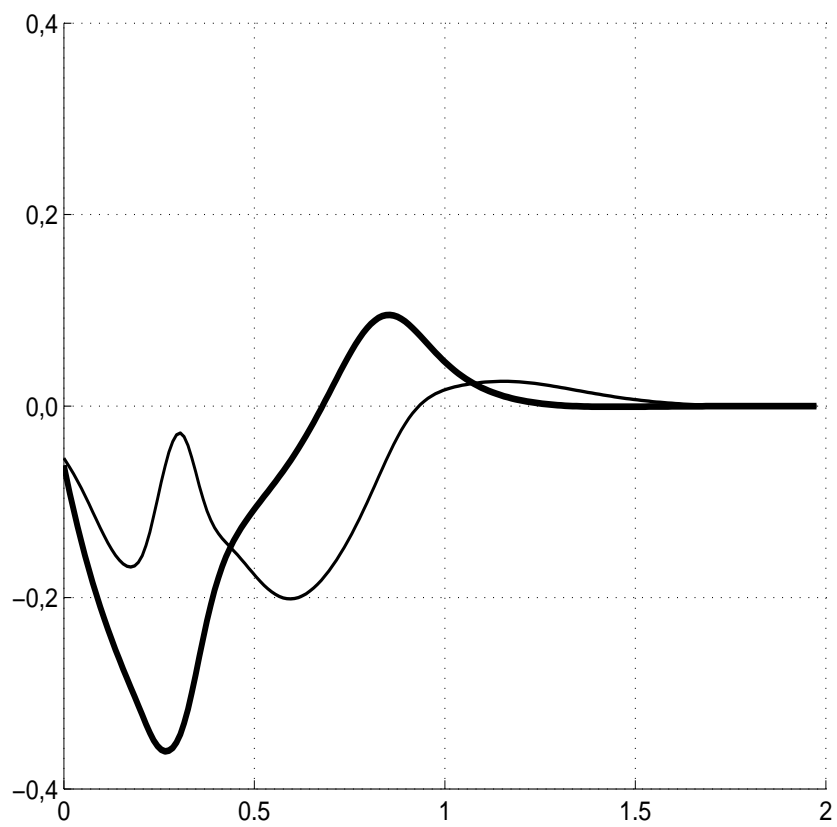


Рисунок 4.8: Управляющие моменты, приложенные к первому звену многозвенника, как функции времени. Зависимость $u_1(t)$ показана утолщенной линией, $u_2(t)$ – обычной.

Заключение

В диссертации изложен подход к решению задач локального синтеза управления для нелинейных механических систем с дефицитом управляющих воздействий. Подход позволяет приводить систему из окрестности произвольного положения равновесия в это положение равновесия за конечное время с помощью ограниченного по модулю управления. При этом используется синтез управления для линеаризованной системы с применением техники линейных матричных неравенств. Показано, что предложенный подход применим к системам с гладкой правой частью и при условии полной управляемости линейной модели. Эффективность метода продемонстрирована на примере задач управления перевернутым многозвенным маятником, управляемым моментом, приложенным к первому звену.

Литература

1. *Акуленко Л. Д., Болотник Н.Н.* Синтез оптимального управления транспортными движениями промышленных роботов // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4.
2. *Акуленко Л. Д.* Оптимальные управления движениями бифилярного маятника // Прикладная математика и механика. 2004, т. 68, вып. 5.
3. *Акуленко Л. Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987
4. *Акуленко Л. Д.* Конструктивное управление движением колебательных систем с дискретными и распределенными параметрами // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4.
5. *Ананьевский И. М.* Управление механической системой с неизвестными параметрами посредством ограниченной силы // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 1. С. 52 – 62.
6. *Ананьевский И. М.* Ограниченное управление механической системой в условиях неопределенности // Докл. РАН. 1998. Т. 359. № 5. С. 607 – 609.
7. *Ананьевский И. М.* Два подхода к управлению механической системой с неизвестными параметрами // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2001. № 2. С. – .
8. *Ананьевский И. М.* Непрерывное управление по обратной связи возмущенными механическими системами // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 2.
9. *Ананьевский И. М.* Синтез непрерывного управления реономной механической системой // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 6.

10. *Ананьевский И.М., Анохин Н.В., Овсеевич А.И.* Синтез ограниченного управления линейными динамическими системами с помощью общей функции Ляпунова // Доклады академии наук. 2010, т. 434, №3. с. 319-323.
11. *Ананьевский И.М., Анохин Н.В., Овсеевич А.И.* Общая функция Ляпунова в задаче синтеза управления линейными динамическими системами. // Сборник научных статей, посвященный 80-летию академика В.М. Матросова. 2013. с. 92-104.
12. *Анохин Н.В.* Приведение многозвенного маятника в положение равновесия с помощью одного управляющего момента. // Известия РАН. Теория и системы управления. №5, С. 44 - 53.
13. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007. 280с.
14. *Беллман Р.* Динамическое программирование. Пер. с англ. М.: ИЛ, 1960.
15. *Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О.* Некоторые вопросы математической теории управления. Пер. с англ. М.: ИЛ, 1962.
16. *Болотник Н.Н., Черноусько Ф.Л.* Оптимизация управления манипуляционными роботами // Изв. АН СССР. Техн.Кибернетика. 1990. № 1.
17. *Брайсон А., Хо Ю-Ши* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
18. *Габриелян М.С., Красовский Н.Н.* К задаче о стабилизации механической системы // ПММ. 1964., Т. 28, вып. 5. С. 801 – 811.
19. *Гамкрелидзе Р.В.* Основы оптимального управления. Изд-во Тбилисского университета, 1977. 253 с.
20. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.
21. *Голубев Ю.Ф.* Робот-эквilibрист на цилиндре // ПММ. 2003., Т. 67, вып. 4. С. 603 – 619.
22. *Журавлёв В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988, 188 с.

23. Журавлёв В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2008, 304 с.
24. Калман Р. Об общей теории систем управления. – Тр. 1-го конгр. Междунар. федерации по автоматич. управлению (IFAC). – М.: Изд-во АН СССР, 1961.
25. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М.: Мир, 1971.
26. Каюмов О.Р. Глобально управляемые механические системы. М.: Наука, 1990, 168 с.
27. Климов Д.М., Руденко В.М. Методы компьютерной алгебры в задачах механики. М.: Наука, 1989, 168 с.
28. Ковалева А.С. Управление колебаниями и виброударными системами. М.: Физматлит, 2007, 168 с.
29. Коробов В.И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости // Мат. сборник. 1979. Т. 109(151). №4(8).
30. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
31. Лавровский Э.К., Формальский А.М. Синтез оптимального управления раскачиванием и торможением двузвенного маятника // ПММ. 2001., Т. 65, вып. 2. С. 225 – 234.
32. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.-Ижевск: R&C Dynamics, 2007, 592 с.
33. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. Методы стабилизации неустойчивых объектов // Гироскопия и навигация. 2005. № 2 (49). С. 7 – 18.
34. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. Проблемы управления неустойчивыми системами // Успехи Мех. 2005. Т 69. вып. 3. С. 73 – 135.
35. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. Маятник на подвижном основании // Докл. РАН 2011. Т. 439. № 6. С. 746 – 751.
36. Охоцимский Д.Е., Гришин А.А., Ленский А.В., Формальский А.М. О стабилизации неустойчивых систем // Сб. науч.-метод. статей. Теоретическая механика. Вып. 24. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2003. – С. 39 – 52.

37. *Первозванский А. А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986.
38. *Пятницкий Е. С.* Критерий полной управляемости классов механических систем с ограниченными управлениями // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5.
39. *Пятницкий Е. С.* Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 2.
40. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. - 303 с.
41. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: УРСС, 2014. 560 с.
42. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкrelидзе Р.В.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
43. *Попов Е.П.* Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1988. – 255с.
44. *Решмин С.А.* Метод декомпозиции в задаче управления двойным маятником с использованием одного управляющего момента // Изв. РАН: Теор. и сист. упр. 2005. V 14., № 6. С. 28 – 46.
45. *Решмин С. А., Черноусько Ф. Л.* Оптимальное по быстродействию управление перевернутым маятником в форме синтеза // Изв. РАН: Теор. и сист. упр. 2006. № 3. С. 51 – 62.
46. *Решмин С. А., Черноусько Ф. Л.* Оптимальное по быстродействию управление перевернутым маятником в форме синтеза // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006, 3. С. 51-62.
47. *Решмин С. А., Черноусько Ф. Л.* Оптимальный по быстродействию синтез управления нелинейным маятником // Изв. РАН: Теор. и сист. упр. 2007. № 1. С. 13 – 22.
48. *Розенблат Г. М.* Механика в задачах и решениях. - М.: Едиториал УРСС, 2004. - 160 с.

49. *Розенблат Г. М.* О вибрационной стабилизации волчка Лагранжа // ПММ, т. 48, №3, 1984. - С. 113-118.
50. *Романов И. В.* О невозможности приведения плоской мембраны в состояние покоя с помощью граничных сил // Автоматика и телемеханика. 2012. № 12. С. 56-64.
51. *Романов И. В.* Точное управление колебаниями прямоугольной пластины с помощью граничных сил // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2011. № 4. С. 49-53.
52. *Романов И. В., Шамаев А. С.* Управление колебаниями мембран и пластин с помощью граничных сил // Доклады академии наук. 2011. Т. 438. № 3. С. 318-322.
53. *Уткин В. И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981.
54. *Фельдбаум А.А., Бутковский А.Г.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1971.- 744с.
55. *Формальский А. М.* Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974.
56. *Формальский А. М.* Управление движением неустойчивых объектов. М.: Физматлит, 2012. – 232 с.
57. *Формальский А. М.* О стабилизации двойного перевернутого маятника при помощи одного управляющего момента // Изв. РАН: Теор. и сист. упр. 2006. № 3. С.5 12.
58. *Формальский А. М.* О стабилизации перевернутого маятника с неподвижной или подвижной точкой подвеса // Доклады РАН, Т. 406, № 2, С. 175 – 179.
59. *Черноусько Ф. Л., Колмановский В.Б.* Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1978.
60. *Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г.* Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. М.: Наука, 1989. – 368 с.

61. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. – 328 с.
62. Черноусько Ф.Л. Оптимальное управление для одного класса систем, подверженных возмущениям // Прикладная математика и механика. 2004, т. 68, вып. 4. С. 564-572.
63. Черноусько Ф.Л. Оптимальное перемещение маятника // Прикладная математика и механика. 1975, т. 39, вып. 5.
64. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
65. Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. Численные методы. М.: Наука, 1973.
66. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980.
67. Черноусько Ф. Л. Синтез управления нелинейной динамической системой.// Прикладная математика и механика. 1992, т. 56, вып. 2.
68. Черноусько Ф. Л. Декомпозиция и субоптимальное управление в динамических системах.// Прикладная математика и механика. 1990, т. 54, вып. 6.
69. Черноусько Ф. Л. Ограниченное управление в системах с распределёнными параметрами.// Прикладная математика и механика. 1992, т. 56, вып. 5.
70. I.M. Ananievski, N.V. Anokhin, A.I. Ovseevich Design of Bounded Feedback Controls for Linear Dynamical Systems by Using Common Lyapunov Functions // Chinese Journal of Theoretical & Applied Mechanics Letters. V. 1, 013001-1-013001-3 (2011)
71. Angeli D. Almost global stabilization of the inverted pendulum via continuous state feedback // Automatica. –2001. – Vol. 37. P. 1103 – 1108.
72. Astrom K.J., Furuta K. Swinging up a pendulum by energy control // Automatica. –2000. – Vol. 36. № 2. P. 287 – 295.

73. *Bortoff J., Spong M.W.* Pseudolinearization of the acrobot using spline functions // Proc. IEEE Conf. on Decision and Control. – Tuscan, 1992. – P. 593 – 598.
74. *Brunovsky P. A.* A classification of linear controllable systems // Kybernetika. 1970. V. 6. № 3, p. 173–188.
75. *Chernousko F. L.* Minimax control for a class of linear systems subject to disturbances // Journal of Optimization Theory and Applications. 2005, vol. 127, N 3. P. 535 – 548.
76. *Fantoni I., Lozano R., Spong M. W.* Energy based control of the pendubot // IEEE Transactions Automatic Control.– 2000. – V. 45. – P. 725 – 729.
77. *Furuta K.* Control of pendulum: From super mechano-system to human adaptive mechatronics // Proc. IEEE Conf. on Decision and Control. CDC03. – 2003. – P. 1498 – 1507.
78. *Isidori A.* Nonlinear Control Systems. 3 edition. – New York: Springer-Verlag, 1995.
79. *Lam S., Davison E. J.* The real stabilizability radius of the multi-link inverted pendulum // American Control Conference, Minneapolis, MN, USA, June 14-16, 2006, pp. 1814-1819.
80. *Leitmann G.* Deterministic control of uncertain systems // Acta Astronautica. – 1980. – V. 7. P. 1457 – 1461.
81. *Nijmeijer H., van der Schaft A.J.* Nonlinear Dynamic Control Systems // New York: Springer-Verlag, 1990.
82. *Olfati-Saber R.* Control of underactuated mechanical systems with two degrees of freedom and symmetry // Proc. Amer. Control Conf. – Chicago, 2000. P. 4092 – 4096.
83. *Olfati-Saber R.* Normal forms for underactuated mechanical systems with symmetry // IEEE Trans. Automat. Control. 2002. V. 47, № 2. P 305 – 308.
84. *Olfati-Saber R.* Normal forms for underactuated mechanical systems with symmetry // IEEE Trans. Automat. Control. 2002. V. 47, № 2. P 305 – 308.

85. *Schaefer I.F., Cannon R.F.* On the control of unstable mechanical systems // Proc. IFAC 3d Congress. London: 1996.
86. *Xu Y., Iwase M., Furuta K.* Time optimal swing-up control of a single pendulum // Transactions of the ASME. – 2001. – V. 123. P. 518 – 527.
87. *Van der Schaft A.J., Maschke B.* Modelling and control of mechanical systems. Imperial college press, 1995.