

На правах рукописи

УСТИНОВ КОНСТАНТИН БОРИСОВИЧ

МЕХАНИКА УПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СИСТЕМ С ПОКРЫТИЯМИ И  
ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ СЛОЯМИ

01.02.04 - механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва– 2015

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН)

Официальные оппоненты:

Греков Михаил Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, факультет прикладной математики – процессов управления, Санкт-Петербургский государственный университет.

Коробейников Сергей Николаевич, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, заведующий лабораторией механики разрушения материалов и конструкций, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН.

Еремеев Виктор Анатольевич, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий лабораторией механики активных материалов, Южный научный центр РАН.

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем машиноведения Российской академии наук (ИПМаш РАН).

Защита диссертации состоится 01 октября 2015 г. в 15-00

на заседании диссертационного совета Д002.240.01 при ИПМех РАН по адресу:

119526, г. Москва, проспект Вернадского, д. 101, корп. 1, ИПМех РАН.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПМех РАН и на сайте <http://ipmnet.ru/>

Автореферат разослан 12 августа 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д002.240.01

кандидат физико-математических наук

Е. Я. Сысоева

## Общая характеристика работы

**Актуальность.** С покрытиями и тонкими промежуточными слоями встречаются в органической и неорганической природе, при исследованиях в разных областях знания. Подобные структуры широко используются в технике на самых разных масштабных уровнях: от многослойной брони до тонких покрытий в оптике, микро- и нанoeлектронике. Все более актуальными становятся проблемы адекватного описания механического поведения покрытий и промежуточных слоев, в том числе многослойных, в связи с уменьшением размеров используемых устройств, в первую очередь микро- и нанoeлектронных и микро- и наномеханических. В биологии примерами являются тканевые покрытия, клеточные мембраны, в кристаллохимии – граничные области кристаллов, в физике металлов – оксидные пленки и др.

Широкий круг задач связан с деформированием и разрушением тонких поверхностных пленок и покрытий, испытывающих действие остаточных напряжений, или, что то же самое – собственных деформаций. Одной из основных причин, вызывающих собственные деформации является изменение температуры при различных коэффициентах теплового расширения покрытия и подложки. Данное явление наблюдается для широкого круга пар материалов, образующих основание (подложку) и покрытие; примерами являются керамические покрытия на металле, металлические покрытия на полимерах. Собственные деформации приводят к таким нежелательным эффектам как гофрирование поверхности и отслоение покрытия. Последнее наблюдается при пониженной адгезионной прочности на границе раздела. Ситуация осложняется тем, что иногда для предотвращения растрескивания покрытия создаются с таким расчетом, чтобы в рабочем диапазоне температур они испытывали сжатие, избыток которого и способен привести к образованию складок и отслоений. Всё это вызывает необходимость серьезного и детального исследования явления для создания технологий и условий использования, предотвращающих подобные нежелательные эффекты. Отслоения также исследуются в связи с экспериментальным изучением адгезии.

Кроме вопросов, непосредственно связанных с работой покрытий, тонкие слои исследуются в связи с описанием механических свойств материалов при уменьшении размеров вплоть до нанометровых, поскольку именно наличием подобных слоев, со свойствами, отличающимися от свойств контактирующих фаз, могут быть объяснены зависимости макроскопических свойств материала от характерного размера структуры.

**Степень разработанности темы исследования.** Вопросам исследования и моделирования отслоения покрытий и потери устойчивости отслоившихся участков покрытий

посвящено большое количество работ. Решение обычно получают с использованием балочного (пластиночного) приближения в предположении жесткого защемления краев балки, а в трехмерном случае – пластины. Более точные решения получены с использованием в качестве граничных условий не жесткой, а упругой заделки. Сами же коэффициенты упругой заделки находились путем численного решения системы интегральных уравнений при некоторых упрощающих предположениях в зависимости от двух параметров, либо методом конечных элементов. Использование подобных решений не всегда удобно. В этой связи возникает потребность в получении аналитических решений, позволяющих получать обобщения и легче проводить параметрический анализ.

Проблеме вычисления эффективных свойств материалов при наличии промежуточного слоя между контактирующими фазами уделяется достаточно много внимания. Задача сложна, поэтому возникает потребность в пусть приближенных, но обозримых и удобных для анализа аналитических решениях. В последние годы получило широкое распространение применение для описания механического поведения нанообъектов такой обобщенной теории упругости, которая использует классическую теорию при рассмотрении основного объема материала, а для поверхностей и границ раздела вводятся нестандартные свойства, причем сами поверхности описываются как двумерные объекты. Существуют различные варианты описания механического поведения таких поверхностей, в частности для очень мягких и жестких поверхностей, однако общей теории, описывающей все многообразие упругих свойств, до сих пор не создано.

Различные аспекты, связанные с работой покрытий и тонких слоев, являются предметом исследования многих научных школ, среди которых в первую очередь следует отметить ИПМех РАН, ИПМаш РАН, Институт Механики МГУ, Южный Федеральный научный центр, ИПФМ СО РАН, Гарвардский университет (США), Кардиффский университет (Великобритания), Университет Гренобля (Франция). Исследуемые вопросы являются естественными продолжениями работ В.М. Александрова, Н.Ф. Морозова, Р.В. Гольдштейна, И.Г. Горячевой, В.М. Еремеева, П.Е. Товстика, Дж. Хатчинсона, Б. Карихало, Ж. Пари.

**Цели и задачи.** Цель диссертации - разработка подхода к исследованию механического поведения тонких покрытий и промежуточных слоев, выявление на основе этого подхода основных закономерностей их деформирования и разрушения посредством образования отслоений.

Эта цель предполагает решение следующих задач:

- разработка аналитически-численного метода решения задач об отслоении тонких покрытий; сведение задачи к задачам изгиба пластин, определение вида граничных условий;

- разработка метода получения параметров, входящих в граничные условия, - коэффициентов эквивалентной упругой заделки; вычисление коэффициентов путем решения краевых задач о контакте полуплоскости и полосы;
- выявление основных закономерностей отслоения и потери устойчивости отслоившихся покрытий;
- выявление основных закономерностей деформирования тонких слоев на внешних и внутренних границах без отслоения, построение теории поверхностной упругости общего вида, чем теория Шаттлворса.

**Научная новизна.** Представлен подход к решению задач об отслоении покрытий, заключающийся в рассмотрении отслоившегося участка с помощью одного из вариантов теории пластин, граничные условия для которых ставятся исходя из рассмотрения задачи о контакте полубесконечного отслоения с основанием, решаемой аналитически.

Сформулирован и решен ряд задач о полосе, контактирующей с полуплоскостью из другого материала вдоль части границы. В частности, впервые показано, что в подобных задачах представляет интерес не только асимптотика поведения решения вблизи точки смены граничных условий (вблизи вершины трещины), но и противоположная асимптотика – вдали от вершины, нахождение которой позволяет получить эффективные граничные условия для эквивалентных пластин, моделирующих участки полосы вне непосредственного контакта с основанием. Данные асимптотики были получены путем решения краевых задач.

Впервые показано, что при выписывании указанных эквивалентных условий в общем случае следует учитывать влияние главного момента и всех компонент главного вектора, действующих в заделке усилий на компоненты вектора смещения и поворот точки упругой заделки эквивалентной пластины, моделирующей не контактирующие с полуплоскостью участки полосы. Таким образом, впервые введена в рассмотрение расширенная (3x3) матрица коэффициентов упругой заделки, и рассчитаны ее коэффициенты для ряда случаев.

Путем факторизации матрицы-функции с ненулевым индексом получено обобщение решения однородной задачи Златина-Храпкова об отслоении полосы от полуплоскости на случай различных (хотя и связанных дополнительным условием) упругих констант.

Выявлены закономерности механического поведения отслоений.

Дана новая, более общая, чем ранее, предложенная Шаттлворсом, замкнутая система уравнений поверхностной (интерфейсной) теории упругости в терминах поверхностных величин, определенных как интегралы от избытка соответствующих объемных

величин по нормали к поверхности. Представлено обобщение данной теории для случая наличия собственных деформаций.

Дано описание механического поведения тела с включением с учетом влияния поверхностных эффектов. Построено обобщение аналитического решения задачи Эшелби о деформации материала внутри и вне шарового включения в упругой среде, вызванной однородными собственными деформациями внутри включения и заданными напряжениями вдали от него, при учете наряду с поверхностной упругостью поверхностных остаточных напряжений.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Предложен подход, позволяющий моделировать механическое поведение покрытий, промежуточных слоев и отслоений. Установлены закономерности деформирования, роста и потери устойчивости отслоений при термическом и механическом воздействии, которые могут быть использованы при создании систем с покрытиями в микро- и нанoeлектронике, биомеханике.

Полученные решения задач теории упругости о полосе, контактирующей с полуплоскостью из другого материала вдоль части границы, имеют самостоятельное теоретическое значение, как расширяющие применение метода Храпкова для решения матричной задачи Винера-Хопфа. Решения этих задач имеют также и самостоятельное практическое значение, состоящее в том, что с их помощью находятся эффективные граничные условия для эквивалентных пластин (балок), моделирующих участки полосы вне непосредственного контакта с остальной частью конструкции. Данные решения находят применение не только для расчета параметров отслоений покрытий, но и в других областях, таких как механика материалов и наносистем, в строительной механике.

Полученные в работе обобщения теории поверхностной упругости позволяют описать механическое поведение микро- и нанокомпозитов, а также других объектов, хотя бы один из характерных размеров которого становится сопоставим с молекулярным.

**Методология и методы исследования.** При решении поставленных задач использовались методы механики деформируемого твердого тела. Для решения задач, связанных с отслоением покрытий, последние рассматривались с помощью теории пластин, особое внимание при этом уделялось формулировке граничных условий, которые рассматривались в виде обобщенной упругой заделки. Для определения коэффициентов матрицы упругой заделки решен ряд задач теории упругости в различных вариантах постановки для полосы, контактирующей с полуплоскостью вдоль части границы. В наиболее общем виде это приводило к матричной задаче Римана (матричной задаче Винера-Хопфа), для которой получено решение методами теории функций комплексной переменной.

При построении модели поверхностной упругости и решения задач, связанных с наличием промежуточного слоя, использованы методы теории упругости и методы математического анализа, методы асимптотических разложений и др.

**Положения, выносимые на защиту.** Подход к исследованию механического поведения покрытий, заключающийся в рассмотрении отслоившегося участка с помощью одного из вариантов теории пластин, граничные условия для которых ставятся исходя из рассмотрения задачи о контакте полубесконечного отслоения с основанием, решаемой аналитически.

Формулировка и решение ряда задач о полосе, контактирующей с полуплоскостью из другого материала вдоль части границы. Нахождение асимптотик смещения вдали от вершины интерфейсной трещины, с целью получения эффективных граничных условий для эквивалентных пластин, моделирующих отслоившиеся участки полосы. Обобщение решения однородной задачи Златина-Храпкова об отслоении полосы от полуплоскости на случай различных упругих свойств (при нулевом втором параметре Дундурса), полученное путем факторизации матрицы-функции с ненулевым индексом.

Нахождение эффективных граничных условий для эквивалентных пластин, моделирующих участки полосы вне непосредственного контакта с остальной частью механической системы. Описание свойств эффективной упругой заделки для эквивалентной пластины с помощью расширенной (3x3) матрицы упругих коэффициентов. Нахождение данных коэффициентов для ряда случаев.

Закономерности деформирования и потери устойчивости отслоений при термическом и механическом нагружении.

Замкнутая, более общая, чем система Шаттлворса, система уравнений поверхностной теории упругости (для внешних и внутренних поверхностей) в терминах поверхностных величин, определенных как интегралы от избытка соответствующих объемных величин по нормали к поверхности. Обобщение данной теории для случая наличия собственных деформаций.

Обобщение аналитического решения задачи Эшелби о деформации материала внутри и вне шарового включения в упругой среде, вызванной однородными собственными деформациями внутри включения и заданными напряжениями вдали от него, при учете наряду с поверхностной упругостью поверхностных остаточных напряжений.

**Достоверность результатов** обусловлена строгостью постановки задач, построением точных решений в рамках сформулированной модели, использовании строгих математических методов, а так же сравнением отдельных решений с известными результатами, полученными другими авторами.

**Апробация результатов исследования.** Основные результаты диссертации опубликованы в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК России [1]-[13], в журналах, препринтах, научных сборниках и трудах конференций [14]-[48]. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на российских и международных профильных научных конференциях [17]-[38], семинаре по механике прочности и разрушения материалов и конструкций ИПМех РАН, семинаре имени академика А.Ю. Ишлинского при Научном совете РАН, семинаре по механике сплошной среды им. Л.А. Галина, семинаре академика Н.Ф. Морозова ИПМаш РАН.

**Личный вклад автора.** Работы [2, 6, 10-12] выполнены без соавторов. В работе [1] постановка и решение задачи проводились совместно А.В. Дыскиным и Л.Н. Германовичем, в [9] – с Р.В. Гольдштейном. В работах [3, 4, 5, 7, 8, 13] соискателю принадлежит формулировка идей и гипотез, математические постановки и решения задач; концептуальная постановка задач и анализ результатов проводились совместно с Р.В. Гольдштейном [5], с Р.В. Гольдштейном и А.В. Городцовым [3, 4, 8], с Р.Л. Салгаником [7]; конечно-элементные вычисления – совместно с А.В. Ченцовым [5]; численные расчеты - совместно с Каспаровой Е.А. [13].

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, трех приложений и списка литературы. Количество страниц в диссертации - 344, в том числе иллюстраций – 28, таблиц - 2. Список литературы содержит 234 наименований.

### **Основное содержание работы**

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цель исследования, положения, выносимые на защиту, научная новизна и практическая значимость, представлена структура диссертации.

В **первой главе** подробно проанализированы литературные данные, посвященные исследованию вопросов, связанных с механическим поведением покрытий и тонких поверхностных и промежуточных слоев. Представлена постановка основных задач и обоснован выбор объектов исследования. Выбраны два основных направления исследований: математическое моделирование механического поведения тонких поверхностных и промежуточных слоев без отслоения и моделирование поведения отслоившихся покрытий.

Сформулирован общий подход к решению задач об отслоении покрытий, заключающийся в рассмотрении отслоившегося участка покрытия с помощью одного из вариантов теории пластин, граничные условия для которых ставятся исходя из рассмотрения задачи о контакте полубесконечного отслоения с основанием, решаемой аналитически.

**Вторая** глава посвящена формулированию и решению задач о полосе, контактирующей с полуплоскостью из другого материала вдоль части границы, получению эффективных граничных условий для эквивалентных пластин, моделирующих отслоившиеся участки покрытия путем решения краевых задач о контакте полуплоскости и полосы из другого материала.

В п.2.1 рассматривается общая постановка плоской задачи об однородной изотропной упругой полуплоскости  $y < 0$ , к которой вдоль линии  $y=0, x < 0$  (Рисунок 1) присоединена полоса  $0 < y < l$  из другого материала. Все поверхности предполагаются свободными от напряжений, а нагрузка с эквивалентным главным вектором  $(T, N)$  и моментом  $M$  приложена на бесконечности. Ставится задача нахождения асимптотики поведения смещений для  $y=0, x \gg 0$ . На основе соотношений теории упругости выписаны соотношения между нормальными и касательными напряжениями  $\sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  на линии контакта материалов и производными от нормального и тангенциального скачков смещения  $v^{(2)}(x,0) - v^{(1)}(x,0), u^{(2)}(x,0) - u^{(1)}(x,0)$

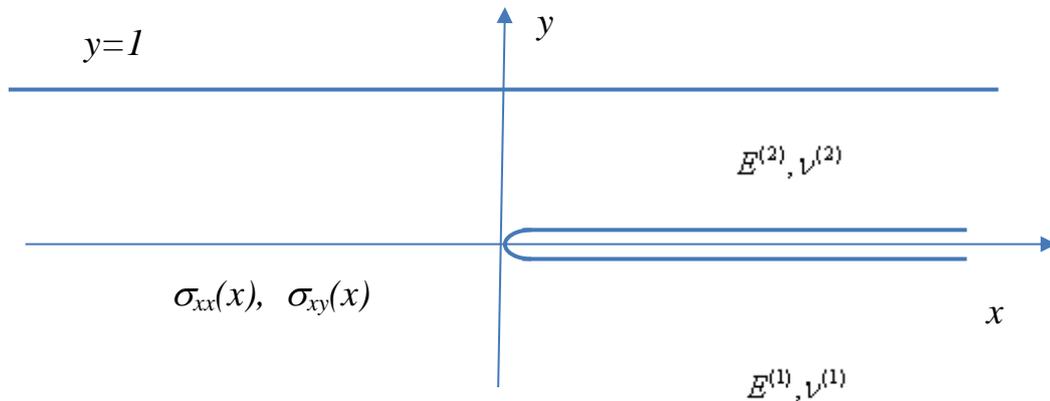


Рисунок 1. Отслоение слоя от полуплоскости. Геометрия задачи

После применения преобразования Лапласа,

$$F_+(p) = \frac{E^{(2)}}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \begin{array}{l} v^{(2)}(x,0) - v^{(1)}(x,0) \\ u^{(2)}(x,0) - u^{(1)}(x,0) \end{array} \right\} e^{-px} dx, \quad F_-(p) = \int_{-\infty}^0 \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{yy}(x,0) \\ \sigma_{xy}(x,0) \end{array} \right\} e^{-px} dx \quad (1)$$

задача сводится к матричной задаче Римана (матричной задаче Винера-Хопфа),

$$F_+(p) = K(p)F_-(p), \quad K(p) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad p \in L \quad (2)$$

$$a_{11} = (\sin p \cos p + p) / d - i\eta \operatorname{sgn}(p/i), \quad a_{12} = -a_{21} = -p^2 / d - \eta' / 2 \quad (3)$$

$$a_{22} = (\sin p \cos p - p) / d - i \eta \operatorname{sgn}(p/i), \quad d = \sin^2 p - p^2$$

$$\eta = E^{(2)} / E^{(1)}, \quad \eta' = 1 - \nu^{(2)} - \eta(1 - \nu^{(1)})$$

Здесь  $E^{(i)}, \nu^{(i)}, i = 1, 2$  - модули Юнга и коэффициенты Пуассона материалов полуплоскости и полосы, модифицированные для плоской деформации, соответственно;  $L$  - мнимая ось комплексной плоскости  $p$ . Основная сложность состоит в факторизации матричного коэффициента  $K(p)$ , т.е. представление его в виде

$$K(p) = X_+(p)X_-^{-1}(p) \quad (4)$$

где функции  $X_{\pm}(p)$  аналитичны в правой (левой) полуплоскости комплексного переменного  $p$ , после чего решение находится по теореме Лиувилля.

В п.2.2. Сформулировано предположение о возможности пренебрежения перекрестными членами в уравнении (2), что позволяет свести матричную задачу к двум скалярным (для трещины сдвига, и трещины отрыва) и демонстрируется, что такое предположение приводит к результатам, по крайней мере, не худшим, чем результаты, получаемые на основе балочного или стержневого приближения, в рамках которых полоса заменяется одномерным объектом – балкой (для задачи об отрыве), либо стержнем (для задачи о сдвиге). Далее дается решение одной из скалярных задач - задачи о сдвиге. Для удобства факторизации коэффициента задачи (совпадающего с  $a_{11}$ ), определяемого формулой (3), и устранения в его нуле разрыва производной вводится вспомогательная функция,

$$\varphi_1 \equiv \frac{1+b|p/i|}{\sqrt{1-b^2 p^2}} = \frac{\Phi_{1+}(p)}{\Phi_{1-}(p)} \quad p \in L \quad (5)$$

на которую умножается и делится коэффициент задачи. Для устранения скачка на бесконечности коэффициент умножается и делится на  $\operatorname{tg} p$ . После чего факторизация коэффициента задачи осуществляется следующим образом (здесь  $\Gamma(x)$  - гамма функция)

$$\Lambda_+(p) = \frac{\Gamma(1/2 + p/\pi)}{\Gamma(1 + p/\pi)} \left(1 + \frac{\eta p}{2}\right)^{-1/2} \exp\left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\eta p/2} \frac{\pi \zeta / 2 - \ln \zeta}{\zeta^2 + 1} d\zeta\right) J_{2+}(p) \quad (6)$$

$$\Lambda_-(p) = \frac{\Gamma(1/2 - p/\pi)}{\Gamma(-p/\pi)} \left(1 - \frac{\eta p}{2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{\pi} \int_0^{\eta p/2} \frac{\pi \zeta / 2 + \ln \zeta}{\zeta^2 + 1} d\zeta\right) J_{2-}(p) \quad (7)$$

$$J_{2\pm}(p) = \exp \left\{ -\frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty \ln \left[ \frac{\sqrt{1 + \frac{\eta^2 s^2}{4}}}{1 + \frac{\eta s}{2}} \operatorname{th} s \left( \frac{\operatorname{sh} s \operatorname{ch} s - s}{\operatorname{sh}^2 s - s^2} + \eta \operatorname{sgn} s \right) \right] \frac{ds}{is - p} \right\} \quad (8)$$

Данное представление удобно для получения искомой асимптотики смещений вдали от начала координат. Ведущий член оказывается, естественно, соответствующим смещению стержня, а следующий – искомой величине эффективной упругой заделки – связи между действующей силой и смещением эквивалентного слою стержня (здесь  $x$  – расстояние от начала координат, соответствующее отношению половине длины отслоения к его толщине)

$$E^{(2)}u = 4Tx + K_{uT}T, \quad K_{uT} = \frac{2\eta}{\pi} \left( \ln \frac{2x}{\eta} + \gamma + 1 \right) + \delta_4 + \frac{\eta^2}{\pi^2 x} \left( \ln \frac{2x}{\eta} + \gamma + 1 \right) + \frac{\eta \delta_4}{2\pi x} + O\left(\frac{\ln^2 x}{x^2}\right) \quad (9)$$

$$\delta_4(\eta) = \frac{4}{\pi_0} \int_0^\infty \ln \left[ \frac{s}{2 + \eta s} \left( \frac{\operatorname{sh} s \operatorname{ch} s - s}{\operatorname{sh}^2 s - s^2} + \eta \right) \right] \frac{ds}{s^2}, \quad 0 < \delta_4 < 1 \quad (10)$$

Здесь  $\gamma \approx 0.5772$  – постоянная Эйлера.

В п.2.3 получено решение задачи в упрощенной постановке, когда слой заменяется одномерным объектом: стержнем-стрингером. Коэффициент задачи принимает вид

$$K(p) = \frac{1}{2p} - i\eta \operatorname{sgn}(p/i) \quad (11)$$

а коэффициент эффективной упругой заделки

$$K_{uT} = \frac{2\eta}{\pi} \left( \ln \frac{x}{2\eta} + \gamma + 1 \right) + O\left(\frac{\ln x}{x}\right) \quad (12)$$

Кроме того для обоих вариантов задачи получены асимптотики вблизи начала координат, соответствующие коэффициентам интенсивности напряжений (КИН). Для задачи о стержне-стрингере он совпадает с известными результатами.

В п.2.4. получено решение задачи о нормальном отрыве также в упрощенной постановке, когда верхний слой заменяется одномерным объектом – пластиной. В отличие от других случаев, здесь применялось преобразование Фурье. Коэффициент задачи

$$G(\alpha) = \frac{2}{E^{(1)}} \left( a^3 + |\alpha|^3 \right), \quad a^3 = \frac{E^{(1)}}{2D} \quad (13)$$

Здесь  $\alpha$  – параметр, соответствующий координате в Фурье пространстве,  $D$  – изгибная жесткость. После факторизации коэффициента задачи найдены асимптотики, соответ-

ствующие поведению решения вдали от начала координат и найдены искоемые коэффициенты эффективной упругой заделки – связи между действующей силой и моментом и смещением и начальным углом поворота эквивалентной слою пластины

$$E^{(2)}v = \frac{12}{h^3} N x^3 + \frac{12}{h^3} M x^2 + K_{v'M} M \frac{x}{h} + K_{v'N} N \frac{x}{h} + K_{vM} M + K_{vN} N \quad (14)$$

$$K_{v'M} = 12 \times 2^{2/3} 3^{-5/6} \eta^{1/3} \approx 12 \times 0.635 \eta^{1/3}, \quad K_{v'N} = K_{vM} = 2^{7/3} 3^{-2/3} \eta^{2/3} \approx 2.42 \eta^{1/3} \quad (15)$$

Полученные результаты хорошо согласуются с результатами численных расчетов Ю и Хатчинсона.

Получены также выражения для КИН. Рассмотрены приближенные модели, типа пластина на упругом основании, в котором реакция полуплоскости моделировалась локальной связью между напряжениями и смещениями.

**Третья глава** посвящена решению матричной задачи, сформулированной в п.2.1. В настоящее время общее решение указанной задачи неизвестно. Факторизация может быть осуществлена лишь для матриц частного вида. Одной из наиболее общих форм представления матриц данного вида является следующая

$$K(p) = b(p) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c(p) \begin{pmatrix} l(p) & m(p) \\ n(p) & -l(p) \end{pmatrix} \quad (16)$$

где  $b(p)$ ,  $c(p)$  - произвольные функции,  $l(p), m(p), n(p)$  - полиномы, а на функцию  $\ln K(p)$  накладываются некоторые ограничения. В частности Златиным и Храпковым была решена задача для  $\eta' = 0, \eta = 1$ , что соответствует совпадению упругих свойств полуплоскости и полосы. Выполнение первого условия существенно для сохранения вида матричного коэффициента задачи Римана, необходимого для разрешимости задачи указанными методами, а обобщение задачи для  $\eta$  отличных от единицы не приводит к нарушению необходимого вида матричного коэффициента.

Матрицы  $X_{\pm}^{\pm 1}(p)$  имеют вид

$$X_{+}^{\pm 1}(p) = \Lambda_{+}^{\pm 1}(p) [I \operatorname{ch}(\varphi \beta_{+}) \pm B(p) \operatorname{sh}(\varphi \beta_{+})] \quad (17)$$

$$X_{-}^{\pm 1}(p) = \Lambda_{-}^{\pm 1}(p) [I \operatorname{ch}(\varphi \beta_{-}) \pm B(p) \operatorname{sh}(\varphi \beta_{-})]$$

Здесь  $I$  – единичная матрица,

$$B(p) = \varphi^{-1}(p) \begin{pmatrix} 1 & -p \\ p & -1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(p) = \sqrt{1-p^2} \quad (18)$$

Функции  $\Lambda_{\pm}(p), \beta_{\pm}(p)$  являются решениями скалярных задач Римана

$$\Lambda_{-}^{-1}(p)\Lambda_{+}(p)=\Delta^{1/2}(p), \quad p \in L \quad (19)$$

$$\beta_{+}(p)-\beta_{-}(p)=\varphi^{-1}(p)\varepsilon(p), \quad p \in L \quad (20)$$

Здесь определитель  $\Delta(p)$  и показатель  $\varepsilon(p)$  матрицы  $K(p)$  определяются как

$$\Delta(p)=\lambda_1(p)\lambda_2(p), \quad \varepsilon(p)=\frac{1}{2}\ln\frac{\lambda_1(p)}{\lambda_2(p)} \quad (21)$$

Собственные числа  $\lambda_1(p), \lambda_2(p)$  матрицы  $K(p)$  представимы в виде

$$\lambda_1(p)=-2ctg^3p A(p/i), \quad \lambda_2(p)=2ctg p B(p/i) \quad (22)$$

$$2A(s)=\eta|th^3s|+th s \left( th s + s\sqrt{1+s^2}ch^{-2}s \right) / (1-s^2sh^{-2}s) \quad (23)$$

$$2B(s)=\eta|th s| + \left( 1 - s\sqrt{1+s^2}sh^{-1}ch^{-1}s \right) / (1-s^2sh^{-2}s)$$

Решение записывается в виде

$$\Lambda_{\pm}(p)=(1+\eta)^{\pm 1/2}\pi^{\pm 1}\frac{\Gamma^2(1/2\pm p/\pi)}{\sqrt{2}\Gamma^2(1\pm p/\pi)}(1\pm\eta p)^{-1/2}\exp\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\eta p}\frac{\pi\zeta/2-\ln\zeta}{\zeta^2+1}d\zeta\right)J_{\pm}^a(p)$$

$$J_{\pm}^a(p)=\exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\ln\left[\frac{2}{1+\eta}\frac{\sqrt{1+\eta^2s^2}}{1+\eta s}\sqrt{A(s)B(s)}\right]\frac{ds}{is-p}\right\} \quad (24)$$

$$\beta_{+}(p)=\beta_{0+}(p)+\beta_{s+}(p), \quad \beta_{-}(p)=\beta_{0-}(p)+\beta_{s-}(p)+\beta_{T-}(p) \quad (25)$$

$$\beta_{s+}(p)=-\frac{\ln\left(p+i\sqrt{1-p^2}\right)}{2\sqrt{1-p^2}}, \quad \beta_{s-}(p)=-\beta_{s+}(-p), \quad \beta_{T-}(p)=\frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\ln\frac{\sqrt{1-p^2}-1}{p}$$

$$\beta_{0\pm}(p)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{(1+s^2)^{-1/2}\times \right. \quad (26)$$

$$\left. \ln\left[\frac{\sqrt{A(s)}}{\sqrt{B(s)}}\frac{s\operatorname{cth}s}{\sqrt{1+s^2}+1}\right]-\ln\frac{\sqrt{1+\eta^2s^2}}{1+\eta|s|}\right\}\frac{ds}{is-p}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{1+\eta|s|}{\sqrt{1+\eta^2s^2}}\frac{ds}{is-p}$$

Окончательное решение отсюда находится по теореме Лиувилля. Из полученного решения найдены асимптотики, соответствующие поведению решения вдали от начала координат, и найдены искомые коэффициенты эффективной упругой заделки – связи между

действующей силой и моментом и смещением и начальным углом поворота эквивалентной слою пластины

$$E^{(2)} \begin{pmatrix} u_0 \\ v'_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{uT} & \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3}\delta \\ \sqrt{3} & 12\delta & \frac{3}{2} + 6\delta^2 \\ 1 + \sqrt{3}\delta & \frac{3}{2} + 6\delta^2 & K_{vN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ M \\ N \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$\delta(\eta) = \frac{4 \ln 2}{\pi} + \delta_5(\eta) + \delta_6(\eta), \quad K_{uT} = \frac{4 \ln 2}{\pi} + \delta_5 - \delta_6 + \eta + \frac{2\eta}{\pi} \left( \ln \frac{x}{\eta} + \gamma - 1 \right) \quad (28)$$

$$\delta_5(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \ln \left[ \sqrt{A(s)B(s)} \frac{\sqrt{1+\eta^2 s^2}}{1+\eta s} \right] - \ln \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \frac{ds}{s^2} \quad (29)$$

$$\delta_6(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ (1+s^2)^{-1/2} \ln \left[ \frac{\sqrt{A(s)}}{\sqrt{B(s)}} \frac{s \operatorname{cth} s}{\sqrt{1+s^2+1}} \right] - \ln \frac{\sqrt{1+\eta^2 s^2}}{1+\eta s} - \ln \sqrt{3} \right\} \frac{ds}{s^2} \quad (30)$$

Выражение для  $K_{vN}$  слишком громоздко и здесь не выписано. Матрица в (27) может быть названа расширенной матрицей податливости. Сравнение для некоторых ее компонент с численными данными представлено на Рисунках 2, 3.

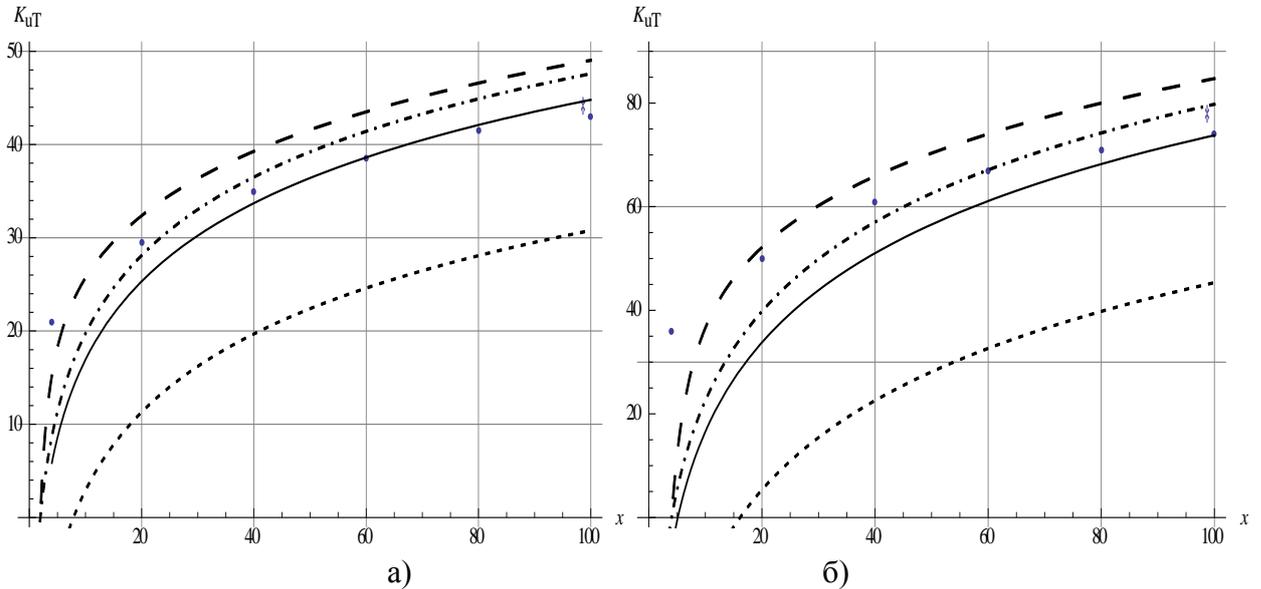


Рисунок 2. Значение  $K_{uT}$  в зависимости от длины отслоения: сплошная линия – матричное решение (27); прерывистая и штрихпунктирная линии – один и два члена асимптотики, полученной при пренебрежении перекрестным влиянием изгиба и сдвига (9); точечная – главный член асимптотики приближения стрингера (12); точки – численное решение.

а)  $\eta = 19$ , б)  $\eta = 39$ .

Полученные результаты свидетельствуют о том, что для не слишком больших относительных жесткостей  $\eta$  полученные асимптотические оценки  $K_{ит}$  хорошо согласуются с результатами численных расчетов. Для больших отношений модулей  $\eta$  и малых отношений длин отслоений к их толщине  $x$  кривые уходят в отрицательную область, что свидетельствует о неприменимости асимптотических решений для подобных соотношений параметров. Из приведенных графиков также видно, что расхождение между результатами численных расчетов и результатами расчетов на основании стрингерного приближения существенно для всего диапазона расчетных параметров.

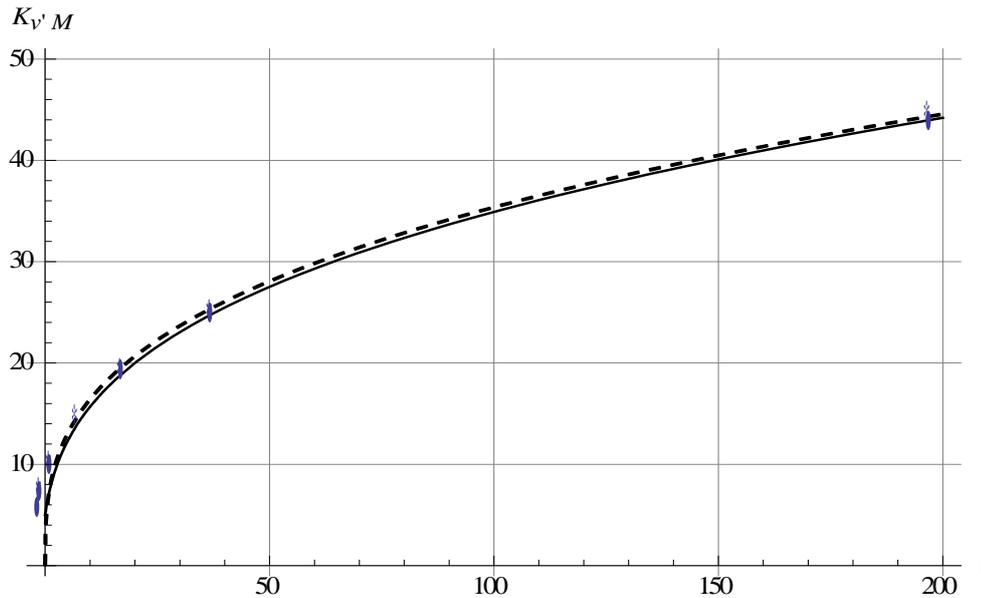


Рисунок 3. Значение  $K_{v'M}$  в зависимости от отношения модулей: сплошная линия – решение (27); пунктирная – решение с использованием балочного приближения (14), точки – численное решение.

Полученные асимптотические формулы для  $K_{v'M}$  хорошо согласуются с результатами численных расчетов Дж. Хатчинсона для всего диапазона параметров как для матричной, так и для скалярной модели. Получены также выражения для КИН

$$\begin{cases} K_I \\ K_{II} \end{cases} = k_M M + \left( k_T - \frac{1}{2} k_M \right) T + k_N N \quad (31)$$

$$k_M = \sqrt{3} \sqrt{\frac{2}{1+\eta}} \begin{pmatrix} \cos q - \sin q \\ -\cos q - \sin q \end{pmatrix}, k_T = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{1+\eta}} \begin{pmatrix} \cos q + \sin q \\ \cos q - \sin q \end{pmatrix}, k_N = \delta k_M + \sqrt{3} k_T \quad (32)$$

$$q(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1+s^2)^{-1/2} \ln \left[ \frac{\sqrt{A(s)}}{\sqrt{B(s)}} \frac{s \operatorname{cth} s}{\sqrt{1+s^2+1}} \right] ds$$

Данные формулы являются обобщением формул Златина и Храпкова и переходят в них для случая полосы и полуплоскости с одинаковыми упругими свойствами  $\eta = 1$ .

Для удобства использования результатов в дальнейших расчетах представлены асимптотики полученных формул для больших и малых  $\eta$ , формулы для скоростей высвобождения энергии.

В **четвертой главе** излагаются приложения результатов гл. 2 и 3, главным образом, к задачам отслоения покрытий.

В п.4.1. излагаются обобщения результатов для коэффициентов матрицы податливости для анизотропных и многослойных подложек и покрытий. Приводятся результаты интерполяции численных данных Ю и Хатчинсона для  $K_{uT}$ , в том числе и для диапазона параметров, лежащего вне пределов применимости полученных асимптотик. После подходящей нормировки переменных все точки с достаточно хорошей точностью ложатся на единую кривую (Рисунок 4). Данная кривая аппроксимирована формулой

$$K_{uT} = a_{11} = \frac{1}{2}\sqrt{\eta} + \frac{3}{2}\left[\frac{b}{h}(\eta)^3\right]^{1/4} \quad (33)$$

В п.4.2. дается оценка влияния податливости подложки на напряжения потери устойчивости отслоившегося покрытия. Рассматривается упругая подложка, моделируемая полуплоскостью, к границе которой примыкает покрытие, моделируемое упругой полосой (пластиной) толщины  $h$  с отличающимися свойствами (модули Юнга и коэффициенты Пуассона покрытия и подложки –  $E^{(1)}, \nu^{(1)}, E^{(2)}, \nu^{(2)}$ , соответственно).

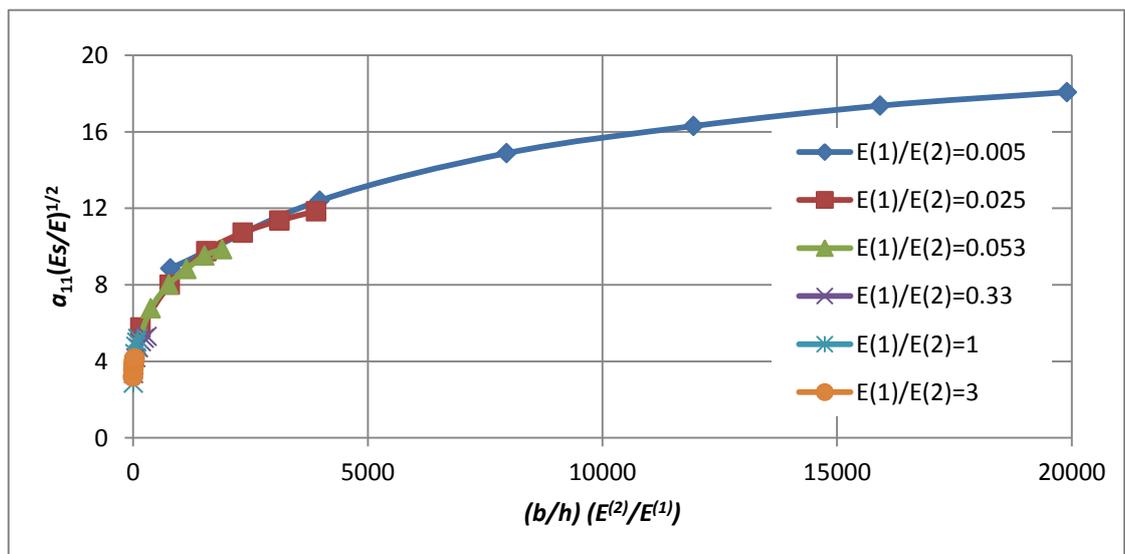


Рисунок 4. Единая кривая для коэффициента упругой заделки  $K_{uT}$ , полученная на основе численных данных Ю и Хатчинсона.

Между полосой и полуплоскостью имеется полный контакт всюду, за исключением участка длины  $2b$ , вдоль которого имеется отслоение. Система декартовых координат выбрана так, что ось  $x$  параллельна границе полуплоскости, ось  $y$  - направлена вдоль ее внешней нормали. Начало координат выбрано совпадающим с центром отслоения и лежащим в срединном сечении полосы до ее изгиба вследствие потери устойчивости. Полуплоскость занимает область  $y < -h/2$ , полоса -  $-h/2 < y < h/2$ , разрез -  $-b < y < b$ ,  $y = -h/2$ . Предполагается, что в полосе имеются собственные деформации растяжения, приводящие к появлению сжимающих напряжений  $\sigma_0$ , действующих вдоль пластины. Данный тип напряженно-деформированного состояния может возникнуть, например, при нагреве рассматриваемой конструкции, если коэффициент теплового расширения материала слоя выше, чем коэффициент теплового расширения материала полуплоскости. При достижении напряжениями критического значения  $\sigma_0$  происходит потеря устойчивости: отслоившаяся часть покрытия изгибается, а центр отслоения смещается относительно своего первоначального положения на величину  $\delta$ . Геометрия рассматриваемой области и связанная с ней система координат представлены на Рисунке 5. Задача состоит в отыскании критического значения напряжений  $\sigma^{cr}$ , при которых происходит потеря устойчивости. Величина  $\sigma^{cr}$  представляется как произведение соответствующей величины, рассчитанной для пластины в условиях жесткой заделки  $\sigma_0^{cr}$ , на коэффициент  $\gamma_\sigma$

$$\sigma^{cr} = \sigma_0^{cr} \gamma_\sigma, \quad \sigma_0^{cr} = \frac{\pi^2 h^2 E^{(2)}}{12b^2 (1-\nu^{(2)2})} \quad (34)$$

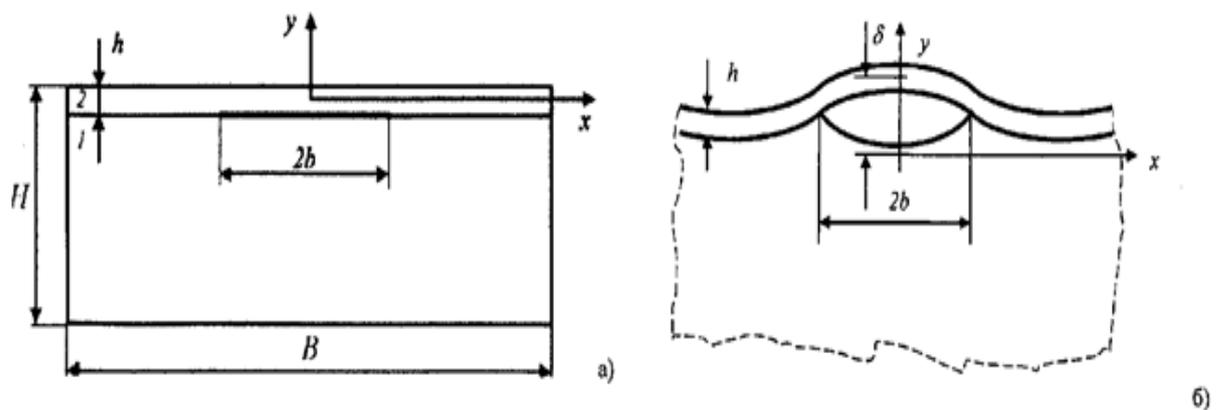


Рисунок 5. Геометрия области в задаче об отслоении а) до деформирования; б) после деформирования; 1 – полуплоскость, 2 - полоса.

Для определения коэффициента  $\gamma_\sigma$  используется одна из нескольких моделей. В качестве основной рассматривается модель простой упругой заделки. Для участка  $|x| < b$  прогиб пластины, представляющей слой, определяется из уравнения

$$E^{(2)} \frac{h^3}{12} v^{IV}(x) + \sigma h v''(x) = 0 \quad (35)$$

Здесь  $\sigma$  - сжимающее напряжение в сечении слоя. В точках  $x = \pm b$  предполагаются условия равенства нулю смещений (поскольку смещение как жесткого целого не влияет на величину критической сжимающей силы) и пропорциональности угла поворота действующему моменту

$$v(b) = 0, \quad E^{(2)} v'(b) = K_{vM} M \quad (36)$$

Подстановка данных граничных условий в (35) после преобразований дает

$$\operatorname{tg} \pi \sqrt{\gamma_\sigma} + d_0 \beta \pi \sqrt{\gamma_\sigma} = 0, \quad \beta = \frac{h}{b} \sqrt[3]{\eta}; \quad d_0 = 2^{2/3} 3^{-5/6} \approx 0.636 \quad (37)$$

Здесь использован наиболее простой вариант расчета коэффициента упругой заделки (15). Для остальных вариантов полученные выражения отличаются не сильно.

Отсюда видно, что в рамках рассматриваемой модели отличие критического напряжения от напряжения, посчитанного из условий абсолютно жесткой заделки, определяется не по отдельности упругими и геометрическими параметрами модели, а их комбинацией – единым безразмерным параметром, названным  $\beta$  и определяемым (37).

Рассматриваются также альтернативные варианты записи граничных условий и условий контакта покрытия и подложки – модель пластины на упругом основании, модель пластины на упругом основании с учетом боковых сжимающих напряжений. Получаемые зависимости близки между собой. Полученные результаты хорошо коррелируют с результатами проведенных конечноэлементных расчетов.

Та же задача рассмотрена и в рамках модели обобщенной упругой заделки, когда смещение и угол поворота отслоившегося покрытия в точке отслоения предполагаются пропорциональными главному вектору и главному моменту действующей нагрузки, что приводит к малому, но систематическому отклонению от указанной зависимости. Рассмотрены асимптотики полученных зависимостей для малых и больших  $\beta$ , для которых зависимость представляется в виде нескольких членов ряда по степеням  $\beta$ . Различные варианты зависимости  $\gamma_\sigma$  от  $\beta$  представлены на Рисунке 6.

В п.4.3 в приближении теории пластин, имеющих малую начальную кривизну, исследовано совместное влияние кривизны и податливости подложки на параметры отслое-

ния. Податливость подложки учитывалась заданием граничных условий для пластины, моделирующей отслоившийся участок покрытия, в виде обобщенной упругой заделки, характеризуемой расширенной (3x3) матрицей податливости. Для покрытия, отслаивающегося от цилиндрической поверхности, посчитаны скорости высвобождения энергии при развитии вытянутого вдоль образующей отслоения как вдоль оси цилиндрической поверхности, так и в окружном направлении (Рисунок 7).

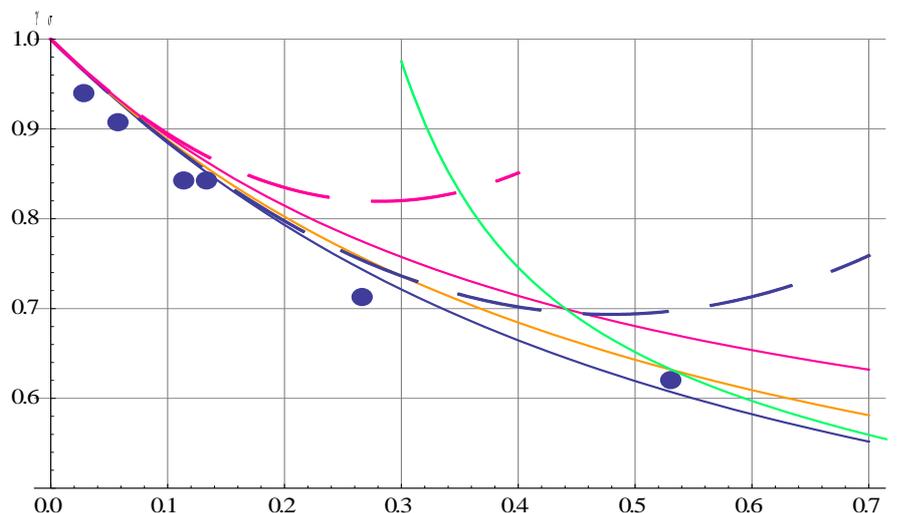


Рисунок 6. Зависимость  $\gamma_\sigma$  от  $\beta$ . Сплошная синяя линия – решение, согласно модели о пластине с граничными условиями типа «упругая заделка»; сплошная желтая линия – согласно модели «обобщенная упругая заделка» для  $\eta=1$ ; сплошная красная линия – согласно модели «обобщенная упругая заделка» для  $\eta=1/3$ ; пунктирная синяя линия – два члена асимптотики  $\beta \ll 1$  согласно модели «обобщенная упругая заделка» для  $\eta=10$ ; пунктирная красная линия – два члена асимптотики  $\beta \ll 1$  согласно модели «обобщенная упругая заделка» для  $\eta=1/3$ ; зеленая линия – асимптотика для  $\beta \gg 1$ ; точками показаны результаты численных расчетов.

Показано, что при увеличении податливости подложки скорость высвобождения энергии существенно возрастает. Из анализа результатов также следует, что для достаточно мягких подложек существует некоторая критическая ширина отслоения, для которой отслоению становится энергетически выгоднее развиваться по направлению оси цилиндрической поверхности, чем в окружном направлении. Этим, возможно, объясняется явление «туннелирования», заключающееся в образовании узких продольных вытянутых отслоений. Показано, что наличие положительной кривизны (покрытие со стороны выпуклости) и уменьшение относительной жесткости подложки приводит к уменьшению этой критической ширины, и, тем самым, способствует образованию вытянутых структур отслоений.

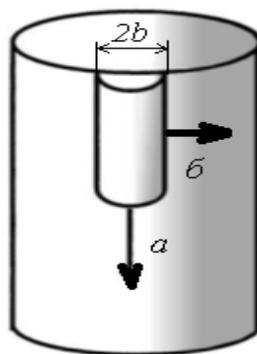


Рисунок 7. Распространение вытянутого вдоль образующей цилиндра отслоения; а) вдоль оси цилиндрической поверхности; б) в окружном направлении.

В п.4.4. излагается применение балочных моделей при рассмотренных граничных условиях для описания работы кантилеверов атомно-силовых микроскопов (АСМ). Рассматривается модельная задача определения параметров эффективной упругой заделки кантилевера. Полученное значение коэффициента податливости согласуется с полученными выше теоретическими оценками для основания, рассматриваемого как полуплоскость. Рассмотрено влияние податливости заделки на интерпретацию результатов измерений. Показано, что влияние упругости контакта (обычно рассматриваемого как жесткого) кантилевера с массивной частью может быть существенным (того же порядка, что и измеряемая величина) при интерпретации результатов, связанных с измерением тангенциальных сил взаимодействия зонда с исследуемой поверхностью.

**Пятая** глава посвящена исследованию деформирования тонких поверхностных и внутренних слоев без отслоения. Данные слои могут быть как реальными слоями, материала с отличающимися свойствами, так и зонами вблизи контакта материалов (фаз), в которых наблюдается аномальное изменение механических свойств материала, в частности – упругих констант. Подобные аномальные изменения физических свойств наблюдаются в материалах в нанометровом диапазоне в зонах контакта фаз и вблизи свободных поверхностей. В случае малой толщины подобных промежуточных слоев представляется целесообразным для их описания использовать аппарат поверхностной теории упругости. В п.5.1 дается обоснование и вывод обобщенной теории поверхностной упругости при классическом определении поверхностной плотности  $g^s(x, y)$  произвольной величины  $g$  в некоторой точке  $(x_0, y_0)$  поверхности  $z(x, y)$  как интеграл от избытка (по сравнению со значением вдали от поверхности) объемной плотности соответствующей величины  $g(z)$  по нормали к поверхности, проведенной через рассматриваемую точку (Рисунок 8).

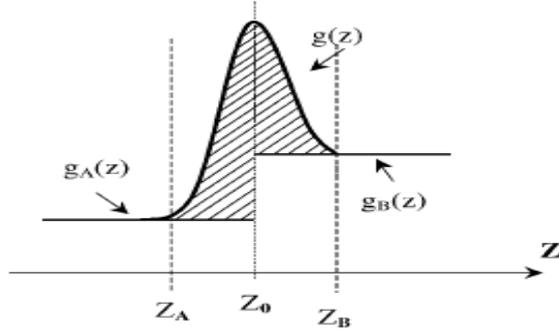


Рисунок 8. Распределение произвольной величины вблизи внутренней поверхности

$$g^s(x, y) \equiv \int_{z_A}^{z_B} g(x, y, z) dz - h_A g_A(x, y) - h_B g_B(x, y); \quad h_A = (z_0 - z_A); \quad h_B = (z_B - z_0) \quad (38)$$

Из рассмотрения вариации плотности поверхностной энергии на границе раздела сред в случае изотропии поверхностного слоя в своей плоскости получена следующая система определяющих уравнений (в системе координат с осью  $x_3$ , направленной по нормали к поверхности раздела)

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^s &= \sigma_{11}^{s0} + C_{1111}^s \varepsilon_{11} + C_{1122}^s \varepsilon_{22} + C_{1133}^{s\perp} \varepsilon_{33}^s, & \sigma_{22}^s &= \sigma_{22}^{s0} + C_{1122}^s \varepsilon_{11} + C_{1111}^s \varepsilon_{22} + C_{1133}^{s\perp} \varepsilon_{33}^s \\ \sigma_{33} &= C_{1133}^{s\perp} \varepsilon_{11} + C_{1133}^{s\perp} \varepsilon_{22} + C_{3333}^{\perp\perp} \varepsilon_{33}^s \\ \sigma_{12}^s &= \sigma_{12}^{s0} + 2C_{1212}^s \varepsilon_{12}, & \sigma_{13} &= 2C_{1313}^{\perp\perp} \varepsilon_{13}^s, & \sigma_{23} &= 2C_{1313}^{\perp\perp} \varepsilon_{23}^s \end{aligned} \quad (39)$$

Здесь верхний индекс  $s$  указывает на величины, относящиеся к поверхности (деформации  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{12}$  совпадают для поверхности и прилегающих объемных областей в силу условий совместности, а напряжения  $\sigma_{i3}$  - в силу условий равновесия);  $\sigma_{ij}^{s0}$  - остаточные поверхностные напряжения;  $C_{ijkl}^s$  - константы поверхностной упругости. Два верхних индекса  $\perp$  при константе поверхностной упругости указывают на связь между напряжениями и деформациями, хотя бы одна из компонент которых соответствует нормали к поверхности; один индекс - на случай, когда только напряжение или только деформация содержит такую компоненту.

Два обычно рассматриваемых варианта описания поверхностных эффектов получаются отсюда как частные случаи. Так пренебрежение членами, содержащими  $C_{ijkl}^{s\perp}$  и  $C_{ijkl}^{\perp\perp}$ , дает традиционное уравнение поверхностной упругости Шаттлворса (не содержащее величин, выходящих из плоскости поверхности раздела). Пренебрежение членами, содержащими  $C_{ijkl}^s$ ,  $C_{ijkl}^{s\perp}$ , дает вариант описания поверхностных эффектов с помощью непре-

рывного распределения пружин (модель винклеровского слоя). Данные варианты предполагаются соответствующими жестким и мягким промежуточным слоям соответственно.

Согласно введенному способу определения поверхностных деформаций, размерности коэффициентов  $C_{ijkl}^s$ ,  $C_{ijkl}^{s\perp}$  и  $C_{ijkl}^{\perp\perp}$  различны: размерность  $C_{ijkl}^s$  есть Н/м, размерность  $C_{ijkl}^{s\perp}$  - Н/м<sup>2</sup>, размерность  $C_{ijkl}^{\perp\perp}$  - Н/м<sup>3</sup>.

Далее рассматривается частный случай поверхностного слоя как слоя конечной толщины, обладающего постоянными свойствами. Рассматривается слой материала толщины  $h$ , заключенный между слоями других материалов, так, что суммарная толщина всех трех слоев есть  $H > h$ . Все три материала предполагаются линейно упругими трансверсально изотропными с плоскостями изотропии параллельными границам раздела слоев. Упругие свойства описываются набором постоянных  $C_{11}^i, C_{12}^i, C_{13}^i, C_{33}^i, C_{44}^i$   $C_{66}^i = (C_{11}^i - C_{22}^i)/2$  ( $i = A$  для нижнего,  $i = B$  для верхнего и  $i = C$  - для среднего слоя). Далее промежуточный упругий слой толщины  $h$  заменяется эквивалентным составным слоем, состоящим из слоя толщины  $h' < h$  со свойствами  $C_{ij}^{C'}$  и двух слоев толщиной  $(h-h')/2$  со свойствами  $C_{ij}^A$  и  $C_{ij}^B$ , соответствующими исходным вышележащему и нижележащему слоям таким образом, чтобы при произвольной заданной деформации значения упругой энергии исходной и эквивалентной упругой системы совпадали. Затем, устремляя толщину нового слоя к нулю ( $h' \rightarrow 0$ ) и изменяя при этом упругие постоянные промежуточного слоя  $C_{ij}^{C'}$  так, чтобы сохранялась упругая энергия, получим эквивалентную структуру, состоящую из двух слоев толщины  $H/2$ , соответствующих исходным материалам, и бесконечно тонкой поверхности между ними наделенной такими новыми упругими свойствами  $A_{ij}$ . При этом упругие свойства эквивалентной поверхности полностью описываются упругими константами  $A_{ij}$ , полученными в результате указанного предельного перехода

$$A_{11} = A_{22} = A_{12} + 2A_{66}, \quad A_{13} = A_{23} = A_{31} = A_{32} = \frac{(C_{13}^B C_{33}^A + C_{13}^A C_{33}^B) C_{33}^C - 2C_{13}^C C_{33}^A C_{33}^B}{C_{33}^C (C_{33}^A + C_{33}^B) - 2C_{33}^A C_{33}^B} \quad (40)$$

$$A_{12} = A_{21} = \frac{h}{4C_{33}^A C_{33}^B - 2C_{33}^C (C_{33}^A + C_{33}^B)} \left[ C_{13}^{B2} (2C_{33}^A - C_{33}^C) + C_{13}^{A2} (2C_{33}^B - C_{33}^C) + 2 C_{13}^{C2} (C_{33}^A + C_{33}^B) - \right.$$

$$\left. 4C_{13}^B C_{13}^C C_{33}^A - 4C_{13}^A C_{13}^C C_{33}^B + 2C_{13}^A C_{13}^B C_{33}^C - (2C_{12}^C - C_{12}^A - C_{12}^B) (C_{33}^C (C_{33}^A + C_{33}^B) - 2C_{33}^A C_{33}^B) \right]$$

$$A_{33} = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{C_{33}^C} - \frac{1}{2C_{33}^A} - \frac{1}{2C_{33}^B} \right)^{-1}, \quad A_{44} = A_{55} = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{C_{44}^C} - \frac{1}{2C_{44}^A} - \frac{1}{2C_{44}^B} \right)^{-1}, \quad A_{66} = h \left( C_{66}^C - \frac{C_{66}^A + C_{66}^B}{2} \right)$$

$$\sigma_i^s = A_{ij} \varepsilon_i^s$$

Полученные результаты обобщены на случай наличия собственных деформаций в контактирующих слоях по обе стороны поверхностного слоя, а также в самом слое.

В качестве примера, иллюстрирующего принципиальное отличие результатов, даваемых предлагаемой и классической теорией, рассмотрена задача изгиба пластины с поверхностным слоем на одной из сторон под действием давления, приложенного к обеим сторонам. Показано, что при определенной комбинации упругих характеристик, изгиб, описываемый в рамках рассматриваемого подхода, не может быть описан в рамках классической теории поверхностных напряжений.

Варианты записи граничных условий для различных вариантов теории поверхностной упругости иллюстрируются Таблицей.

Таблица

Полный контакт	Винклеровский слой	Традиционная поверхностная упругость	Обобщенная поверхностная упругость (предлагаемый вариант)
Кинематические условия для скачка смещения $[u_i]$ :			
$[u_i] = 0$	$[u_i] \equiv \varepsilon_{ni}^s$	$[u_i] = 0$	$[u_i] \equiv \varepsilon_{ni}^s$
Статические условия:			
$[\sigma_{ni}] = 0$	$[\sigma_{ni}] = 0$	$[\sigma_{ni}] = \nabla_s \sigma_{\alpha\beta}^s$	- Уравнение Лапласа-Юнга
Дополнительные (по сравнению с полным контактом) переменные:			
-	$\varepsilon_{ni}^s$ - 3 скачка смещения	$\sigma_{\alpha\beta}^s$ - 3 компоненты поверхностного напряжения	$\varepsilon_{ni}^s, \sigma_{\alpha\beta}^s$ - 6 единиц (3 скачка смещения и 3 компоненты поверхностного напряжения)
Дополнительные уравнения:			
-	$\mu_{(i)}^s \varepsilon_{ni}^s = \sigma_{ni}$ уравнения Винклера	$\sigma_{\alpha\beta}^s = \Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta}$ уравнения Шаттлворса	$\sigma_i^s = A_{ij} \varepsilon_i^s$ предлагаемые уравнения

Здесь  $\nabla_s$  - двумерный оператор набла;  $\Lambda_{\alpha\beta\gamma\delta}$  - модули поверхностной упругости (греческие индексы принимают значения 1,2);  $\mu_{(i)}^s$  - константы винклеровского слоя; квадратные скобки обозначают скачок соответствующей величины при переходе через границу раздела. Из представленной таблицы видно, что предлагаемый вариант поверхностной теории упругости не сводится к суперпозиции двух обычно рассматриваемых вариантов.

В п.5.2. показано, что предложенная модель поверхностной упругости обобщается на случай криволинейной поверхности. На примере задачи о составной сфере, нагружаемой центрально симметрично, показано, что определяющие соотношения (полученные обобщенные соотношения Шаттлворса) и уравнения равновесия на поверхности (уравнения Лапласа-Юнга) сохраняют свой вид (с точностью до главного члена разложения по отношению толщины слоя к радиусу его кривизны).

В п.5.3 представлена связь параметров рассмотренной модели с параметрами балочной (пластиночной) модели, описанной в Гл. 4.

**Шестая глава** посвящена обобщению решения задачи Эшелби о деформации материала внутри и вне шарового включения в упругой среде для учета влияния поверхностных напряжений и поверхностной упругости на границе раздела.

В п.6.1 рассмотрены модельные задачи о шаровом включении в бесконечной среде под действием гидростатического внешнего поля и однородных сферически симметричных собственных деформаций включения и поверхностного слоя. Получены решения для поверхностного слоя конечной толщины, для поверхностного слоя, моделируемого системой полученных в Гл. 5 уравнений, и поверхностного слоя, моделируемого системой уравнений традиционной поверхностной упругости.

Сравнение решений для поверхностного слоя, моделируемого системой полученных в Гл. 5 уравнений, с решениями для поверхностного слоя малой, но конечной толщины дает совпадения главных членов разложения по отношению толщины поверхностного слоя к радиусу включения, в то время как для решений, полученных в приближении традиционной теории поверхностной упругости, подобного совпадения в общем случае произвольных упругих постоянных не наблюдается.

В п. 6.2. рассмотрен общий случай собственных деформаций (произвольных однородных, и независимых для включения  $\mathcal{E}_{kl}^{i0}$  и интерфейса  $\mathcal{E}_{kl}^{s0}$ ) и произвольных однородных внешних напряжений  $\sigma_{kl}^{\infty}$  для определяющих уравнений частного вида на границе контакта (интерфейсе), соответствующих классическим уравнениям Шаттлворса. Решение получено путем разложения смещений внутри и вне шаровой области по сферическим функциям. Соотношения поверхностной теории упругости учитывались путем задания условий сопряжения (граничных условий) функций внутри и вне шаровой области. Выражения для тензоров полной деформации внутри  $\mathcal{E}_{ij}^i$  и вне  $\mathcal{E}_{ij}^e$  включения получены в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{ij}^i &= S_{ijkl}^{ii} \mathcal{E}_{kl}^{i0} + S_{ijkl}^{is} \mathcal{E}_{kl}^{s0} + S_{ijkl}^{i\sigma} \sigma_{kl}^{\infty} \\ \mathcal{E}_{ij}^e &= S_{ijkl}^{ei} \mathcal{E}_{kl}^{i0} + S_{ijkl}^{es} \mathcal{E}_{kl}^{s0} + S_{ijkl}^{e\sigma} \sigma_{kl}^{\infty}\end{aligned}\tag{41}$$

Компоненты тензоров  $S_{ijkl}^{mi}$ ,  $S_{ijkl}^{ms}$ ,  $S_{ijkl}^{m\sigma}$  дают значения  $ij$ -ой компоненты тензора деформации (для  $m = i$  внутри включения и для  $m = e$  вне его) при единичном значении  $kl$ -ой компоненты тензора собственных деформаций включения  $\varepsilon_{kl}^{i0}$ , тензора собственных поверхностных деформаций  $\varepsilon_{kl}^{s0}$  и тензора напряжений на бесконечности  $\sigma_{kl}^{\infty}$ , соответственно. Тензоры  $S_{ijkl}^{ii}$ ,  $S_{ijkl}^{ei}$ ,  $S_{ijkl}^{is}$ ,  $S_{ijkl}^{es}$  могут рассматриваться в качестве варианта обобщения внутреннего и внешнего тензоров Эшелби для случая наличия поверхностного слоя. Тензоры  $S_{ijkl}^{i\sigma}$ ,  $S_{ijkl}^{s\sigma}$  могут быть названы перекрестными тензорами концентрации деформаций-напряжений. Аналогичные выражения получены для напряжений. Выражения данных тензоров получены при учете указанных типов поверхностных эффектов. Наличие рассматриваемых поверхностных эффектов приводит к тому, что поля деформаций и напряжений перестают быть однородными во включении.

Выявлен характер неоднородности полей деформаций и зависимости этих полей от диаметра включения (масштабный эффект), проявляющихся на нанометровых масштабах. Показано, что при определенных условиях (для ряда кубических кристаллов) влияние остаточных поверхностных напряжений может превосходить эффект поверхностной упругости.

### Заключение

Выполнен комплекс исследований упругого деформирования систем с покрытиями и промежуточными слоями, цель которого заключалась в разработке подхода к исследованию механического поведения тонких покрытий, и промежуточных слоев; выявление на основе этого подхода основных закономерностей их деформирования и разрушения посредством образования отслоений.

Основные результаты состоят в следующем:

1. Представлен подход к решению задач об отслоении покрытий, заключающийся в рассмотрении отслоившегося участка покрытия с помощью теории пластин, граничные условия для которых ставятся исходя из аналитических решений задач о контакте полубесконечных отслоений с основанием.
2. Для получения граничных условий сформулирован и решен ряд задач о полосе, контактирующей с полуплоскостью из другого материала вдоль части границы. Путем нахождения асимптотик смещения вдали от вершины интерфейсной трещины, а также путем сравнения скорости высвобождения энергии, посчитанной в рамках задачи о полосе и эквивалентной балочной модели, получены значения ряда

- констант, необходимых для записи эффективных граничных условий для решения задач о пластинах, моделирующих отслоившиеся участки покрытий.
3. Получено обобщение решения задачи об отслоении полосы от полуплоскости на случай различных упругих постоянных материалов (хотя и подчиняющихся дополнительному соотношению), путем факторизации матрицы-функции с ненулевым индексом. Получены аналитические выражения для коэффициентов интенсивности напряжений и скорости высвобождения энергии.
  4. Дано описание свойств эффективной упругой заделки для пластины, моделирующей отслоение, с помощью расширенной (3x3) матрицы упругих коэффициентов.
  5. На основе сформулированного подхода рассмотрена задача о потере устойчивости отслоившегося от подложки покрытия вследствие наличия в нем собственных деформаций сжатия, вызванных, например, нагревом. Получено выражение для критического сжимающего напряжения. Показано, что отношение величины критического напряжения к соответствующей величине для жестко заземленной пластины определяется единым безразмерным параметром, представляющим собой комбинацию упругих констант покрытия и подложки и отношения длины отслоения к толщине покрытия.
  6. На базе сформулированного подхода в приближении теории пластин, имеющих малую начальную кривизну, исследовано совместное влияние кривизны и податливости подложки на параметры отслоения покрытий. Для покрытия, отслаивающегося от цилиндрической поверхности, посчитаны скорости высвобождения энергии при развитии вытянутого вдоль образующей отслоения как вдоль, так и по нормали к образующей. Показано, что для достаточно мягких подложек существует некоторая критическая ширина отслоения, для которой отслоению становится энергетически выгоднее развиваться вдоль криволинейной границы, чем вдоль прямолинейной. Этим объясняется явление «туннелирования», заключающееся в образовании узких продольных отслоений.
  7. Модель балки с нежесткой заделкой применена для описания работы кантилеверов АСМ. Показано, что влияние упругости контакта кантилевера с массивной частью может быть существенно при интерпретации результатов измерений.
  8. Представлен новый подход к рассмотрению поверхностных явлений, заключающийся в анализе влияния всех компонент напряжений на процесс деформирования внутренней либо внешней поверхности. В рамках подхода представлена новая, более общая, чем ранее, замкнутая система уравнений поверхностной (интерфейсной) теории упругости, в том числе при наличии собственных деформаций. Основное

отличие используемых определяющих соотношений от традиционных соотношений Шаттлворса состоит в том, что в них помимо напряжений и деформаций, действующих в плоскости поверхности раздела, входят напряжения и деформации, нормальные к этой плоскости.

9. На основе предложенной модели поверхностной упругости рассмотрены задачи о сферически симметричном деформировании бесконечного тела с шарообразным включением при наличии внешнего поля и собственных деформаций во включении и промежуточном слое. Дано обобщение аналитического решения задачи Эшелби о деформации материала внутри и вне шарового включения в упругой среде, вызванной произвольными однородными собственными деформациями внутри включения и заданными напряжениями вдали от него, при учете наряду с поверхностной упругостью поверхностных остаточных напряжений.

#### **Список работ, опубликованных автором по теме диссертации**

1. **Dyskin A.V., Germanovich L.N., Ustinov K.B. Asymptotic analysis of crack interaction with free boundary // Int. J. Solids Structures. 2000. V. 37. P. 857-886.**
2. **Устинов К.Б. Об уточнении граничных условий для балочной модели кантилевера атомно-силового микроскопа и их влиянии на интерпретацию результатов измерений // Изв. РАН МТТ. 2008. №3. С. 182-188.**
3. **Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Устинов К.Б. Моделирование механических эффектов, связанных с работой атомно-силовых микроскопов // Российские нанотехнологии. 2008. №5-6. С. 136-147.**
4. **Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Устинов К.Б.. Влияние поверхностных остаточных напряжений и поверхностной упругости на деформирование шарообразных включений нанометровых размеров в упругой матрице // Физ. Мезомех. 2010. Т. 13. №5. С. 127-138.**
5. **Гольдштейн Р.В., Устинов К.Б., Ченцов А.В. Оценка влияния податливости подложки на напряжения потери устойчивости отслоившегося покрытия // Вычисл. Мех. Спл. Сред. 2011. Т. 4. № 3. С. 48-57.**
6. **Устинов К.Б. О влиянии поверхностных остаточных напряжений и поверхностной упругости на деформирование шарообразных включений нанометровых размеров в упругой матрице // Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. 2011. № 4 часть 5. С. 2541-2542.**

7. Салганик Р.Л., Устинов К.Б. Задача об упруго заделанной пластине, моделирующей частично отслоившееся от подложки покрытие (плоская деформация) // Известия РАН МТТ. 2012. №4. С. 50-62.
8. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Устинов К.Б. О построении теории поверхностной упругости для плоской границы // Физ. Мезомех. 2013. Т. 16. №4. С. 75-83.
9. Гольдштейн Р.В., Устинов К.Б. Об учете ван-дер-ваальсового взаимодействия в некоторых задачах теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 1. С. 87-94.
10. Ustinov K.B. On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings // Engineering Failure Analysis 2015. V. 48B P. 338-344
11. Устинов К.Б.. О сдвиговом отслоении тонкой полосы от полуплоскости // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 6. С.141-152.
12. Устинов К.Б., Об отслоении слоя от полуплоскости; условия упругой заделки для пластины, эквивалентной слою // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 1. С. 75-95.
13. Устинов К.Б., Каспарова Е.А. Оценка влияния кривизны и податливости основания на параметры отслоения покрытий // Деформация и разрушение материалов. 2015. № 3 С. 28-35.
14. Р.В. Гольдштейн, В.А. Городцов, К.Б. Устинов. О некоторых особенностях механического поведения кантилеверов атомно-силовых микроскопов. Инженерная физика. 2009. №4. С. 19-23.
15. Устинов К.Б. Еще раз к задаче о полуплоскости, ослабленной полубесконечной трещиной, параллельной границе // Вестник ПНИПУ. Механика. 2013. №4. С. 138-168.
16. Ustinov K.B., Goldstein R.V., Gorodtsov V.A. On the Modeling of Surface and Interface Elastic Effects in Case of Eigenstrains. Models, Simulations and Applications / Series: Advanced Structured Materials Altenbach H., Morozov N.F. (Eds.). 2013, XV. 30. P. 167-180. 193p.
17. Ustinov K.B., Dyskin A.V., Germanovich L.N. Asymptotic analysis of extensive crack growth parallel to free boundary. 3rd Int. Conf. Localized Damage 94. 1994. P. 623-630.
18. Dyskin, A.V., Ustinov K.B., Germanovich L.N. Asymptotic vs. Numerical Modelling in Fracture Mechanics // A.K. Easton and J.M. Steiner (eds.) AEMC94. 1996. Studentliteratur, Lund. P. 399-407.
19. Ustinov K. On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings / Books of Abstracts 19-th European conference on fracture. Fracture Mechanics for

- Durability, Reliability and Safety. ESIS19 August 26-31 2012. Kazan. CD-PROCEEDINGS.
20. Устинов К.Б.. О сдвиговом отслоении тонкого слоя от полуплоскости; эквивалентные условия упругой заделки. Материалы XVIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам, 22-31 мая 2013, Алушта. - М.: Изд-во МАИ, 2013. С.442-443.
  21. Goldstein R.V., Ustinov K.B., Chentsov A.V. Buckling of delaminated coatings: effects of substrate compliance and coating thickness // 2nd Int. Conf. "From Nanoparticles & Nanomaterials to Nanodevices & Nanosystems", June 28 – July 03, 2009, Rhodes, Greece. Book of Abstracts. P. 192.
  22. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Устинов К.Б. О механических эффектах, связанных с работой кантилеверов атомно-силовых микроскопов / Всероссийская конференция ММПСН–2008 «Многомасштабное моделирование процессов и структур в нанотехнологиях» Сборник тезисов докладов, Москва, МИФИ. 2008. С. 305-307.
  23. Goldstein R.V., Ustinov K.B.. Hierarchy of scales in modeling the processes of deformation and delamination of layered and coated structures 2-nd International Conference "From nanoparticles and nanomaterials to nanodevices and nanosystems" Rhodes, Greece, 28 June – 04 July 2009. Book of Abstract. P. 191.
  24. Устинов К.Б. Ченцов А.В. Континуальное и дискретно-континуальное моделирование слоистых наноматериалов и систем с покрытиями / Международный форум по нанотехнологиям 6-8 октября 2009. Сборник тезисов докладов Второго Международного форума по нанотехнологиям. Rusnanotech-09. С. 208-209.
  25. Ustinov K.B., Goldstein R.V., Chentsov A.V. Influence of substrate compliance and coating thickness on buckling of delaminated coatings / 18-th European Conference on Fracture of Materials from Micro to Macro Scale. August 30 – September 03, 2010. Dresden, Germany. Books of Abstracts. Eds. Klingbeil et al. P.262
  26. Устинов К.Б., Гольдштейн Р.В., Ченцов А.В. О влиянии податливости подложки на параметры потери устойчивости отслоившегося покрытия / XVII Зимняя школа по механике сплошных сред, Пермь, 28 февраля – 3 марта 2011 г. Тезисы докладов. Пермь – Екатеринбург, 2011. С. 318
  27. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Ustinov K.B. Effects of surface stress and surface elasticity on deformation of an inclusion in an elastic matrix / 3rd International Conference from Nanoparticles & Nanomaterials to Nanodevices & Nanosystems and Cretan Workshop on: Global Challenges and Opportunities for Nanotechnology BOOK OF ABSTRACTS Crete, Greece, June 26 – 30, 2011. P. 140.

28. Устинов К.Б., Гольдштейн Р.В., Городцов А.В. Влияние поверхностных остаточных напряжений и поверхностной упругости на деформирование включений нанометровых размеров в упругой матрице / Тезисы докладов II Всероссийской конференции. Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций. Новосибирск 10-14 окт 2011. Изд-во НГТУ, С. 106-107.
29. Ustinov K.B., Goldstein R.V., Gorodtsov V.A. On the Modeling of Surface and Interface Elastic Effects in Case of Eigenstrains / ESMC-2012 - 8th European solid mechanics conference. Gerhard A. Holtzapfel and Ray W. Ogden eds. Graz Austria; July 9-13, 2012. Books of abstracts. CD.
30. Ustinov K.B. On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings 19-th European conference on fracture. Fracture Mechanics for Durability, Reliability and Safety. ESIS19 August 26-31 2012. Foliant Kazan Russia. P. 135.
31. Устинов К.Б., Гольдштейн Р.В., Городцов В.А. О построении теории поверхностной упругости / XVIII Зимняя школа по механике сплошных сред. Пермь, 18-22 февраля 2013. Тезисы докладов. Пермь-Екатеринбург. 2013. С. 357.
32. Ustinov K.B. On propagation of interfacial cracks parallel to free boundaries and delamination of coatings / The 13-th International Conference New Trends in Fatigue and fracture NT2F13, Moscow, Russia, 13-16 May, 2013. P. 19.
33. Goldstein R.V., Ustinov K.B. On propagation of interface cracks parallel to free boundaries in relation to delamination of coatings / Abstract book. 13-th International Conference on Fracture June 16-21 2013. Beijing China. Shouwen Yu, Xi-Qiao Eds. P. 296-297.
34. Ustinov K.B. On problem of interface crack parallel to free boundary; equivalent elastic clamping conditions / Advanced Problems in Mechanics: book of abstracts of International Summer School-Conference, 1-6 of July 2013. СПб, Издательство Политехнического университета. С. 81.
35. Устинов К.Б. Об отслоении слоя от полуплоскости для некоторого класса различных упругих свойств. Сучасні проблеми механіки деформівного твердого тіла, дифференціальних та інтегральних рівнянь. Тези доповідей міжнародної наукової конференції, 23-26 серпня 2013. Одесса. С. 122.
36. Гольдштейн Р.В., Устинов К.Б. Деформирование и отслоение тонких приповерхностных слоев. Успехи механики сплошных сред. Сборник докладов международной конференции. 28 сентября – 4 октября 2014. Владивосток с. 148-151.
37. Устинов К.Б. О граничных условиях для задач, связанных с отслоением покрытий, решаемых в терминах теории пластин. Проблемы динамики взаимодействия де-

- формируемых сред. Труды VIII международной конференции. Сентябрь 22-26, 2014, Горис-Степанакерт. с. 428-231.
38. Устинов К.Б. Некоторые задачи об отслоении покрытий: влияние податливости основания. Труды XVII международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» 14-17 октября 2014, Ростов-на-Дону. Т.2. 200-204.
  39. Устинов К.Б., Ченцов А.В. Аналитическое и численное моделирование потери устойчивости отслоившегося от подложки покрытия. Препринт 926 ИПМех РАН. 2010. 16с.
  40. Устинов К.Б., Салганик Р.Л. Задача об упруго заделанной пластине, моделирующей частично отслоившееся от подложки покрытие (плоская деформация). Препринт ИПМех РАН. 2010. № 948. 20с.
  41. Устинов К.Б. О построении теории поверхностной упругости для внутренней плоской границы при наличии собственных деформаций. Препринт ИПМех РАН. 2011. № 987. 30с.
  42. Устинов К.Б. Еще раз к задаче о полуплоскости, ослабленной полубесконечной трещиной, параллельной границе. Препринт ИПМех РАН. 2013. № 1046. 31с.
  43. Устинов К.Б. О сдвиговом отслоении тонкого слоя от полуплоскости. Препринт ИПМех РАН. 2013. № 1047. 30с.
  44. Устинов К.Б. Об отслоении слоя от полуплоскости для некоторого класса различных упругих свойств. Препринт ИПМех РАН. 2013. № 1048. 50с.
  45. Устинов К.Б., Гольдштейн Р.В., Городцов В.А. О построении теории поверхностной упругости для криволинейной границы. Препринт ИПМех РАН. 2014. № 1060. 23с.
  46. Устинов К.Б. Оценка влияния кривизны и податливости основания на параметры отслоения покрытия. Препринт ИПМех РАН. 2014. № 1078. 19с.
  47. Устинов К.Б., Гольдштейн Р.В., Городцов В.А. Деформирование шарообразного включения в упругой матрице при наличии собственных деформаций с учетом влияния свойств поверхности раздела, рассматриваемой как предел слоя конечной толщины. Препринт ИПМех РАН. 2014. № 1080. 22с.
  48. Устинов К.Б. Оценка влияния кривизны и податливости основания на параметры отслоения покрытия с учетом влияния перерезывающих сил. Препринт ИПМех РАН. 2014. № 1081. 24с.

УСТИНОВ КОНСТАНТИН БОРИСОВИЧ

МЕХАНИКА УПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СИСТЕМ С ПОКРЫТИЯМИ И  
ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ СЛОЯМИ

Специальность 01.02.04 - механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Подписано к печати \_\_\_\_\_2015. Заказ No \_\_\_\_\_ Тираж 100 экз.

---

Отпечатано на ризографе Института проблем механики  
им. А.Ю.Ишлинского РАН  
119526, Москва, пр-т Вернадского, 101, 1