

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ им.  
А.Ю. ИШЛИНСКОГО  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи  
*УДК 531.01*

ШУНДЕРЮК МИХАИЛ МИРОСЛАВОВИЧ

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНВАРИАНТНОЙ  
НОРМАЛИЗАЦИИ К ПОСТРОЕНИЮ АСИМПТОТИЧЕСКИХ  
РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ГАМИЛЬТОНОВОЙ  
МЕХАНИКИ**

Специальность 01.02.01 —  
«Теоретическая механика»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н., профессор  
Петров Александр Георгиевич

Москва – 2014

# Оглавление

Введение	5
<b>1 Гамильтонова нормальная форма</b>	<b>15</b>
1.1 Определение гамильтоновой нормальной формы . . .	15
1.1.1 Комплексная гамильтонова нормальная форма	15
1.1.2 Частные случаи нормальной формы . . . . .	17
1.2 Нормальная форма вещественных квадратичных гамильтонианов . . . . .	18
1.2.1 Системы с одной степенью свободы . . . . .	19
1.2.2 Системы с двумя степенями свободы . . . . .	20
1.2.3 Системы с $n$ степенями свободы . . . . .	22
1.3 Нормализация квадратичных гамильтонианов в случае действительных либо мнимых корней характеристического полинома . . . . .	24
1.4 Нормальные формы для нелинейных систем с двумя степенями свободы . . . . .	26
1.4.1 Общий вид нормальной формы . . . . .	26
1.4.2 Нормальная форма при отсутствии резонансов	26
1.4.3 Нормальная форма при наличии резонансов .	27
<b>2 Инвариантная нормализация</b>	<b>31</b>
2.1 Методы вычислений нормальных форм . . . . .	31
2.1.1 Нормализация с помощью производящих функций Якоби . . . . .	31

2.1.2	Нормализация с помощью рядов Ли . . . . .	33
2.1.3	Нормализация с помощью параметрической производящей функции . . . . .	38
2.2	Нормализация гамильтонианов, представленных в виде степенных разложений с произвольными коэффициентами . . . . .	38
2.3	Интеграл приближенной системы в случае, когда квадратичный гамильтониан не приведен к нормальной форме . . . . .	55
<b>3</b>	<b>Движения в окрестностях коллинеарных точек либрации круговой ограниченной задачи трех тел</b>	<b>58</b>
3.1	Постановка и актуальность задачи . . . . .	58
3.2	Разложения гамильтониана . . . . .	61
3.3	Нормализация квадратичного гамильтониана в окрестностях коллинеарных точек либрации . . . . .	63
3.4	Сравнение результатов с ранее известными . . . . .	66
3.5	Асимптотические разложения нормальной формы гамильтониана для точек либрации . . . . .	67
3.6	Ограниченные решения . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Двухмерные колебания тяжелой материальной точки на пружине</b>	<b>76</b>
4.1	Постановка задачи . . . . .	78
4.2	Нерезонансный случай . . . . .	81
4.3	Резонанс 1:1 . . . . .	83
4.4	Двоякопериодическое решение в окрестности резонанса 2:1 . . . . .	90
	<b>Заключение</b>	<b>94</b>
	<b>Публикации автора по теме диссертации</b>	<b>98</b>

Список иллюстраций	102
Список таблиц	104

# Введение

Одним из самых мощных из имеющихся методов асимптотического интегрирования нелинейных механических гамильтоновых систем является гамильтонова нормальная форма. Нормальная форма значительно упрощает уравнения Гамильтона системы, позволяет по виду нормальной формы судить об устойчивости положения равновесия системы, в том числе в резонансных случаях, а также получать асимптотическое решение при помощи интеграла приближенной системы. Практическое применение метода ограничивается высокой трудоемкостью вычисления гамильтоновой нормальной формы для систем с несколькими степенями свободы, особенно при наличии параметров. Продвижение методов вычисления гамильтоновой нормальной формы для решения задач теоретической механики определяет актуальность темы диссертации.

Целями работы являются:

1. Решение актуальных задач теоретической механики.
2. Нахождение методом инвариантной нормализации общего вида нормальной формы гамильтонианов механических систем, представленных в виде степенных разложений с произвольными коэффициентами.

Для достижения цели решались следующие задачи:

1. Найти нормальную форму гамильтониана и впоследствии

исследовать асимптотические решения следующих задач нелинейной механики:

- Движения тел вблизи коллинеарных точек либрации пространственной ограниченной круговой задачи трех тел.
  - Нелинейные двухмерные колебания тяжелой материальной точки на пружине при резонансах  $1:1$ ,  $1:3$ , а также при малом отклонении от резонанса  $1:2$ .
2. Найти общий вид нормальных форм для гамильтонианов, представленных в виде степенных разложений по координатам и импульсам, для случаев:
- 2 степени свободы: нормальная форма при отсутствии резонанса и при резонансах  $1:1$ ,  $1:2$ ,  $1:3$  вплоть до членов 4-го порядка.
  - 3 степени свободы: нормальная форма вплоть до 4-го порядка в отсутствие резонансов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Найдена нормальная форма гамильтониана вплоть до членов 4-го порядка для тела, движущегося в окрестностях коллинеарных точек либрации пространственной ограниченной круговой задачи трех тел. На ее основе получены следующие результаты:
- Асимптотическое, с точностью до 4-х степеней координат и импульсов, решение в элементарных функциях уравнений Гамильтона системы.
  - Условия финитности асимптотических решений для начальных условий по координатам и импульсам.
2. Найдена нормальная форма гамильтониана вплоть до членов 4-го порядка для тяжелой материальной точки на нелинейной пружине в плоском случае при резонансах  $1:1$  и  $1:3$ .

На ее основе рассчитан период перекачки энергии между степенями свободы колебаний как функция от начальных условий. Рассчитаны период перекачки энергии при малом отклонении от резонанса 1:2 и минимальная расстройка частот, приводящая к исчезновению эффекта перекачки.

3. Для нелинейных механических гамильтоновых систем, гамильтониан которых представлен в виде степенных разложений с произвольными коэффициентами, найден общий вид нелинейной нормальной формы. Результаты сведены в таблицы, позволяющие определять нормальные формы гамильтонианов с 2-мя и 3-мя степенями свободы без трудоемких вычислений. Найден общий вид интеграла приближенной системы для некоторых частных случаев ненормализованного квадратичного гамильтониана.
4. Для получения вышеперечисленных результатов разработан программный комплекс, позволяющий автоматически приводить к нормальной форме степенные разложения гамильтонианов механических систем, в том числе при наличии параметров. Программный комплекс также позволяет находить интеграл приближенной системы для случаев, когда квадратичная часть гамильтониана не приведена к нормальной форме.

Практическая значимость диссертационной работы определяется возможностью применения полученных результатов для быстрого расчета любой гамильтоновой нормальной формы для любой нелинейной механической гамильтоновой системы с параметрами. Для этого достаточно подставить коэффициенты степенного разложения гамильтониана в полученные формулы для коэффициентов нормальной формы. Таким образом, при исследовании нелинейных гамильтоновых систем с параметром появляется интеграл приближенной системы, а по виду

нормальной формы можно судить об устойчивости положения равновесия.

Особенность коллинеарных точек либрации в пространственной ограниченной круговой задаче трех тел состоит в том, что в линейной задаче из шести характеристических корней только один положительный. Поэтому в шестипараметрическом семействе орбит существует пятипараметрическое семейство орбит, не имеющих экспоненциального по времени роста ни по одной фазовой переменной. На этих орбитах космический аппарат может оставаться в течение длительного времени, затрачивая небольшое количество топлива на компенсацию развития неустойчивости.

Практической ценностью модели пружинного маятника является ее физическая аналогия двумерным колебаниям атомов внутри молекул, которые в случае резонанса обнаруживаются при спектральном анализе (резонанс Ферми).

Достоверность изложенных в работе результатов обеспечивается их сравнением с ранее полученными и опубликованными другими авторами результатами для частных случаев. Например, полученная в зависимости от приведенной массы нормальная форма гамильтониана движения тела в окрестностях коллинеарных точек либрации ограниченной круговой задачи трех тел сравнивается с ранее вычисленной нормальной формой для частного случая системы Земля-Луна. Во всех случаях приводится сравнение асимптотического решения с численным решением задачи для исходного гамильтониана.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и симпозиумах:

- 56-я научная конференция МФТИ (Россия, Москва, 2013).
- 55-я научная конференция МФТИ (Россия, Москва, 2012).
- X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Россия, Нижний

Новгород, 2011).

- XI Международная конференция "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (Россия, Москва, 2010).
- Imperial College London. International Workshop on Resonance Oscillations and Stability of Nonsmooth Systems (Великобритания, Лондон, 2009).

Выполнялись доклады на научных семинарах в Институте проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН, Механико-математическом факультете МГУ, Институте механики МГУ, Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН.

Диссертационная работа была выполнена при поддержке грантов РФФИ №07-01-00129-а и №11-01-00535-а.

**Личный вклад.** Автор разработал программный комплекс для вычисления параметрической нелинейной гамильтоновой формы, самостоятельно и в соавторстве осуществлял решение поставленных задач работы.

Основные результаты по теме диссертации изложены в 13 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 11 – в тезисах докладов.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Полный объем диссертации **113** страниц текста с **13** рисунками и 20 таблицами. Список литературы содержит **90** наименований.

**Содержание работы.** Во введении обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

**Первая глава** посвящена общему описанию нелинейных гамильтоновых систем, применению метода возмущений

для поиска асимптотических решений. Приводится строгое определение гамильтоновой нормальной формы, квадратичной и нелинейной. Обосновывается польза от нормальной формы гамильтониана. Демонстрируются примеры нормальной формы и того, как она позволяет упрощать решения и исследования гамильтоновых систем. Проводится классификация различных видов нормальных форм квадратичных гамильтонианов в зависимости от числа степеней свободы и значений собственных чисел матрицы квадратичной формы.

**Вторая глава** посвящена существующим в настоящее время алгоритмам поиска нормальной формы гамильтонианов, как квадратичных, так и нелинейных. Приводится предложенный В.Ф. Журавлёвым [29, 31, 33] алгоритм инвариантной нормализации и описание его реализации при выполнении диссертационной работы. Демонстрируется общий вид нормальной формы гамильтониана для нескольких степеней свободы и при наличии резонансов между модами колебаний.

**В третьей главе** приведено решение задачи о движениях тела в окрестностях коллинеарных точек либрации ограниченной круговой задачи трех тел, полученное с помощью алгоритма инвариантной нормализации. Рассматривается движение тела малой массы  $m_3$  под действием притяжения двух небесных тел, обладающих конечными массами  $m_1$  и  $m_2$  (например, движение космического аппарата, притягиваемого Землей и Луной). Для определенности считается  $m_1 > m_2$ , а также  $m_1 + m_2 = 1$ . Предполагается, что тело малой массы не влияет на движение конечных масс, движение всех трех тел происходит в одной плоскости, а также тела конечных масс движутся по круговым орбитам. Точки, в которых тело малой массы находится в состоянии относительного равновесия по отношению к телам конечных масс, называют точками либрации. В ограниченной задаче трех тел существуют три коллинеарных точки либрации, лежащие на прямой, соединяющей тела конечных масс, и две

треугольные точки либрации, расположенные таким образом, что два тела и точки либрации образуют равносторонние треугольники.

Движения тел в окрестностях треугольных точек либрации хорошо изучены, в том числе с учетом влияния Солнца и других тел, а также в случае пространственной эллиптической задачи. Для них найдены три типа периодических движений, условия устойчивости, рассмотрены все типы резонансов (А.П. Маркеев, [47]).

Все три коллинеарные точки либрации круговой ограниченной задачи трех тел неустойчивы по Ляпунову. Несмотря на это, расположение космического аппарата в любой из неустойчивых точек либрации является выгодным для решения ряда задач.

Особенность коллинеарных точек либрации состоит в том, что в линейной задаче из шести характеристических корней только один положительный. Поэтому в шестипараметрическом семействе орбит существует пятипараметрическое семейство орбит, не имеющих экспоненциального по времени роста ни по одной фазовой переменной. На этих орбитах космический аппарат может оставаться в течение длительного времени, затрачивая небольшое количество топлива на компенсацию развития неустойчивости.

Вышеперечисленные соображения побудили ряд авторов (А.П. Маркеев, М.Л. Лидов, М.А. Вашковьяк, Gomez G., Jorba A., Richardson L., [44, 47, 85, 86, 88] ) исследовать динамику тела, находящегося в малой окрестности коллинеарной точки либрации. Применялся как метод прямого решения исходных дифференциальных уравнений [44, 88], так и метод нормализации гамильтониана задачи [44, 47, 86]. Рассматривалась [44, 47] эллиптическая задача и были выведены условно-периодические решения для  $L_2$ . В другом исследовании нормализовался только квадратичный гамильтониан, а затем нормализовалась только та часть нелинейного гамильтониана, которая соответствует

неустойчивой степени свободе [86]. Это также позволило вывести условно-периодические решения. Все решения, однако, были получены только численно для частных случаев для систем Солнце–Земля и Земля–Луна (в частности, с параметрической зависимостью от эксцентриситета орбиты [44, 47]).

В настоящей работе благодаря применению алгоритма инвариантной нормализации найдена нормальная форма гамильтониана вплоть до членов 4-го порядка для тела, движущегося в окрестностях коллинеарных точек либрации пространственной ограниченной круговой задачи трех тел. На ее основе получены асимптотическое, с точностью до 4-х степеней координат и импульсов, решение в элементарных функциях уравнений Гамильтона системы, а также условия финитности асимптотических решений для начальных условий по координатам и импульсам.

**Четвертая глава** содержит постановку задачи о нелинейных двухмерных колебаниях тяжелой материальной точки на пружине и ее асимптотическое решение при помощи аппарата нормальной формы. Задача решается при отсутствии резонанса и при резонансах 1:1 и 1:3 между модами колебаний. Рассматривается также случай расстройки резонанса 1:2 при внесении малого возмущения в частоту одной из мод колебаний. Оказывается, что для асимптотического решения подобной задачи также применим алгоритм инвариантной нормализации.

Задача о пружинном маятнике была рассмотрена впервые А.А. Виттом и Г.С. Гореликом [22] и с тех пор изучалась во многих работах (В.Н. Богаевский, А.П. Маркеев, А.Х. Найфе, А.Г. Петров, В.М. Старжинский, [10, 22, 49, 54, 67, 75]). В работе [54] с учетом квадратичной нелинейности методом уравнений в вариациях задача сведена к уравнению для амплитуды колебаний. Исследование заканчивается констатацией того, что полученное уравнение может быть проинтегрировано в эллиптических функциях Якоби. В [10, 75] найдено периодическое

решение при резонансе частот 1:2. Показано, что колебаний по вертикали являются неустойчивы по отношению к малому начальному отклонению груза по горизонтали. Получена главная асимптотика для периода, в течение которого происходит перестройка вертикальных колебаний в горизонтальные. В [75] применяется метод Ляпунова-Пуанкаре, а в работе [49] - метод нормальной формы. В последней работе исследованы общие свойства нелинейных условно-периодических движений в малой окрестности положения равновесия гамильтоновой системы как для случая точной соизмеримости частот 2:1, так и при наличии расстройки. Изучены вопросы орбитальной устойчивости коротко-периодических и долго-периодических решений. При помощи КАМ-теории показано, что большинство условно-периодических решений сохраняется и для системы с полным гамильтонианом. Задача о качающейся пружине рассматривается как частный пример системы с гамильтонианом, относящимся к исследуемому классу.

А.Г. Петровым получена [67] асимптотическая зависимость периода перекачки энергии между модами колебаний от начальных условий в случае резонанса 1:2, а также рассмотрен пространственный случай (резонанс 1:1:2) [68].

Практической ценностью модели пружинного маятника является ее физическая аналогия двумерным колебаниям атомов внутри молекул, которые в случае резонанса обнаруживаются при спектральном анализе (резонанс Ферми). Впервые эта аналогия была отмечена еще А.А. Виттом и Г.С. Гореликом [22].

Целью исследований, проводимых в диссертации, являлся поиск асимптотической зависимости периода перекачки энергии между модами колебаний от начальных условий для различных соотношений между частотами колебаний: резонанс 1:1 и малое отклонение от резонанс 1:2.

В случае линейного закона зависимости силы натяжения от удлинения пружины ("линейная пружина") частота

колебаний вертикальной моды всегда выше частоты колебаний горизонтальной моды. Для нелинейной пружины частоты могут быть равными. Это приводит к появлению в этой системе резонанса нового типа 1:1, не исследованного до сих пор. Этот вопрос и является основным предметом обсуждения. Для этого резонанса, так же как и для резонанса 1:2, получено решение, описывающее процесс перекачки энергии от одной моды колебаний к другой. Кроме того, исследован нерезонансный случай. В отличие от резонанса 1:2 здесь недостаточно исследовать гамильтониан с точностью до кубических членов, а требуется также учитывать члены четвертого порядка.

Решения гамильтоновых уравнений нормальной формы показали, что периодическая перестройка колебаний между вертикальной и горизонтальной модами происходит только в случае резонансов 1:1 и 1:2. При резонансе 1:2 этот эффект проявляется в квадратичных членах уравнения, а при резонансе 1:1 – с учетом кубических членов. Во всех остальных случаях, как при наличии резонанса, так и при его отсутствии, колебания происходят с двумя постоянными частотами, мало отличающимися от частот линейного приближения. Для резонанса 1:2 найдена максимальная расстройка частоты, при которой эффект перекачки энергии от одной моды колебаний к другой исчезает.

**В заключении** приведены основные результаты работы.

# Глава 1

## Гамильтонова нормальная форма

### 1.1 Определение гамильтоновой нормальной формы

#### 1.1.1 Комплексная гамильтонова нормальная форма

Классический подход определения нормальной формы построен на алгебраических преобразованиях полиномиальных однородных форм [4, 9, 12]. Изложим суть метода нормальной формы, следуя известным результатам [15].

Пусть  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \stackrel{\text{def}}{=} (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  — независимые переменные,  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  — функция Гамильтона автономной системы Гамильтона:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}. \quad (1.1)$$

Пусть  $\mathbf{q} = \mathbf{p} = 0$  — неподвижная точка системы (1.1) и функция  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  в ней аналитична. Тогда функция  $H$  разлагается в степенной ряд по  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ :

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots, \quad (1.2)$$

где  $H_k$  — однородные полиномиальные формы переменных  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  степени  $k$ .

Ряд  $H$  начинается с квадратичной формы  $H_2$ , а степенные разложения правых частей системы (1.1) — с линейных по

переменным  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  членов. Зададимся целью упростить эти степенные разложения с помощью канонических преобразований.

Пусть  $R$  — матрица линейной части системы (1.1), а  $D$  — симметричная матрица квадратичной формы гамильтониана  $H_2$ . Уравнения Гамильтона для  $H_2$  в матричном виде запишутся следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad R = ID, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

где  $E_n$  — единичная матрица размерности  $n \times n$ .

Характеристический многочлен  $\det(\lambda E_{2n} - ID)$  степени  $2n$  имеет  $2n$  корней (с учетом кратности), причем для любого корня  $\lambda$  корнем будет являться и  $-\lambda$ . Действительно, определитель матрицы  $I$  равен 1, и поэтому  $\det(\lambda E_{2n} - ID) = \det(\lambda I + D)$ . Определитель не меняется и при транспонировании матрицы, поэтому имеем  $\det(\lambda I + D) = \det(-\lambda I + D)$ , откуда следует требуемое утверждение.

Кроме того, если система (1.1) вещественная, то для каждого комплексного корня  $\lambda = a + bi$  существует также сопряженный корень  $\bar{\lambda} = a - bi$ , поскольку все коэффициенты характеристического многочлена вещественные.

Таким образом, собственные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$  матрицы  $R$  разбиваются на пары  $\lambda_{j+n} = -\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Посредством линейной канонической замены координат

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

матрица  $R$  всегда приводится к матрице  $\tilde{R} = A^{-1}RA$ , имеющей либо диагональный вид с собственными числами  $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$  на диагонали, либо вид жордановой клетки (если есть равные собственные числа). Далее будем считать, что равных собственных чисел нет.

Обозначим  $\tilde{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = H(\mathbf{q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{p}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ .

Пусть формальная нелинейная комплексная каноническая замена координат

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) + \mathbf{N}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}), \quad (1.5)$$

где  $\mathbf{N} \stackrel{\text{def}}{=} (N_1, \dots, N_{2n})$ ,  $N_j(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$  — степенные ряды без свободных и линейных членов, приводит функцию Гамильтона  $\tilde{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  к виду

$$h(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum h_s z_1^{s_1} \dots z_n^{s_n} \bar{z}_1^{s_{n+1}} \dots \bar{z}_n^{s_{2n}}, \quad \dot{z}_j = \frac{\partial h}{\partial \bar{z}_j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.6)$$

**О п р е д е л е н и е.** Формальная функция Гамильтона (1.6) называется *комплексной нормальной формой*, если

1) у соответствующей системы Гамильтона матрица линейной части имеет нормальную форму, на диагонали которой расположены собственные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, -\lambda_1, \dots, -\lambda_n$ ;

2) в разложении (1.6) имеются только *резонансные члены*. Они подчинены условиям

$$s_1 \lambda_1 + \dots + s_n \lambda_n - s_{n+1} \lambda_1 - \dots - s_{2n} \lambda_n = 0. \quad (1.7)$$

В ([13], § 12; 2, гл. I) доказано, что для всякой системы (1.1) существует формальная замена (1.5), приводящая функцию Гамильтона  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  к нормальной форме (1.6), (1.7).

Если исходная система (1.1) вещественная, то комплексная нормальная форма (1.6), (1.7) линейным каноническим преобразованием может быть приведена к вещественной форме. Причём от исходной системы (1.1) к вещественной нормальной форме можно перейти вещественной канонической заменой переменных. Виды вещественных нормальных форм будут описаны в параграфе 1.2.

### 1.1.2 Частные случаи нормальной формы

В качестве частных случаев рассмотрим нормальные формы Биркгофа [9] и Черри–Густавсона.

Биркгоф [9] рассмотрел случай, когда все  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  – чисто мнимые несоизмеримые числа, то есть уравнение  $\lambda_1(s_1 - s_{n+1}) + \dots + \lambda_n(s_n - s_{2n}) = 0$  в целых  $s_i$  имеет только нулевое решение  $s_1 - s_{n+1} = \dots = s_n - s_{2n} = 0$ .

Черри рассмотрел случай, когда собственные числа  $\pm\lambda_1, \dots, \pm\lambda_n$  произвольны и матрица  $R$  может быть приведена к диагональному виду. Этот результат переоткрыл Густавсон. Квадратичная часть комплексной нормальной формы Черри-Густавсона имеет такой же вид, как и в случае Биркгофа. Полиномы более высоких степеней в (1.6) содержат только резонансные члены, подчинённые условию (1.7). Матрица  $R$  может быть приведена к диагональному виду, если все собственные числа различны. Квадратичная часть комплексной нормальной формы Биркгофа и Черри-Густавсона имеет вид

$$h_2 = \lambda_1 z_1 \bar{z}_1 + \lambda_2 z_2 \bar{z}_2 + \dots + \lambda_n z_n \bar{z}_n, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.8)$$

В этом случае разложение (1.6) является рядом по  $n$  переменным  $z_1 \bar{z}_1, \dots, z_n \bar{z}_n$  и каждое такое произведение является формальным интегралом соответствующей системы Гамильтона. Если же среди собственных чисел имеются равные, то матрица  $R$  приводится либо к диагональному виду и тогда нормальная форма определяется также как и в случае Черри-Густавсона, либо к жордановой клетке. В случае жордановой клетки определение нормальной формы дал А.Д. Брюно [12].

## 1.2 Нормальная форма вещественных квадратичных гамильтонианов

Подробно разберём все возможные виды нормальной формы для гамильтонианов, представленных в виде квадратичной формы по переменным  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ . Для квадратичных гамильтонианов с действительными либо мнимыми корнями характеристического

полинома существует довольно простой алгоритм, позволяющий привести гамильтониан к его нормальной форме.

### 1.2.1 Системы с одной степенью свободы

Рассмотрим вещественный гамильтониан, зависящий от двух переменных  $q$  и  $p$ . В этом случае согласно определению гамильтоновой нормальной формы, данного в параграфе 1.1, у характеристического уравнения

$$\det \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} + \lambda \\ d_{12} - \lambda & d_{22} \end{pmatrix} = \lambda^2 - \Delta = 0, \quad \Delta = d_{11}d_{22} - d_{12}^2.$$

существуют 2 корня  $\lambda_1 = -\lambda_2$ . Причем оба корня либо лежат на действительной оси (при  $\Delta > 0$ ), либо на мнимой оси (при  $\Delta < 0$ ).

Определим действительную гамильтонову форму в переменных  $q$  и  $p$ .

1. *Корни действительные*,  $\lambda_1 = -\lambda_2 = \gamma$ . Комплексная и вещественная нормальные формы в этом случае совпадают

$$H(q, p) = \gamma pq. \quad (1.9)$$

Решения уравнений Гамильтона  $q(t) = q(0)e^{\gamma t}$ ,  
 $p(t) = p(0)e^{-\gamma t}$  описывают неустойчивость с инкрементом  $\gamma$ .

2. *Корни мнимые*,  $\lambda_1 = -\lambda_2 = i\omega$ . Аналогично ранее предложенному определению [47] вещественной нормальной формой будем называть

$$H(q, p) = \frac{\omega}{2}(p^2 + q^2). \quad (1.10)$$

Решения уравнений Гамильтона  $q(t) = q(0) \cos(\omega t) + p(0) \sin(\omega t)$ ,  
 $p(t) = p(0) \cos(\omega t) - q(0) \sin(\omega t)$  описывают гармонические колебания с частотой  $\omega$ . Гамильтониан в комплексной нормальной форме имеет вид

$$h(z, \tilde{z}) = i\omega z\tilde{z}. \quad (1.11)$$

Действительная форма получается из комплексной при помощи канонического преобразования Биркгофа валентности  $c = 1/(2i)$

$$z = p + iq, \quad \tilde{z} = p - iq. \quad (1.12)$$

Обратная замена имеет валентность  $c = 2i$ :

$$q = -\frac{i}{2}(z - \tilde{z}), \quad p = \frac{1}{2}(z + \tilde{z}).$$

### 1.2.2 Системы с двумя степенями свободы

Рассмотрим вещественный гамильтониан, зависящий от четырех переменных  $q_1, q_2$  и  $p_1, p_2$ . У характеристического полинома существует 4 корня, которые мы разобьем на две пары:  $\lambda_1 = -\lambda_3$  и  $\lambda_2 = -\lambda_4$ . Будем считать, что в переменных  $q_1, q_2$  и  $p_1, p_2$  гамильтониан находится в нормальной форме.

1. Все корни действительные,  $\lambda_1 = -\lambda_3 = \gamma_1 > 0$ ,  $\lambda_2 = -\lambda_4 = \gamma_2 > 0$ ,  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ . Нормальной формой всегда является

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \gamma_1 p_1 q_1 + \gamma_2 p_2 q_2. \quad (1.13)$$

Комплексная нормальная форма совпадает с действительной.

2. Корни из первой пары действительные, а из второй мнимые,  $\lambda_1 = -\lambda_3 = \gamma > 0$ ,  $\lambda_2 = -\lambda_4 = i\omega$ ,  $\omega > 0$ . Нормальной формой всегда является

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \gamma p_1 q_1 + \frac{\omega}{2}(p_2^2 + q_2^2), \quad (1.14)$$

а комплексной нормальной формой

$$h(\mathbf{z}, \tilde{\mathbf{z}}) = \gamma z_1 \tilde{z}_1 + i\omega z_2 \tilde{z}_2. \quad (1.15)$$

Действительная форма получается из комплексной при помощи замены валентности  $c = 1/(2i)$ :

$$z_1 = \sqrt{2i}q_1 = (1+i)q_1, \quad \tilde{z}_1 = \sqrt{2i}p_1 = (1+i)p_1,$$

$$z_2 = p_2 + iq_2, \quad \tilde{z}_2 = p_2 - iq_2.$$

3. Все корни мнимые,  $\lambda_1 = -\lambda_3 = i\omega_1$ ,  $\lambda_2 = -\lambda_4 = i\omega_2$ ,  
 $\omega_1 > 0$ ,  $\omega_2 > 0$ ,  $\omega_1 \neq \omega_2$ . Нормальной формой является

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\omega_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) + \sigma \frac{\omega_2}{2}(p_2^2 + q_2^2), \quad \sigma = \pm 1. \quad (1.16)$$

Не существует канонической замены, переводящей нормальную форму при  $\sigma = 1$  в нормальную форму при  $\sigma = -1$  [4, 12]. Можно лишь изменить знак гамильтониана в целом, смену же знака изменить нельзя. Поэтому  $\sigma$  является инвариантом гамильтоновой системы [12].

На основе анализа исходного гамильтониана можно определить инвариант  $\sigma$ : если исходная квадратичная форма гамильтониана знакоопределенная, то  $\sigma = 1$ , а в противном случае следует приводить систему к нормальной форме с  $\sigma = -1$ .

Комплексная нормальная форма имеет вид

$$h(\mathbf{z}, \tilde{\mathbf{z}}) = i\omega_1 z_1 \tilde{z}_1 + \sigma i\omega_2 z_2 \tilde{z}_2. \quad (1.17)$$

Вещественная форма (1.16) получается из комплексной при помощи замены Биркгофа (1.12) валентности  $c = \frac{1}{2i}$

$$z_1 = p_1 + iq_1, \quad \tilde{z}_1 = p_1 - iq_1, \quad z_2 = p_2 + iq_2, \quad \tilde{z}_2 = p_2 - iq_2.$$

4. Корни содержат действительную и мнимую части,  
 $\lambda_1 = -\lambda_3 = \tilde{\lambda}_2 = -\tilde{\lambda}_4 = a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ .  
Нормальной формой в этом случае является

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = a(p_1 q_1 + p_2 q_2) + b(p_1 q_2 - p_2 q_1), \quad (1.18)$$

а комплексной нормальной формой

$$h(\mathbf{z}, \tilde{\mathbf{z}}) = (a + ib)z_1 \tilde{z}_1 + (a - ib)z_2 \tilde{z}_2. \quad (1.19)$$

Замена переменных валентности  $c = 1/2$ , переводящая гамильтониан из комплексной формы в действительную, имеет вид

$$z_1 = iq_1 + q_2, \quad z_2 = -iq_1 + q_2, \quad \tilde{z}_1 = -ip_1 + p_2, \quad \tilde{z}_2 = ip_1 + p_2. \quad (1.20)$$

5. *Кратные корни*  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_3 = -\lambda_4 = \lambda$ , а также наличие нулевых корней см. [12, 46].

Линейные системы, рассмотренные в предыдущих разделах, устойчивы, если корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – чисто мнимые. В противном случае имеется действительная положительная часть корня  $\lambda_1$  или  $\lambda_2$ , которая определяет экспоненциальный рост любого решения и оно является неустойчивым. По теореме Ляпунова о неустойчивости нелинейных систем уравнений по линейному приближению следует, что неустойчивость сохраняется и с учётом нелинейных членов в гамильтоновой системе. Если же линейная система устойчива, то учёт нелинейных членов может изменить характер устойчивости. Если квадратичная форма гамильтониана – знакоопределённая функция ( $\sigma = 1$ ), то устойчивость сохраняется при добавлении к гамильтониану любых мономов выше второй степени. Если же  $\sigma = -1$  и квадратичная часть гамильтониана имеет вид

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\omega_1}{2}(p_1^2 + q_1^2) - \frac{\omega_2}{2}(p_2^2 + q_2^2) \quad (1.21)$$

то при добавлении к гамильтониану мономов выше второй степени характер устойчивости может измениться (см. например, работу А.П. Маркеева [47], глава 4).

### 1.2.3 Системы с $n$ степенями свободы

В случае произвольного количества степеней свободы таблицы нормальных форм, к которым можно привести функцию Гамильтона вещественным каноническим преобразованием, составлены Д.М. Галиным на основании работы Вильямсона и воспроизведены в книге В.И. Арнольда [4], а также книгах [12, 46].

Ограничимся рассмотрением случая отсутствия кратных корней характеристического уравнения. Нормальная форма представляется в виде суммы слагаемых вида (1.9), (1.10) и (1.18).

Количество слагаемых каждого вида определяется количеством пар (или четверок для слагаемых вида (1.18)) соответствующих корней. Знаки перед каждым слагаемым определяются отдельно на основе анализа исходного гамильтониана или другими методами.

Комплексная нормальная форма всегда имеет вид

$$h(\mathbf{z}, \tilde{\mathbf{z}}) = \sum_{i=1}^n \sigma_i \lambda_i z_i \tilde{z}_i, \quad \sigma_i = \pm 1. \quad (1.22)$$

Уравнения Гамильтона

$$\dot{z}_j = \sigma_j \lambda_j z_j, \quad \dot{\tilde{z}}_j = -\sigma_j \lambda_j \tilde{z}_j, \quad j = 1, \dots, n$$

имеют простые решения

$$z_j(t) = z_j(0) e^{\sigma_j \lambda_j t}, \quad \tilde{z}_j(t) = \tilde{z}_j(0) e^{-\sigma_j \lambda_j t}$$

что обеспечивает эффективность использования их в алгоритме инвариантной нормализации гамильтонианов, который будет описан далее.

Пусть характеристическое уравнение линейной гамильтоновой системы  $n$  степеней свободы имеет  $m$  действительных корней  $\lambda_1 = \gamma_1, \dots, \lambda_m = \gamma_m$  и  $n - m$  чисто мнимых корней  $\lambda_{m+1} = i\omega_{m+1}, \dots, \lambda_n = i\omega_n$ , тогда

Определение. Будем называть *вещественной* нормальной формой следующий вид гамильтониана:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{\substack{\lambda_j = \gamma_j \in \mathbb{R} \\ 1 \leq j \leq m}} \sigma_j \gamma_j p_j q_j + \quad (1.23)$$

$$+ \sum_{\substack{\lambda_{m+k}/i = \omega_{m+k} \in \mathbb{R} \\ m+1 \leq k \leq n}} \frac{\sigma_{m+k} \omega_{m+k}}{2} (p_{m+k}^2 + q_{m+k}^2).$$

Комплексная нормальная форма получается из вещественной при помощи канонической замены переменных валентности  $c = 1/(2i)$

$$z_j = p_j + iq_j, \quad \tilde{z}_j = p_j - iq_j,$$

применяемой к переменным, которым соответствуют мнимые значения  $\lambda_j = i\gamma_j$  и замена той же валентности

$$z_j = \sqrt{2i}q_j = (1+i)q_j, \quad \tilde{z}_j = \sqrt{2i}p_j = (1+i)p_j,$$

для переменных, которым соответствуют действительные значения  $\lambda_j = \gamma_j$ .

### 1.3 Нормализация квадратичных гамильтонианов в случае действительных либо мнимых корней характеристического полинома

В монографии [47] изложен алгоритм приведения к гамильтоновой нормальной форме в случае для чисто мнимых корней характеристического полинома системы уравнений Гамильтона и если кратных корней нет. Изложим более общий алгоритм вычисления линейной канонической действительной замены переменных, приводящей гамильтониан  $H_2$  (1.2) к нормальной форме, в случае, если все корни характеристического полинома либо действительные, либо мнимые.

Пусть  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, 2n$  – характеристические числа системы уравнений Гамильтона. Расставим индексы  $k$  таким образом, чтобы все они были разбиты на  $n$  пар:

$$\lambda_{k+n} = -\lambda_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.24)$$

Тогда из системы уравнений:  $R\mathbf{e}_j = \lambda_j\mathbf{e}_j$ ,  $j = 1, \dots, 2n$  для матрицы  $R = JD$  (1.3) находим  $2n$  комплексных собственных векторов  $\mathbf{e}_j$ ,  $j = 1, \dots, 2n$ . Напомним,  $D$  – симметричная матрица квадратичной формы гамильтониана  $H_2$ .

Далее вычисляем  $2n$  вектора

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_k &= \sigma_k \frac{\lambda_k(\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{k+n})}{\sqrt{\sigma_k \lambda_k (\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{k+n})^T J(\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_{k+n})}}, \\ \mathbf{g}_{k+n} &= \frac{\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_{k+n}}{\sqrt{\sigma_k \lambda_k (\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{k+n})^T J(\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_{k+n})}}.\end{aligned}\quad (1.25)$$

Знаки  $\sigma_k$  выбираются таким образом, чтобы подкоренное выражение было положительно, обеспечивая вещественность замены. В случае действительного собственного значения все собственные векторы  $\mathbf{e}_k$  — действительны, а в случае чисто мнимого собственного значения доказывается, что  $\mathbf{e}_{k+n} = \tilde{\mathbf{e}}_k$ . Поэтому подкоренное выражение в обоих случаях будет действительным числом, а числители обеих дробей тоже всегда будут действительными числами. Если среди собственных чисел  $\lambda_k$  есть кратные, соответствующие им собственные вектора должны быть косоортогонализированы друг относительно друга.

Векторы  $\mathbf{g}_k$  являются столбцами симплектической матрицы  $A$  канонической замены

$$X = AY, \quad X = \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix}, \quad Y = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{Bmatrix}$$

преобразующей исходную линейную систему (1.3) к системе с вещественным гамильтонианом следующего вида:

$$\tilde{H}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \sigma_k (u_k^2 - \lambda_k^2 v_k^2), \quad \sigma_k = \pm 1. \quad (1.26)$$

Полученный вид сразу можно использовать для решения уравнений Гамильтона, не выполняя дополнительных преобразований. Для формального соответствия определению нормальной формы (1.23) необходимо для переменных с индексом  $k$ , которым соответствуют действительные значения  $\lambda_k = \gamma_k$ , применить замену валентности  $c = 1/2$

$$u_k = q_k \gamma_k + p_k, \quad v_k = -q_k + \frac{1}{\gamma_k} p_k, \quad k = 1, \dots, m$$

в то время как для переменных с индексом  $k$ , которым соответствуют мнимые значения  $\lambda_k$ , применяется замена той же валентности:

$$u_k = \sqrt{2\omega_k}q_k, \quad v_k = \sqrt{\frac{2}{\omega_k}}p_k, \quad k = m + 1, \dots, n$$

## 1.4 Нормальные формы для нелинейных систем с двумя степенями свободы

### 1.4.1 Общий вид нормальной формы

Для системы двух степеней свободы комплексная нормальная форма Биркгофа и Черри–Густавсона такова:

$$h = h_2 + h_3 + h_4 + \dots, \quad h_2 = \lambda_1 z_1 \bar{z}_1 + \lambda_2 z_2 \bar{z}_2,$$

$$h_k = \sum_{\substack{s_1 \omega_1 + s_2 \omega_2 - s_3 \omega_1 - s_4 \omega_2 = 0 \\ s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = k}} z_1^{s_1} z_2^{s_2} \bar{z}_1^{s_3} \bar{z}_2^{s_4}, \quad k = 3, 4, \dots,$$
(1.27)

где в сумме опущены коэффициенты мономов.

### 1.4.2 Нормальная форма при отсутствии резонансов

Если резонансы отсутствуют, то нормальная форма содержит только полиномы чётных степеней. Комплексная нормальная форма такова:

$$h = \lambda_1 z_1 \bar{z}_1 + \lambda_2 z_2 \bar{z}_2 + (c_{20}(z_1 \bar{z}_1)^2 + c_{11} z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 + c_{02}(z_2 \bar{z}_2)^2) + \dots$$
(1.28)

Также как и для квадратичных гамильтонианов в параграфе 1.2.2 вещественная форма зависит от вида корней.

1. *Все корни действительные.* Комплексная нормальная форма совпадает с действительной.

2. Корни из первой пары действительные, а из второй мнимые,  $\lambda_1 = \gamma > 0$ ,  $\lambda_2 = i\omega$ ,  $\omega > 0$ .

Вещественная форма получается из комплексной при помощи замены валентности  $c = 1/(2i)$ :

$$z_1 = \sqrt{2i}q_1 = (1+i)q_1, \quad \tilde{z}_1 = \sqrt{2i}p_1 = (1+i)p_1,$$

$$z_2 = p_2 + iq_2, \quad \tilde{z}_2 = p_2 - iq_2.$$

Её можно ещё упростить с помощью унивалентного канонического преобразования  $(p_2, q_2) \rightarrow r_2, \varphi$

$$p_2 = \sqrt{2r_2} \cos \varphi, \quad q_2 = \sqrt{2r_2} \sin \varphi.$$

В результате мономы  $z_1\bar{z}_1$  и  $z_2\bar{z}_2$  преобразуются в  $p_1q_1$  и  $r_2$ , а вещественная нормальная форма – к виду

$$h = \gamma_1 p_1 q_1 + \omega_2 r_2 + (c_{20}(p_1 q_1)^2 + c_{11} p_1 q_1 r_2 + c_{02}(r_2)^2) + \dots$$

3. Все корни мнимые,  $\lambda_1 = i\omega_1$ ,  $\lambda_2 = \sigma i\omega_2$ ,  $\omega_1 > 0$ ,  $\omega_2 > 0$ ,  $\omega_1 \neq \omega_2$ ,  $\sigma = \pm 1$ .

Вещественная форма (1.16) получается из комплексной при помощи замены Биркгофа валентности  $c = \frac{1}{2i}$

$$z_1 = p_1 + iq_1, \quad \tilde{z}_1 = p_1 - iq_1, \quad z_2 = p_2 + iq_2, \quad \tilde{z}_2 = p_2 - iq_2.$$

С помощью канонического унивалентного преобразования

$$p_j = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j, \quad q_j = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j, \quad j = 1, 2$$

её можно ещё упростить

$$h = \omega_1 r_1 + \sigma \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + \dots \quad (1.29)$$

### 1.4.3 Нормальная форма при наличии резонансов

**Резонанс**  $\omega_1 = 2\omega_2$ ,  $\sigma = 1$ . В нормальную форму войдет полином третьей степени. Степени мономов, соответствующие определению (1.27), определяются из решения следующей системы:

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 3, \quad 2s_1 + s_2 - 2s_3 - s_4 = 0.$$

При сложении этих уравнений переменная  $s_4$  исключится:  $3s_1 + 2s_2 - s_3 = 3$ . Отсюда находим степени монома: 0, 2, 1, 0 и сопряженного монома 1, 0, 0, 2 и получаем общий вид полинома  $h_3$  комплексной нормальной формы,

$$h_3 = \frac{\alpha + i\beta}{2\sqrt{2}} z_2^2 \bar{z}_1 - \frac{\alpha - i\beta}{2\sqrt{2}} \bar{z}_2^2 z_1$$

которой соответствует действительная нормальная форма

$$h_3 = r_2 \sqrt{r_1} (-\alpha \sin(\phi_1 - 2\phi_2) + \beta \cos(\phi_1 - 2\phi_2)). \quad (1.30)$$

**Резонанс**  $\omega_1 = 2\omega_2$ ,  $\sigma = -1$ . Степени мономов, соответствующие определению (1.27), определяются из решения системы, аналогичной предыдущему случаю

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 3, \quad -2s_1 + s_2 + 2s_3 - s_4 = 0.$$

При сложении этих уравнений переменная  $s_4$  исключится:  $-s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 3$ . Отсюда находим степени монома: 1, 2, 0, 0 и сопряженного монома 0, 0, 1, 2 и получаем общий вид полинома  $h_3$  комплексной нормальной формы:

$$h_3 = \frac{\alpha + i\beta}{2\sqrt{2}} z_1 z_2^2 - \frac{\alpha - i\beta}{2\sqrt{2}} \bar{z}_1 \bar{z}_2^2,$$

которой соответствует действительная нормальная форма

$$h_3 = r_2 \sqrt{r_1} (\alpha \sin(\phi_1 + 2\phi_2) + \beta \cos(\phi_1 + 2\phi_2)). \quad (1.31)$$

Рассмотренные резонансы наиболее интересны, так как только при этих резонансах отлична нормальная форма содержит члены третьей степени. При других резонансах лишь члены третьей степени отсутствуют, но появляются дополнительные по сравнению с нерезонансным случаем слагаемые четвертой степени.

**Резонанс**  $\omega_1 = 3\omega_2$ ,  $\sigma = 1$ . Из системы уравнений для полинома  $h_3$

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 3, \quad 3s_1 + s_2 - 3s_3 - s_4 = 0$$

получаем  $2(2s_1 + s_2 - s_3) = 3$ . Отсюда видно, что система уравнений не имеет целых решений и полином  $h_3$  отсутствует в нормальной форме. Для полинома  $h_4$  система такова:

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 4, \quad 3s_1 + s_2 - 3s_3 - s_4 = 0 \Rightarrow 2s_1 + s_2 - s_3 = 2.$$

Ее решения приводятся в виде таблицы

$$\begin{array}{cccccc} s_1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ s_2 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ s_3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ s_4 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Отсюда находим полиномы  $h_4$  комплексной нормальной формы:

$$\begin{aligned} h_4 = & \frac{1}{4}(\alpha + i\beta)z_2^3\bar{z}_1 - \frac{1}{4}(\alpha - i\beta)z_1\bar{z}_2^3 + \\ & + i(c_{20}(z_1\bar{z}_1)^2 + c_{11}z_1\bar{z}_1z_2\bar{z}_2 + c_{02}(z_2\bar{z}_2)^2) \end{aligned}$$

и действительной нормальной формы:

$$\begin{aligned} h_4 = & r_2\sqrt{r_1r_2}[-\alpha\sin(\phi_1 - 3\phi_2) + \beta\cos(\phi_1 - 3\phi_2)] + \\ & + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2. \end{aligned} \tag{1.32}$$

**Резонанс**  $\omega_1 = 3\omega_2$ ,  $\sigma = -1$ . Система уравнений для полинома  $h_3$

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 3, \quad -3s_1 + s_2 + 3s_3 - s_4 = 0 \Rightarrow 2(-s_1 + s_2 + 2s_3) = 3,$$

не имеет целочисленных решений и, следовательно,  $h_3 = 0$ . Для полинома  $h_4$  система такова

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 4, \quad -3s_1 + s_2 + 3s_3 - s_4 = 0 \Rightarrow -s_1 + s_2 + 2s_3 = 2.$$

Ее решения приводятся в виде таблицы

$$\begin{array}{cccccc} s_1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ s_2 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ s_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ s_4 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Отсюда находим полином  $h_4$  комплексной нормальной формы:

$$h_4 = \frac{1}{4}(\alpha + i\beta)z_1\bar{z}_2^3 - \frac{1}{4}(\alpha - i\beta)\bar{z}_1z_2^3 + \\ + i(c_{20}(z_1\bar{z}_1)^2 + c_{11}z_1\bar{z}_1z_2\bar{z}_2 + c_{02}(z_2\bar{z}_2)^2),$$

и действительной нормальной формы:

$$h_4 = r_2\sqrt{r_1r_2}[\alpha \sin(\phi_1 + 3\phi_2) + \beta \cos(\phi_1 + 3\phi_2)] + \\ + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2. \quad (1.33)$$

Белицкий [8] предложил продвинутую нормальную форму, в которой жордановы клетки матрицы линейной части используются для дальнейшего сокращения количества нелинейных членов. Обзор других продвинутых нормальных форм имеется в ([12], гл. I, п. 2.Д).

Коэффициенты  $\alpha, \beta$  и  $c_{20}, c_{11}, c_{02}$  являются инвариантами соответствующей гамильтоновой системы. Вычислить нормальную форму – это значит вычислить эти коэффициенты. Далее будут описаны существующие подходы к осуществлению этой, как правило, весьма трудоёмкой, процедуры.

## Глава 2

# Инвариантная нормализация

### 2.1 Методы вычислений нормальных форм

Алгоритмы вычисления канонических нормализующих замен (1.5) и нормальных форм (1.6), (1.7), (1.27) будем классифицировать по способу определения канонической замены. К настоящему времени предложено 3 следующих способа вычисления канонических преобразований: А с помощью производящей функции; Б посредством рядов Ли; В параметрический. Таким образом, имеем три группы алгоритмов.

#### 2.1.1 Нормализация с помощью производящих функций Якоби

Способ А (см.[4, 9, 12, 29]). В нелинейной формальной замене (1.5) векторный ряд  $\mathbf{N}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$  находится с помощью производящей функции Якоби. Этот метод предложен Биркгофом. Унивалентное каноническое преобразование  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow (\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$  автономной системы с помощью функции  $S_1 = u_1 \bar{z}_1 + \dots + u_n \bar{z}_n + \dots$  определяется так

$$S_1 = u_1 \bar{z}_1 + \dots + u_n \bar{z}_n + \dots,$$

$$\mathbf{z} = \partial S_1 / \partial \bar{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{v} = \partial S_1 / \partial \mathbf{u}, \quad \tilde{H}(t, \mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = H(t, \mathbf{u}(t, \mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}), \mathbf{v}(t, \mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})). \quad (2.1)$$

где у функции  $S_1$  выписаны первые члены степенных рядов по смешанным переменным  $\mathbf{u} = (x_1, \dots, x_n)$  и  $\bar{\mathbf{z}} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$ .

Идею метода Биркгофа проиллюстрируем на системе с двумя степенями свободы. Пусть дан гамильтониан, у которого квадратичные члены нормализованы, а члены более старшего порядка имеют степень  $s > 2$ . Выпишем в гамильтониане квадратичные члены и один моном наименьшей степени больше 2

$$H = \lambda_1 u_1 v_1 + \lambda_2 u_2 v_2 + \mu k u_1^{s_1} u_2^{s_2} v_1^{s_3} v_2^{s_4} + \dots, \quad s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = s > 2.$$

Здесь  $\mu$  – малый параметр, который можно ввести с помощью скейлинга (замена  $u_i = \varepsilon u'_i$ ,  $v_i = \varepsilon v'_i$ ).

Попытаемся избавиться от выписанного монома степени  $s$  с помощью производящей функции

$$S = u_1 \bar{z}_1 + u_2 \bar{z}_2 + \mu t u_1^{s_1} u_2^{s_2} \bar{z}_1^{s_3} \bar{z}_2^{s_4}$$

с неизвестным множителем  $t$ , который попытаемся найти.

Функция  $S$  производит замену переменных, определяемую равенствами (2.1)

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial S}{\partial u_1} = \bar{z}_1 + \mu t s_1 u_1^{-1+s_1} u_2^{s_2} \bar{z}_1^{s_3} \bar{z}_2^{s_4}, \\ v_2 &= \frac{\partial S}{\partial u_2} = \bar{z}_2 + \mu t s_2 u_1^{s_1} u_2^{-1+s_2} \bar{z}_1^{s_3} \bar{z}_2^{s_4}, \\ z_1 &= \frac{\partial S}{\partial \bar{z}_1} = u_1 + \mu t s_3 u_1^{s_1} u_2^{s_2} \bar{z}_1^{-1+s_3} \bar{z}_2^{s_4}, \\ z_2 &= \frac{\partial S}{\partial \bar{z}_2} = u_2 + \mu t s_4 u_1^{s_1} u_2^{s_2} \bar{z}_1^{s_3} \bar{z}_2^{-1+s_4}. \end{aligned}$$

Разрешим эту систему относительно  $u_1, u_2, v_1, v_2$  с точностью до малого параметра  $\mu^2$

$$\begin{aligned} v_1 &= \bar{z}_1 + \mu t s_1 z_1^{-1+s_1} z_2^{s_2} \bar{z}_1^{s_3} \bar{z}_2^{s_4} + O(\mu^2), \\ v_2 &= \bar{z}_2 + \mu t s_2 z_1^{s_1} z_2^{-1+s_2} \bar{z}_1^{s_3} \bar{z}_2^{s_4} + O(\mu^2), \\ u_1 &= z_1 - \mu t s_3 u_1^{s_1} u_2^{s_2} \bar{z}_1^{-1+s_3} \bar{z}_2^{s_4} + O(\mu^2), \\ u_2 &= z_2 - \mu t s_4 u_1^{s_1} u_2^{s_2} \bar{z}_1^{s_3} \bar{z}_2^{-1+s_4} + O(\mu^2). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в гамильтониан  $H$  получим его выражение в новых переменных

$$H = \lambda_1 z_1 \bar{z}_1 + \lambda_2 z_2 \bar{z}_2 + \mu z_1^{s_1} z_2^{s_2} \bar{z}_1^{s_3} \bar{z}_2^{s_4} (k + t s_1 \lambda_1 - t s_3 \lambda_1 + t s_2 \lambda_2 - t s_4 \lambda_2) + O(\mu^2)$$

При

$$m = -\frac{k}{(s_1 - s_3)\lambda_1 + (s_2 - s_4)\lambda_2}$$

моном исчезает. Это возможно, если не выполнено условие резонанса (1.7). Таким путём можно уничтожить все нерезонансные члены и в итоге получим нормальную форму.

Если найден производящий ряд  $S_1(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{z}})$ , то для получения замены (1.5) нужно из равенств (2.1) выразить  $u_j$  через  $\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}$ , т.е. обратить степенные ряды для  $z_j$ . На практике это часто приводит к довольно громоздким вычислениям, но работает всегда (без ограничений на матрицу  $R$ ).

### 2.1.2 Нормализация с помощью рядов Ли

Способ Б. Обычно делают скейлинг  $\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{u}'$ ,  $\mathbf{v} = \varepsilon \mathbf{v}'$ ,  $t' = \varepsilon^2 t$ ,  $\mathbf{z} = \varepsilon \mathbf{z}'$ ,  $\bar{\mathbf{z}} = \varepsilon \bar{\mathbf{z}}'$ . Гамильтониан  $\tilde{H}(\mathbf{u}', \mathbf{v}')$  и его норма  $h(\mathbf{z}', \bar{\mathbf{z}}')$  становятся рядами по малому параметру  $\varepsilon$ . Соответственно генератор  $G$  нормализующей замены (1.5) ищется в виде ряда по  $\varepsilon$ :

$$\tilde{H}(\mathbf{u}', \mathbf{v}') = H_0(\mathbf{u}', \mathbf{v}') + F, \quad h(\mathbf{z}', \bar{\mathbf{z}}') = H_0(\mathbf{z}', \bar{\mathbf{z}}') + \hat{F},$$

$$F = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k F_k(\mathbf{u}', \mathbf{v}'), \quad \hat{F} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \hat{F}_k(\mathbf{z}', \bar{\mathbf{z}}'), \quad G = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k G_k(\mathbf{z}', \bar{\mathbf{z}}'),$$

Для квадратичного гамильтониана используется обозначение  $H_0$ , а для степеней выше квадратичного –  $F_1, F_2, \dots$ , в целях соответствия обозначений литературе.

Тогда для нормальной формы  $h = H_0 + \hat{F}$  получим ряд Ли с генератором Ли  $G(\mathbf{z}', \bar{\mathbf{z}}')$ . Его можно привести к виду

$$\begin{aligned} \hat{F} &= H_0 * G + M, \\ M &= F(\mathbf{z}', \bar{\mathbf{z}}') + F * G + \frac{1}{2!}(H_0 + F) * G^2 + \frac{1}{3!}(H_0 + F) * G^3 + \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

Отсюда и условия для коэффициентов рядов по степеням  $\varepsilon$  нормальной формы  $\hat{F}_k$  и генератора  $G_k$  получаем гомологические уравнения

$$\begin{aligned} H_0 * \hat{F}_k &= 0, \quad \hat{F}_k(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = H_0(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) * G_k(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) + M_k(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}), \\ M_1 &= F_1, \quad M_2 = F_2 + F_1 * G_1 + \frac{1}{2} H_0 * G_1^2, \\ M_3 &= F_3 + \sum_{i+j=3} \left( F_i * G_j + \frac{1}{2} H_0 * G_i * G_j \right) + \frac{1}{2} F_1 * G_1^2 + \\ &+ \frac{1}{6} H_0 * G_1^3, \dots \end{aligned} \tag{2.3}$$

Выражения  $M_k$  можно упростить, используя соотношения предыдущих шагов. При  $k = 1$  имеем

$$H_0 * G_1 = \hat{F}_1 - F_1 \Rightarrow \frac{1}{2} H_0 * G_1^2 = \frac{1}{2} (\hat{F}_1 - F_1) * G_1.$$

Подставляя это выражение в  $M_2$ , получим

$$M_2 = F_2 + \frac{1}{2} (F_1 + \hat{F}_1) * G_1.$$

Аналогично для  $M_3$  найдём

$$M_3 = F_3 + \frac{1}{2} (F_2 + \hat{F}_2) * G_1 + \frac{1}{2} (F_1 + \hat{F}_1) * G_2 + \frac{1}{12} (F_1 - \hat{F}_1) * G_1^2.$$

Функция  $M_k$  известна по результатам вычислений предыдущих шагов. Поэтому в каждом  $k$ -м приближении получаются уравнения относительно  $\hat{F}_k$  и  $G_k$ . Существуют два метода решения гомологических уравнений: Б.1 и Б.2.

**Б.1.** Чисто алгебраический метод. Уравнение (2.3) при каждом  $k$  решается как система линейных уравнений на коэффициенты мономов степени  $k + 2$  форм  $\hat{F}_k$  и  $G_k$ . Это метод Хори (1966) и Депри (1969), подробно изложенный в гл. 11 книги [47]. Здесь также нет ограничений на матрицу  $R$ . В этом методе не надо обращать ряды. Применение этого метода к исследованию ограниченной задачи трех тел излагается в [47].

**Б.2.** В.Ф. Журавлев [29, 31, 33] предложил решать гомологическое уравнение (2.3) с помощью интегрирования. Используя свойство нормальной формы

$$H_0 * \hat{F}_k = \frac{d}{dt} \hat{F}_k = 0 \quad (2.4)$$

и равенство  $H_0 * G_k = dG_k/dt$ , где производная по  $t$  берется в силу системы  $\dot{\mathbf{z}} = \partial H_0 / \partial \bar{\mathbf{z}}$ ,  $\dot{\bar{\mathbf{z}}} = -\partial H_0 / \partial \mathbf{z}$ , гомологические уравнения (2.3) можно представить в виде

$$d\hat{F}_k(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})/dt = 0, \quad M_k(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \hat{F}_k(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) - dG_k(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})/dt, \quad (2.5)$$

Пусть  $\mathbf{z}(t, \mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}})$ ,  $\bar{\mathbf{z}}(t, \mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}})$  решение системы с гамильтонианом  $H_0$ . Подставляем решение в функцию  $M_k(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ , получим функцию времени и параметров  $\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}$ :

$$m_k(t, \mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}) = M_k(\mathbf{z}(t, \mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}), \bar{\mathbf{z}}(t, \mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}))$$

Подставляем его во второе уравнение (2.5) и интегрируем с учетом первого

$$\begin{aligned} \int_0^t m_k(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}) dt &= t \hat{F}_k(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}) - G_k(\mathbf{z}(t, \mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}), \bar{\mathbf{z}}(t, \mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}})) \Big|_0^t = \\ &= t \hat{F}_k(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}) + G_k(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}) + g(t), \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$g(t) = -G_k(\mathbf{z}(t, \mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}), \bar{\mathbf{z}}(t, \mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}))$$

Отсюда видно, как из квадратуры (2.6) можно найти коэффициенты нормальной формы  $\hat{F}_k$  и генератора  $G_k$ : нормальная форма  $\hat{F}_k$  равна коэффициенту при  $t$ , а  $G_k$  – не зависящее от времени слагаемое. В данном методе не обязательно применять переменные Биркгофа и нормализовать квадратичную часть.

Рассмотрим подробнее случай, когда частоты  $\omega_j$  – действительные числа, а квадратичная часть нормализована.

Комплексная нормальная форма в переменных Биркгофа получается так. Функции  $M_k$  в (2.3) – однородные полиномы

переменных  $z_j, \bar{z}_j$ . Подставив вместо переменных  $z_j, \bar{z}_j$  решения квадратичного гамильтониана, получим

$$M_k = \sum_j C_j e^{i\alpha_j t} + C_0. \quad (2.7)$$

Из квадратуры (2.6) найдем

$$\hat{F}_k = C_0, \quad G_k = i \sum_j \frac{C_j}{\alpha_j}. \quad (2.8)$$

Теперь покажем, как найти действительную нормальную форму. В действительных переменных  $Q_j, P_j$  решение уравнений Гамильтона с  $H_0$  линейно выражается через  $\cos \alpha_j t$  и  $\sin \alpha_j t$ . Однородный полином  $M_k(Q_j, P_j)$  представляется суммой тригонометрических функций:

$$M_k = \sum_j a_j \cos \alpha_j t + b_j \sin \alpha_j t + c_0. \quad (2.9)$$

Из квадратуры (2.6) найдем

$$\hat{F}_k = c_0, \quad G_k = \sum_j \frac{b_j}{\alpha_j}. \quad (2.10)$$

Таким образом, как в экспоненциальном (2.7), так и в тригонометрическом (2.9) представлениях сразу вытекают выражения для коэффициентов нормальной формы и генератора соответственно (2.8) или (2.10).

В системе алгебраических вычислений Wolfram Mathematica был создан алгоритм, полностью реализующий всю последовательность действий для нахождения нормальной формы, включая нормализацию квадратичного гамильтониана. Большая часть представленных в этой книге задач была решена при помощи этого алгоритма. На рис. 2.1 изображена блок-схема алгоритма.

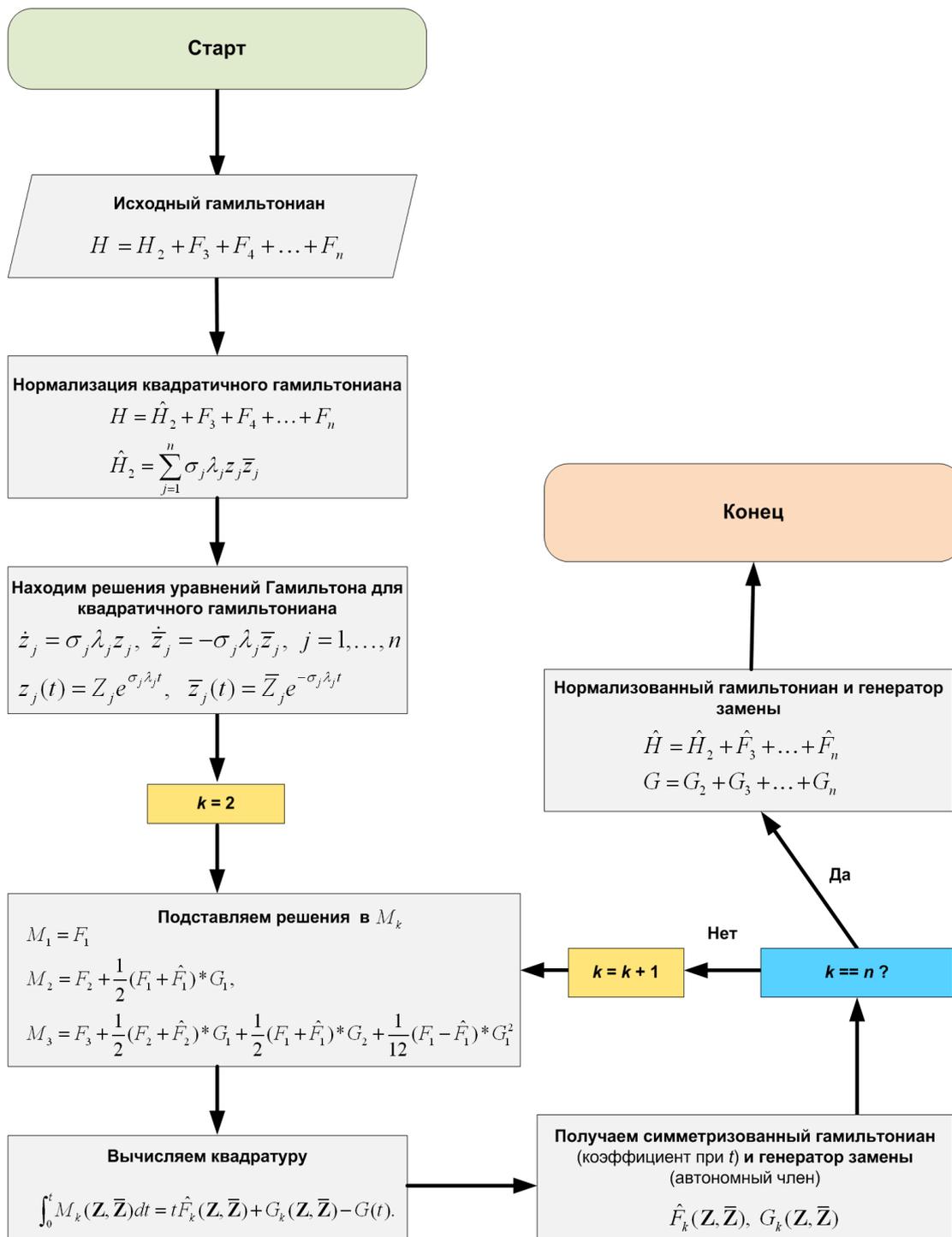


Рис. 2.1: Блок-схема алгоритма нормализации гамильтониана

### 2.1.3 Нормализация с помощью параметрической производящей функции

Способ В. А.Г. Петров [65] предложил вместо генератора  $G$  применять функцию  $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  и параметрическую каноническую нормализующую замену. Вместо уравнения (2.2) решается следующее: уравнение:

$$\hat{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = H_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) * \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + M(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

$$M = F(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\Psi_{\mathbf{y}}, \mathbf{y} + \frac{1}{2}\Psi_{\mathbf{x}}) - \hat{F}(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\Psi_{\mathbf{y}}, \mathbf{y} - \frac{1}{2}\Psi_{\mathbf{x}}) + \hat{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (2.11)$$

Подставляя в это уравнение ряды по степеням  $\varepsilon$  для функции  $\Psi, \hat{F}$  и  $M$ , получим гомологическую цепочку уравнений, аналогичную (2.3). Причем для первых двух приближений уравнения отличаются только заменой  $G_1, G_2$  на  $\Psi_1, \Psi_2$ .

В следующих приближениях выражения для  $M_3, M_4, \dots$  в параметрическом методе В отличаются от метода Б.

Способы Б.2 и В существенно упрощают вычисления, необходимые для нахождения нормальной формы, но применимы только в случае, когда жорданова форма матрицы  $R$  диагональна, т.е. отсутствуют жордановы клетки или непростые элементарные делители. В этих способах необязательно предварительно упрощать линейное приближение системы (1.3) заменой (1.4).

## 2.2 Нормализация гамильтонианов, представленных в виде степенных разложений с произвольными коэффициентами

С помощью приведённой на рис. 2.1 блок-схемы рассчитаем нормальную форму гамильтонианов, представленных в виде ряда Тейлора  $H = H_2 + H_3 + \dots$ , для случая 1-й и 2-х степеней свободы. Будем считать, что квадратичная часть гамильтониана

уже приведена к комплексной нормальной форме  $h_2(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \sum_{i=1}^n \sigma_i \lambda_i z_i \bar{z}_i$ ,  $\sigma_i = \pm 1$  при помощи описанного в разд. 2.3 алгоритма. При этом для случая 1-й степени свободы ограничимся нормализацией членов тейлоровского разложения вплоть до 6-го порядка, а для 2-х – до 4-го. В случае 3-х степеней свободы предполагается отсутствие резонансов.

Приведённые ниже общие выражения нормальных форм полезны при анализе гамильтоновых систем, содержащих параметры. Ранее аналогичные, но записанные в другом виде выражения для 2-х степеней свободы и  $\sigma = -1$  были получены в работах [42] и [74].

**Одна степень свободы.** Пусть задан гамильтониан

$$h(z, \bar{z}) = h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6,$$

$$h_2 = \lambda z \bar{z},$$

$$h_3 = a_{\{3,0\}} z^3 + a_{\{2,1\}} \bar{z} z^2 + a_{\{1,2\}} \bar{z}^2 z + a_{\{0,3\}} \bar{z}^3,$$

$$h_4 = b_{\{4,0\}} z^4 + b_{\{3,1\}} \bar{z} z^3 + b_{\{2,2\}} \bar{z}^2 z^2 + b_{\{1,3\}} \bar{z}^3 z + b_{\{0,4\}} \bar{z}^4,$$

$$h_5 = \sum_{i+j=5} c_{\{i,j\}} z^i \bar{z}^j,$$

$$h_6 = \sum_{i+j=6} d_{\{i,j\}} z^i \bar{z}^j.$$

В  $h_5$  содержится 6 слагаемых, а в  $h_6$  7.

Найдем каноническую замену переменных, приводящую гамильтониан к нормальной форме, задаваемую генератором  $G = G_2 + G_3 + G_4 + G_5 + G_6$ .

Решением уравнений Гамильтона квадратичной части гамильтониана является  $z = Z e^t$ ,  $\bar{z} = \bar{Z} e^{-t}$ . Последовательно на каждом  $k$ -м шаге подставляем решения в функцию  $M_k$ , определяемую выражением (2.3), интегрируем по  $t$  от 0 до  $T$ , и приравниваем коэффициент при  $T$  к  $\hat{h}_k$ , а независимые от  $T$  слагаемые к  $G_k$ .

$i$	$\Delta_2^i$	$\Phi_2^i$
<b>1</b>	1	$b_{\{2,2\}}$
<b>2</b>	$\lambda$	$-3(a_{\{1,2\}}a_{\{2,1\}} + a_{\{0,3\}}a_{\{3,0\}})$

Таблица 2.1: Параметры для  $c_2$ , 1 степень свободы

$i$	$\Delta_3^i$	$\Phi_3^i$
<b>1</b>	1	$d_{\{3,3\}}$
<b>2</b>	$\lambda$	$-4(b_{\{1,3\}}b_{\{3,1\}} + b_{\{0,4\}}b_{\{4,0\}} + a_{\{3,0\}}c_{\{1,4\}}) -$ $-4(a_{\{2,1\}}c_{\{2,3\}} + a_{\{1,2\}}c_{\{3,2\}} + a_{\{0,3\}}c_{\{4,1\}})$
<b>3</b>	$\lambda^2$	$10b_{\{3,1\}}a_{\{1,2\}}^2 + 20a_{\{3,0\}}b_{\{1,3\}}a_{\{1,2\}} +$ $+8a_{\{2,1\}}b_{\{2,2\}}a_{\{1,2\}} + 20a_{\{0,3\}}b_{\{4,0\}}a_{\{1,2\}} +$ $+20a_{\{2,1\}}a_{\{3,0\}}b_{\{0,4\}} + 10a_{\{2,1\}}^2b_{\{1,3\}} +$ $+8a_{\{0,3\}}a_{\{3,0\}}b_{\{2,2\}} + 20a_{\{0,3\}}a_{\{2,1\}}b_{\{3,1\}}$
<b>4</b>	$\lambda^3$	$-20a_{\{3,0\}}a_{\{1,2\}}^3 - 12a_{\{2,1\}}^2a_{\{1,2\}}^2 -$ $-84a_{\{0,3\}}a_{\{2,1\}}a_{\{3,0\}}a_{\{1,2\}} -$ $-20a_{\{0,3\}}a_{\{2,1\}}^3 - 12a_{\{0,3\}}^2a_{\{3,0\}}^2$

Таблица 2.2: Параметры для  $c_3$ , 1 степень свободы

Выражение для  $G$  не приводится в силу его громоздкости, а для нормальной формы имеем

$$\begin{aligned} \hat{h}(Z, \bar{Z}) &= \hat{h}_2 + \hat{h}_3 + \hat{h}_4 + \hat{h}_5 + \hat{h}_6, \\ \hat{h}_2 &= \lambda Z \bar{Z}, \quad \hat{h}_3 = 0, \quad \hat{h}_4 = c_2 Z^2 \bar{Z}^2, \\ \hat{h}_5 &= 0, \quad \hat{h}_6 = c_3 Z^3 \bar{Z}^3, \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$c_2 = \sum_i^2 \frac{\Phi_2^i}{\Delta_2^i}, \quad c_3 = \sum_i^4 \frac{\Phi_3^i}{\Delta_3^i}.$$

Выражения для  $c_2, c_3$  приведены в соответствующих таблицах.

**Две степени свободы, нет резонансов.** Пусть задан гамильтониан

$i$	$\Delta_{20}^i$	$\Phi_{20}^i$
<b>1</b>	1	$b_{\{2,0,2,0\}}$
<b>2</b>	$\lambda_1$	$-3(a_{\{1,0,2,0\}}a_{\{2,0,1,0\}} + a_{\{0,0,3,0\}}a_{\{3,0,0,0\}})$
<b>3</b>	$\lambda_2$	$-\sigma a_{\{1,0,1,1\}}a_{\{1,1,1,0\}}$
<b>4</b>	$2\lambda_1 - \sigma\lambda_2$	$a_{\{0,1,2,0\}}a_{\{2,0,0,1\}}, \sigma = 1; \quad -a_{\{0,0,2,1\}}a_{\{2,1,0,0\}}, \sigma = -1$
<b>5</b>	$2\lambda_1 + \sigma\lambda_2$	$-a_{\{0,0,2,1\}}a_{\{2,1,0,0\}}, \sigma = 1; \quad a_{\{0,1,2,0\}}a_{\{2,0,0,1\}}, \sigma = -1$

Таблица 2.3: Параметры для  $c_{20}$ , 2 степени свободы, нет резонанса

$$h(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = h_2 + h_3 + h_4,$$

$$h_2 = \lambda_1 z_1 \bar{z}_1 + \sigma \lambda_2 z_2 \bar{z}_2,$$

$$h_3 = \sum_{i+j+l+m=3} a_{\{i,j,l,m\}} z_1^i z_2^j \bar{z}_1^l \bar{z}_2^m, \quad (2.13)$$

$$h_4 = \sum_{i+j+l+m=4} b_{\{i,j,l,m\}} z_1^i z_2^j \bar{z}_1^l \bar{z}_2^m.$$

В  $h_3$  содержится 20 слагаемых, а в  $h_4$  35,  $\sigma = \pm 1$ .

Для нормальной формы имеем

$$\hat{h}(Z_1, Z_2, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2) = \hat{h}_2 + \hat{h}_3 + \hat{h}_4,$$

$$\hat{h}_2 = \lambda_1 Z_1 \bar{Z}_1 + \sigma \lambda_2 Z_2 \bar{Z}_2, \quad \hat{h}_3 = 0,$$

$$\hat{h}_4 = c_{20}(Z_1 \bar{Z}_1)^2 + c_{11} Z_1 \bar{Z}_1 Z_2 \bar{Z}_2 + c_{02}(Z_2 \bar{Z}_2)^2, \quad (2.14)$$

$$c_{20} = \sum_i^5 \frac{\Phi_{20}^i}{\Delta_{20}^i}, \quad c_{11} = \sum_i^7 \frac{\Phi_{11}^i}{\Delta_{11}^i}, \quad c_{02} = \sum_i^5 \frac{\Phi_{02}^i}{\Delta_{02}^i}.$$

Параметры для  $c_{20}$ ,  $c_{11}$ ,  $c_{02}$  приведены в соответствующих таблицах.

Знаменатель некоторых коэффициентов нормальной формы обращается в ноль при резонансе 1:2. Знаменатели некоторых коэффициентов генератора нормализующей замены обращаются в ноль также при резонансах 1:1 и 1:3. Таким образом, эти резонансные случаи следует рассматривать отдельно, а для

$i$	$\Delta_{11}^i$	$\Phi_{11}^i$
1	1	$b_{\{1,1,1,1\}}$
2	$\lambda_1$	$-2(a_{\{1,0,2,0\}}a_{\{1,1,0,1\}} + a_{\{0,1,1,1\}}a_{\{2,0,1,0\}})$
3	$\lambda_2$	$-2\sigma(a_{\{0,2,0,1\}}a_{\{1,0,1,1\}} + a_{\{0,1,0,2\}}a_{\{1,1,1,0\}})$
4	$2\lambda_1 - \lambda_2$	$-4a_{\{0,1,2,0\}}a_{\{2,0,0,1\}}, \sigma = 1; \quad -4a_{\{0,0,2,1\}}a_{\{2,1,0,0\}}, \sigma = -1$
5	$2\lambda_1 + \lambda_2$	$-4a_{\{0,0,2,1\}}a_{\{2,1,0,0\}}, \sigma = 1; \quad -4a_{\{0,1,2,0\}}a_{\{2,0,0,1\}}, \sigma = -1$
6	$\lambda_1 - 2\lambda_2$	$4a_{\{0,2,1,0\}}a_{\{1,0,0,2\}}, \sigma = 1; \quad -4a_{\{0,0,1,2\}}a_{\{1,2,0,0\}}, \sigma = -1$
7	$\lambda_1 + 2\lambda_2$	$-4a_{\{0,0,1,2\}}a_{\{1,2,0,0\}}, \sigma = 1; \quad 4a_{\{0,2,1,0\}}a_{\{1,0,0,2\}}, \sigma = -1$

Таблица 2.4: Параметры для  $c_{11}$ , 2 степени свободы, нет резонанса

$i$	$\Delta_{02}^i$	$\Phi_{02}^i$
1	1	$b_{\{0,2,0,2\}}$
2	$\lambda_1$	$-a_{\{0,1,1,1\}}a_{\{1,1,0,1\}}$
3	$\lambda_2$	$-3\sigma(a_{\{0,1,0,2\}}a_{\{0,2,0,1\}} + a_{\{0,0,0,3\}}a_{\{0,3,0,0\}})$
4	$\lambda_1 - 2\lambda_2$	$-a_{\{0,2,1,0\}}a_{\{1,0,0,2\}}, \sigma = 1; \quad -a_{\{0,0,1,2\}}a_{\{1,2,0,0\}}, \sigma = -1$
5	$\lambda_1 + 2\lambda_2$	$-a_{\{0,0,1,2\}}a_{\{1,2,0,0\}}, \sigma = 1; \quad -a_{\{0,2,1,0\}}a_{\{1,0,0,2\}}, \sigma = -1$

Таблица 2.5: Параметры для  $c_{02}$ , 2 степени свободы, нет резонанса

резонансов высшего порядка вид нормальной формы вплоть до членов 4-го порядка останется тем же.

**Две степени свободы, резонанс 1:2,  $\sigma = 1$ .** Пусть задан гамильтониан (2.13), в котором  $2\lambda_1 = \lambda_2 = 2\lambda$ . Для нормальной формы имеем

$$\hat{h}(Z_1, Z_2, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2) = \hat{h}_2 + \hat{h}_3 + \hat{h}_4,$$

$$\hat{h}_2 = \lambda Z_1 \bar{Z}_1 + 2\lambda Z_2 \bar{Z}_2, \quad \hat{h}_3 = a_{\{2,0,0,1\}} Z_1^2 \bar{Z}_2 + a_{\{0,1,2,0\}} Z_2 \bar{Z}_1^2,$$

$$\hat{h}_4 = \frac{1}{\lambda} (c_{20}(Z_1 \bar{Z}_1)^2 + c_{11} Z_1 \bar{Z}_1 Z_2 \bar{Z}_2 + c_{02}(Z_2 \bar{Z}_2)^2),$$

$$c_{20} = \sum_i^3 \frac{\Phi_{20}^i}{\Delta_{20}^i}, \quad c_{11} = \sum_i^4 \frac{\Phi_{11}^i}{\Delta_{11}^i}, \quad c_{02} = \sum_i^5 \frac{\Phi_{02}^i}{\Delta_{02}^i}.$$

Параметры для  $c_{20}, c_{11}, c_{02}$  приведены в соответствующих таблицах.

**Две степени свободы, резонанс 1:2,  $\sigma = -1$ .** Пусть задан гамильтониан (2.13), в котором  $2\lambda_1 = \lambda_2 = 2\lambda$ . Для

$i$	$\Delta_{20}^i$	$\Phi_{20}^i$
<b>1</b>	$\lambda$	$b_{\{2,0,2,0\}}$
<b>2</b>	$-3$	$a_{\{1,0,2,0\}}a_{\{2,0,1,0\}} + a_{\{0,0,3,0\}}a_{\{3,0,0,0\}}$
<b>3</b>	$-1/4$	$2a_{\{1,0,1,1\}}a_{\{1,1,1,0\}} + a_{\{0,0,2,1\}}a_{\{2,1,0,0\}}$

Таблица 2.6: Параметры для  $c_{20}$ , 2 степени свободы, резонанс 1:2,  $\sigma = +1$

$i$	$\Delta_{11}^i$	$\Phi_{11}^i$
<b>1</b>	$\lambda$	$b_{\{1,1,1,1\}}$
<b>2</b>	$-1$	$a_{\{0,2,0,1\}}a_{\{1,0,1,1\}} + a_{\{0,1,0,2\}}a_{\{1,1,1,0\}} + a_{\{0,0,2,1\}}a_{\{2,1,0,0\}} +$ $+2a_{\{0,1,1,1\}}a_{\{2,0,1,0\}} + 2a_{\{1,0,2,0\}}a_{\{1,1,0,1\}}$
<b>3</b>	$-4/3$	$a_{\{0,2,1,0\}}a_{\{1,0,0,2\}}$
<b>4</b>	$-4/5$	$a_{\{0,0,1,2\}}a_{\{1,2,0,0\}}$

Таблица 2.7: Параметры для  $c_{11}$ , 2 степени свободы, резонанс 1:2,  $\sigma = +1$

$i$	$\Delta_{02}^i$	$\Phi_{02}^i$
<b>1</b>	$\lambda$	$b_{\{0,2,0,2\}}$
<b>2</b>	$-1$	$a_{\{0,1,1,1\}}a_{\{1,1,0,1\}}$
<b>3</b>	$-3/2$	$a_{\{0,1,0,2\}}a_{\{0,2,0,1\}} + a_{\{0,0,0,3\}}a_{\{0,3,0,0\}}$
<b>4</b>	$-1/3$	$a_{\{0,2,1,0\}}a_{\{1,0,0,2\}}$
<b>5</b>	$-1/5$	$a_{\{0,0,1,2\}}a_{\{1,2,0,0\}}$

Таблица 2.8: Параметры для  $c_{02}$ , 2 степени свободы, резонанс 1:2,  $\sigma = +1$

нормальной формы имеем

$$\begin{aligned}\hat{h}(Z_1, Z_2, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2) &= \hat{h}_2 + \hat{h}_3 + \hat{h}_4, \\ \hat{h}_2 &= \lambda Z_1 \bar{Z}_1 - 2\lambda Z_2 \bar{Z}_2, \quad \hat{h}_3 = a_{\{2,1,0,0\}} Z_1^2 Z_2 + a_{\{0,0,2,1\}} \bar{Z}_1^2 \bar{Z}_2, \\ \hat{h}_4 &= \frac{1}{\lambda} (c_{20}(Z_1 \bar{Z}_1)^2 + c_{11} Z_1 \bar{Z}_1 Z_2 \bar{Z}_2 + c_{02}(Z_2 \bar{Z}_2)^2),\end{aligned}$$

Выражения для  $c_{20}, c_{11}, c_{02}$  совпадают с выражениями в случае  $\sigma = 1$ .

**Две степени свободы, резонанс 1:3,  $\sigma = 1$ .** Пусть задан гамильтониан (2.13), в котором  $3\lambda_1 = \lambda_2 = 3\lambda$ . Для нормальной формы имеем:

$$\begin{aligned}\hat{h}(Z_1, Z_2, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2) &= \hat{h}_2 + \hat{h}_3 + \hat{h}_4, \\ \hat{h}_2 &= \lambda Z_1 \bar{Z}_1 + 3\lambda Z_2 \bar{Z}_2, \quad \hat{h}_3 = 0, \\ \hat{h}_4 &= \frac{1}{\lambda} (c_{20}(Z_1 \bar{Z}_1)^2 + c_{11} Z_1 \bar{Z}_1 Z_2 \bar{Z}_2 + c_{02}(Z_2 \bar{Z}_2)^2 + c_{31} Z_1^3 \bar{Z}_2 + c_{13} Z_2 \bar{Z}_1^3), \\ c_{20} &= \sum_i^4 \frac{\Phi_{20}^i}{\Delta_{20}^i}, \quad c_{11} = \sum_i^5 \frac{\Phi_{11}^i}{\Delta_{11}^i}, \quad c_{02} = \sum_i^4 \frac{\Phi_{02}^i}{\Delta_{02}^i}, \\ c_{31} &= \lambda b_{\{0,1,3,0\}} - a_{\{0,1,1,1\}} a_{\{0,1,2,0\}} + 2a_{\{1,0,2,0\}} a_{\{0,1,2,0\}} - \\ &\quad - \frac{2}{5} a_{\{0,0,2,1\}} a_{\{0,2,1,0\}} - a_{\{0,0,3,0\}} a_{\{1,1,1,0\}}, \\ c_{13} &= \lambda b_{\{3,0,0,1\}} - a_{\{1,1,0,1\}} a_{\{2,0,0,1\}} + 2a_{\{2,0,1,0\}} a_{\{2,0,0,1\}} - \\ &\quad - \frac{2}{5} a_{\{1,0,0,2\}} a_{\{2,1,0,0\}} - a_{\{1,0,1,1\}} a_{\{3,0,0,0\}}.\end{aligned}$$

Параметры для  $c_{20}, c_{11}, c_{02}$  приведены в соответствующих таблицах.

Параметры для  $c_{11}$ :

$i$	$\Delta_{20}^i$	$\Phi_{20}^i$
<b>1</b>	$\lambda$	$b_{\{2,0,2,0\}}$
<b>2</b>	$-1$	$a_{\{0,1,2,0\}}a_{\{2,0,0,1\}} + 3a_{\{1,0,2,0\}}a_{\{2,0,1,0\}} + 3a_{\{0,0,3,0\}}a_{\{3,0,0,0\}}$
<b>3</b>	$-1/3$	$a_{\{1,0,1,1\}}a_{\{1,1,1,0\}}$
<b>4</b>	$-1/5$	$a_{\{0,0,2,1\}}a_{\{2,1,0,0\}}$

Таблица 2.9: Параметры для  $c_{20}$ , 2 степени свободы, резонанс 1:3,  $\sigma = +1$

$i$	$\Delta_{11}^i$	$\Phi_{11}^i$
<b>1</b>	$\lambda$	$b_{\{1,1,1,1\}}$
<b>2</b>	$-1$	$2a_{\{1,0,2,0\}}a_{\{1,1,0,1\}} - 4a_{\{0,1,2,0\}}a_{\{2,0,0,1\}} + 2a_{\{0,1,1,1\}}a_{\{2,0,1,0\}}$
<b>3</b>	$-2/3$	$a_{\{0,2,0,1\}}a_{\{1,0,1,1\}} + a_{\{0,1,0,2\}}a_{\{1,1,1,0\}}$
<b>4</b>	$-4/5$	$a_{\{0,2,1,0\}}a_{\{1,0,0,2\}} + a_{\{0,0,2,1\}}a_{\{2,1,0,0\}}$
<b>5</b>	$-4/7$	$a_{\{0,0,1,2\}}a_{\{1,2,0,0\}}$

Таблица 2.10: Параметры для  $c_{11}$ , 2 степени свободы, резонанс 1:3,  $\sigma = +1$

$i$	$\Delta_{02}^i$	$\Phi_{02}^i$
<b>1</b>	$\lambda$	$b_{\{0,2,0,2\}}$
<b>2</b>	$-1$	$a_{\{0,1,0,2\}}a_{\{0,2,0,1\}} + a_{\{0,0,0,3\}}a_{\{0,3,0,0\}} + a_{\{0,1,1,1\}}a_{\{1,1,0,1\}}$
<b>3</b>	$1/5$	$a_{\{0,2,1,0\}}a_{\{1,0,0,2\}}$
<b>4</b>	$-1/7$	$a_{\{0,0,1,2\}}a_{\{1,2,0,0\}}$

Таблица 2.11: Параметры для  $c_{02}$ , 2 степени свободы, резонанс 1:3,  $\sigma = +1$

$i$	$\Delta_{20}^i$	$\Phi_{20}^i$
<b>1</b>	$\lambda$	$b_{\{2,0,2,0\}}$
<b>2</b>	$-1$	$3a_{\{1,0,2,0\}}a_{\{2,0,1,0\}} - a_{\{0,0,2,1\}}a_{\{2,1,0,0\}} + 3a_{\{0,0,3,0\}}a_{\{3,0,0,0\}}$
<b>3</b>	$1/3$	$a_{\{1,0,1,1\}}a_{\{1,1,1,0\}}$
<b>4</b>	$1/5$	$a_{\{0,1,2,0\}}a_{\{2,0,0,1\}}$

Таблица 2.12: Параметры для  $c_{20}$ , 2 степени свободы, резонанс 1:3,  $\sigma = -1$

**Две степени свободы, резонанс 1:3,  $\sigma = -1$ .** Пусть задан гамильтониан (2.13), в котором  $3\lambda_1 = \lambda_2 = 3\lambda$ . Для нормальной формы имеем

$$\hat{h}(Z_1, Z_2, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2) = \hat{h}_2 + \hat{h}_3 + \hat{h}_4,$$

$$\hat{h}_2 = \lambda Z_1 \bar{Z}_1 - 3\lambda Z_2 \bar{Z}_2, \quad \hat{h}_3 = 0,$$

$$\hat{h}_4 = \frac{1}{\lambda} (c_{20}(Z_1 \bar{Z}_1)^2 + c_{11}Z_1 \bar{Z}_1 Z_2 \bar{Z}_2 + c_{02}(Z_2 \bar{Z}_2)^2 + c_{31}Z_1^3 Z_2 + c_{13}\bar{Z}_1^3 \bar{Z}_2),$$

$$c_{20} = \sum_i^4 \frac{\Phi_{20}^i}{\Delta_{20}^i}, \quad c_{11} = \sum_i^5 \frac{\Phi_{11}^i}{\Delta_{11}^i}, \quad c_{02} = \sum_i^4 \frac{\Phi_{02}^i}{\Delta_{02}^i},$$

$$c_{31} = \lambda b_{\{0,0,3,1\}} + a_{\{0,0,2,1\}}a_{\{0,1,1,1\}} + \frac{2}{5}a_{\{0,0,1,2\}}a_{\{0,1,2,0\}} - a_{\{0,0,3,0\}}a_{\{1,0,1,1\}} + 2a_{\{0,0,2,1\}}a_{\{1,0,2,0\}},$$

$$c_{13} = \lambda b_{\{3,1,0,0\}} + \frac{2}{5}a_{\{1,2,0,0\}}a_{\{2,0,0,1\}} + a_{\{1,1,0,1\}}a_{\{2,1,0,0\}} + 2a_{\{2,0,1,0\}}a_{\{2,1,0,0\}} - a_{\{1,1,1,0\}}a_{\{3,0,0,0\}}.$$

Параметры для  $c_{20}, c_{11}, c_{02}$  приведены в соответствующих таблицах.

**Две степени свободы, резонанс 1:1,  $\sigma = 1$ .** Пусть задан гамильтониан (2.13), в котором  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Для нормальной формы имеем

$i$	$\Delta_{11}^i$	$\Phi_{11}^i$
<b>1</b>	$\lambda$	$b_{\{1,1,1,1\}}$
<b>2</b>	$-2$	$a_{\{1,0,2,0\}}a_{\{1,1,0,1\}} + a_{\{0,1,1,1\}}a_{\{2,0,1,0\}} - 2a_{\{0,0,2,1\}}a_{\{2,1,0,0\}}$
<b>3</b>	$2/3$	$a_{\{0,2,0,1\}}a_{\{1,0,1,1\}} + a_{\{0,1,0,2\}}a_{\{1,1,1,0\}}$
<b>4</b>	$4/5$	$a_{\{0,0,1,2\}}a_{\{1,2,0,0\}} - a_{\{0,1,2,0\}}a_{\{2,0,0,1\}}$
<b>5</b>	$4/7$	$a_{\{0,2,1,0\}}a_{\{1,0,0,2\}}$

Таблица 2.13: Параметры для  $c_{11}$ , 2 степени свободы, резонанс 1:3,  $\sigma = -1$

$i$	$\Delta_{02}^i$	$\Phi_{02}^i$
<b>1</b>	$\lambda$	$b_{\{0,2,0,2\}}$
<b>2</b>	$1$	$a_{\{0,1,0,2\}}a_{\{0,2,0,1\}} + a_{\{0,0,0,3\}}a_{\{0,3,0,0\}} - a_{\{0,1,1,1\}}a_{\{1,1,0,1\}}$
<b>3</b>	$1/5$	$a_{\{0,0,1,2\}}a_{\{1,2,0,0\}}$
<b>4</b>	$-1/7$	$a_{\{0,2,1,0\}}a_{\{1,0,0,2\}}$

Таблица 2.14: Параметры для  $c_{02}$ , 2 степени свободы, резонанс 1:3,  $\sigma = -1$

$$\hat{h}(Z_1, Z_2, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2) = \hat{h}_2 + \hat{h}_3 + \hat{h}_4,$$

$$\hat{h}_2 = \lambda Z_1 \bar{Z}_1 + \lambda Z_2 \bar{Z}_2, \quad \hat{h}_3 = 0,$$

$$\begin{aligned} \hat{h}_4 = & \frac{1}{\lambda} (c_1 Z_1 \bar{Z}_1 Z_2 \bar{Z}_2 + c_2 Z_1^2 \bar{Z}_1^2 + c_3 Z_2^2 \bar{Z}_2^2 + c_4 Z_1^2 \bar{Z}_2^2 + c_5 Z_2^2 \bar{Z}_1^2) + \\ & + \frac{1}{\lambda} (c_6 Z_1^2 \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 + c_7 Z_1 Z_2 \bar{Z}_1^2 + c_8 Z_2^2 \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 + c_9 Z_1 Z_2 \bar{Z}_2^2), \end{aligned}$$

В отличие от предыдущих случаев, в табличном виде коэффициенты представляются не проще, и поэтому приводятся в

строчном виде.

$$\begin{aligned}
c_1 &= \lambda b_{\{1,1,1,1\}} - 4a_{\{0,2,1,0\}}a_{\{1,0,0,2\}} - 2a_{\{0,2,0,1\}}a_{\{1,0,1,1\}} - 2a_{\{1,0,2,0\}}a_{\{1,1,0,1\}} - \\
&- 2a_{\{0,1,0,2\}}a_{\{1,1,1,0\}} - \frac{4}{3}a_{\{0,0,1,2\}}a_{\{1,2,0,0\}} - 4a_{\{0,1,2,0\}}a_{\{2,0,0,1\}} - \\
&- 2a_{\{0,1,1,1\}}a_{\{2,0,1,0\}} - \frac{4}{3}a_{\{0,0,2,1\}}a_{\{2,1,0,0\}}, \\
c_2 &= \lambda b_{\{2,0,2,0\}} - a_{\{1,0,1,1\}}a_{\{1,1,1,0\}} + a_{\{0,1,2,0\}}a_{\{2,0,0,1\}} - 3a_{\{1,0,2,0\}}a_{\{2,0,1,0\}} - \\
&- \frac{1}{3}a_{\{0,0,2,1\}}a_{\{2,1,0,0\}} - 3a_{\{0,0,3,0\}}a_{\{3,0,0,0\}}, \\
c_3 &= \lambda b_{\{0,2,0,2\}} - 3a_{\{0,1,0,2\}}a_{\{0,2,0,1\}} - 3a_{\{0,0,0,3\}}a_{\{0,3,0,0\}} + \\
&+ a_{\{0,2,1,0\}}a_{\{1,0,0,2\}} - a_{\{0,1,1,1\}}a_{\{1,1,0,1\}} - \frac{1}{3}a_{\{0,0,1,2\}}a_{\{1,2,0,0\}}, \\
c_4 &= \lambda b_{\{2,0,0,2\}} - 2a_{\{1,0,0,2\}}a_{\{1,1,0,1\}} + a_{\{0,1,0,2\}}a_{\{2,0,0,1\}} - \\
&- 2a_{\{1,0,1,1\}}a_{\{2,0,0,1\}} + a_{\{1,0,0,2\}}a_{\{2,0,1,0\}} - a_{\{0,0,0,3\}}a_{\{2,1,0,0\}} - a_{\{0,0,1,2\}}a_{\{3,0,0,0\}}, \\
c_5 &= \lambda b_{\{0,2,2,0\}} + a_{\{0,1,2,0\}}a_{\{0,2,0,1\}} - 2a_{\{0,1,1,1\}}a_{\{0,2,1,0\}} - a_{\{0,0,2,1\}}a_{\{0,3,0,0\}} + \\
&+ a_{\{0,2,1,0\}}a_{\{1,0,2,0\}} - 2a_{\{0,1,2,0\}}a_{\{1,1,1,0\}} - a_{\{0,0,3,0\}}a_{\{1,2,0,0\}}, \\
c_6 &= \lambda b_{\{2,0,1,1\}} - a_{\{1,0,1,1\}}a_{\{1,1,0,1\}} - 2a_{\{1,0,0,2\}}a_{\{1,1,1,0\}} + a_{\{0,1,1,1\}}a_{\{2,0,0,1\}} - \\
&- 4a_{\{1,0,2,0\}}a_{\{2,0,0,1\}} - a_{\{1,0,1,1\}}a_{\{2,0,1,0\}} - \frac{2}{3}a_{\{0,0,1,2\}}a_{\{2,1,0,0\}} - 2a_{\{0,0,2,1\}}a_{\{3,0,0,0\}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_7 &= \lambda b_{\{1,1,2,0\}} - 2a_{\{0,2,1,0\}}a_{\{1,0,1,1\}} + a_{\{0,1,2,0\}}a_{\{1,1,0,1\}} - a_{\{0,1,1,1\}}a_{\{1,1,1,0\}} - \\
&- a_{\{1,0,2,0\}}a_{\{1,1,1,0\}} - \frac{2}{3}a_{\{0,0,2,1\}}a_{\{1,2,0,0\}} - 4a_{\{0,1,2,0\}}a_{\{2,0,1,0\}} - 2a_{\{0,0,3,0\}}a_{\{2,1,0,0\}}, \\
c_8 &= \lambda b_{\{0,2,1,1\}} - a_{\{0,1,1,1\}}a_{\{0,2,0,1\}} - 4a_{\{0,1,0,2\}}a_{\{0,2,1,0\}} - 2a_{\{0,0,1,2\}}a_{\{0,3,0,0\}} + \\
&+ a_{\{0,2,1,0\}}a_{\{1,0,1,1\}} - 2a_{\{0,1,2,0\}}a_{\{1,1,0,1\}} - a_{\{0,1,1,1\}}a_{\{1,1,1,0\}} - \frac{2}{3}a_{\{0,0,2,1\}}a_{\{1,2,0,0\}}, \\
c_9 &= \lambda b_{\{1,1,0,2\}} - 4a_{\{0,2,0,1\}}a_{\{1,0,0,2\}} + a_{\{1,1,1,0\}}a_{\{1,0,0,2\}} - a_{\{0,1,0,2\}}a_{\{1,1,0,1\}} - \\
&- a_{\{1,0,1,1\}}a_{\{1,1,0,1\}} - 2a_{\{0,0,0,3\}}a_{\{1,2,0,0\}} - 2a_{\{0,1,1,1\}}a_{\{2,0,0,1\}} - \frac{2}{3}a_{\{0,0,1,2\}}a_{\{2,1,0,0\}}.
\end{aligned}$$

**Две степени свободы, резонанс 1:1,  $\sigma = -1$ .** Пусть задан гамильтониан (2.13), в котором  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Для нормальной формы имеем

$$\begin{aligned}
\hat{h}(Z_1, Z_2, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2) &= \hat{h}_2 + \hat{h}_3 + \hat{h}_4, \\
\hat{h}_2 &= \lambda Z_1 \bar{Z}_1 - \lambda Z_2 \bar{Z}_2, \quad \hat{h}_3 = 0, \\
\hat{h}_4 &= \frac{1}{\lambda} (c_1 Z_1 \bar{Z}_1 Z_2 \bar{Z}_2 + c_2 Z_1^2 \bar{Z}_1^2 + c_3 Z_2^2 \bar{Z}_2^2 + c_4 Z_1^2 Z_2^2 + c_5 Z_1 Z_2^2 \bar{Z}_2) + \\
&+ \frac{1}{\lambda} (c_6 Z_1^2 Z_2 \bar{Z}_1 + c_7 Z_2 \bar{Z}_1 \bar{Z}_2^2 + c_8 Z_1 \bar{Z}_1^2 \bar{Z}_2 + c_9 \bar{Z}_1^2 \bar{Z}_2^2),
\end{aligned}$$

Здесь также коэффициенты приводятся в строчном виде.

$$\begin{aligned}
c_1 &= \lambda b_{\{1,1,1,1\}} + \frac{4}{3} a_{\{0,2,1,0\}} a_{\{1,0,0,2\}} + 2a_{\{0,2,0,1\}} a_{\{1,0,1,1\}} - 2a_{\{1,0,2,0\}} a_{\{1,1,0,1\}} + \\
&+ 2a_{\{0,1,0,2\}} a_{\{1,1,1,0\}} + 4a_{\{0,0,1,2\}} a_{\{1,2,0,0\}} - \frac{4}{3} a_{\{0,1,2,0\}} a_{\{2,0,0,1\}} - \\
&- 2a_{\{0,1,1,1\}} a_{\{2,0,1,0\}} - 4a_{\{0,0,2,1\}} a_{\{2,1,0,0\}}, \\
c_2 &= \lambda b_{\{2,0,2,0\}} + a_{\{1,0,1,1\}} a_{\{1,1,1,0\}} + \frac{1}{3} a_{\{0,1,2,0\}} a_{\{2,0,0,1\}} - 3a_{\{1,0,2,0\}} a_{\{2,0,1,0\}} - \\
&- a_{\{0,0,2,1\}} a_{\{2,1,0,0\}} - 3a_{\{0,0,3,0\}} a_{\{3,0,0,0\}}, \\
c_3 &= \lambda b_{\{0,2,0,2\}} + 3a_{\{0,1,0,2\}} a_{\{0,2,0,1\}} + 3a_{\{0,0,0,3\}} a_{\{0,3,0,0\}} - \frac{1}{3} a_{\{0,2,1,0\}} a_{\{1,0,0,2\}} - \\
&- a_{\{0,1,1,1\}} a_{\{1,1,0,1\}} + a_{\{0,0,1,2\}} a_{\{1,2,0,0\}}, \\
c_4 &= \lambda b_{\{2,2,0,0\}} + 2a_{\{1,1,0,1\}} a_{\{1,2,0,0\}} + a_{\{2,0,1,0\}} a_{\{1,2,0,0\}} + a_{\{0,3,0,0\}} a_{\{2,0,0,1\}} - \\
&- a_{\{0,2,0,1\}} a_{\{2,1,0,0\}} - 2a_{\{1,1,1,0\}} a_{\{2,1,0,0\}} - a_{\{0,2,1,0\}} a_{\{3,0,0,0\}}, \\
c_5 &= \lambda b_{\{1,2,0,1\}} + 2a_{\{0,3,0,0\}} a_{\{1,0,0,2\}} + a_{\{0,2,0,1\}} a_{\{1,1,0,1\}} - a_{\{1,1,0,1\}} a_{\{1,1,1,0\}} + \\
&+ 4a_{\{0,1,0,2\}} a_{\{1,2,0,0\}} + a_{\{1,0,1,1\}} a_{\{1,2,0,0\}} - \frac{2}{3} a_{\{0,2,1,0\}} a_{\{2,0,0,1\}} - 2a_{\{0,1,1,1\}} a_{\{2,1,0,0\}}, \\
c_6 &= \lambda b_{\{2,1,1,0\}} + a_{\{1,1,0,1\}} a_{\{1,1,1,0\}} - a_{\{2,0,1,0\}} a_{\{1,1,1,0\}} + 2a_{\{1,0,1,1\}} a_{\{1,2,0,0\}} + \\
&+ \frac{2}{3} a_{\{0,2,1,0\}} a_{\{2,0,0,1\}} - a_{\{0,1,1,1\}} a_{\{2,1,0,0\}} - 4a_{\{1,0,2,0\}} a_{\{2,1,0,0\}} - 2a_{\{0,1,2,0\}} a_{\{3,0,0,0\}}, \\
c_7 &= \lambda b_{\{0,1,1,2\}} + a_{\{0,1,0,2\}} a_{\{0,1,1,1\}} - a_{\{1,0,1,1\}} a_{\{0,1,1,1\}} + 4a_{\{0,0,1,2\}} a_{\{0,2,0,1\}} + \\
&+ 2a_{\{0,0,0,3\}} a_{\{0,2,1,0\}} - \frac{2}{3} a_{\{0,1,2,0\}} a_{\{1,0,0,2\}} - 2a_{\{0,0,2,1\}} a_{\{1,1,0,1\}} + a_{\{0,0,1,2\}} a_{\{1,1,1,0\}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_8 &= \lambda b_{\{1,0,2,1\}} + \frac{2}{3} a_{\{0,1,2,0\}} a_{\{1,0,0,2\}} + a_{\{0,1,1,1\}} a_{\{1,0,1,1\}} - a_{\{1,0,1,1\}} a_{\{1,0,2,0\}} - \\
&- a_{\{0,0,2,1\}} a_{\{1,1,0,1\}} + 2a_{\{0,0,1,2\}} a_{\{1,1,1,0\}} - 2a_{\{0,0,3,0\}} a_{\{2,0,0,1\}} - 4a_{\{0,0,2,1\}} a_{\{2,0,1,0\}}, \\
c_9 &= \lambda b_{\{0,0,2,2\}} - a_{\{0,0,2,1\}} a_{\{0,1,0,2\}} + 2a_{\{0,0,1,2\}} a_{\{0,1,1,1\}} + a_{\{0,0,0,3\}} a_{\{0,1,2,0\}} - \\
&- a_{\{0,0,3,0\}} a_{\{1,0,0,2\}} - 2a_{\{0,0,2,1\}} a_{\{1,0,1,1\}} + a_{\{0,0,1,2\}} a_{\{1,0,2,0\}}.
\end{aligned}$$

**Три степени свободы, нет резонанса,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ .**

Пусть задан гамильтониан

$$\begin{aligned}
h(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3) &= h_2 + h_3 + h_4, \\
h_2 &= \lambda_1 z_1 \bar{z}_1 + \sigma_1 \lambda_2 z_2 \bar{z}_2 + \sigma_2 \lambda_3 z_3 \bar{z}_3, \\
h_3 &= \sum_{i+j+l+m+o+p=3} a_{\{i,j,l,m,o,p\}} z_1^i z_2^j z_3^l \bar{z}_1^m \bar{z}_2^o \bar{z}_3^p, \\
h_4 &= \sum_{i+j+l+m+o+p=4} b_{\{i,j,l,m,o,p\}} z_1^i z_2^j z_3^l \bar{z}_1^m \bar{z}_2^o \bar{z}_3^p.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

В  $h_3$  содержится 56 слагаемых, а в  $h_4$  126.

Для нормальной формы имеем

$$\begin{aligned}
\hat{h}(Z_1, Z_2, Z_3, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3) &= \hat{h}_2 + \hat{h}_3 + \hat{h}_4, \\
\hat{h}_2 &= \lambda_1 Z_1 \bar{Z}_1 + \lambda_2 Z_2 \bar{Z}_2 + \lambda_3 Z_3 \bar{Z}_3, \quad \hat{h}_3 = 0, \\
\hat{h}_4 &= c_{200} (Z_1 \bar{Z}_1)^2 + c_{020} (Z_2 \bar{Z}_2)^2 + c_{002} (Z_3 \bar{Z}_3)^2 + \\
&+ c_{110} Z_1 \bar{Z}_1 Z_2 \bar{Z}_2 + c_{101} Z_1 \bar{Z}_1 Z_3 \bar{Z}_3 + c_{011} Z_2 \bar{Z}_2 Z_3 \bar{Z}_3,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
c_{200} &= \sum_i^8 \frac{\Phi_{200}^i}{\Delta_{200}^i}, & c_{020} &= \sum_i^8 \frac{\Phi_{020}^i}{\Delta_{020}^i}, & c_{002} &= \sum_i^8 \frac{\Phi_{002}^i}{\Delta_{002}^i}, \\
c_{110} &= \sum_i^1 2 \frac{\Phi_{110}^i}{\Delta_{110}^i}, & c_{101} &= \sum_i^1 2 \frac{\Phi_{101}^i}{\Delta_{101}^i}, & c_{011} &= \sum_i^1 2 \frac{\Phi_{011}^i}{\Delta_{011}^i}.
\end{aligned}$$

$i$	$\Delta_{200}^i$	$\Phi_{200}^i$
1	1	$b_{\{2,0,0,2,0,0\}}$
2	$\lambda_1$	$-3a_{\{1,0,0,2,0,0\}}a_{\{2,0,0,1,0,0\}} - 3a_{\{0,0,0,3,0,0\}}a_{\{3,0,0,0,0,0\}}$
3	$\lambda_2$	$-a_{\{1,0,0,1,1,0\}}a_{\{1,1,0,1,0,0\}}$
4	$\lambda_3$	$-a_{\{1,0,0,1,0,1\}}a_{\{1,0,1,1,0,0\}}$
5	$2\lambda_1 - \lambda_2$	$a_{\{0,1,0,2,0,0\}}a_{\{2,0,0,0,1,0\}}$
6	$2\lambda_1 + \lambda_2$	$-a_{\{0,0,0,2,1,0\}}a_{\{2,1,0,0,0,0\}}$
7	$2\lambda_1 - \lambda_3$	$a_{\{0,0,1,2,0,0\}}a_{\{2,0,0,0,0,1\}}$
8	$2\lambda_1 + \lambda_3$	$-a_{\{0,0,0,2,0,1\}}a_{\{2,0,1,0,0,0\}}$

Таблица 2.15: Параметры для  $c_{200}$ , 3 степени свободы, нет резонанса

$i$	$\Delta_{020}^i$	$\Phi_{020}^i$
1	1	$b_{\{0,2,0,0,2,0\}}$
2	$\lambda_1$	$-a_{\{0,1,0,1,1,0\}}a_{\{1,1,0,0,1,0\}}$
3	$\lambda_2$	$-3a_{\{0,1,0,0,2,0\}}a_{\{0,2,0,0,1,0\}} - 3a_{\{0,0,0,0,3,0\}}a_{\{0,3,0,0,0,0\}}$
4	$\lambda_3$	$-a_{\{0,1,0,0,1,1\}}a_{\{0,1,1,0,1,0\}}$
5	$2\lambda_2 - \lambda_1$	$a_{\{0,2,0,1,0,0\}}a_{\{1,0,0,0,2,0\}}$
6	$2\lambda_2 + \lambda_1$	$-a_{\{0,0,0,1,2,0\}}a_{\{1,2,0,0,0,0\}}$
7	$2\lambda_2 - \lambda_3$	$a_{\{0,0,1,0,2,0\}}a_{\{0,2,0,0,0,1\}}$
8	$2\lambda_2 + \lambda_3$	$-a_{\{0,0,0,0,2,1\}}a_{\{0,2,1,0,0,0\}}$

Таблица 2.16: Параметры для  $c_{020}$ , 3 степени свободы, нет резонанса

Параметры для  $c_{200}$ ,  $c_{020}$ ,  $c_{002}$ ,  $c_{110}$ ,  $c_{101}$ ,  $c_{011}$  приведены в соответствующих таблицах.

Здесь, как и в случае 2-х степеней свободы, знаменатель в некоторых коэффициентах нормальной формы или генератора нормализующей замены обращается в ноль при резонансах 1:1, 1:2 или 1:3 между любыми двумя собственными числами. Отдельного рассмотрения также требуют случаи резонансов типа 1:1:2.

$i$	$\Delta_{002}^i$	$\Phi_{002}^i$
1	1	$b_{\{0,0,2,0,0,2\}}$
2	$\lambda_1$	$-a_{\{0,0,1,1,0,1\}}a_{\{1,0,1,0,0,1\}}$
3	$\lambda_2$	$-a_{\{0,0,1,0,1,1\}}a_{\{0,1,1,0,0,1\}}$
4	$\lambda_3$	$-3a_{\{0,0,1,0,0,2\}}a_{\{0,0,2,0,0,1\}} - 3a_{\{0,0,0,0,0,3\}}a_{\{0,0,3,0,0,0\}}$
5	$2\lambda_3 - \lambda_1$	$a_{\{0,0,2,1,0,0\}}a_{\{1,0,0,0,0,2\}}$
6	$2\lambda_3 + \lambda_1$	$-a_{\{0,0,0,1,0,2\}}a_{\{1,0,2,0,0,0\}}$
7	$2\lambda_3 - \lambda_2$	$a_{\{0,0,2,0,1,0\}}a_{\{0,1,0,0,0,2\}}$
8	$2\lambda_3 + \lambda_2$	$-a_{\{0,0,0,0,1,2\}}a_{\{0,1,2,0,0,0\}}$

Таблица 2.17: Параметры для  $c_{002}$ , 3 степени свободы, нет резонанса

$i$	$\Delta_{110}^i$	$\Phi_{110}^i$
1	1	$b_{\{1,1,0,1,1,0\}}$
2	$\lambda_1$	$-2a_{\{1,0,0,2,0,0\}}a_{\{1,1,0,0,1,0\}} - 2a_{\{0,1,0,1,1,0\}}a_{\{2,0,0,1,0,0\}}$
3	$\lambda_2$	$-2a_{\{0,2,0,0,1,0\}}a_{\{1,0,0,1,1,0\}} - 2a_{\{0,1,0,0,2,0\}}a_{\{1,1,0,1,0,0\}}$
4	$\lambda_3$	$-a_{\{0,1,1,0,1,0\}}a_{\{1,0,0,1,0,1\}} - a_{\{0,1,0,0,1,1\}}a_{\{1,0,1,1,0,0\}}$
5	$2\lambda_1 - \lambda_2$	$-4a_{\{0,1,0,2,0,0\}}a_{\{2,0,0,0,1,0\}}$
6	$2\lambda_1 + \lambda_2$	$-4a_{\{0,0,0,2,1,0\}}a_{\{2,1,0,0,0,0\}}$
7	$\lambda_1 - 2\lambda_2$	$4a_{\{0,2,0,1,0,0\}}a_{\{1,0,0,0,2,0\}}$
8	$\lambda_1 + 2\lambda_2$	$-4a_{\{0,0,0,1,2,0\}}a_{\{1,2,0,0,0,0\}}$
9	$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$	$-a_{\{0,0,0,1,1,1\}}a_{\{1,1,1,0,0,0\}}$
10	$\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3$	$-a_{\{0,1,0,1,0,1\}}a_{\{1,0,1,0,1,0\}}$
11	$\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3$	$a_{\{0,0,1,1,1,0\}}a_{\{1,1,0,0,0,1\}}$
12	$\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$	$a_{\{0,1,1,1,0,0\}}a_{\{1,0,0,0,1,1\}}$

Таблица 2.18: Параметры для  $c_{110}$ , 3 степени свободы, нет резонанса

$i$	$\Delta_{101}^i$	$\Phi_{101}^i$
1	1	$b_{\{1,0,1,1,0,1\}}$
2	$\lambda_1$	$-2a_{\{1,0,0,2,0,0\}}a_{\{1,0,1,0,0,1\}} - 2a_{\{0,0,1,1,0,1\}}a_{\{2,0,0,1,0,0\}}$
3	$\lambda_2$	$-a_{\{0,1,1,0,0,1\}}a_{\{1,0,0,1,1,0\}} - a_{\{0,0,1,0,1,1\}}a_{\{1,1,0,1,0,0\}}$
4	$\lambda_3$	$-2a_{\{0,0,2,0,0,1\}}a_{\{1,0,0,1,0,1\}} - 2a_{\{0,0,1,0,0,2\}}a_{\{1,0,1,1,0,0\}}$
5	$2\lambda_1 - \lambda_3$	$-4a_{\{0,0,1,2,0,0\}}a_{\{2,0,0,0,0,1\}}$
6	$2\lambda_1 + \lambda_3$	$-4a_{\{0,0,0,2,0,1\}}a_{\{2,0,1,0,0,0\}}$
7	$\lambda_1 - 2\lambda_3$	$4a_{\{0,0,2,1,0,0\}}a_{\{1,0,0,0,0,2\}}$
8	$\lambda_1 + 2\lambda_3$	$-4a_{\{0,0,0,1,0,2\}}a_{\{1,0,2,0,0,0\}}$
9	$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$	$-a_{\{0,0,0,1,1,1\}}a_{\{1,1,1,0,0,0\}}$
10	$\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3$	$a_{\{0,1,0,1,0,1\}}a_{\{1,0,1,0,1,0\}}$
11	$\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3$	$-a_{\{0,0,1,1,1,0\}}a_{\{1,1,0,0,0,1\}}$
12	$\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$	$a_{\{0,1,1,1,0,0\}}a_{\{1,0,0,0,1,1\}}$

Таблица 2.19: Параметры для  $c_{101}$ , 3 степени свободы, нет резонанса

$i$	$\Delta_{011}^i$	$\Phi_{011}^i$
1	1	$b_{\{0,1,1,0,1,1\}}$
2	$\lambda_1$	$-a_{\{0,1,0,1,1,0\}}a_{\{1,0,1,0,0,1\}} - a_{\{0,0,1,1,0,1\}}a_{\{1,1,0,0,1,0\}}$
3	$\lambda_2$	$-2a_{\{0,1,0,0,2,0\}}a_{\{0,1,1,0,0,1\}} - 2a_{\{0,0,1,0,1,1\}}a_{\{0,2,0,0,1,0\}}$
4	$\lambda_3$	$-2a_{\{0,0,2,0,0,1\}}a_{\{0,1,0,0,1,1\}} - 2a_{\{0,0,1,0,0,2\}}a_{\{0,1,1,0,1,0\}}$
5	$2\lambda_2 - \lambda_3$	$-4a_{\{0,0,0,0,2,1\}}a_{\{0,2,1,0,0,0\}}$
6	$2\lambda_2 + \lambda_3$	$4a_{\{0,0,2,0,1,0\}}a_{\{0,1,0,0,0,2\}}$
7	$\lambda_2 - 2\lambda_3$	$-4a_{\{0,0,0,0,1,2\}}a_{\{0,1,2,0,0,0\}}$
8	$\lambda_2 + 2\lambda_3$	$-4a_{\{0,0,0,0,1,2\}}a_{\{0,1,2,0,0,0\}}$
9	$\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_3$	$-a_{\{0,0,0,1,1,1\}}a_{\{1,1,1,0,0,0\}}$
10	$\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3$	$-a_{\{0,1,0,1,0,1\}}a_{\{1,0,1,0,1,0\}}$
11	$\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3$	$-a_{\{0,0,1,1,1,0\}}a_{\{1,1,0,0,0,1\}}$
12	$\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$	$-a_{\{0,1,1,1,0,0\}}a_{\{1,0,0,0,1,1\}}$

Таблица 2.20: Параметры для  $c_{011}$ , 3 степени свободы, нет резонанса

### 2.3 Интеграл приближенной системы в случае, когда квадратичный гамильтониан не приведен к нормальной форме

Алгоритм инвариантной нормализации также допускает формальное применение в случае, если квадратичный гамильтониан  $H_2$  не приведен к своей нормальной форме. Выберем следующий вид степенного разложения гамильтониана:

$$h_2 = E + \omega K,$$

$$E = \frac{1}{2} (q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2} (q_2^2 + p_2^2),$$

$$K = q_1 p_2 - p_1 q_2,$$

$$h_3 = 0, \quad h_4 = \sum_{i+j+l+m=4} b_{\{i,j,l,m\}} q_1^i q_2^j p_1^l p_2^m$$

Здесь, как и ранее, коэффициенты  $\omega, b_{\{i,j,l,m\}}$  считаются параметрами системы. Такой вид гамильтониана соответствует, например, задаче о волчке Лагранжа и задаче о маятнике Фуко [30].

В результате применения алгоритма найден следующий вид интеграла  $\{\hat{h}_2, \hat{h}_4\} = 0$ :

$$\hat{h}_2 = \hat{E} + \omega \hat{K},$$

$$\hat{E} = \frac{1}{2} (\hat{q}_1^2 + \hat{p}_1^2) + \frac{1}{2} (\hat{q}_2^2 + \hat{p}_2^2),$$

$$\hat{K} = \hat{q}_1 \hat{p}_2 - \hat{p}_1 \hat{q}_2,$$

$$\hat{h}_3 = 0, \quad \hat{h}_4 = c_{20} \hat{E}^2 + c_{11} \hat{E} \hat{K} + c_{02} \hat{K}^2$$

Степенная замена  $(q_1, q_2, p_1, p_2) \rightarrow (\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{p}_1, \hat{p}_2)$  в квадратичных членах сводится к тождественной, но содержит мономы 3-го

порядка по координатам и импульсам. Коэффициенты  $c_{20}, c_{11}, c_{02}$  найдены как функция от исходных параметров гамильтониана:

$$\begin{aligned}
c_{20} &= \frac{1}{16} (9b_{\{0,0,0,4\}} + 3b_{\{0,0,2,2\}} + 9b_{\{0,0,4,0\}} + 3b_{\{0,2,0,2\}} + b_{\{0,2,2,0\}} + 9b_{\{0,4,0,0\}}) + \\
&+ \frac{1}{16} (b_{\{1,1,1,1\}} + b_{\{2,0,0,2\}} + 3b_{\{2,0,2,0\}} + 3b_{\{2,2,0,0\}} + 9b_{\{4,0,0,0\}}), \\
c_{11} &= \frac{1}{8} (-b_{\{0,1,1,2\}} - 3b_{\{0,1,3,0\}} - 3b_{\{0,3,1,0\}} + 3b_{\{1,0,0,3\}}) + \\
&+ \frac{1}{8} (b_{\{1,0,2,1\}} + b_{\{1,2,0,1\}} - b_{\{2,1,1,0\}} + 3b_{\{3,0,0,1\}}), \\
c_{02} &= \frac{1}{16} (-3b_{\{0,0,0,4\}} - b_{\{0,0,2,2\}} - 3b_{\{0,0,4,0\}} - b_{\{0,2,0,2\}} + 5b_{\{0,2,2,0\}} - 3b_{\{0,4,0,0\}}) + \\
&+ \frac{1}{16} (-3b_{\{1,1,1,1\}} + 5b_{\{2,0,0,2\}} - b_{\{2,0,2,0\}} - b_{\{2,2,0,0\}} - 3b_{\{4,0,0,0\}})
\end{aligned}$$

Благодаря наличию двух интегралов ( $\hat{E}$  и  $\hat{K}$ ) уравнения Гамильтона для системы  $\hat{h}_2 + \hat{h}_4$  легко разрешить аналитически. Например, при  $p_1(0) = p_2(0) = 0$  имеем:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(a_2 t) & -\sin(a_2 t) \\ \sin(a_2 t) & \cos(a_2 t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1(0) \cos(a_1 t) \\ q_2(0) \cos(a_1 t) \end{pmatrix} \\
a_1 &= 1 + \frac{1}{2} (c_{20} E + c_{11} K), \quad a_2 = \omega + \frac{1}{2} (c_{11} E + c_{02} K).
\end{aligned}$$

Полученные результаты были применены для исследований задач о волчке Лагранжа и маятнике Фуко [36], где было также проведено численное сравнение асимптотических решений с решениями уравнений Гамильтона для исходных гамильтонианов задач. Результаты обобщают решения этих задач на весь класс подобных гамильтонианов. Физически решения означают периодические колебания с угловой скоростью  $a_1$ , на которые наложена прецессия с угловой скоростью  $a_2$ . При этом коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$  зависят от начальных условий, в частности, от амплитуды колебаний. Так, поправка  $\frac{1}{2} (c_{11} E + c_{02} K)$

в коэффициенте  $a_2$  является неустранимой погрешностью при определении периода вращения Земли с помощью маятника Фуко, которую следует учитывать при проведении опытов [30].

## Глава 3

# Движения в окрестностях коллинеарных точек либрации круговой ограниченной задачи трех тел

### 3.1 Постановка и актуальность задачи

Рассматривается движение тела малой массы  $m_3$  под действием притяжения двух небесных тел, обладающих конечными массами  $m_1$  и  $m_2$  (например, движение космического аппарата, притягиваемого Землей и Луной). Для определенности считается  $m_1 > m_2$ , а также  $m_1 + m_2 = 1$ . Предполагается, что тело малой массы не влияет на движение конечных масс, движение всех трех тел происходит в одной плоскости, а также тела конечных масс движутся по круговым орбитам. Точки, в которых тело малой массы находится в состоянии относительного равновесия по отношению к телам конечных масс, называют точками либрации. В ограниченной задаче трех тел существуют три коллинеарных точки либрации, лежащие на прямой, соединяющей тела конечных масс, и две треугольные точки либрации, расположенные таким образом, что два тела и точки либрации образуют равносторонние

треугольники.

Тела массой  $m_1$  и  $m_2$  располагаются на безразмерном единичном расстоянии друг от друга, ось абсцисс вводится параллельно отрезку, соединяющему массы, а ось ординат – перпендикулярно. Центр масс системы  $c$  находится на расстоянии  $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$  от тела с массой  $m_1$ . Так как  $m_1 > m_2$ , то  $0 < \mu < 1/2$ . Коллинеарные точки либрации обозначены через  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$ , а треугольные через  $L_4$  и  $L_5$  (рис. 3.1). Начало координат располагается в точке либрации  $L_1$ . Координаты тела малой массы обозначены через  $x, y$  и  $z$ .

Движения тел в окрестностях треугольных точек либрации хорошо изучены, в том числе с учетом влияния Солнца и других тел, а также в случае пространственной эллиптической задачи. Для них найдены три типа периодических движений, условия устойчивости, рассмотрены все типы резонансов (А.П. Маркеев, [47]).

Все три коллинеарные точки либрации круговой ограниченной задачи трех тел неустойчивы по Ляпунову. Несмотря на это, расположение космического аппарата в любой из неустойчивых точек либрации является выгодным для решения ряда задач.

Особенность коллинеарных точек либрации состоит в том, что в линейной задаче из шести характеристических корней только один положительный. Поэтому в шестипараметрическом семействе орбит существует пятипараметрическое семейство орбит, не имеющих экспоненциального по времени роста ни по одной фазовой переменной. На этих орбитах космический аппарат может оставаться в течение длительного времени, затрачивая небольшое количество топлива на компенсацию развития неустойчивости.

Вышеперечисленные соображения побудили ряд авторов (А.П. Маркеев, М.Л. Лидов, М.А. Вашковьяк, Gomez G., Jorba A., Richardson L., [44, 47, 85, 86, 88] ) исследовать динамику тела, находящегося в малой окрестности коллинеарной точки

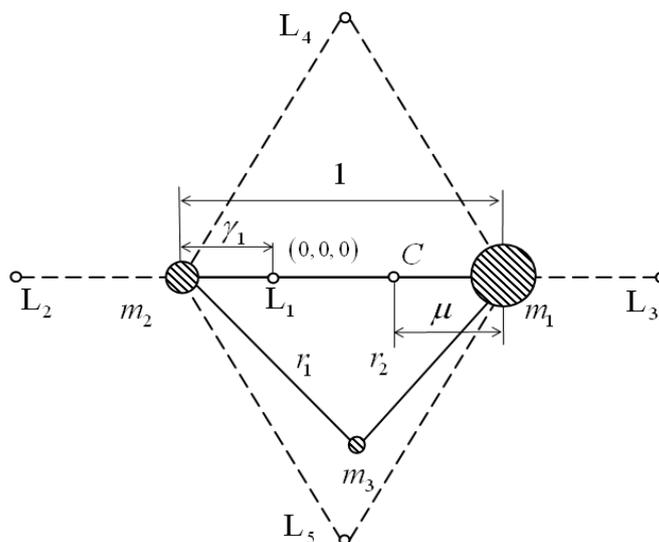


Рис. 3.1: Коллинеарные точки либрации в плоской ограниченной круговой задаче трех тел

либрации. Применялся как метод прямого решения исходных дифференциальных уравнений [44, 88], так и метод нормализации гамильтониана задачи [44, 47, 86]. Рассматривалась [44, 47] эллиптическая задача и были выведены условно-периодические решения для  $L_2$ . В другом исследовании нормализовался только квадратичный гамильтониан, а затем нормализовалась только та часть нелинейного гамильтониана, которая соответствует неустойчивой степени свободы [86]. Это также позволило вывести условно-периодические решения. Все решения, однако, были получены только численно для частных случаев для систем Солнце–Земля и Земля–Луна (в частности, с параметрической зависимостью от эксцентриситета орбиты [44, 47]).

Ниже ищется точная аналитическая нормальная форма гамильтониана вплоть до членов четвертого порядка в окрестностях всех коллинеарных точек либрации для пространственной круговой задачи как функция от приведенной массы в диапазоне  $0 < \mu < 1/2$ , а также асимптотические

реализации периодических решений при  $\mu \rightarrow 0$ .

### 3.2 Разложения гамильтониана

Во вращающейся вместе с тяжелыми телами системе координат, начало которой находится в центре масс, лагранжиан задачи записывается в виде [86]

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \dot{y}x - y\dot{x} + \Omega$$

$$\Omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \quad r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x+\mu-1)^2 + y^2 + z^2}$$

Перенос начала координат в одну из коллинеарных точек либрации выполняется при помощи замены

$$x \rightarrow \mp \gamma_j x + \mu + a, \quad y \rightarrow \mp \gamma_j y$$

Верхний знак соответствует точкам либрации  $L_1$  и  $L_2$ , а нижний – точке  $L_3$ ,  $a = -1 + \gamma_1$  для  $L_1$ ,  $a = -1 - \gamma_2$  для  $L_2$ ,  $a = \gamma_3$  для  $L_3$ , где  $\gamma_j$  – расстояние от  $j$ -й точки либрации до тела массы  $m_2$ , которое определяется через  $\mu$  как единственный действительный корень уравнения пятой степени [6]

$$\gamma_j^5 \mp (3-\mu)\gamma_j^4 + (3-2\mu)\gamma_j^3 - \mu\gamma_j^2 \pm 2\mu\gamma_j - \mu = 0, \quad j = 1, 2,$$

$$\gamma_j^5 + (2+\mu)\gamma_j^4 + (1+2\mu)\gamma_j^3 - (1-\mu)\gamma_j^2 - 2(1-\mu)\gamma_j - (1-\mu) = 0,$$

$$j = 3$$
(3.1)

В первом уравнении верхний знак соответствует точке либрации  $L_1$ , а нижний – точке  $L_2$ . Перенос начала координат также меняет единицу длины.

В предположении малости отклонений малого тела  $x, y, z$  от одной из точек либрации лагранжиан можно разложить в ряд

Тейлора по полиномам Лежандра

$$\frac{1}{\sqrt{(x-A)^2+(y-B)^2+(z-C)^2}} = \frac{1}{D} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{D}\right)^n P_n\left(\frac{Ax+By+Cz}{D\rho}\right),$$

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2, \quad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Введя обобщенные импульсы

$$p_x = \dot{x} - y, \quad p_y = \dot{y} + x, \quad p_z = \dot{z}$$

гамильтониан задачи запишем в виде [4]

$$H = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + yp_x - xp_y - \sum_{n=2}^{\infty} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right)$$

$$L_{1,2}: c_n = \frac{1}{\gamma_j^3} \left( (\pm 1)^n \mu + \frac{(-1)^n (1 - \mu)}{(1 - \gamma_j)^{n+1}} \right), \quad j = 1, 2 \quad (3.2)$$

$$L_3: c_n = \frac{(-1)^n}{\gamma_3^3} \left( 1 - \mu + \frac{\gamma_3^{n+1} \mu}{(1 + \gamma_3)^{n+1}} \right)$$

Во втором уравнении верхний знак соответствует точке либрации  $L_1$ , а нижний – точке  $L_2$ . Выпишем в явном виде три первых члена разложения гамильтониана, которые предстоит нормализовать:

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots$$

$$H_2 = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + yp_x - xp_y + c_2 \left( \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} z^2 - x^2 \right)$$

$$H_3 = c_3 \left( \frac{3}{2} xy^2 + \frac{3}{2} xz^2 - x^3 \right),$$

$$H_4 = c_4 \left( 3x^2 y^2 + 3x^2 z^2 - \frac{3}{4} y^2 z^2 - x^4 - \frac{3}{8} y^4 - \frac{3}{8} z^4 \right)$$

Зависимости коэффициентов  $c_2, c_3, c_4$  от  $\mu$  для точки либрации  $L_1$  приведены на рис. 3.2.

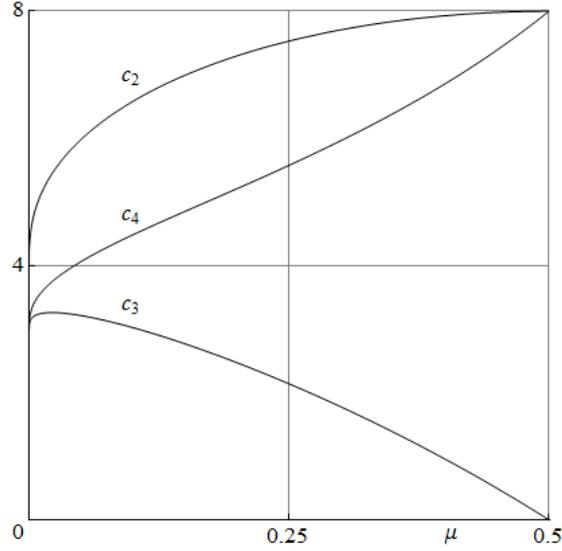


Рис. 3.2: Коэффициенты квадратичной нормальной формы в зависимости от приведенной массы

### 3.3 Нормализация квадратичного гамильтониана в окрестностях коллинеарных точек либрации

Квадратичный гамильтониан  $H_2$  приводится к своей вещественной нормальной форме

$$\tilde{H}_2 = \lambda \tilde{x} \tilde{p}_x + \frac{\omega_1}{2} (\tilde{y}^2 + \tilde{p}_y^2) + \frac{\omega_2}{2} (\tilde{z}^2 + \tilde{p}_z^2)$$

при помощи унивалентной канонической замены переменных ([86], формула (10)), все параметры которой – положительными вещественными числами при  $0 < \mu < 1/2$ . Используются следующие обозначения:

$$\lambda = \sqrt{\frac{c_2 - 2 + \sqrt{9c_2^2 - 8c_2}}{2}}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{2 - c_2 + \sqrt{9c_2^2 - 8c_2}}{2}}, \quad \omega_2 = \sqrt{c_2}$$

Численно можно показать, что при данных  $\mu$  для всех трех точек либрации выполняется условие

$$1 < \omega_1/\omega_2 < 1.06$$

гарантирующее отсутствие между модами колебаний резонансов вида 1:1, 1:2 и 1:3, которые необходимо рассматривать отдельно для расчета нормальной формы четвертого порядка.

Для применения алгоритма инвариантной нормализации, однако, значительно более удобна комплексная нормальная форма, для приведения к которой используется еще одна каноническая замена переменных валентности  $1/(2i)$ :

$$\begin{aligned} z_1 &= (1+i)\tilde{x}, & z_2 &= \tilde{p}_y + i\tilde{y}, & z_3 &= \tilde{p}_z + i\tilde{z}, & \bar{z}_1 &= (1+i)\tilde{p}_x, \\ \bar{z}_2 &= \tilde{p}_y - i\tilde{y}, & \bar{z}_3 &= \tilde{p}_z - i\tilde{z}, \\ \tilde{H}_2 &= \lambda z_1 \bar{z}_1 + i\omega_1 z_2 \bar{z}_2 + i\omega_2 z_3 \bar{z}_3 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Выражения для  $\tilde{H}_3$  и  $\tilde{H}_4$  после нормализации квадратичного гамильтониана не приводятся в силу их громоздкости. Теперь можно применять алгоритм инвариантной нормализации, считая, что

$$\varepsilon = 1, \quad H_0 = \tilde{H}_2, \quad F_1 = \tilde{H}_3, \quad F_2 = \tilde{H}_4$$

**6. Нормальная форма четвертого порядка.** При помощи алгоритма инвариантной нормализации находится каноническая унивалентная замена переменных

$$(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3) \rightarrow (Z_1, Z_2, Z_3, \bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3)$$

приводящая гамильтониан к его комплексной нормальной форме

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_2 + \hat{H}_3 + \hat{H}_4 \\ \hat{H}_2 &= \lambda \xi_1 + i\omega_1 \xi_2 + i\omega_2 \xi_3, & \hat{H}_3 &= 0 \\ \hat{H}_4 &= \alpha_{11} \xi_1^2 + \alpha_{22} \xi_2^2 + \alpha_{33} \xi_3^2 + i\alpha_{12} \xi_1 \xi_2 + i\alpha_{13} \xi_1 \xi_3 + \alpha_{23} \xi_2 \xi_3 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\xi_j = Z_j \bar{Z}_j, \quad j = 1, 2, 3$$

Здесь

$$\alpha_{kk} = \frac{c_3^2 e_1 + c_4 e_2}{4d_1 d_2}, \quad \alpha_{33} = -\frac{27(1 - 3c_2 + 14c_2^2)c_3^2}{16\sqrt{c_2}d_3} + \frac{9c_4}{16c_2},$$

$$\alpha_{12} = -72\sqrt{(c_2 - 1)(2c_2 + 1)}\frac{a_3 c_3^2 + b_3 c_4}{d_1 d_2},$$

$$\alpha_{k3} = (-1)^{k+1} 9\sqrt{(-1)^{k+1}(c_2 - 2) + \sqrt{c_2(9c_2 - 8)}}\frac{c_3^2 e_4 + c_4 e_5}{\sqrt{2}d_1 d_3}, \quad k = 1, 2$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 8748c_2^5 - 972c_2^4 - 19839c_2^3 + 22119c_2^2 - 6564c_2 - 2520 \\ a_2 &= -5832c_2^6 - 5292c_2^5 + 16614c_2^4 - 6597c_2^3 - 3789c_2^2 + 3276c_2 + 648 \\ a_3 &= -324c_2^4 + 381c_2^3 - 171c_2^2 + 55c_2 + 35 \\ a_4 &= 1512c_2^6 - 1740c_2^5 - 26c_2^4 + 525c_2^3 - 123c_2^2 - 40c_2 \\ a_5 &= -1296c_2^7 + 1008c_2^6 + 632c_2^5 - 448c_2^4 - 45c_2^3 + 49c_2^2 - 8c_2 \\ b_1 &= 16524c_2^4 - 17892c_2^3 + 2949c_2^2 + 15c_2 - 624 \\ b_2 &= -13608c_2^5 + 8388c_2^4 + 6174c_2^3 - 1521c_2^2 - 405c_2 \\ b_3 &= 324c_2^5 - 300c_2^4 - 13c_2^3 + 63c_2^2 - 41c_2 - 9 \\ b_4 &= 72c_2^5 + 404c_2^4 - 202c_2^3 - 183c_2^2 + 13c_2 + 4 \\ b_5 &= -144c_2^6 - 304c_2^5 + 168c_2^4 + 200c_2^3 - 17c_2^2 - 15c_2 + 4 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$d_1 = 8c_2(9c_2 - 8)(c_2 - 1)(2c_2 + 1)^2, \quad d_2 = c_2(54c_2 - 41) - 9,$$

$$\begin{aligned} d_3 &= \sqrt{c_2}(18c_2^2 - 7c_2 + 1)(2c_2 + 1) \\ e_k &= (-1)^{k+1} \left( a_k + b_k \sqrt{c_2(9c_2 - 8)} \right) \end{aligned}$$

Все коэффициенты – вещественными при  $0 < \mu < 1/2$ .  
Генератор нормализующей замены не приводится в силу его

громоздкости. Ниже представлена действительная нормальная форма, полученная с учетом перехода от комплексных переменных к вещественным, аналогичному (3.1) :

$$\begin{aligned}
\hat{H}_2 &= \lambda S_1 + i\omega_1 R_2 + i\omega_2 R_3, \quad \hat{H}_3 = 0 \\
\hat{H}_4 &= \alpha_{11} S_1^2 + \alpha_{22} S_2^2 + \alpha_{33} S_3^2 + \alpha_{12} S_1 R_2 + \alpha_{13} S_1 R_3 + \alpha_{23} R_2 R_3 \\
S_i &= P_i Q_i, \quad R_i = P_i^2 + Q_i^2
\end{aligned}
\tag{3.5}$$

### 3.4 Сравнение результатов с ранее известными

Сравним полученный результат с ранее проведенными расчетами для точки либрации  $L_1$  [86], в которых использовалось значение приведенной массы  $\mu = 3.04 \cdot 10^{-6}$ . В этих расчетах, однако, гамильтониан не приводился полностью к нормальной форме, а в нем лишь выделялись переменные, соответствующие неустойчивой степени свободы, которые затем из гамильтониана исключались. В результате был получен следующий вещественный гамильтониан:

$$\begin{aligned}
H^J &= H_2^J + H_3^J + H_4^J \\
H_2^J &= 1.043 \tilde{R}_2 + 1.0076 \tilde{R}_3 \\
H_3^J &= 0.652 p_2 q_2^2 - 0.0417 p_2^3 + 0.539 p_2 q_3^2 \\
H_4^J &= -0.0858 q_2^4 + 0.417 p_2^2 q_2^2 - 0.0266 p_2^4 - 0.14 q_2^2 q_3^2 + 0.279 p_2^2 q_3^2 - \\
&\quad - 0.0575 q_3^4 + 0.0625 p_2 p_3 q_2 q_3 + 0.15 p_3^2 q_2^2 - 0.0288 p_2^2 p_3^2 + 0.124 p_3^2 q_3^2 \\
\tilde{R}_j &= q_j^2 + p_j^2, \quad j = 2, 3
\end{aligned}
\tag{3.6}$$

Таким образом, для того чтобы проверить полученное здесь

решение, необходимо предварительно закончить нормализацию гамильтониана (3.6). При помощи алгоритма инвариантной нормализации несложно получить генератор нормализующей замены

$$G^J = G_1^J + G_2^J$$

$$G_1^J = 0.0200P_2^2Q_2 - 0.176P_3^2Q_2 - 0.0908Q_2^3 + 0.183P_2P_3Q_3 - 0.0819Q_2Q_3^2$$

$$G_2^J = 0.00147P_2^3Q_2 + 0.699P_2P_3^2Q_2 - 0.0718P_2Q_2^3 - 0.712P_2^2P_3Q_3 - \\ -0.0100P_3^3Q_3 + 0.681P_3Q_2^2Q_3 - 0.776P_2Q_2Q_3^2 - 0.0294P_3Q_3^3$$

и действительную нормальную форму

$$\hat{H}^J = \hat{H}_2^J + \hat{H}_3^J + \hat{H}_4^J$$

$$\hat{H}_2^J = 1.043R_2 + 1.0076R_3, \quad \hat{H}_3^J = 0, \quad (3.7)$$

$$\hat{H}_4^J = -0.0247R_2^2 + 0.00641 R_2R_3 - 0.0202R_3^2$$

Если подставить  $\mu = 3.04 \cdot 10^{-6}$  в выражение (3.5), то получится гамильтониан, совпадающий при  $P_1 = Q_1 = 0$  с гамильтонианом (3.7).

### 3.5 Асимптотические разложения нормальной формы гамильтониана для точек либрации

*Точка  $L_1$ .* Получим более простые асимптотические выражения для нормальной формы при  $\mu \rightarrow 0$ . Для этого потребуются асимптотики для коэффициентов  $c_2, c_3, c_4$ , следующие из формул (3.1) и (3.2). С точностью до  $O(\mu^{4/3})$  они имеют вид

$$c_2 = 4 + 2 \cdot 3^{2/3} \mu^{1/3} + \frac{8}{3^{2/3}} \mu^{2/3} - \frac{4}{9} \mu \\ c_3 = 3 + \frac{2}{3^{1/3}} \mu^{1/3} - \frac{3}{3^{5/3}} \mu^{2/3} - \frac{101}{27} \mu \\ c_4 = 3 + 3^{2/3} \mu^{1/3} + \frac{4}{3^{2/3}} \mu^{2/3} + \frac{1}{9} \mu$$

Подставляя эти разложения в формулу для гамильтониана (3.3), получим асимптотические разложения для коэффициентов нормальной формы (некоторые коэффициенты приведены в виде десятичной дроби, так как их точный вид оказался слишком громоздким).

$$\lambda = \Lambda_1^+ + 0.977891\mu^{2/3} - 0.835049\mu, \quad \omega_1 = \Lambda_1^- + 0.676033\mu^{2/3} - 0.44941\mu$$

$$\omega_2 = 2 + \frac{3^{2/3}}{2}\mu^{1/3} + \frac{23}{16 \cdot 3^{2/3}}\mu^{2/3} - \frac{271}{576}\mu$$

$$\alpha_{11} = \Lambda_2^- - 0.352306\mu^{1/3} - 0.351561\mu^{2/3} - 0.153987\mu$$

$$\alpha_{22} = \Lambda_2^+ + 0.22769\mu^{1/3} + 0.239225\mu^{2/3} + 0.116094\mu$$

$$\alpha_{33} = \frac{9}{116} + \frac{59693^{2/3}}{53824}\mu^{1/3} + \frac{1595507}{31217923^{2/3}}\mu^{2/3} + \frac{54403463}{543191808}\mu$$

$$\alpha_{12} = -\frac{1497\sqrt{3}}{4837} - \frac{2322384493^{1/6}}{374345104}\mu^{1/3} - 0.766451\mu^{2/3} - 0.434778\mu$$

$$\alpha_{13} = \Lambda_3^+ - 0.753053\mu^{1/3} - 0.784089\mu^{2/3} - 0.372092\mu$$

$$\alpha_{23} = \Lambda_3^- + 0.341373\mu^{1/3} + 0.437685\mu^{2/3} + 0.163686\mu$$

$$\Lambda_1^\pm = \sqrt{\pm 1 + 2\sqrt{7}} + \frac{3^{2/3}(\pm 7 + 8\sqrt{7})}{14\sqrt{\pm 1 + 2\sqrt{7}}}\mu^{1/3}, \quad \Lambda_2^\pm = \frac{-430 \pm 1561\sqrt{7}}{38696}$$

$$\Lambda_3^\pm = \mp \frac{1}{812} \sqrt{\pm 1 + 2\sqrt{7}}(70 \pm 31\sqrt{7})$$

Точка  $L_2$ . Аналогично предыдущему с точностью до  $O(\mu^{4/3})$

$$c_2 = 4 + \frac{10}{3^{2/3}}\mu^{2/3} - \frac{62}{9}\mu$$

$$c_3 = -3 - \frac{4}{3^{1/3}}\mu^{1/3} + \frac{4}{3^{5/3}}\mu^{2/3} - \frac{77}{27}\mu$$

$$c_4 = 3 + 3^{2/3}\mu^{1/3} + \frac{4}{3^{2/3}}\mu^{2/3} - \frac{29}{9}\mu$$

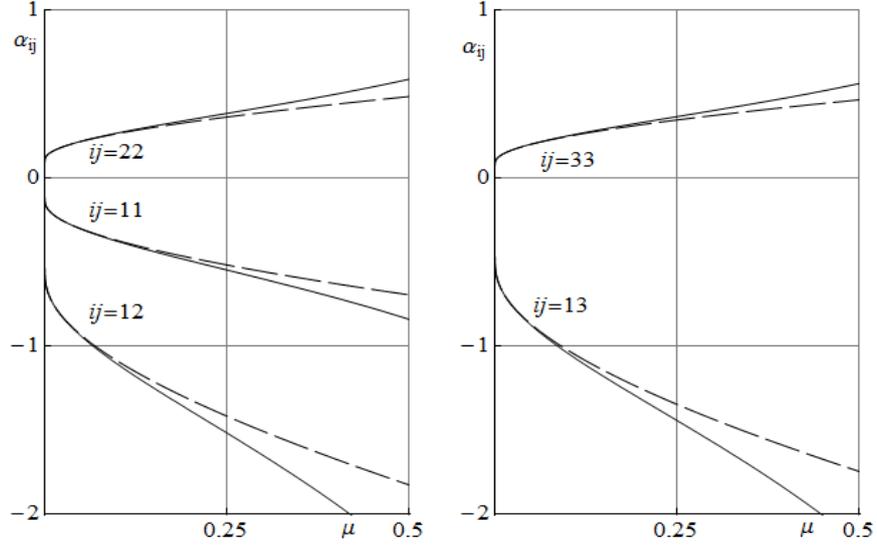


Рис. 3.3: Коэффициенты нормальной формы 4-го порядка в зависимости от приведенной массы, точка либрации  $L_1$

$$\lambda = K_1^+, \quad \omega_1 = K_1^-, \quad \omega_2 = 2 + \frac{5}{2^{3^{2/3}}}\mu^{2/3} - \frac{31}{18}\mu$$

$$\alpha_{11} = \Lambda_2^- + 0.625257\mu^{1/3} - 0.68235\mu^{2/3} + 0.164999\mu$$

$$\alpha_{22} = \Lambda_2^+ - 0.372289\mu^{1/3} + 0.430256\mu^{2/3} - 0.184139\mu$$

$$\alpha_{33} = \frac{9}{116} - \frac{3073^{2/3}}{1856}\mu^{1/3} + \frac{5873}{67283^{2/3}}\mu^{2/3} - \frac{254275}{968832}\mu$$

$$\alpha_{12} = -\frac{1497\sqrt{3}}{4837} + \frac{77783}{77392}\mu^{1/3} - \frac{482775593}{280758828}\mu^{2/3} + \frac{24265783}{30081303\sqrt{3}}\mu$$

$$\alpha_{13} = \Lambda_3^+ + 1.0846\mu^{1/3} - 1.38164\mu^{2/3} + 0.788736\mu$$

$$\alpha_{23} = \Lambda_3^- - 0.538525\mu^{1/3} + 0.614596\mu^{2/3} - 0.518586\mu$$

$$K_1^\pm = \sqrt{\pm 1 + 2\sqrt{7}} + \frac{5\left(\frac{1}{3}(\pm 74885 + 31346\sqrt{7})\right)^{1/6}}{6\sqrt{7}}\mu^{2/3} - \frac{31}{18}\sqrt{\pm \frac{17}{21} + \frac{2\sqrt{7}}{3}}\mu$$

Точка  $L_3$ . Аналогично предыдущему имеем

$$\begin{aligned} c_2 &= 1 + \frac{7}{8}\mu + \frac{77}{192}\mu^2 + O(\mu^3) \\ c_3 &= -1 - \frac{13}{16}\mu - \frac{21}{64}\mu^2 + O(\mu^3) \\ c_4 &= 1 + \frac{25}{32}\mu + \frac{77}{256}\mu^2 + O(\mu^3) \end{aligned}$$

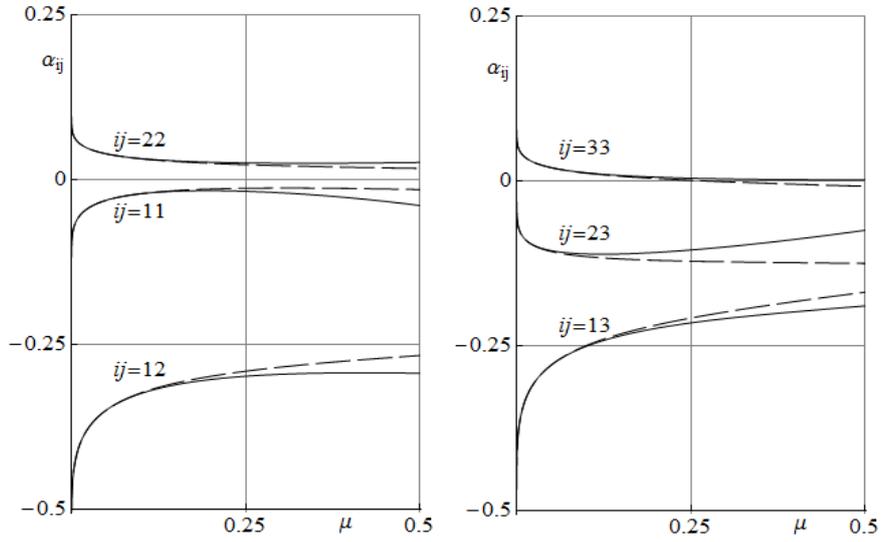


Рис. 3.4: Коэффициенты нормальной формы 4-го порядка в зависимости от приведенной массы, точка либрации  $L_2$

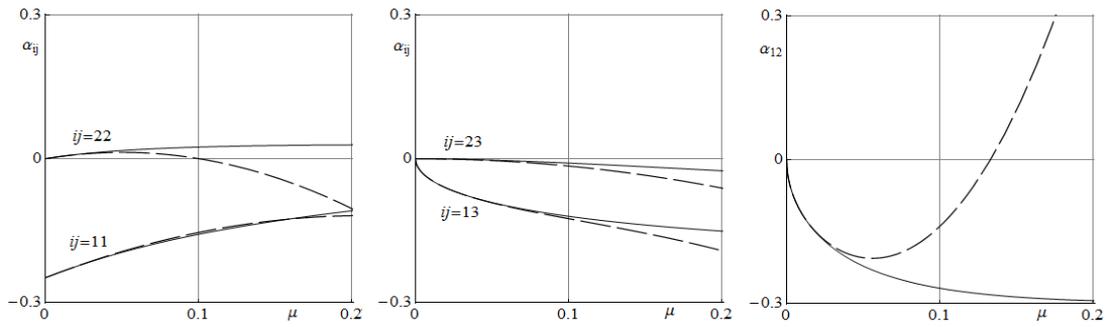


Рис. 3.5: Коэффициенты нормальной формы 4-го порядка в зависимости от приведенной массы, точка либрации  $L_3$

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{21}{2}}\sqrt{\mu} - \frac{17}{32}\sqrt{\frac{7}{6}}\mu^{3/2} + O(\mu^{5/2}), \\
\omega_1 &= 1 + \frac{7}{8}\mu - \frac{581}{384}\mu^2 + O(\mu^3), \quad \omega_2 = 1 + \frac{7}{16}\mu + \frac{161}{1536}\mu^2 + O(\mu^3) \\
\alpha_{11} &= -\frac{111}{448} + \frac{1907}{1536}\mu - \frac{54875}{18432}\mu^2 + O(\mu^3), \quad \alpha_{22} = \frac{67}{128}\mu - \frac{21373}{4096}\mu^2 + O(\mu^3) \\
\alpha_{33} &= \frac{9}{512}\mu - \frac{53}{1024}\mu^2 + O(\mu^3) \\
\alpha_{12} &= -\frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{14}}\sqrt{\mu} + \frac{2153}{128\sqrt{42}}\mu^{3/2} + O(\mu^{5/2}), \\
\alpha_{13} &= -\frac{31}{32}\sqrt{\frac{3}{14}}\sqrt{\mu} + \frac{401}{64\sqrt{42}}\mu^{3/2} + O(\mu^{5/2}) \\
\alpha_{23} &= -\frac{49}{32}\mu^2 + O(\mu^3)
\end{aligned}$$

Коэффициенты для этой точки либрации разлагаются по степеням  $\mu$ , отличным от степеней в разложениях предыдущих точек либрации. Это объясняется тем, что при  $\mu \rightarrow 0$  отношение  $\omega_1/\omega_2$  стремится к единице и система оказывается близка к резонансу 1:1.

Графическое сравнение асимптотик (штриховые кривые) и точных выражений (сплошные кривые) приведены на рис. 3.3-3.5.

### 3.6 Ограниченные решения

Можно показать, что нормализованный комплексный гамильтониан (3.3) имеет три вещественных интеграла движения:  $E_1 = Z_1\bar{Z}_1 = Z_1(0)\bar{Z}_1(0)$ ,  $E_2 = iZ_2\bar{Z}_2$ ,  $E_3 = iZ_3\bar{Z}_3$ ,  $\{\hat{H}, E_j\} = 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Благодаря ним легко проинтегрировать уравнения Гамильтона и получить простые аналитические решения:

$$\begin{aligned}
Z_j(t) &= Z_j(0) \exp(\kappa_j t), \quad \bar{Z}_j(t) = \bar{Z}_j(0) \exp(-\kappa_j t), \quad j = 1, 2, 3 \\
\kappa_1 &= \lambda + (2\alpha_{11}E_1 - \alpha_{12}E_2 - \alpha_{13}E_3) \\
\kappa_2 &= i\omega_1 + i(\alpha_{12}E_1 + 2\alpha_{22}E_2 + \alpha_{23}E_3) \\
\kappa_3 &= i\omega_2 + i(\alpha_{13}E_1 + \alpha_{23}E_2 + 2\alpha_{33}E_3)
\end{aligned}$$

Видно, что полученные решения нелинейной системы отличаются от решений линейной только малой поправкой к частоте колебаний, зависящей от первоначального отклонения от точки либрации. Решения справедливы лишь в близкой окрестности точки либрации, так как они получены в предположении сходимости Тейлоровского разложения гамильтониана задачи.

Для ограниченности решения достаточно положить  $Z_1(0) = 0$ , а если потребовать еще и периодичность, то дополнительно необходимо  $\bar{Z}_1(0) = 0$ . Если перейти от переменных комплексной нормальной формы к исходным переменным  $(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$ , получится условие ограниченности или периодичности в виде полинома третьей степени от начальных фазовых переменных задачи.

Приведем пример условия ограниченности для случая  $x = z = p_x = p_z = 0$  в асимптотической форме при  $\mu \rightarrow 0$  с точностью до  $O(\mu^{2/3})$  для точки либрации  $L_1$ :

$$0.225869p_y - 0.0644452p_y^2 + 0.00952776p_y^3 + 0.148198y - 0.137621p_y y - \\ - 0.0247107p_y^2 y - 0.441125y^2 + 0.0291183p_y y^2 - 0.0487848y^3 + \\ + (-0.211412p_y + 0.099728p_y^2 - 0.00985693p_y^3 - 0.0477572y + 0.0991776p_y y + \\ + 0.0227287p_y^2 y + 0.145831y^2 + 0.0381284p_y y^2 + 0.103664y^3)\mu^{1/3} = 0$$

Численная проверка условий ограниченности для решений исходной системы до разложения около положения равновесия проводилась для случаев систем Солнце-Земля ( $\mu = 3.06 \cdot 10^{-3}$ ) и Земля-Луна ( $\mu = 1/81.3$ ), точка либрации  $L_1$ .

Для случая Солнце-Земля были выбраны начальные условия в виде  $x = z = p_y = p_z = 0, y = 0.01$ , а  $p_x$  вычисляется из условия ограниченности с точностью до  $O(\mu)$ . При вычислениях использовалась точность порядка 20 значащих цифр, при этом в тексте все значения округлены до 6 знаков после запятой. Для сравнения были также рассчитаны решения при  $p_x = 0$  и при значении  $p_x$ , вытекающего из условия ограниченности для

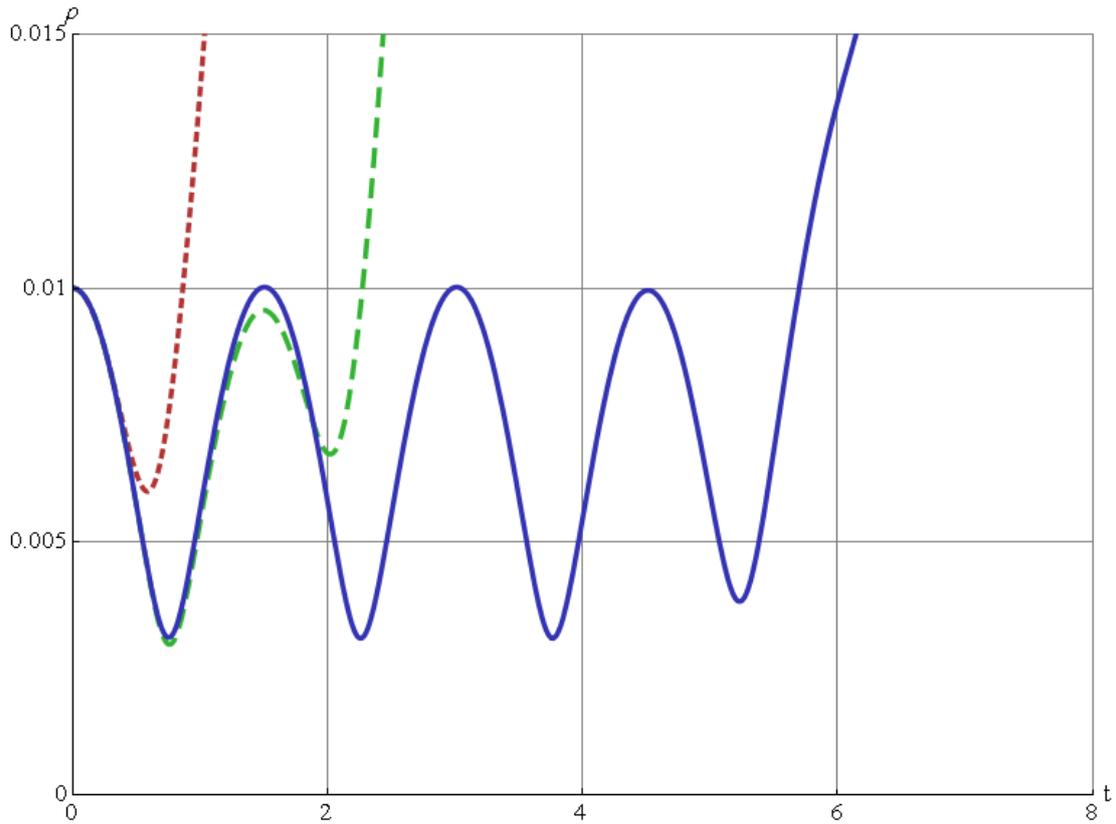


Рис. 3.6: Расстояние от малого тела до точки либрации  $L_1$  для системы Солнце-Земля в зависимости от начальных условий

решений квадратичного гамильтониана  $H_2$ . Если ограничиваться квадратичной нормальной формой, условие ограниченности для начальных условий запишется в виде  $0.416808p_x + 0.147505y = 0$ , откуда следует  $p_x = -0.00353893$ . С учетом гамильтоновой нормальной формы 4-го порядка условие после подстановки известных начальных значений выглядит следующим образом:  $0.00145448 + 0.392796p_x + 0.0738999p_x^2 + 0.00891221p_x^3 = 0$ , что дает единственный действительный корень  $p_x = -0.00370547$ . На рис. 3.6 представлены зависимости от времени для расстояния  $\rho(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}$  от малого тела до точки либрации  $L_1$ . Красной коротко-пунктирной линией изображен случай без

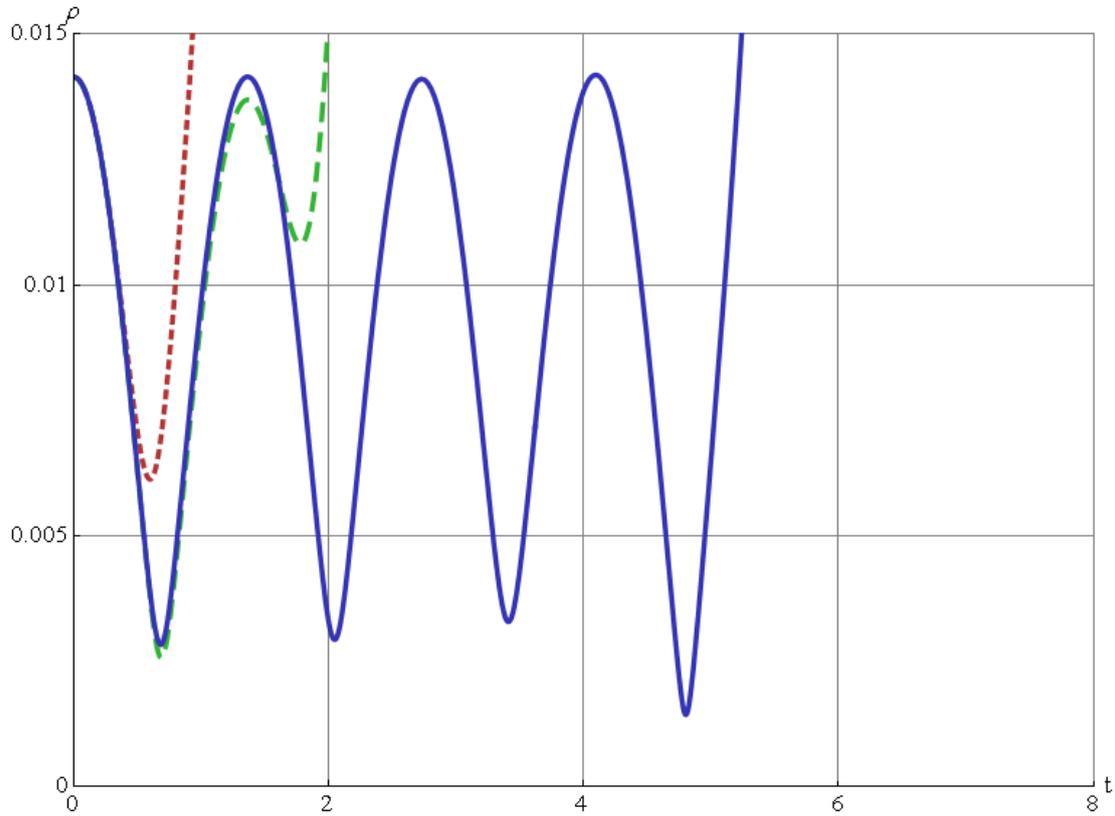


Рис. 3.7: Расстояние от малого тела до точки либрации  $L_1$  для системы Земля-Луна в зависимости от начальных условий

начальной скорости, зеленой пунктирной линией – с учетом условий ограниченности для квадратичного гамильтониана, синей сплошной линией – с учетом условий ограниченности для нормальной формы 4-го порядка. По мере увеличения точности условия растет число витков, совершаемое малым телом вокруг точки либрации до развития неустойчивости. Для случая Земля-Луна были выбраны начальные условия в виде  $x = p_y = p_z = 0, y = z = 0.01, p_x$  вычисляется из условия ограниченности. Для квадратичной нормальной формы условие ограниченности имеет вид  $0.39325p_x - 7.63834p_y + 2.66917x + 0.137284y = 0$ , что дает  $p_x = -0.00349100$ . С учетом гамильтоновой

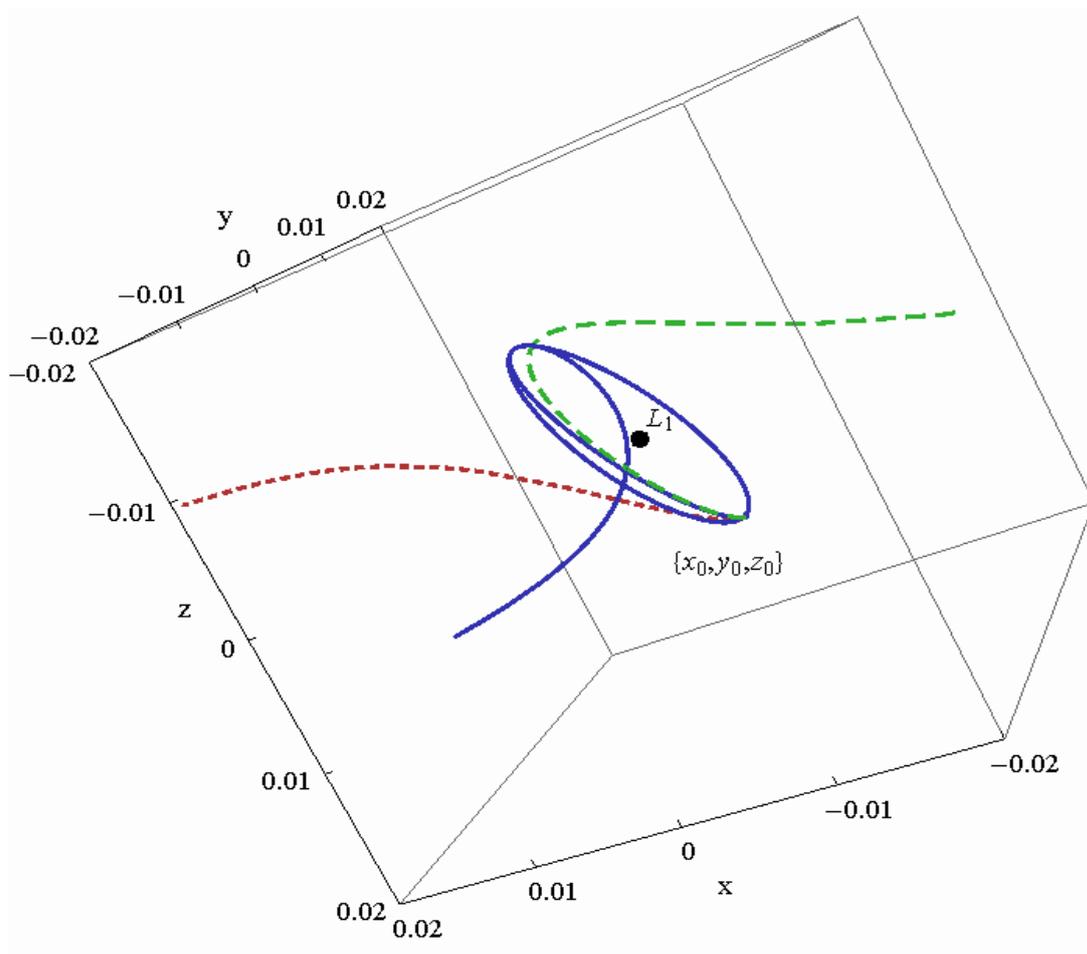


Рис. 3.8: Трехмерный график решений исходных уравнений для системы Земля-Луна, точка либрации  $L_1$ , в зависимости от начальных условий

нормальной формы 4-го порядка условие после подстановки известных начальных значений выглядит следующим образом:  $0.0012911 + 0.39376p_x - 0.0737044p_x^2 + 0.00891221p_x^3 = 0$ , что дает единственный действительный корень  $p_x = -0.00327689$ . На рис. 3.7 представлены зависимости от времени для расстояния  $\rho(t)$  от малого тела до точки либрации  $L_1$ . Обозначения линий аналогичны предыдущему графику. Для наглядности на рис. 3.8 также изображены эти же решения в виде трехмерного графика по осям координат.

## Глава 4

# Двухмерные колебания тяжелой материальной точки на пружине

В настоящей главе содержится постановка задачи о нелинейных двухмерных колебаниях тяжелой материальной точки на пружине и ее асимптотическое решение при помощи аппарата нормальной формы. Задача решается при отсутствии резонанса и при резонансах 1:1 и 1:3 между модами колебаний. Рассматривается также случай расстройки резонанса 1:2 при внесении малого возмущения в частоту одной из мод колебаний. Оказывается, что для асимптотического решения подобной задачи также применим алгоритм инвариантной нормализации.

Задача о пружинном маятнике была рассмотрена впервые А.А. Виттом и Г.С. Гореликом [22] и с тех пор изучалась во многих работах (В.Н. Богаевский, А.П. Маркеев, А.Х. Найфе, А.Г. Петров, В.М. Старжинский, [10, 22, 49, 54, 67, 75]). В [54] с учетом квадратичной нелинейности методом уравнений в вариациях задача сведена к уравнению для амплитуды колебаний. Исследование заканчивается констатацией того, что полученное уравнение может быть проинтегрировано в эллиптических функциях Якоби. В [10, 75] найдено периодическое решение при резонансе частот 1:2. Показано, что колебаний по вертикали являются неустойчивы по отношению к малому

начальному отклонению груза по горизонтали. Получена главная асимптотика для периода, в течение которого происходит перестройка вертикальных колебаний в горизонтальные. В [75] применяется метод Ляпунова-Пуанкаре, а в работе [49] - метод нормальной формы. В последней работе исследованы общие свойства нелинейных условно-периодических движений в малой окрестности положения равновесия гамильтоновой системы как для случая точной соизмеримости частот 2:1, так и при наличии расстройки. Изучены вопросы орбитальной устойчивости коротко-периодических и долго-периодических решений. При помощи КАМ-теории показано, что большинство условно-периодических решений сохраняется и для системы с полным гамильтонианом. Задача о качающейся пружине рассматривается как частный пример системы с гамильтонианом, относящимся к исследуемому классу.

А.Г. Петровым получена [67] асимптотическая зависимость периода перекачки энергии между модами колебаний от начальных условий в случае резонанса 1:2, а также рассмотрен пространственный случай (резонанс 1:1:2) [68].

Практическая ценность модели пружинного маятника является ее физическая аналогия двумерным колебаниям атомов внутри молекул, которые в случае резонанса обнаруживаются при спектральном анализе (резонанс Ферми). Впервые эта аналогия была отмечена еще А.А. Виттом и Г.С. Гореликом [22].

Целью исследований, проводимых в диссертации, являлся поиск асимптотической зависимости периода перекачки энергии между модами колебаний от начальных условий для различных соотношений между частотами колебаний: резонанс 1:1 и малое отклонение от резонанс 1:2.

В случае линейного закона зависимости силы натяжения от удлинения пружины ("линейная пружина") частота колебаний вертикальной моды всегда выше частоты колебаний горизонтальной моды. Для нелинейной пружины частоты могут

быть равными. Это приводит к появлению в этой системе резонанса нового типа 1:1, не исследованного до сих пор. Этот вопрос и является основным предметом обсуждения. Для этого резонанса, так же как и для резонанса 1:2, получено решение, описывающее процесс перекачки энергии от одной моды колебаний к другой. Кроме того, исследован нерезонансный случай. В отличие от резонанса 1:2 здесь недостаточно исследовать гамильтониан с точностью до кубических членов, а требуется также учитывать члены четвертого порядка.

Решения гамильтоновых уравнений нормальной формы показали, что периодическая перестройка колебаний между вертикальной и горизонтальной модами происходит только в случае резонансов 1:1 и 1:2. При резонансе 1:2 этот эффект проявляется в квадратичных членах уравнения, а при резонансе 1:1 – с учетом кубических членов. Во всех остальных случаях, как при наличии резонанса, так и при его отсутствии, колебания происходят с двумя постоянными частотами, мало отличающимися от частот линейного приближения. Для резонанса 1:2 найдена максимальная расстройка частоты, при которой эффект перекачки энергии от одной моды колебаний к другой исчезает.

#### 4.1 Постановка задачи

Рассматривается маятник с двумя степенями свободы: тяжелая точка, качающаяся в вертикальной плоскости на пружине, пружина невесома.

Введем следующие обозначения:  $k$  – жесткость пружины,  $l$  – ее длина в положении покоя груза,  $m$  – масса груза,  $lx, ly$  – координаты груза,  $lR$  – длина пружины, где

$$R = \sqrt{(1+x)^2 + y^2}$$

Декартова система координат имеет начало в точке  $O$  – положении покоя груза. Оси  $x$  и  $y$  направлены по вертикали и

горизонтали соответственно (рис. 4.1).

Натяжение пружины меняется по следующему нелинейному закону:

$$T = \frac{k\varepsilon (lR - l_0)^3}{l_0^3} + \frac{k(lR - l_0)}{l_0} \quad (4.1)$$

где  $l_0$  – длина ненагруженной пружины.

Потенциальная  $E_p$  и кинетическая  $E_k$  энергии системы имеют вид

$$E_p = \frac{k\varepsilon (lR - l_0)^4}{4l_0^3} + \frac{k(lR - l_0)^2}{2l_0} - mglx$$

$$E_c = \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{dx}{dt'} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt'} \right)^2 \right] = \frac{mgl}{2} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right]$$

Здесь  $t'$  и  $\omega t'$  – размерное и безразмерное времена.

Введем безразмерные импульсы  $u = \dot{x}$ ,  $v = \dot{y}$  и запишем через них функцию Гамильтона  $H = (E_k + E_p)/(mgl)$ :

$$H = \frac{1}{2} (u^2 + v^2) - x + \frac{k\varepsilon (lR - l_0)^4}{4mgl l_0^3} + \frac{k(lR - l_0)^2}{2mgl l_0}$$

Уравнения движения гамильтоновой системы имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u}, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}$$

Будем изучать движение вблизи положения покоя на больших временах  $t$ .

Разложим гамильтониан в окрестности положения равновесия  $H = H_1 + H_2 + F_1 + F_2$ , где  $H_1, H_2, F_1, F_2$  – полиномы

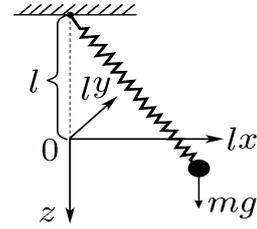


Рис. 4.1: Тяжёлая точка на пружине

первой, второй, третьей и четвертой степеней соответственно

$$\begin{aligned}
H_1 &= x (K (\varepsilon \lambda^3 + \lambda) - 1) \\
H_2 &= \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + x^2 K (\lambda + 1) (3\varepsilon \lambda^2 + 1) + y^2 K (\varepsilon \lambda^3 + \lambda)) \\
H_3 &= \frac{1}{2} K x ((\varepsilon (2\lambda + 3) \lambda^2 + 1) y^2 + 2x^2 \varepsilon \lambda (\lambda + 1)^2) \\
H_4 &= \frac{1}{8} K (2\varepsilon (\lambda + 1)^3 x^4 + 4y^2 (\varepsilon \lambda (\lambda (\lambda + 3) + 3) - 1) x^2) + \\
&\quad + \frac{1}{8} K y^4 (\varepsilon (2\lambda + 3) \lambda^2 + 1)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$K = \frac{k}{mg}, \quad \lambda = \frac{l}{l_0} - 1$$

В положении равновесия линейная часть гамильтониана равна нулю, откуда получаем

$$K (\varepsilon \lambda^3 + \lambda) = 1 \tag{4.3}$$

Из этого следует, что в положении равновесия коэффициент при  $y^2$  в гамильтониане равен  $1/2$ . Это означает, что частота колебаний по горизонтали равна 1.

Зафиксируем некоторую произвольную частоту колебаний по вертикали  $\omega$ , т.е.

$$(\lambda + 1) (3\varepsilon \lambda^2 + 1) = (\varepsilon \lambda^3 + \lambda) \omega^2 \tag{4.4}$$

Разрешим систему (4.3) и (4.4) относительно  $K$  и  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{-\lambda \omega^2 + \lambda + 1}{\lambda^2 (\lambda (\omega^2 - 3) - 3)}, \quad K = \frac{3}{2\lambda} - \frac{\omega^2}{2(\lambda + 1)} \tag{4.5}$$

Можно также представить  $\lambda$  в виде ряда по параметру нелинейности пружины  $\varepsilon$ . С точностью до первой степени  $\varepsilon$  получим:

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2 - 1} + \varepsilon \frac{2\omega^2}{(\omega^2 - 1)^4} + O(\varepsilon^2) \tag{4.6}$$

В случае резонанса 1:1, т.е. при  $\omega = 1$ , имеем

$$\lambda = -\frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}} - \frac{1}{2} + O(\sqrt[3]{\varepsilon}) \quad (4.7)$$

С помощью (4.3) и (4.4) можно исключить параметры  $K$  и  $\varepsilon$ . Тогда в окрестности точки равновесия получим разложение (4.2), зависящее от двух параметров  $\omega$  и  $\lambda$

$$\begin{aligned} H_1 &= 0 \\ H_2 &= \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{x^2\omega^2}{2} \\ F_1 &= \frac{\omega^2 x^3}{2\lambda} + \frac{\omega^2 x^3}{2} - \frac{x^3}{\lambda} - \frac{x^3}{2\lambda^2} - \frac{x^3}{2} - \frac{y^2 x}{2} + \frac{1}{2} y^2 \omega^2 x \\ F_2 &= \frac{\omega^2 x^4}{4\lambda} + \frac{\omega^2 x^4}{8\lambda^2} + \frac{\omega^2 x^4}{8} - \frac{3x^4}{8\lambda} - \frac{3x^4}{8\lambda^2} - \frac{x^4}{8\lambda^3} - \frac{x^4}{8} - \frac{y^2 x^2}{4} + \\ &+ \frac{1}{4} y^2 \omega^2 x^2 + \frac{3y^2 \omega^2 x^2}{4\lambda} - \frac{3y^2 x^2}{2\lambda} - \frac{3y^2 x^2}{4\lambda^2} - \frac{y^4}{8} + \frac{y^4 \omega^2}{8} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Далее к данному разложению будет применяться алгоритм инвариантной нормализации при различных значениях частоты  $\omega$ .

## 4.2 Нерезонансный случай

Сначала формально применим алгоритм инвариантной нормализации, не накладывая никаких ограничений на вертикальную частоту. Полученную нормальную форму гамильтониана удобно записать в переменных Биркгоффа. Коэффициенты нормальной формы выражаются точно через безразмерное удлинение  $\lambda$ , с помощью (4.6) в виде разложений по степеням  $\varepsilon$  с точностью до членов порядка  $\varepsilon^2$

$$Z_1 = \frac{U}{\sqrt{\omega}} + i\sqrt{\omega}X, \quad Z_2 = V + iY$$

$$\hat{H}_2 = i (\omega Z_1 \bar{Z}_1 + Z_2 \bar{Z}_2), \quad \hat{F}_1 = 0 \quad (4.9)$$

$$\hat{F}_2 = i (\alpha_{11} Z_1^2 \bar{Z}_1^2 + \alpha_{12} Z_1 \bar{Z}_1 Z_2 \bar{Z}_2 + \alpha_{22} Z_2^2 \bar{Z}_2^2)$$

$$\alpha_{11} = -\frac{3(\lambda + 1)^2 (\lambda (\omega^2 - 1) - 1) (\lambda (4\omega^2 - 5) - 5)}{32\lambda^4 \omega^4} \approx \frac{3\varepsilon \omega^4}{16 (\omega^2 - 1)^2}$$

$$\alpha_{12} = -\frac{3(\lambda + 1)^2 (\lambda (\omega^2 - 1) - 1) (\lambda (4\omega^2 - 5) - 5)}{32\lambda^4 \omega^4} \approx$$

$$\approx \frac{3\varepsilon \omega}{4 (\omega^2 - 1)^2} + \frac{3 (\omega^2 - 1)}{4 (\omega^2 - 4) \omega}$$

$$\alpha_{22} = -\frac{\omega^4 + 7\omega^2 - 8}{32\omega^2 (\omega^2 - 4)}$$

Гамильтонианы  $\hat{H}_2$  и  $\hat{F}_2$  коммутируют:  $\{\hat{H}_2, \hat{F}_2\} = 0$ . Поэтому решение полных уравнений Гамильтона нормальной формы упрощается с помощью теоремы о суперпозиции решений [31]. Достаточно в решение системы, образованной гамильтонианом  $\hat{H}_2$  ( $z_1 = Z_1 e^{i\omega t}$ ,  $z_2 = Z_2 e^{it}$ ), вместо  $Z_1$  и  $Z_2$  подставить решение системы уравнений, образованной гамильтонианом  $\hat{F}_2$

Последняя система уравнений  $\dot{Z}_1 = \partial \hat{F}_2 / \partial \bar{Z}_1$ ,  $\dot{Z}_2 = \partial \hat{F}_2 / \partial \bar{Z}_2$  имеет два интеграла данной системы:  $Z_1 \bar{Z}_1 = \omega A_1^2$  и  $Z_2 \bar{Z}_2 = A_2^2$ , где  $A_1$  и  $A_2$  - амплитуды колебаний по вертикали и горизонтали соответственно. После подстановки этих интегралов в уравнения Гамильтона получается линейная система

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 &= i(\rho_{11} A_1^2 + \rho_{12} A_2^2) Z_1, & \dot{Z}_2 &= i(\rho_{21} A_1^2 + \rho_{22} A_2^2) Z_2, \\ \rho_{11} &= 2\alpha_{11}\omega, & \rho_{12} &= \alpha_{12}, & \rho_{21} &= \alpha_{12}\omega, & \rho_{22} &= 2\alpha_{22}. \end{aligned}$$

После решения задачи Коши и выделения решений в

физических переменных, получим:

$$x(t) = u_0 \sin [t (\omega + \rho_{11}A_1^2 + \rho_{12}A_2^2)] + x_0 \cos [t (\omega + \rho_{11}A_1^2 + \rho_{12}A_2^2)]$$

$$y(t) = v_0 \sin [t (1 + \rho_{21}A_1^2 + \rho_{22}A_2^2)] + y_0 \cos [t (1 + \rho_{21}A_1^2 + \rho_{22}A_2^2)]$$

$$u(t) = u_0 \cos [t (\omega + \rho_{11}A_1^2 + \rho_{12}A_2^2)] - x_0 \sin [t (\omega + \rho_{11}A_1^2 + \rho_{12}A_2^2)]$$

$$v(t) = v_0 \cos [t (1 + \rho_{21}A_1^2 + \rho_{22}A_2^2)] - y_0 \sin [t (1 + \rho_{21}A_1^2 + \rho_{22}A_2^2)]$$

Эти решения представляют из себя обычные гармонические колебания с малой поправкой к частоте (порядка энергии колебаний).

Генератор нормализующей замены, приводящей гамильтониан к виду (4.9), имеет вид:

$$G = \frac{F(X, Y, U, V, \lambda, \omega)}{\omega^6(\omega^2 - 4)(\omega^2 - 1)},$$

где  $F$  - многочлен по всем своим аргументам. Генератор, а следовательно, и замена вырождаются при  $\omega = 0, 1, 2$ . Случай  $\omega = 0$  физически недостижим, а случаи  $\omega = 1, 2$  соответствуют резонансам 1:1 и 2:1. При остальных значениях  $\omega$  генератор конечен и однозначно задает каноническую замену, переводящую гамильтониан к нормальной форме (4.9).

Итак, отдельного рассмотрения требуют лишь резонансы 1:1 и 2:1, в то время как остальные резонансы качественно ничем не отличаются от нерезонансного решения.

### 4.3 Резонанс 1:1

Рассмотрим случай резонанса 1:1. Полагая в (4.8)  $\omega = 1$ , находим нормальную форму в переменных Биркгоффа  $Z_1 = U + iX$ ,  $Z_2 = V + iY$ :

$$\hat{H}_2 = i (Z_1 \bar{Z}_1 + Z_2 \bar{Z}_2), \quad \hat{F}_1 = 0$$

$$\hat{F}_2 = i(\alpha_1 Z_1^2 \bar{Z}_1^2 + \alpha_2 Z_2^2 \bar{Z}_2^2 + \alpha_3 Z_1 \bar{Z}_1 Z_2 \bar{Z}_2 + \alpha_4 (Z_2^2 \bar{Z}_1^2 + Z_1^2 \bar{Z}_2^2))$$

$$\alpha_1 = -\frac{3(\lambda+1)^2(\lambda+5)}{32\lambda^4} \approx \frac{3\sqrt[3]{\varepsilon}}{16 * 2^{2/3}}, \quad \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_3 = -\frac{3(\lambda+1)}{8\lambda^2} \approx \frac{3\sqrt[3]{\varepsilon}}{4 * 2^{2/3}}, \quad \alpha_4 = -\frac{3(\lambda+1)}{32\lambda^2} \approx \frac{3\sqrt[3]{\varepsilon}}{16 * 2^{2/3}}$$

Получившаяся нормальная форма отличается от нормальной формы при нерезонансном случае слагаемыми  $Z_2^2 \bar{Z}_1^2 + Z_1^2 \bar{Z}_2^2$ , которые вносят существенные изменения в поведение системы.

В целях упрощения анализа возмущения второго порядка были разбиты на два коммутирующих слагаемых:

$$\hat{F}_2 = \hat{F}_{21} + \hat{F}_{22}, \quad \hat{F}_{21} = ik (Z_1 \bar{Z}_1 + Z_2 \bar{Z}_2)^2$$

$$\hat{F}_{22} = -ik Z_2^2 \bar{Z}_2^2 + in Z_1 Z_2 \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 + im (Z_1 \bar{Z}_2 - Z_2 \bar{Z}_1)^2$$

$$k = -\frac{3(\lambda^3 + 7\lambda^2 + 11\lambda + 5)}{32\lambda^4}, \quad m = -\frac{3(\lambda+1)}{32\lambda^2},$$

$$n = -\frac{3(2\lambda^3 - 4\lambda^2 - 11\lambda - 5)}{16\lambda^4}$$

Все три слагаемые нормальной формы  $\hat{H}_2$ ,  $\hat{F}_{21}$ ,  $\hat{F}_{22}$  попарно коммутируют между собой. Это позволяет воспользоваться теоремой о суперпозиции решений [31], т.е. найти по отдельности решения для каждого из слагаемых, а затем подставить решения от одного слагаемого в решения от другого слагаемого вместо начальных условий (в произвольном порядке).

Находим решение системы с гамильтонианом  $\hat{H}_2 + \hat{F}_{21}$  аналогично нерезонансному случаю. Это решение представляет

собой гармонические колебания с поправкой к частоте, зависящей от квадрата амплитуды

$$\begin{aligned}
x(t) &= u_0 \sin [t (1 + 2kc^2)] + x_0 \cos [t (1 + 2kc^2)] \\
y(t) &= v_0 \sin [t (1 + 2kc^2)] + y_0 \cos [t (1 + 2kc^2)] \\
u(t) &= u_0 \cos [t (1 + 2kc^2)] - x_0 \sin [t (1 + 2kc^2)] \\
v(t) &= v_0 \cos [t (1 + 2kc^2)] - y_0 \sin [t (1 + 2kc^2)]
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$c^2 = A_1^2 + A_2^2$$

Система с гамильтонианом  $\hat{F}_{22}$  имеет довольно громоздкое решение. Ограничимся частным значением  $\lambda = 3 + \sqrt{14} \approx 6.74$ . Тогда между коэффициентами  $k$ ,  $m$ ,  $n$  выполняется простое соотношение  $k = n = 2m$ . При этом  $\varepsilon = (-15 + 4\sqrt{14})/50 \approx -0.00067$ ,  $m = -3(8 - \sqrt{14})/800 \approx -0.0160$ .

С учетом данного упрощения гамильтониан записывается так:  $\hat{F}_{22} = im (Z_2^2 \bar{Z}_1^2 + (Z_1^2 - 2Z_2^2) \bar{Z}_2^2)$ , а решение системы с гамильтонианом  $\hat{F}_{22}$  ищется при помощи замены  $\xi = Z_2 \bar{Z}_2$ , где  $\xi$  является энергией колебаний по горизонтали.

Найдем вторую производную  $\xi$  по времени в силу уравнений Гамильтона:

$$\begin{aligned}
\ddot{\xi}(t) &= \frac{d}{dt} \left( \bar{Z}_2(t) \dot{Z}_2(t) + Z_2(t) \dot{\bar{Z}}_2(t) \right) = \bar{\dot{Z}}_2(t) \frac{\partial \hat{F}_{22}}{\partial Z_2} - \dot{Z}_2(t) \frac{\partial \hat{F}_{22}}{\partial \bar{Z}_2} = \\
&= -32im^2 Z_2 \bar{Z}_2 (mZ_1^2 \bar{Z}_2^2 - mZ_2^2 \bar{Z}_1^2) ((\bar{Z}_2^2 - \bar{Z}_1^2) Z_1^2 + Z_2 \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 Z_1 + Z_2^2 \bar{Z}_1^2)
\end{aligned}$$

При помощи подстановки, полученной из интеграла движения  $\hat{F}_{22} = ia$

$$Z_2^2 \bar{Z}_1^2 = \frac{1}{m} (-mZ_1^2 \bar{Z}_2^2 + 2mZ_2^2 \bar{Z}_2^2 + a)$$

придем к уравнению

$$\begin{aligned}
\ddot{\xi}(t) &= -16mZ_2 \bar{Z}_2 (-mZ_1^2 \bar{Z}_1^2 + mZ_1 Z_2 \bar{Z}_2 \bar{Z}_1 + 2mZ_2^2 \bar{Z}_2^2 + a) = \\
&= -48c^2 m^2 \xi(t)^2 - 16m (a - c^4 m) \xi(t)
\end{aligned}$$

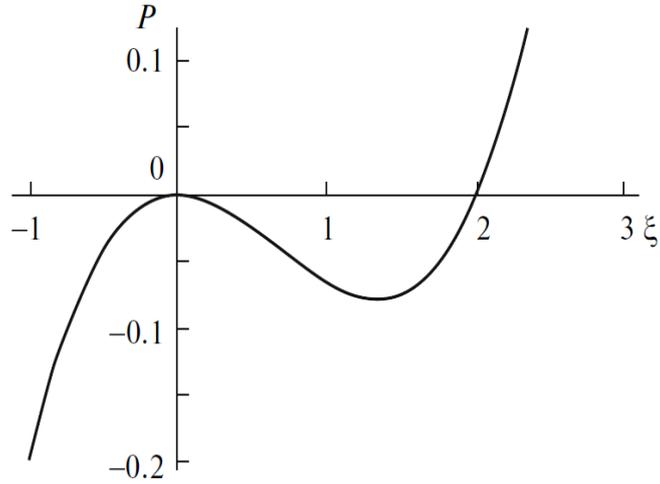


Рис. 4.2: График потенциальной энергии

Это уравнение одномерного движения материальной точки единичной массы с потенциальной энергией  $P(\xi) = 8m\xi^2(-mc^4 + 2m\xi c^2 + a)$ . График  $P(\xi)$  для  $a = 0$ ,  $c = 2$  представлен на рис. 4.2.

Домножая уравнение на  $\dot{\xi}$  и интегрируя, приходем к соотношению

$$\dot{\xi}^2/2 + P(\xi) = E, \quad E = \text{const} \quad (4.11)$$

Легко видеть, что любое уравнение вида  $\dot{\xi}^2/2 - \alpha\xi^2 + \beta\xi^3 = E$  заменами  $\xi = (\alpha/\beta)\eta(\tau)$ ,  $\tau = t\sqrt{\alpha/2}$ ,  $E = \alpha^3(\eta_0^3 - \eta_0^2)/\beta^2$  приводится к виду

$$\frac{1}{4} \left( \frac{d\eta}{d\tau} \right)^2 + \eta^3 - \eta^2 = \eta_0^3 - \eta_0^2 \quad (4.12)$$

В данном случае:

$$\alpha = 8m(c^4m - a), \quad \beta = 16m^2c^2$$

$$\tau = 2t\sqrt{m(c^4m - a)}, \quad \xi(t) = -\frac{(a - c^4m)\eta(\tau)}{2c^2m}$$

$$E = -\frac{2(a - c^4m)^3(\eta_0^3 - \eta_0^2)}{c^4m}$$

Уравнение (4.12) было исследовано в [67]. Оно описывает колебательный процесс, период которого дается эллиптическим интегралом:

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\eta_1} \frac{d\eta}{\sqrt{P(\eta)}} = \frac{2K(k)}{\sqrt{\eta_1 - \eta_2}}, \quad k = \sqrt{\frac{\eta_1 - \eta_0}{\eta_1 - \eta_2}} \quad (4.13)$$

$$P(\eta) = \eta_0^3 - \eta_0^2 - \eta^3 + \eta^2 = (\eta - \eta_0)(\eta_1 - \eta)(\eta - \eta_2)$$

где  $\eta_0$ ,  $\eta_1$  и  $\eta_2$  – корни полинома  $P(\eta)$ .

$$2\eta_1 = 1 - \eta_0 + \sqrt{(1 - \eta_0)(3\eta_0 + 1)}, \quad 2\eta_2 = 1 - \eta_0 - \sqrt{(1 - \eta_0)(3\eta_0 + 1)}$$

Для эллиптического интеграла  $K(k)$  известно разложение при  $k' = \sqrt{1 - k^2} \rightarrow 0$ :

$$K(k) = \ln(4/k') + \frac{1}{4}(\ln(4/k')' - 1)k'^2 + O(k'^4 \ln k')$$

При  $\eta_0 \rightarrow 0$  уравнение (4.11) имеет точное решение  $\eta = \operatorname{sech}^2(\tau)$ . Оно соответствует колебанию маятника, которое возникает если материальную точку отклонить от положения равновесия строго по вертикали и отпустить. Исследуем действие малого горизонтального возмущения на полученные вертикальные колебания, рассмотрев задачу Коши вида:

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad u(0) = 0, \quad v(0) = 0.$$

$$|y_0/x_0| = \nu \rightarrow 0$$

Подсчитаем период (4.13) колебаний в силу начальных условий:

$$\begin{aligned}
c &= \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad a = m(x_0^2 y_0^2 - y_0^2(2y_0^2 - x_0^2)) \\
\alpha &= 8m \left( m(x_0^2 + y_0^2)^2 - a \right), \quad \beta = 16c^2 m^2 \\
y_0^2 &= \frac{\alpha \eta_0}{\beta} \Rightarrow \eta_0 = \frac{2\nu^2(\nu^2 + 1)}{3\nu^4 + 1} \\
\eta_1 &= \frac{1 - \nu^4}{3\nu^4 + 1}, \quad \eta_2 = \frac{2\nu^2(\nu^2 - 1)}{3\nu^4 + 1}, \quad k' = \frac{2\nu}{\sqrt{-3\nu^4 + 2\nu^2 + 1}} \\
\tau_0 &= \ln(4/\nu^2) + \left(1 + \frac{3}{2} \ln(4/\nu^2)\right) \nu^4 + O(\nu^6)
\end{aligned}$$

При  $\nu \rightarrow 0$  период колебаний стремится к бесконечности, что и соответствует полученному точному решению для вертикальных колебаний. В исходных переменных решение поставленной задачи Коши для бесконечно-периодического решения имеет вид

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{x_0^2}{2} \operatorname{sech}^2(2mtx_0^2 - C) \\
Y(t) &= \sqrt{\xi}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Периодическое же решение при  $\nu \rightarrow 0$  построим как сумму бесконечно-периодических решений, отстоящих друг от друга на  $\tau_0$ . Получим:

$$\begin{aligned}
Y(t) &= \frac{x_0}{\sqrt{2}} \left[ \operatorname{sech} \left( 2m \left( t - \frac{3T}{2} \right) x_0^2 \right) + \operatorname{sech} \left( 2m \left( t - \frac{T}{2} \right) x_0^2 \right) + (\dots) \right] \\
X(t) &= \sqrt{c^2 - Y^2(t)} \\
T &= \frac{\tau_0}{2\sqrt{m(c^4 m - a)}} \approx \frac{1}{2mx_0^2} \ln \left( \frac{4x_0^2}{y_0^2} \right)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

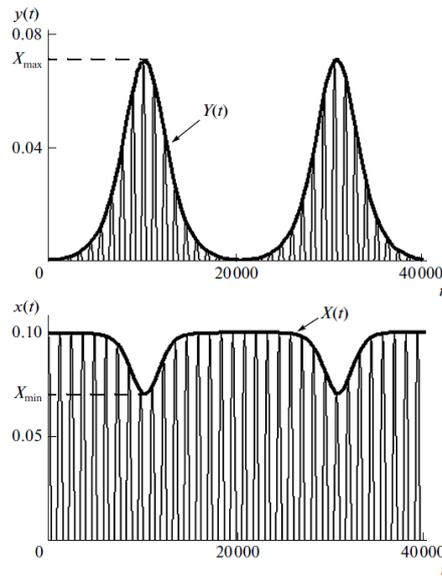


Рис. 4.3: Перекачка энергии между степенями свободы системы при резонансе 1:1

Наконец, общее решение системы, описывающее периодическую перекачку энергии между колебаниями по вертикали и горизонтали, получим, подставив выражения (4.15) вместо начальных условий в (4.10):

$$x(t) = X(t) \cos(t), \quad y(t) = Y(t) \cos(t)$$

Результаты численных расчетов для  $x_0 = 0.1$ ,  $y_0 = 0.001$ , совпадающие с полученным аналитическим решением, приведены на рис. 4.3. Период колебаний системы на графике взят сильно увеличенным, так как реально на один период модуляции амплитуды происходит около 20000 периодов собственных колебаний. Отметим также, что, в отличие от резонанса 2:1, перекачка энергии от одной моды к другой происходит не полностью, а только до половины первоначальной энергии вертикальной моды, что видно из рис. 4.3 и формулы (4.14).

#### 4.4 Двоякопериодическое решение в окрестности резонанса 2:1

Исходный гамильтониан для случая резонанса 2:1 имеет вид

$$H_2 = \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{4x^2}{2} + \frac{y^2}{2}, \quad F_1 = \frac{\varepsilon(\lambda + 1)^2 x^3}{\varepsilon\lambda^2 + 1} + \frac{3y^2 x}{2}$$

Нормальный вид этого гамильтониана и асимптотическое решение были получены ранее в [67]. Здесь же рассмотрим, насколько быстро исчезает эффект перекачки энергии из одной моды колебаний в другую при малой расстройке резонанса. Для этого будем считать, что частота колебаний по горизонтали равняется не 2, а  $\omega = 2 + \mu$ , где  $\mu$  - малый параметр первого порядка по гамильтоновым переменным. При этом слагаемое в гамильтониане  $\mu x^2$  будем относить не к квадратичной части, а к возмущению первого порядка. Слагаемое  $\mu^2 x^2$ , таким образом, следует относить ко второму порядку возмущения и в силу того, что при нормализации будем подсчитывать нормальную форму только вплоть до членов третьего порядка, это слагаемое можно исключить из рассмотрения. Таким образом, нормализации должна быть подвергнута следующая система:

$$H_2 = \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{4x^2}{2} + \frac{y^2}{2}, \quad F_1 = \frac{\varepsilon(\lambda + 1)^2 x^3}{\varepsilon\lambda^2 + 1} + \frac{3y^2 x}{2} + \mu x^2$$

Отметим, что в данном случае можно не вычислять  $\hat{F}_2$ , так как при нормализации ненулевыми окажутся уже члены третьего порядка. Это является частной особенностью резонанса 2:1.

Нормализованный гамильтониан имеет вид (в переменных Биркгоффа):

$$\hat{H}_2 = i(2Z_1 \bar{Z}_1 + Z_2 \bar{Z}_2), \quad \hat{F}_1 = \frac{3\bar{Z}_1 Z_2^2}{8\sqrt{2}} - \frac{3Z_1 \bar{Z}_2^2}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{2} i \mu Z_1 \bar{Z}_1 \quad (4.16)$$

Исследуемая задача срыва вертикальных колебаний при малом отклонении по горизонтали соответствует задаче Коши

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad u(0) = 0, \quad v(0) = 0 \quad (4.17)$$

причем  $|y_0/x_0| = \nu \rightarrow 0$ .

Перейдем к решению поставленной задачи Коши. Найдем производную  $d^2(Z_2\bar{Z}_2)/dt^2$  в силу уравнений Гамильтона для  $\hat{F}_1$ , т.е. вторую производную от энергии колебаний по горизонтали:

$$\frac{d^2(Z_2\bar{Z}_2)}{dt^2} = \frac{1}{32} \left( 6i\sqrt{2}\mu (Z_2^2\bar{Z}_1 - Z_1\bar{Z}_2^2) - 9Z_2\bar{Z}_2 (Z_2\bar{Z}_2 - 4Z_1\bar{Z}_1) \right)$$

Обозначим  $\xi = Z_2\bar{Z}_2$ . В силу интеграла энергии  $2Z_1\bar{Z}_1 + Z_2\bar{Z}_2 = c^2$  выражаем  $Z_1\bar{Z}_1 = (c^2 - \xi)/2$ .

С помощью интеграла  $\hat{F}_1 = id$  находим  $Z_2^2\bar{Z}_1 - Z_1\bar{Z}_2^2 = (8/3)i\sqrt{2}d - (4/3)i\sqrt{2}\mu Z_1\bar{Z}_1$ . Отсюда получим:

$$\ddot{\xi} = \frac{\mu^2 c^2}{4} + \frac{9\xi c^2}{16} - \frac{27\xi^2}{32} - d\mu - \frac{\mu^2 \xi}{4}$$

Домножая это уравнение на  $\dot{\xi}$  и интегрируя, придем к уравнению

$$\frac{1}{2}\dot{\xi}^2 + \frac{9\xi^3}{32} - \frac{9c^2\xi^2}{32} + \frac{\mu^2\xi^2}{8} - \frac{1}{4}c^2\mu^2\xi + d\mu\xi = E$$

Через начальные условия константы  $c^2$  и  $d$  выражаются следующим образом:

$$d = -i\hat{F}_1 = \mu x_0^2 + \frac{3y_0^2 x_0}{4\sqrt{2}} \approx \mu x_0^2, \quad c^2 = 4x_0^2 + y_0^2 \approx 4x_0^2$$

С учетом этого уравнение приобретет вид

$$\frac{1}{2}\dot{\xi}^2 + \frac{9\xi^3}{32} - \frac{1}{8}(9x_0^2 - \mu^2)\xi^2 = E$$

Заменами

$$\xi = \frac{\alpha}{\beta}\eta(\tau), \quad \tau = t\sqrt{\frac{\alpha}{2}}, \quad E = \frac{\alpha^3(\eta_0^3 - \eta_0^2)}{\beta^2}$$

$$\alpha = \frac{1}{8}(9x_0^2 - \mu^2), \quad \beta = \frac{9}{32}$$

уравнение приводится к виду (4.12):

$$\frac{1}{4}\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2 + \eta^3 - \eta^2 = \eta_0^3 - \eta_0^2$$

В [67] для этого уравнения в случае чистого резонанса была выведена асимптотика для периода колебаний

$$\tau = \ln(32/\nu^2) + (3/8)\nu^2 + (3/256)(-17 + 5 \ln(32/\nu^2))\nu^4 + O(\nu^6 \ln \nu)$$

$$T = \tau\sqrt{\frac{2}{\alpha}}$$

В силу малости параметра  $\mu$  эту асимптотику можно применить и в данном случае. Таким образом, получаем:

$$T = T_0/\sqrt{1 - \left(\frac{\mu}{3x_0}\right)^2},$$

$$T_0 = \frac{1}{3x_0} (4 \ln(32/\nu^2) + 3\nu^2 + (3/32)(-17 + 5 \ln(32/\nu^2))\nu^4 + O(\nu^6 \ln \nu))$$

(4.18)

где  $T_0$  - период при резонансе.

При  $\mu = 0$  данная формула, как и должно быть, переходит в формулу для периода при резонансе. Видно, что период конечен при  $|\mu| < 3|x_0|$ . Это означает, что эффект периодической перекачки энергии из одной степени свободы в другую будет наблюдаться при  $\mu \in (-3|x_0|; 3|x_0|)$ , причем период стремится к бесконечности, когда  $\mu$  стремится к  $\pm 3|x_0|$ .

На рис. 4.4 приведено сравнение аналитической формулы (4.18) с серией численных измерений периода при  $x_0 = 0.05$ ,  $y_0 =$

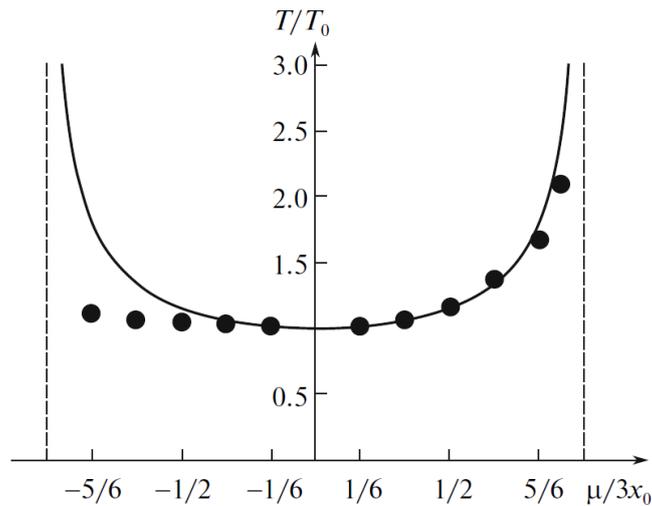


Рис. 4.4: Сравнение аналитической зависимости периода с результатами эксперимента

0.005. Кривая линия соответствует аналитической зависимости, в то время как круглые точки - численно рассчитанным периодам. Наблюдается хорошее согласование формулы с расчетами при положительных значениях  $\mu$ , в то время как при отрицательных  $\mu$  реальная зависимость периода от параметра заметно слабее. Расстройка двояко-периодического решения происходит при  $|\mu| = 3x_0$  как при отрицательных, так и при положительных значениях  $\mu$ , однако при отрицательных значениях это происходит из-за стремления к нулю амплитуды, а при положительных - из-за предсказанного стремления периода к бесконечности. Причины такого различия пока остаются невыясненными.

# Заключение

В результате диссертационной работы для нелинейных механических гамильтоновых систем, гамильтониан которых представлен в виде степенных разложений с произвольными коэффициентами, найден общий вид нелинейной нормальной формы. Результаты сведены в таблицы, позволяющие определять нормальные формы гамильтонианов с 2-мя и 3-мя степенями свободы без трудоемких вычислений. Также с помощью алгоритма инвариантной нормализации найден общий вид интеграла приближенной системы для частного случая ненормализованного квадратичного гамильтониана. С использованием общего вида нелинейной нормальной формы гамильтониара найдены асимптотические решения двух задач теоретической механики. Найдена нормальная форма гамильтониана вплоть до членов 4-го порядка для тела, движущегося в окрестностях коллинеарных точек либрации общей пространственной ограниченной круговой задачи трех тел. На ее основе получены асимптотическое, с точностью до 4-х степеней координат и импульсов, решение в элементарных функциях уравнений Гамильтона системы, а также условия финитности асимптотических решений для начальных условий по координатам и импульсам. Найдена нормальная форма гамильтониана вплоть до членов 4-го порядка для тяжелой материальной точки на нелинейной пружине в плоском случае при резонансах 1:1 и 1:3. На ее основе рассчитана асимптотическая зависимость периода перекачки энергии между степенями свободы колебаний от начальных условий. Рассчитана асимптотика для

периода перекачки энергии при малом отклонении от резонанса 1:2 и минимальная расстройка частот, приводящая к исчезновению эффекта перекачки.

Для получения вышеперечисленных результатов автором разработан программный комплекс, позволяющий автоматически приводить к нормальной форме степенные разложения гамильтонианов механических систем, в том числе при наличии параметров. Программный комплекс также позволяет находить интеграл приближенной системы для гамильтонианов, квадратичная часть которых не приведена к нормальной форме. Реализация программы выполнена в среде символьного программирования Wolfram Mathematica.

Научная новизна работы состоит в следующем:

1. Впервые найдена нормальная форма гамильтониана движения тела в окрестностях коллинеарных точек либрации ограниченной круговой задачи трех тел в зависимости от параметра: приведенной массы двух тяжелых тел.
2. Впервые найдены асимптотики для периодов перекачки энергии между степенями свободы тяжелой материальной точки на пружине в плоском случае при резонансе 1:1 и при малом отклонении от резонанса 1:2 в зависимости от начальных условий.
3. Впервые реализована программа для автоматического расчета квадратичной и нелинейной нормальной формы гамильтонианов, зависящих от произвольного количества параметров, а также позволяющая получить интеграл приближенной системы без приведения квадратичной части гамильтониана к нормальной форме.

Практическая значимость диссертационной работы определяется возможностью применения полученных результатов для быстрого расчета любой гамильтоновой нормальной формы

для любой нелинейной механической гамильтоновой системы с параметрами. Для этого достаточно подставить коэффициенты степенного разложения гамильтониана в полученные формулы для коэффициентов нормальной формы. Таким образом, при исследовании нелинейных гамильтоновых систем с параметром появляется интеграл приближенной системы, а по виду нормальной формы можно судить об устойчивости положения равновесия.

Особенность коллинеарных точек либрации в пространственной ограниченной круговой задаче трех тел состоит в том, что в линейной задаче из шести характеристических корней только один положительный. Поэтому в шестипараметрическом семействе орбит существует пятипараметрическое семейство орбит, не имеющих экспоненциального по времени роста ни по одной фазовой переменной. На этих орбитах космический аппарат может оставаться в течение длительного времени, затрачивая небольшое количество топлива на компенсацию развития неустойчивости.

Практической ценностью модели пружинного маятника является ее физическая аналогия двумерным колебаниям атомов внутри молекул, которые в случае резонанса обнаруживаются при спектральном анализе (резонанс Ферми).

Достоверность изложенных в работе результатов обеспечивается их сравнением с ранее полученными и опубликованными другими авторами результатами для частных случаев. Например, полученная в зависимости от приведенной массы нормальная форма гамильтониана движения тела в окрестностях коллинеарных точек либрации ограниченной круговой задачи трех тел сравнивается с ранее вычисленной нормальной формой для частного случая системы Земля-Луна. Для всех задач приводится сравнение асимптотического решения с численным решением задачи для исходного гамильтониана.

Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и симпозиумах:

- 56-я научная конференция МФТИ (Россия, Москва, 2013).
- 55-я научная конференция МФТИ (Россия, Москва, 2012).
- X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Россия, Нижний Новгород, 2011).
- XI Международная конференция "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (Россия, Москва, 2010).
- Imperial College London. International Workshop on Resonance Oscillations and Stability of Nonsmooth Systems (Великобритания, Лондон, 2009).

Выполнялись доклады на научных семинарах в Институте проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН, Механико-математическом факультете МГУ, Институте механики МГУ, Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН.

Диссертационная работа была выполнена при поддержке грантов РФФИ №07-01-00129-а и №11-01-00535-а.

Основные результаты по теме диссертации изложены в 13 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 11 — в тезисах докладов.

## Публикации автора по теме диссертации

1. Петров А.Г., Шундерюк М.М. О нелинейных колебаниях тяжелой материальной точки на пружине // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 2. С. 27-40.
2. Шундерюк М.М. Гамильтонова нормальная форма в окрестностях точки либрации L1 ограниченной круговой задачи трех тел // ДАН. Механика. Т. 441, № 1, С. 44-49, 2011.
3. Шундерюк М.М. Гамильтоновы нормальные формы в окрестностях коллинеарных точек либрации ограниченной круговой задачи трех тел // ПММ. Том 76. Вып. 4, 2012. С. 587-600.
4. Шундерюк М.М. О нелинейных двумерных колебаниях тяжелой материальной точки на пружине в случае резонанса 1:1 // Труды 50-й научной конференции МФТИ "Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук": Часть III. Аэрофизика и космические исследования. Том 1. М.:МФТИ, 2007. С. 162-164.
5. Shunderyuk M. On nonlinear resonance oscillations of a spring supported point particle // June 25, 2009. Imperial College London. International Workshop on Resonance Oscillations and Stability of Nonsmooth Systems.

6. Шундерюк М.М. Нормальная форма в окрестности точки либрации L2 ограниченной круговой задачи трех тел // Труды 52-й научной конференции МФТИ "Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук": Часть III. Аэрофизика и космические исследования. Том 1. М.:МФТИ, 2009. С. 194-197.
7. Журавлев В.Ф., Петров А.Г., Шундерюк М.М. Асимптотическая симметризация гамильтоновых систем: учебно-методическое пособие. М.:МФТИ, 2010. 56с.
8. Шундерюк М.М. Нормальная форма в окрестности точки либрации L1 ограниченной круговой задачи трех тел // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов XI Международной конференции. Москва, ИПУ РАН, 1-4 июня 2010 г. М.: ИПУ РАН, 2010. С.441-442.
9. Шундерюк М.М. Нормальная форма гамильтониана в окрестности точки либрации L1 ограниченной пространственной круговой задачи трех тел // Труды 53-й научной конференции МФТИ "Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук". Часть III. Аэрофизика и космические исследования. Том 1. М.: МФТИ, 2010. С. 128-129.
10. Шундерюк М.М. Гамильтонова нормальная форма в окрестностях коллинеарных точек либрации пространственной круговой задачи трех тел. // X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского, № 4, часть 5, 2011.
11. Шундерюк М.М. Нормальная форма гамильтониана в окрестностях коллинеарных точек либрации ограниченной пространственной круговой задачи трех тел. // Труды 54-й научной конференции МФТИ "Проблемы фундаментальных и

прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе". Аэрофизика и космические исследования. М.: МФТИ, 2011. С. 229-230.

12. Шундерюк М.М. Нормальная форма гамильтониана в окрестностях коллинеарных точек либрации ограниченной пространственной эллиптической задачи трех тел // Труды 55-й научной конференции МФТИ "Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе". Аэрофизика и космические исследования. Том 1. М.: МФТИ, 2012. С. 106-107.
13. Шундерюк М.М. Нормальная форма гамильтонианов, представленных в виде степенных рядов с произвольными коэффициентами // Труды 56-й научной конференции МФТИ "Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе". Аэрофизика и космические исследования. Том 1. М.: МФТИ, 2013. С. 106-107.

## Список иллюстраций

2.1	Блок-схема алгоритма нормализации гамильтониана	37
3.1	Коллинеарные точки либрации в плоской ограниченной круговой задаче трех тел . . . . .	60
3.2	Коэффициенты квадратичной нормальной формы в зависимости от приведенной массы . . . . .	63
3.3	Коэффициенты нормальной формы 4-го порядка в зависимости от приведенной массы, точка либрации $L_1$ . . . . .	69
3.4	Коэффициенты нормальной формы 4-го порядка в зависимости от приведенной массы, точка либрации $L_2$ . . . . .	70
3.5	Коэффициенты нормальной формы 4-го порядка в зависимости от приведенной массы, точка либрации $L_3$ . . . . .	70
3.6	Расстояние от малого тела до точки либрации $L_1$ для системы Солнце-Земля в зависимости от начальных условий . . . . .	73
3.7	Расстояние от малого тела до точки либрации $L_1$ для системы Земля-Луна в зависимости от начальных условий . . . . .	74
3.8	Трехмерный график решений исходных уравнений для системы Земля-Луна, точка либрации $L_1$ , в зависимости от начальных условий . . . . .	75

4.1	Тяжёлая точка на пружине . . . . .	79
4.2	График потенциальной энергии . . . . .	86
4.3	Перекачка энергии между степенями свободы системы при резонансе 1:1 . . . . .	89
4.4	Сравнение аналитической зависимости периода с результатами эксперимента . . . . .	93

## Список таблиц

2.1	Параметры для $c_2$ , 1 степень свободы . . . . .	40
2.2	Параметры для $c_3$ , 1 степень свободы . . . . .	40
2.3	Параметры для $c_{20}$ , 2 степени свободы, нет резонанса	41
2.4	Параметры для $c_{11}$ , 2 степени свободы, нет резонанса	42
2.5	Параметры для $c_{02}$ , 2 степени свободы, нет резонанса	42
2.6	Параметры для $c_{20}$ , 2 степени свободы, резонанс 1:2, $\sigma = +1$ . . . . .	43
2.7	Параметры для $c_{11}$ , 2 степени свободы, резонанс 1:2, $\sigma = +1$ . . . . .	43
2.8	Параметры для $c_{02}$ , 2 степени свободы, резонанс 1:2, $\sigma = +1$ . . . . .	43
2.9	Параметры для $c_{20}$ , 2 степени свободы, резонанс 1:3, $\sigma = +1$ . . . . .	45
2.10	Параметры для $c_{11}$ , 2 степени свободы, резонанс 1:3, $\sigma = +1$ . . . . .	45
2.11	Параметры для $c_{02}$ , 2 степени свободы, резонанс 1:3, $\sigma = +1$ . . . . .	45
2.12	Параметры для $c_{20}$ , 2 степени свободы, резонанс 1:3, $\sigma = -1$ . . . . .	46
2.13	Параметры для $c_{11}$ , 2 степени свободы, резонанс 1:3, $\sigma = -1$ . . . . .	47
2.14	Параметры для $c_{02}$ , 2 степени свободы, резонанс 1:3, $\sigma = -1$ . . . . .	47
2.15	Параметры для $c_{200}$ , 3 степени свободы, нет резонанса	52

- 2.16 Параметры для  $c_{020}$ , 3 степени свободы, нет резонанса 52
- 2.17 Параметры для  $c_{002}$ , 3 степени свободы, нет резонанса 53
- 2.18 Параметры для  $c_{110}$ , 3 степени свободы, нет резонанса 53
- 2.19 Параметры для  $c_{101}$ , 3 степени свободы, нет резонанса 54
- 2.20 Параметры для  $c_{011}$ , 3 степени свободы, нет резонанса 54

# Литература

1. Айзерман М.А. Классическая механика. М.; Наука, 1980. 367 с.
2. Акуленко Л.Д. Асимптотический анализ динамических систем подверженных высокочастотным воздействиям // ПММ., 1994. Т. 58. Вып. 3. 23-31.
3. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматлит, 1960. 487 с.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: "Эдиториал УРСС 2000. 408 с.
5. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, 304 с.
6. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971, 240 с.
7. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. математики. Т. 3. М.: 1985. 304 с.
8. Белицкий Г.Р. Нормальные формы, инварианты и локальные отображения. М.-Киев, Наукова думка, 1979. 173 с.
9. Биркгоф Д.Д. Динамические системы. М.-Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
10. Богаевский В.Н., Повзнер А.Я. Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. М.: Наука, 1987. 255 с.

11. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
12. Брюно А.Д. Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1990. 296 с.
13. Брюно А.Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений // Труды Московского математического общества. 1972. Т 26. С. 199–238.
14. Брюно А.Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений // Труды Моск. матем. общества. 1972. Т. 26. С. 199-238.
15. Брюно А.Д., Петров А.Г. О вычислении нормальной формы // Докл. РАН. 2006. Т. 410. N. 4. С. 474-478.
16. Брюно А.Д. Нормальные формы и интегрируемость уравнений Эйлера-Пуассона//Препринт ИПМ № 66, Москва, 2005 г.
17. Брюно А.Д., Еднерал В.Ф. Анализ локальной интегрируемости методами нормальной формы и степенной геометрии//Препринт ИПМ № 53, Москва, 2007 г.
18. Брюно А.Д. Анализ уравнений Эйлера-Пуассона методами степенной геометрии и нормальной формы // ПММ. 2007. Т. 71. Вып. 2. С. 192-227.
19. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Часть 1, М.: Наука, 1967. 467 с; часть 2, 1967. 332 с.
20. Вановский В.В., Петров А.Г. Колебания газового пузырька в жидкости при резонансе частот радиальной и произвольной осесимметричной моды колебаний 2:1// Докл. РАН, 2011, том 437, №3. С. 331-333.

21. Вановский В.В., Петров А.Г. Резонансный механизм дробления газового пузырька в жидкости. Докл. РАН, 2012, том 444, №. 4. С. 385-389.
22. Витт А.А., Горелик Г.С., Колебаний упругого маятника как пример двух параметрически связанных линейных систем // Журн. техн. физики. 1933. Т. 3, N2-3. С.294-307.
23. Вишенкова Е.А., Холостова О.В. К динамике двойного маятника с горизонтально вибрирующей точкой подвеса//Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. Механика 2012. Вып. 2. С. 124-129.
24. Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е. Динамика частиц при воздействии вибраций. Киев: Наук. думка, 1975. 168 с.
25. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.; Наука, 1966. 300 с.
26. Гельфрейх В.Г., Лазуткин В.Ф. Расщепление сепаратрис: теория возмущений, экспоненциальная малость// УМН, 2001. Т. 56. Вып. 3. С. 79-142.
27. Герц Г.Р. Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 386 с.
28. Журавлёв В.Ф. О некоторых свойствах гироскопических систем в связи с концепцией Герца в механике//МТТ. N 2. 1982. С. 15-19.
29. Журавлёв В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Наука, 1997, 320 с.
30. Журавлёв В.Ф. Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов// Изв. РАН. МТТ. – 1997. – №6. – С. 27-35.

31. Журавлёв В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988, 325 с.
32. Журавлёв В.Ф. Теория возмущений интегральных многообразий резонансных систем // В сб.: Нелинейная механика.—М.: Физмат-лит, 2001. С. 162-173.
33. Журавлёв В.Ф. Инвариантная нормализация неавтономных гамильтоновых систем// ПММ., 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 356-365.
34. Журавлёв В.Ф. Нормальная форма возмущения нелинейной колебательной системы// ПММ, 2002. Т. 66. Вып. 6. С. 881–887.
35. Журавлёв В.Ф., Петров А.Г., Шундерюк М.М. Асимптотическая симметризация гамильтоновых систем. Москва. МФТИ. 2010. 53 с.
36. Журавлёв В.Ф., Петров А.Г. О волчке Лагранжа и маятнике Фуко в наблюдаемых переменных. Докл. РАН, 2014, том 454, № 2. С. 168-172.
37. Журавлев В.Ф. О разложении нелинейных обобщённых сил на потенциальную и циркулярную компоненты//Проблемы аналитической механики и теории устойчивости. Сборник научных статей, посвященный памяти В. В. Румянцева. М.: Физматлит. 2009. С. 49-54.
38. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, Москва 1971. 392 с.
39. Козлов В.В. Несуществование аналитических интегралов вблизи положений равновесия гамильтоновых систем// Вестник Моск. ун-та, сер. матем.-механ.- 1976. № 1. С. 110-115.
40. Козлов В.В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск, Изд-во УГУ, 1995. 429 с.

41. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1965. 203с.
42. Леонтович А.М., Об устойчивости лагранжевых периодических решений ограниченной задачи трех тел., Доклады АН СССР, 1962, Т.143, №3, С.535.
43. Ли Чжи, Сибгатуллин Н.Р., Прикл. матем. и механ. т. 61, вып. 2, 1997. С. 184-189
44. Лидов М.Л., Вашковьяк М.А., Маркеев А.П. Полуаналитический метод расчета движения КА в окрестности коллинеарной точки либрации // Космич. исслед. 1976. Т. 14. № 6. С. 909.
45. Магнус К. Гироскоп. Теория и применение.—М.: Мир, 1974. 526с.
46. Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.-Ижевск, 2009. 396 с.
47. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
48. Маркеев А.П. О динамике сферического маятника с вибрирующим подвесом // ПММ, 1999. Т. 63. Вып. 2. С. 213–219.
49. Маркеев А.П. О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы при резонансе 2:1//ПММ. Том 63. Вып. 5, 1999. С. 757-769
50. Маркеев А.П., Сокольский А.Г. Некоторые вычислительные алгоритмы нормализации гамильтоновых систем: Препринт N 31. М.: Ин-т прикладной математики АН СССР, 1976. 61 с.
51. Меркин Д.Р. Гироскопические системы.—М.: Наука, 1974. 344с.

52. Милн-Томпсон. Теоретическая гидродинамика. — М.: Мир, 1964. — 655 с.
53. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука. 1969. 379 с.
54. Найфе А.Х. Методы теории возмущений. — М.: Мир, 1976. (Nayfeh A.H. Perturbation Methods. — New York: J. Wiley, 1973). 456 с.
55. Петров А.Г. Об усреднении гамильтоновых систем с периодическим по времени гамильтонианом//ДАН. Механика, 1999. Т. 368, N 4. С. 483-488.
56. Петров А.Г. О движении частиц несжимаемой среды в области с периодически изменяющейся границей//Изв. РАН МЖГ. 2000, N 4. С. 12-17.
57. Петров А.Г. Об усреднении гамильтоновых систем//МТТ, 2001, N 3. С. 19-32.
58. Петров А.Г. Параметрический метод отображений Пуанкаре в гидродинамических системах//ПММ, 2002. Т. 66. Вып. 6. С. 356-365.
59. Петров А.Г. Асимптотический метод построения отображения Пуанкаре при описании перехода к динамическому хаосу в гамильтоновых системах// ДАН, 2002. Т. 382, N 1. С. 15-19.
60. Петров А.Г. Модификация метода инвариантной нормализации гамильтонианов с помощью параметризации канонических преобразований// ДАН, 2002. Т. 386, N 4. Механика. С. 343-347.
61. Петров А.Г. Метод отображений Пуанкаре в гидродинамических системах. Динамический хаос в жидком слое между эксцентрично вращающимися цилиндрами// ПМТФ. 2002, N 6. С. 3-21.

62. Петров А.Г. Асимптотические методы решения уравнений уравнений Гамильтона с помощью параметризации канонических преобразований// Дифф. уравнения. 2004, Т. 40, N 5. С. 1-13.
63. Петров А.Г. Об инвариантной нормализации неавтономных гамильтоновых систем//ПММ, 2004. Т. 68. Вып. 6. С. 402–413.
64. Петров А.Г. Асимптотическое решение гамильтоновой системы Хенона-Хейлеса// Докл. РАН, 2007, том 417, № 3. С. 342-346.
65. Петров А.Г. Аналитическая гидродинамика. М.: Физматлит, 2009. 520 с.
66. Петров А.Г. О вибрационной энергии консервативной механической системы//Доклады РАН, 2010. Т. 431, N 6. С. 762-765.
67. Петров А.Г. Нелинейные колебания качающейся пружины при резонансе // Изв. РАН. Механика твердого тела. №5, 2006 г. С. 18-28.
68. Петров А.Г., Фомичев А.В. О нелинейных трехмерных колебаниях тяжелой материальной точки на пружине//Изв. РАН. Механика твердого тела. 42 № 5. 2008. С. 15–26.
69. Петров А.Г., Шундерюк М.М. О нелинейных колебаниях тяжелой материальной точки на пружине//Изв. РАН. Механика твердого тела. 2010. № 2. С.27-40
70. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1965. 331 с.
71. Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. Т. II М.: Наука, 1972. 999 с.

72. Смирнов, В.И., Курс высшей математики, Т. IV, Р. 2. М.: Наука, 1966.
73. Соболев С.Л. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1966, С.301–310.
74. Сокольский А.Г., Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при р(езонансе первого порядка., Прикладная математика и механика, 1977, Т.47, Вып.1, С.24.
75. Старжинский В.М. Прикладные методы нелинейных колебаний. М.:Наука, 1977. 255 с.
76. Уиттекер Е.Т., Ватсон Г.Н. Курс современного анализа. Ч. 2. М.-Л.: Гос-Тех-Теор. Изд-во. -1934. 468 с.
77. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2, М.: Физматгиз, 1962. С. 507-511.
78. Фор Р., Кофман А., Дени-Папен М. Современная математика.—М.: Мир, 1966. 271 с.
79. Blasius, H., Funktiontheoretische Methoden in der Hydrodynamik, Zeitschr. f. Math. u. Phys., LVIII (1c0), 1910.
80. Deprit A., Deprit-Bartholome. Stability of the triangular Lagrangian points. – Astron. Journ., 1967, v. 72, N 2, p. 173.
81. Edneral V.F., A symbolic approximation of periodic solutions of the Henon-Heiles system by the normal form method// J.Mathematics and Computers in Simulation, Elsevier, v. 45, pp.445-463. Edited by A.Bruno, V.Edneral, S.Steinberg.
82. Feng Z.C. Feng, Leal L.G. Nonlinear Bubble Dynamics// Annu. Rev. Fluid Mech, 1997, 29: 201-43.
83. Fermi E. Uber den Ramaneffekt des Kohlendioxyds//Zs. fur Physik. 1931. N 71. S. 250.

84. Foucault L. Demonstration physique du mouvement de la Terre au moyen du pendule// C.r. Acad. sci Paris, 1851. V. 32. P. 135-138.
85. Gomez G., Masdemont J., Simo C. Lissajous orbits around Halo orbits. // AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, AAS, 1997. P. 97-106.
86. Jorba A., Masdemont J. Dynamics in the centre manifold of the collinear points of the Restricted Three Body Problem. // Phys. D, 1999. V. 132. P. 189-213.
87. Oliver P.J. 01 ver P. J. Applications of Lie Groups to Differential Equations. — Berlin: Springer, 1986.
88. Richardson L. Analytic construction of periodic orbits about the collinear points. // Celestial mechanics, 1980. V. 22. P. 241-253.
89. Schmidt, D.S.: 1994, 'Versal normal form of the Hamiltonian function of the restricted problem of three bodies near  $L_4$ ', J. Comput. Appl. Math. 52(1-3), P. 155–176.
90. Szebehely V. Theory of Orbits. The Restricted Problem of Three Bodies. NY; L.: Acad. Press, 1967 = Себехей В. Теория орбит. М.: Наука, 1982. 656 с.