

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ им. А.Ю. ИШЛИНСКОГО  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

АЛЕХОВА ЕЛЕНА ЮРЬЕВНА

**НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ БЕСПЛАТФОРМЕННЫХ  
ИНЕРЦИАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ (БИНС)**

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

01.02.01 – Теоретическая механика

Научный руководитель:  
Доктор физико-математических  
наук С.А. Решмин

Москва – 2016

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	<b>3</b>
<b>1 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ БЛОКА ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ</b> .....	<b>17</b>
1.1 КИНЕМАТИКА УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ БЛОКА ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. ....	18
1.2 ФОРМИРОВАНИЕ ПОКАЗАНИЙ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ.....	22
1.3 ФОРМИРОВАНИЕ ПОКАЗАНИЙ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ КАЖУЩЕГОСЯ УСКОРЕНИЯ. ....	25
1.4 СРАВНЕНИЕ ДВУХ АЛГОРИТМОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ.....	27
1.5 ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ.....	29
1.6 МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА НАЧАЛЬНОЙ ВЫСТАВКИ БИНС. ....	34
1.7 ЗАКЛЮЧЕНИЕ ПО ГЛАВЕ 1 .....	41
<b>2 КОРРЕКЦИЯ МАСШТАБНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ДАТЧИКА УГЛОВОЙ СКОРОСТИ БИНС БЫСТРОВРАЩАЮЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА</b> .....	<b>42</b>
2.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВ ОРИЕНТАЦИИ ОБЪЕКТА ПРИ ЭПИЗОДИЧЕСКОМ УТОЧНЕНИИ МАСШТАБНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ДУС ОСИ БЫСТРОГО ВРАЩЕНИЯ .....	43
2.2 УТОЧНЕНИЕ МАСШТАБНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ДУС ПО ПОКАЗАНИЯМ ОДНООСНОГО СТАБИЛИЗАТОРА .....	47
2.3 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ПРЕДЛОЖЕННОГО АЛГОРИТМА КОРРЕКЦИИ .....	49
2.4 АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ КВАТЕРНИОНА ОРИЕНТАЦИИ ОБЪЕКТА ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ АЛГОРИТМА КОРРЕКЦИИ.....	52
2.5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ ПО ГЛАВЕ 2 .....	55
<b>3 БЛОК ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ИЗБЫТОЧНЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ОСЕЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ</b> .....	<b>56</b>
3.1 ОРИЕНТАЦИЯ ОСЕЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПРИ РАЗЛИЧНОМ ИХ КОЛИЧЕСТВЕ .....	56
3.1.1 Число измерительных осей равно трем ( $n = 3$ ). ....	56
3.1.2. Число измерительных осей равно четырем ( $n = 4$ ). ....	58
3.1.3. Число измерительных осей равно пяти ( $n = 5$ ). ....	60
3.1.4. Число измерительных осей равно шести ( $n = 6$ ). ....	62
3.2 ФОРМИРОВАНИЕ ЗАМЕРА ПРИ ИЗБЫТОЧНОМ КОЛИЧЕСТВЕ ИЗМЕРЯЮЩИХ ОСЕЙ.....	64
3.2.1 Формирование замера при произвольном расположении измеряющих осей.....	64
3.2.2 Формирование замера при симметричном расположении измеряющих осей.....	66
3.3 СТАТИСТИКА ПОГРЕШНОСТИ ЗАМЕРА. ....	67
3.3.1 Достоверность замера. ....	67
3.3.2 Оценка качества ЧЭ по отношению невязки к среднеквадратичному значению невязки.....	68
3.4 РАБОЧИЙ АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ ВЕКТОРА ПОВОРОТА $r$ , РАЗМЕРНОСТИ $(3 \times 1)$ , ПО ВЕКТОРУ ИЗМЕРЕНИЙ $h$ , РАЗМЕРНОСТИ $(n \times 1)$ .....	69
3.5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ ПО ГЛАВЕ 3.....	71
<b>4 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ БЧЭ С ИЗБЫТОЧНЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ОСЕЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ</b> .....	<b>72</b>
4.1 ВЛИЯНИЕ ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ. ....	72
4.2 РАБОТА БЧЭ НА ОРБИТАЛЬНОМ РЕЖИМЕ ВРАЩЕНИЯ.....	73
4.3 РАБОТА БЧЭ В РЕЖИМЕ РАЗВОРОТА. ....	82
4.4 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ .....	84
4.4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ ПО ГЛАВЕ 4 .....	87
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	<b>88</b>
<b>ЛИТЕРАТУРА</b> .....	<b>90</b>

## Введение

Движение управляемых объектов во многих практически важных случаях должно происходить с малыми отклонениями от той или иной заданной программы. Чтобы это осуществить, необходимо надлежащим образом регулировать величину и направление силы, действующей на объект. Следовательно необходимо знать, какую ориентацию в данное мгновение времени имеет объект и где он находится. Это цитата из предисловия монографии академика Александра Юльевича Ишлинского [59] с формулировкой назначения систем инерциальной навигации. Задачам, возникающим при разработке таких систем, посвящена диссертация. В работе рассмотрены три конкретные задачи, которые могут представить интерес для разработчиков бесплатформенных инерциальных навигационных систем.

Первые статьи по теории инерциальной навигации написаны А.Ю. Ишлинским [62-64] в 1956, 1957, 1959 годах. Первая монография «Инерциальные системы навигации» [112] написана Г.О.Фридлендером в 1961 году. Двухтомная монография В.Д.Андреева вышла в 1966 и 1967 годах [8,9]. Немного позже написаны книги с изложением теории инерциальной навигации: Броксмайер Ч.Ф. [20] (1967г.), Горенштейн И.А., Шульман И.А. [28] (1970), Д.С.Пельпор [94] (1977), Бромберг П.В. [21] (1979), Кузовков Н.Т., Салычев О.С. [74] (1982), Климов Д.М. [67] (1984), Бранец В.Н. [17] (1992). Еще позднее выпущены книги по теории инерциальной навигации с детальным изложением ее основ: Бранец В.Н. [16] (2009), Голован А.А., Парусников Н.А. [26, 27] (2011, 2012).

Общие вопросы гироскопии и механики, касающиеся теории инерциальных систем, освещены в книгах [13, 18, 22, 48, 83, 91, 114], в

книгах А.Ю. Ишлинского [58- 61, 65]. Отдельные вопросы изложены в статьях [31, 41, 45, 69-73, 90, 95, 96, 105, 110, 115].

Большое внимание уделено чувствительным элементам – гироскопам различных типов и акселерометрам – книги [3, 19, 49, 68, 81, 84, 86, 90, 93, 117], статьи: по лазерному гироскопу [1, 53-55, 66, 111, 118] с обзором “50 лет лазерному гироскопу” [78] (2014), по волновому твердотельному [11, 24, 38-40, 46, 47, 50, 51, 82, 87, 119] с информацией об изготовлении макетов [56, 57, 115] и о проектировании БИНС [12, 15, 33, 34], по микромеханическому [35, 37, 77, 79, 85, 98, 100, 102] с классификацией конструкций [108] (2005). О применении электростатического гироскопа написаны статьи [30, 36, 75, 76, 101], о разработках волоконно-оптического – [88, 89, 109]. Примеры типичных задач: анализ погрешностей [23, 42, 52, 107], калибровка и начальная выставка [10, 25, 29, 92, 106]. В работе В.Ф. Журавлева определен предел точности гироскопа, обусловленный тепловым движением атомов [43], в его же работе [44] показана возможность построения бесплатформенной инерциальной навигационной системы на изотропном упругом подвесе инертной массы. В обзорных материалах [14, 32, 80, 104, 113], выпущенных до 2000 года, и в [2, 55, 97, 99, 103], написанных позже, отражена история постановок задач и выполнения разработок.

Значительное время основным вариантом инерциальной навигационной системы оставался вариант гиростабилизированной платформы с размещенными на ней акселерометрами. Стабилизация платформы выполнялась либо по отношению к звездам, либо по отношению к Земле. Чаще всего платформой удерживался горизонт. Характерный диапазон угловых скоростей такой платформы ограничен величиной немного больше угловой скорости суточного вращения Земли. Точность от гироскопа требовалась в этом диапазоне угловых скоростей.. Для работы на реальном объекте стабилизированную платформу

помещают в карданный подвес – конструкцию достаточно сложную. С развитием вычислительной техники появилась возможность обойтись без карданного подвеса. Бесплатформенная (бескарданная) инерциальная навигационная система - БИНС. Акселерометры размещаются на объекте жестко, гироскопы должны дать информацию о векторе угловой скорости объекта, три компоненты, а стабилизированная платформа заменяется воображаемым аналитическим трехгранником. Ориентацию аналитического трехгранника по отношению к объекту надо непрерывно вычислять по измеренным гироскопами угловым скоростям объекта и по тем, с которыми поворачивалась бы платформа, будь она физически реализована. Показания воображаемых акселерометров на осях воображаемой платформы вычисляются по показаниям реальных, закрепленных на объекте, и по вычисленной ориентации аналитического трехгранника по отношению к объекту. Остальная часть задачи решается алгоритмами платформенной инерциальной навигационной системы – ИНС. Нагрузка на вычислитель возросла. Дополнительно к алгоритмам обычной ИНС надо непрерывно вычислять взаимную ориентацию трехгранников, приборного с аналитическим, и перепроектировать показания акселерометров из одного трехгранника в другой. Но при современном состоянии вычислительной техники такая задача перестала быть проблематичной. Действительная трудность реализации бесплатформенной ИНС состоит в необходимости точно мерить угловые скорости объекта, а эти скорости на порядки выше угловой скорости Земли. Сохранить высокую точность при больших угловых скоростях на механических гироскопах было трудно. С появлением лазерного гироскопа такие измерения стали возможными [78]. В оптическом контуре этого прибора поддерживается световая стоячая волна. Волна сохраняет свою ориентацию в Звездах при любых поворотах корпуса прибора. За такт опроса снимается угол поворота при любой его скорости, диапазон

измеряемых угловых скоростей практически неограничен. Есть некоторая трудность - при малых угловых скоростях волна «захватывается» корпусом и переключается на Звезды только с некоторого определенного значения угловой скорости. Проблема решается либо виброподставкой [66], либо устранением влияния друг на друга встречных световых волн в оптическом контуре [1]. Точное измерение больших угловых скоростей прибор обеспечивает. Благодаря лазерному гироскопу бесплатформенные ИНС получили широкое распространение.

Немного позже лазерного был разработан новый тип гироскопа, названный, в отечественной литературе, волновым твердотельным гироскопом [49]. В этом гироскопе вместо световой стоячей волны лазерного гироскопа используется механическая стоячая волна упругих колебаний тонкостенного полусферического кварцевого резонатора. Гироскоп чисто механический, но выходная информация подобна информации лазерного гироскопа – угол поворота за такт опроса. Подобно лазерному гироскопу измеряет угол поворота за такт съема показаний практически без ограничений на величину угловой скорости, и поэтому может использоваться для реализации бесплатформенной ИНС [12, 15, 34].

Дополнительная задача, решение которой позволяет бесплатформенной ИНС работать без карданного подвеса - численное решение уравнений Пуассона, определяющих взаимную ориентацию приборного и аналитического трехгранников. От точности этого решения сильно зависит точность системы в целом. Разработано много вариантов решения этой задачи. Во – первых, саму ориентацию можно задавать различными параметрами – углами Эйлера, матрицей направляющих косинусов, кватернионом. Малый поворот за такт опроса тоже можно представить различными способами. Самый естественный – вектор вдоль оси поворота с модулем, равным углу поворота, но есть работы, где

модуль предлагается взять немного другой, чтобы облегчить решение уравнений. Для вычисления текущей ориентации также можно использовать различные алгоритмы. Подробный анализ таких алгоритмов дан в книге А.П.Панова [91], различные варианты рассмотрены в работах [90, 95, 96, 114, 115].

Одна из задач, решенных в диссертации, состоит в разработке метода оценки точностных возможностей различных алгоритмов численного решения уравнений Пуассона. Для получения такой оценки разработана математическая модель идеального блока чувствительных элементов [7]. Модель позволяет для определенного тестового углового движения объекта, для которого ориентация вычисляется аналитически, сформировать точные отсчеты идеальных измерителей угловых скоростей при выбранном режиме съема показаний. Отсчеты обрабатываются исследуемым алгоритмом и вычисленная им ориентация сравнивается с фактической, вычисляемой в предложенной модели аналитически. Для формирования отсчетов идеальных акселерометров предложенная модель должна быть дополнена моделью поступательного движения объекта и моделью гравитационного поля в зоне движения. В диссертации эта задача решается в ограниченной постановке. Предполагается, что поступательные перемещения объекта достаточно малы что бы не учитывать изменение из за них ориентации силы тяжести. В рамках такого предположения сформирована модель идеальных акселерометров. Модель учитывает силу тяжести и ускорения типа качки. Такая модель использована в диссертации для моделирования работы бесплатформенной инерциальной навигационной системы на стенде. В частности – для моделирования процесса начальной выставки [10, 25, 106] и рабочего режима системы после завершения процесса выставки [42, 52, 109, 111].

Вторая задача связана с созданием бесплатформенной инерциальной навигационной системы для объектов с быстрым вращением вокруг продольной оси. Такой особенностью обладает ряд объектов, представляющих интерес для оборонной техники [23, 107]. С использованием лазерных гироскопов бесплатформенная инерциальная навигационная система для таких объектов может быть реализована. Помимо лазерного в таких системах, может использоваться и волновой твердотельный гироскоп. Есть одна трудность – требования к масштабному коэффициенту для гироскопа с продольной осью чувствительности слишком велики. Они велики и для твердотельного и даже для лазерного гироскопа. В лазерном гироскопе в оптическом контуре должно уложиться целое число волн, иначе стоячей волны не будет. В реальном приборе есть контур подстройки периметра, но одну, две, три целых волн и он может потерять. Масштабный коэффициент «уплывет» всего на единицы  $10^{-6}$ , но и это уже много. При вращении  $360^\circ/\text{сек}$ . это дрейф примерно  $1^\circ/\text{час}$ . Для решения проблемы надо по оси быстрого вращения дополнительно поставить одноосный стабилизатор. Погрешности масштабного коэффициента у него нет. Сравнивая угол поворота, измеренный стабилизатором, с интегралом от угловой скорости, измеренной гироскопом, можно уточнить масштабный коэффициент измерения скорости. Работу алгоритма уточнения масштабного коэффициента надо согласовать с работой навигационной системы в целом. Уточнение масштабного коэффициента ведется в течение всего полета, эпизодически, точность возрастает пропорционально накапливающемуся углу поворота. Особенность предложенного решения [5] состоит в том, что при каждом уточнении масштабного коэффициента удается устранить (скорректировать) всю погрешность, накопленную до момента данной коррекции. Предложенный алгоритм коррекции от моделирован с использованием модели блока чувствительных

элементов, дополненной моделью инструментальных погрешностей измерителей угловой скорости. Результаты моделирования подтвердили эффективность предложенного алгоритма коррекции.

Третьей рассмотрена задача обработки информации блока чувствительных элементов с избыточным числом чувствительных элементов. Предполагается, что блок чувствительных элементов имеет несколько, не меньше трех, одноосных измерителей угловой скорости. Такие схемы, с избыточным количеством чувствительных элементов, используются, главным образом, для кардинального повышения надежности системы. Отказ чувствительных элементов, пока число работоспособных не меньше трех, не приводит к отказу системы. В работе (105) для систем с избыточным числом чувствительных элементов рассмотрен метод определения чувствительного элемента, который следует считать отказавшим и его показания не учитывать при формировании оценки измеряемого вектора. Метод основан на анализе отклонений измерения каждого чувствительного элемента от измерения той же проекции другими тройками чувствительных элементов. Предложен алгоритм формирования оценки измеряемого вектора с минимальной погрешностью в рамках определенных предположений о статистике первичных погрешностей чувствительных элементов. Алгоритм достаточно сложный, хотя, по мнению авторов, и может быть использован в реальных системах. В данной работе использована идея анализа отклонения измерения чувствительного элемента от измерения той же проекции другими чувствительными элементами, но в анализе используется не замер тройкой других чувствительных элементов, а замер данной проекции всей системой чувствительных элементов. Предложен лаконичный алгоритм формирования весовых коэффициентов для информации чувствительных элементов, не претендующий на оптимальность, но существенно снижающий погрешность оценки

измеряемого вектора при выходе отдельного чувствительного элемента за пределы допуска.

Предложенные решения перечисленных задач выносятся на защиту.

**Актуальность работы** определяется широким применением систем инерциальной навигации. В работе рассмотрены задачи повышения точности бесплатформенных инерциальных навигационных систем.

**Задачи исследования**, рассмотренные в работе:

- Построение математической модели блока чувствительных элементов инерциальной навигационной системы, позволяющей формировать точные показания ее чувствительных элементов при заданном угловом движении основания и сравнивать результаты вычисления параметров текущей ориентации объекта бортовыми алгоритмами навигационной системы с их точными значениями.
- Для бесплатформенной инерциальной навигационной системы объекта с быстрым вращением вокруг продольной оси построение алгоритма уточнения масштабного коэффициента датчика угловой скорости по отсчетам угла поворота одноосного гиросtabilизатора и алгоритма устранения погрешности определения ориентации, накапливающейся от неточного знания масштабного коэффициента до момента его уточнения.
- Для бесплатформенной инерциальной навигационной системы с избыточным количеством чувствительных элементов построение алгоритмов, оценивающих качество каждого чувствительного элемента и построение алгоритмов, формирующих оценку измеряемого вектора по показаниям всех чувствительных элементов с весами, учитывающими их качество.

**Научная новизна и положения, выносимые на защиту.**

- При построении математической модели блока чувствительных элементов выбрана такая механика движения объекта, которая для достаточно сложного движения с четырьмя произвольными параметрами позволяет вычислить аналитически интегралы от угловых скоростей и кажущихся ускорений, не прибегая к интегрированию дифференциальных уравнений. Показания идеальных чувствительных элементов при достаточно сложном движении основания, включающем эволюционную и вибрационную составляющие, вычисляются аналитически без интегрирования дифференциальных уравнений, что дает очень высокую точность моделирования. При такой точности становится возможной оценка тонких деталей в свойствах различных вариантов алгоритмов вычисления ориентации объекта.
- Предложенный алгоритм уточнения масштабного коэффициента датчика угловой скорости по отсчетам угла поворота одноосного гиросtabilизатора обладает той особенностью, что, благодаря учету специфики механики накопления погрешности со временем, уточняет оценку масштабного коэффициента в течение всего полета объекта, используя весь накапливающийся угол поворота вокруг продольной оси, и при каждом уточнении коэффициента устраняет всю погрешность вычисления ориентации, накопленную до момента уточнения масштабного коэффициента.
- Предложенные алгоритмы для бесплатформенной инерциальной навигационной системы с избыточным количеством чувствительных элементов отличаются тем, что не требуют модификации при изменении количества функционирующих чувствительных элементов из-за отказа некоторых из них, пока функционирующих не меньше трех. Меняется только матрица, содержащая единичные векторы осей чувствительности, сами же

алгоритмы остаются без изменения. Особенность алгоритмов состоит в том, что показания чувствительных элементов по всем осям чувствительности учитываются с индивидуальными весовыми коэффициентами. Весовые коэффициенты выбираются по анализу показаний всех чувствительных элементов. Предложенный алгоритм выбора весовых коэффициентов заметно увеличивает точность системы в целом.

**Методы исследования.** В работе использованы методы теоретической механики, теория дифференциальных уравнений, методы аналитических вычислений и математического моделирования.

**Достоверность результатов исследования** обеспечивается корректным применением выбранных методов и математическим моделированием всех, предложенных в работе, алгоритмов.

**Практическая значимость работы.** Математическая модель блока чувствительных элементов удобна для тестирования бортовых алгоритмов численного интегрирования уравнений Пуассона, определяющих ориентацию приборного трехгранника. Алгоритм уточнения масштабного коэффициента датчика угловой скорости по отсчетам угла поворота одноосного гиросtabilизатора и алгоритм устранения погрешности определения ориентации, алгоритмы формирования весовых коэффициентов в системе с избыточным числом чувствительных элементов могут быть использованы в конкретных разработках навигационных систем.

**Апробация работы.** Основные результаты выполненных исследований были представлены на

- X Юбилейной конференции молодых ученых. Санкт-Петербург 2008
- XVIII Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. Санкт-Петербург 2011

- Семинаре МГТУ им. Н.Э. Баумана кафедры ФН-2 «Математическое моделирование»
- Семинаре «Механика систем» им. академика А.Ю. Ишлинского при научном совете РАН по механике систем под руководством академика В.Ф. Журавлева и академика Д.М. Климова

### **Публикации.**

Е.Ю. Алехова Математическая модель блока чувствительных элементов для отработки бортовых алгоритмов навигационных систем // МТТ №3, 2008, с. 42-47.

Е.Ю. Алехова Тестирование алгоритмов численного решения уравнений Пуассона // Гироскопия и навигация №4, 2009, с. 81- 83

Е.Ю. Алехова, Ю.К. Жбанов, Д.М.Климов, В.Л. Петелин, Л.Н. Слёзкин, А.И. Терёшкин Коррекция масштабного коэффициента датчика угловой скорости БИНС быстровращающегося объекта // Гироскопия и навигация №3 (78), 2012, 78-85

Алехова Е.Ю., Жбанов Ю.К., Климов Д.М. Использование избытка осей чувствительности для повышения точности измерений, //МТТ , 2013, т.48, № 5, стр. 500-503

Все работы переведены на английский.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем работы составляет 102 страницы и содержит 27 рисунков и 13 таблиц. Список литературы содержит 119 наименований.

В первой главе построена математическая модель блока чувствительных элементов инерциальной навигационной системы.

Показания с чувствительных элементов блока снимаются в дискретные моменты времени, кратные интервалу съема показаний. Каждый гироскопический датчик угловой скорости дает значение интеграла от соответствующей проекции угловой скорости за интервал

сьема показаний. Каждый акселерометр дает значение интеграла от соответствующей проекции кажущегося ускорения.

Модель формирует точные значения показаний идеальных датчиков угловых скоростей и кажущихся ускорений, показания вычисляются чисто аналитически, без использования этапа интегрирования дифференциальных уравнений. Одновременно с показаниями чувствительных элементов вычисляется точная ориентация трехгранника блока чувствительных элементов относительно неподвижного трехгранника (так же аналитически без интегрирования уравнений).

Вибрационная составляющая предложенной модели была описана в работе (90), где это движение названо коническим и использовано для аналитической оценки погрешностей оригинального трехшагового алгоритма численного интегрирования уравнений Пуассона.

Модель блока чувствительных элементов предложенная в настоящей работе использована для сравнительного анализа, с помощью математического моделирования, точностных характеристик двух вариантов бортовых алгоритмов вычисления ориентации.

В первом варианте на каждом такте по вектору малого поворота формируется соответствующий ему кватернион. Численное интегрирование уравнений Пуассона сводится к умножению текущего значения кватерниона на кватернион малого поворота. Это одношаговый алгоритм.

Во втором варианте – по серии четырех, последовательно снятых, векторов малых поворотов строится вектор суммарного малого поворота по специальному алгоритму. Текущее значение кватерниона умножается на кватернион суммарного малого поворота. Алгоритм четырехшаговый. Анализ результатов математического моделирования показал, что при наличии угловой вибрации точностные характеристики четырехшагового алгоритма заметно выше характеристик одношагового.

Для сравнительного анализа качества алгоритмов были дополнительно использованы результаты обработки реальных показаний блока с лазерными гироскопами, работавшего на вибростенде. На реальных измерениях так же проявилось преимущество четырехшагового алгоритма.

В пятом параграфе главы предложенная модель блока чувствительных элементов использована при моделировании процесса начальной выставки бесплатформенной инерциальной навигационной системы. Моделируемое движение основания, кроме суточного вращения Земли, включает имитацию ветровой нагрузки на корпус стоящего самолета – гармоническое покачивание с амплитудой поворотов два градуса и линейным ускорением  $0.04g$  (с периодом 10 секунд). Моделирование подтвердило работоспособность исследуемого алгоритма выставки.

Во второй главе рассматривается задача совместной обработки показаний триады датчиков угловой скорости (ДУС) и одноосного гиросtabilизатора в бесплатформенной инерциальной навигационной системе объекта с быстрым вращением вокруг продольной оси .

Для оценки масштабного коэффициента используется линейная аппроксимация разности отсчетов угла поворота вокруг продольной оси, измеренных одноосным стабилизатором и продольным ДУСом , как функции угла поворота, замеренного ДУСом. Отсчеты снимаются в течение всего полета, масштабный коэффициент уточняется эпизодически. Для устранения погрешности, накопленной к моменту очередного уточнения коэффициента, предложен специальный алгоритм коррекции кватерниона, характеризующего текущую ориентацию объекта. Работа алгоритма отмоделирована. Результаты моделирования показывают, что предложенный алгоритм устраняет погрешность от неточного знания масштабного коэффициента, практически, полностью.

В третьей и четвертой главах на примере системы ДУСов рассмотрена возможность повышения точности измерения трехмерного вектора при использовании избыточного количества одноосных чувствительных элементов. Проанализированы варианты выбора ориентации измерительных осей чувствительных элементов при их размещении в приборном трехграннике. Показано, что для количества элементов от трех до шести оптимальная ориентация получается, если оси чувствительности равномерно распределены по тому же конусу, на котором лежат ребра куба, исходящие из одной вершины. Алгоритмы обработки сформированы для произвольной ориентации осей, что позволяет анализировать свойства любого блока ЧЭ, в том числе и при отказе некоторых из чувствительных элементов. Предложен метод оценки качества каждого чувствительного элемента по отличию его замеров от измерения той же проекции остальными ЧЭ и способ формирования индивидуальных весовых коэффициентов для каждого чувствительного элемента с учетом полученных оценок.

В четвертой главе приведены результаты математического моделирования работы блока чувствительных элементов с различным количеством функционирующих ДУСов, с учетом инструментальных погрешностей одного из чувствительных элементов, на некоторых эталонных движениях объекта. На примере 6-осного блока чувствительных элементов показано, что использование весовых коэффициентов позволяет заметно повысить точность измерений при выходе отдельного чувствительного элемента за пределы допуска.

## **1 Математическая модель блока чувствительных элементов**

В последнее время получают широкое распространение бесплатформенные инерциальные навигационные системы. В подобных системах чувствительные элементы, гироскопы и акселерометры, размещаются непосредственно на борту объекта, а вместо стабилизированной гироскопической платформы используется воображаемый аналитический трёхгранник. Ориентация объекта по отношению к аналитическому трёхграннику вычисляется путём численного решения уравнений Пуассона по показаниям гироскопических чувствительных элементов, измеряющих угловые скорости объекта. Параметры взаимной ориентации позволяют спроектировать кажущееся ускорение, измеренное акселерометрами в осях объекта, на оси аналитического трёхгранника. В аналитическом трёхграннике навигационная задача решается так же, как она решалась в платформенных системах, но в целом функции бортовых алгоритмов бесплатформенных систем существенно сложнее, чем в платформенных системах. Возможность детальной отработки бортовых алгоритмов математическим моделированием существенно облегчает разработку системы в целом.

В данной главе предложено достаточно сложное угловое движение блока чувствительных элементов, допускающее точное аналитическое представление показаний чувствительных элементов - датчиков угловых скоростей и акселерометров.

Получены аналитические выражения для точных отсчетов идеальных гироскопических датчиков, измеряющих угол малого поворота блока чувствительных элементов за такт опроса. Формулам придан вид,

удобный для использования в программах моделирования работы бортовых алгоритмов.

В качестве примера выполнено математическое моделирование, позволяющее сравнить два варианта бортовых алгоритмов интегрирования уравнений Пуассона. Приведены результаты обработки этими алгоритмами экспериментальных данных работы блока чувствительных элементов с лазерными гироскопами на вибростенде и результаты моделирования работы бесплатформенной инерциальной навигационной системы на стенде в режиме начальной выставки.

### **1.1 Кинематика углового движения блока чувствительных элементов.**

Для отработки бортовых алгоритмов вычисления ориентации удобно иметь модель углового движения блока чувствительных элементов, неподвижно закрепленного на объекте, содержащую как плавную эволюцию ориентации так и достаточно высокочастотную составляющую движения, имитирующую вибрацию. Реальная вибрация приборного блока на объекте имеет свою характерную специфику. Как правило это вибрация не плоская, а коническая, но всегда без поворота типа накопления телесного угла. Сохранить эту специфику, не прибегая к слишком сложным формам, можно, если для имитации вибрации использовать схему простого конического движения. Иллюстрировать это движение можно конфигурацией двух одинаковых конусов с общей вершиной, соприкасающихся по образующей. Если один из конусов неподвижен, а другой перекачивается по нему без проскальзывания так, что линия касания движется по неподвижному конусу равномерно с достаточно большой угловой скоростью, то движение второго конуса как раз и имеет вид конической вибрации. Амплитуда такой вибрации определяется углом между осями конусов. Плавную эволюцию

ориентации можно имитировать равномерным вращением «неподвижного» конуса вокруг оси под произвольным углом к оси конуса. Второй (вибрирующий) конус имитирует объект. Такая модель углового движения имеет четыре параметра – угловая скорость вращения первого конуса и угол между осью вращения и осью конуса, частота и амплитуда конической вибрации (угол между осями конусов). Схематично модель изображена на рисунке 1.1.

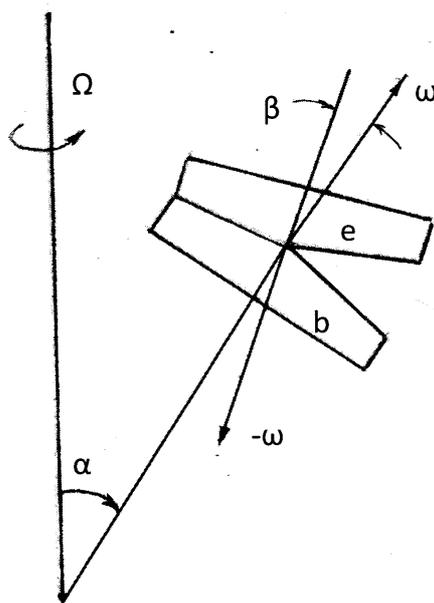


Рисунок 1.1 Схема модели углового движения объекта (конус «е»).

Мгновенная угловая скорость конуса «е» относительно конуса «b» складывается из угловой скорости  $\vec{\omega}$  вдоль оси конуса «b» и  $-\vec{\omega}$  вдоль оси конуса «е».

Для формального описания углового движения с конусом, имитирующим блок гироскопических чувствительных элементов (БЧЭ), свяжем трехгранник  $e$  с осями  $e_1 e_2 e_3$ . Неподвижный трехгранник обозначим  $o$ , его оси  $o_1 o_2 o_3$ . Будем считать, что приборный трехгранник получается из неподвижного несколькими последовательными

поворотами. Промежуточные положения приборного трехгранника обозначим буквами  $a, b, c, d$ .

Трехгранник  $a$  получается поворотом трехгранника  $o$  вокруг оси  $o_3$  на угол  $\Omega t$ .

Оси  $o_1 o_2$  переходят в оси  $a_1 a_2$  соответственно. Трехгранник  $b$  получается поворотом трехгранника  $a$  вокруг оси  $a_1$  на угол  $\alpha$  (можно считать, что трехгранник  $b$  связан с первым конусом).

Оси  $a_2 a_3$  переходят в оси  $b_2 b_3$ . Трехгранник  $c$  получается поворотом трехгранника  $b$  вокруг оси  $b_3$  на угол  $\omega t$ . (Промежуточный трехгранник, в котором неподвижна вибрирующая ось второго конуса).

Оси  $b_1 b_2$  переходят в оси  $c_1 c_2$ . Трехгранник  $d$  получается поворотом трехгранника  $c$  вокруг оси  $c_1$  на угол  $\beta$ .

Оси  $c_2 c_3$  переходят в оси  $d_2 d_3$ . Трехгранник  $e$  получается поворотом трехгранника  $d$  вокруг оси  $d_3$  на угол  $-\omega t$ . (Вторая составляющая вибрационного движения второго конуса)

Оси  $d_1 d_2$  переходят в оси  $e_1 e_2$ .

Перечисленным поворотам соответствуют кватернионы:

$$\begin{aligned}\Lambda_{oa} &= \{\cos \Omega t/2 \quad 0 \quad 0 \quad \sin \Omega t/2\}, \\ \Lambda_{ab} &= \{\cos \alpha/2 \quad \sin \alpha/2 \quad 0 \quad 0\}, \\ \Lambda_{bc} &= \{\cos \omega t/2 \quad 0 \quad 0 \quad \sin \omega t/2\}, \\ \Lambda_{cd} &= \{\cos \beta/2 \quad \sin \beta/2 \quad 0 \quad 0\}, \\ \Lambda_{de} &= \{\cos \omega t/2 \quad 0 \quad 0 \quad -\sin \omega t/2\}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Суммарный поворот соответствует произведению этих кватернионов

$$\Lambda_{oe} = \Lambda_{oa} \circ \Lambda_{ab} \circ \Lambda_{bc} \circ \Lambda_{cd} \circ \Lambda_{de}.\tag{1.2}$$

Движение по конусу с угловой скоростью  $\Omega$  имитирует изменение ориентации объекта. Второе коническое движение с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $b_3$  и с угловой скоростью  $-\omega$  вокруг оси  $d_3$ , составляющей с

осью  $b_3$  угол  $\beta$ , имитирует коническую вибрацию блока ЧЭ с частотой  $\omega$  и амплитудой  $\beta$ .

Матрицы поворотов от одного трехгранника к другому

$$A_{ba} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}, \quad A_{cb} = \begin{vmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (1.3)$$

$$A_{dc} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}, \quad A_{ed} = \begin{vmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

позволяют записать угловые скорости каждого трехгранника в проекциях на собственные оси

$$\vec{\Omega}^a = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{vmatrix}, \quad \vec{\Omega}^b = A_{ba} \vec{\Omega}^a = \begin{vmatrix} 0 \\ \Omega \sin \alpha \\ \Omega \cos \alpha \end{vmatrix}, \quad (1.4a), (1.4b)$$

$$\vec{\Omega}^c = A_{cb} \vec{\Omega}^b + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Omega \sin \alpha \cdot \sin \omega t \\ \Omega \sin \alpha \cdot \cos \omega t \\ \Omega \cos \alpha + \omega \end{vmatrix}, \quad (1.4c)$$

$$\vec{\Omega}^d = A_{dc} \vec{\Omega}^c = \begin{vmatrix} \Omega \sin \alpha \cdot \sin \omega t \\ \Omega \sin \alpha \cdot \cos \omega t \cos \beta + (\Omega \cos \alpha + \omega) \sin \beta \\ -\Omega \sin \alpha \cdot \cos \omega t \sin \beta + (\Omega \cos \alpha + \omega) \cos \beta \end{vmatrix}, \quad (1.4d)$$

$$\vec{\Omega}^e = A_{ed} \vec{\Omega}^d - \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix}, \quad (1.4e)$$

Полное выражение для угловой скорости приборного трехгранника  $e$  имеет вид

$$\vec{\Omega}^e = \begin{vmatrix} \Omega \sin \alpha \cdot \sin \omega t \cos \omega t - [\Omega \sin \alpha \cdot \cos \omega t \cos \beta + (\Omega \cos \alpha + \omega) \sin \beta] \sin \omega t \\ \Omega \sin \alpha \cdot \sin \omega t \sin \omega t + [\Omega \sin \alpha \cdot \cos \omega t \cos \beta + (\Omega \cos \alpha + \omega) \sin \beta] \cos \omega t \\ -\Omega \sin \alpha \cdot \cos \omega t \sin \beta + (\Omega \sin \alpha + \omega) \cos \beta - \omega \end{vmatrix}. \quad (1.5)$$

Верхний индекс у вектора угловой скорости указывает трехгранник, к которому относится вычисляемое значение.

С использованием соотношения

$$\begin{aligned} \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t \cdot \cos \beta &= \\ &= 0.5(1 + \cos \beta + 1 - \cos \beta) \sin^2 \omega t + 0.5(1 + \cos \beta - 1 + \cos \beta) \cos^2 \omega t = \\ &= 0.5(1 + \cos \beta) - 0.5(1 - \cos \beta) \cos 2\omega t \end{aligned} \quad (1.6)$$

вектор угловой скорости приборного трехгранника можно записать покомпонентно:

$$\begin{aligned} \Omega_1^e &= 0.5\Omega \sin \alpha (1 - \cos \beta) \cdot \sin 2\omega t - (\Omega \cos \alpha + \omega) \sin \beta \sin \omega t \\ \Omega_2^e &= 0.5\Omega \sin \alpha \cdot (1 + \cos \beta) - 0.5\Omega \sin \alpha (1 - \cos \beta) \cdot \cos 2\omega t + (\Omega \cos \alpha + \omega) \sin \beta \cos \omega t \\ \Omega_3^e &= \Omega \cos \alpha \cos \beta - (1 - \cos \beta)\omega t - \Omega \sin \alpha \sin \beta \cos \omega t \end{aligned} \quad (1.7)$$

## 1.2 Формирование показаний измерителей угловой скорости

Показания с чувствительных элементов блока снимаются в дискретные моменты времени, кратные интервалу съема показаний -  $\tau$ . Каждый гироскопический измеритель угловой скорости даст значение интеграла от соответствующей проекции угловой скорости за интервал съема показаний. Для точного вычисления этих интегралов достаточно вычислить интегралы от тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \sin \omega t \cdot dt &= \tau \cdot \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \sin(k+1/2)\omega\tau = \tau \cdot q_s, \\ \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \sin 2\omega t \cdot dt &= \tau \cdot \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau} \sin(2k+1)\omega\tau = \tau \cdot q_{2s}, \\ \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \cos \omega t \cdot dt &= \tau \cdot \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \cos(k+1/2)\omega\tau = \tau \cdot q_c, \\ \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \cos 2\omega t \cdot dt &= \tau \cdot \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau} \cos(2k+1)\omega\tau = \tau \cdot q_{2c}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Показания гироскопических датчиков на  $k$ -том интервале съема будут следующими:

$$\begin{aligned}
S_1^e(k) &= 0.5\Omega\tau \sin \alpha(1 - \cos \beta) \cdot q_{2s} - (\Omega\tau \cos \alpha + \omega\tau) \sin \beta \cdot q_s, \\
S_2^e(k) &= 0.5\Omega\tau \sin \alpha(1 - \cos \beta) - 0.5\Omega\tau \sin \alpha(1 - \cos \beta) \cdot q_{2c} + (\Omega\tau \cos \alpha + \omega\tau) \sin \beta \cdot q_c, \\
S_3^e(k) &= \Omega\tau \cos \alpha \cos \beta - \omega\tau(1 - \cos \beta) - \Omega\tau \sin \alpha \sin \beta \cdot q_c
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Таким образом, формулы (1.9), с расшифровкой величин  $q$  с индексами по формулам (1.8), могут служить моделью идеального блока ЧЭ, измеряющего угловое движение. Формула (1.2), с расшифровками (1.1), дает истинную ориентацию блока для любого момента времени, в том числе и для любого момента  $k\tau$ .

Полные выражения для показаний ЧЭ на  $k$ -том интервале можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
S_1^e(k) &= 0.5\Omega\tau \sin \alpha(1 - \cos \beta) \cdot \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau} \sin(2k+1)\omega\tau - \\
&- (\Omega\tau \cos \alpha + \omega\tau) \sin \beta \cdot \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \sin(k+1/2)\omega\tau, \\
S_2^e(k) &= 0.5\Omega\tau \sin \alpha(1 - \cos \beta) - 0.5\Omega\tau \sin \alpha(1 - \cos \beta) \cdot \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau} \cos(2k+1)\omega\tau + \\
&+ (\Omega\tau \cos \alpha + \omega\tau) \sin \beta \cdot \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau} \cos(k+1/2)\omega\tau, \\
S_3^e(k) &= \Omega\tau \cos \alpha \cos \beta - \omega\tau(1 - \cos \beta) - \\
&- \Omega\tau \sin \alpha \sin \beta \cdot \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \cos(k+1/2)\omega\tau.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

В формулах (1.10) удобно ввести обозначения для коэффициентов, не зависящих от номера интервала:

$$\begin{aligned}
rs11 &= 0.5\Omega\tau \sin \alpha(1 - \cos \beta) \cdot \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau} \\
rs12 &= (\Omega\tau \cos \alpha + \omega\tau) \sin \beta \cdot \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \\
rs21 &= 0.5\Omega\tau \sin \alpha(1 + \cos \beta)
\end{aligned} \tag{1.11}$$

$$rs31 = \Omega\tau \cos \alpha \cos \beta - \omega\tau(1 - \cos \beta)$$

$$rs32 = \Omega\tau \sin \alpha \sin \beta \cdot \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

Тогда формулы (1.10) можно записать в виде:

$$S_1^e(k) = rs11 \cdot \sin(2k+1)\omega\tau - rs12 \cdot \sin(k+1/2)\omega\tau$$

$$S_2^e(k) = rs21 - rs11 \cdot \cos(2k+1)\omega\tau + rs12 \cdot \cos(k+1/2)\omega\tau \quad (1.12)$$

$$S_3^e(k) = rs31 - rs32 \cdot \cos(k+1/2)\omega\tau$$

Тригонометрические функции, зависящие от номера интервала удобно вычислять по их значениям на интервале предыдущем:

$$\sin(2k+1)\omega\tau = \sin(2(k-1)+1)\omega\tau \cdot \cos 2\omega\tau + \cos(2(k-1)+1)\omega\tau \cdot \sin 2\omega\tau$$

$$\cos(2k+1)\omega\tau = \cos(2(k-1)+1)\omega\tau \cdot \cos 2\omega\tau - \sin(2(k-1)+1)\omega\tau \cdot \sin 2\omega\tau$$

$$\sin(k+1/2)\omega\tau = \sin(k-1+1/2)\omega\tau \cdot \cos \omega\tau + \cos(k-1+1/2)\omega\tau \cdot \sin \omega\tau$$

(1.13)

$$\cos(k+1/2)\omega\tau = \cos(k-1+1/2)\omega\tau \cdot \cos \omega\tau - \sin(k-1+1/2)\omega\tau \cdot \sin \omega\tau$$

Функции  $\sin \omega\tau$ ,  $\cos \omega\tau$ ,  $\sin 2\omega\tau$ ,  $\cos 2\omega\tau$ , не зависящие от номера интервала, можно вычислить заранее.

Таким образом, в тестирующей программе, на каждом такте опроса датчиков, достаточно реализовать вычисление показаний идеальных гироскопов по формулам (1.12), с использованием тригонометрических функций, вычисляемых на каждом шаге по формулам (1.13). Коэффициенты  $rs^{**}$  в формулах (1.12) вычисляются заранее в подготовительном блоке программы. Точная ориентация подвижного трехгранника вычисляется на каждом шаге по формуле (1.2), с учетом выражений для кватернионов (1.1).

### 1.3 Формирование показаний измерителей кажущегося ускорения.

Точные показания идеальных акселерометров в виде вектора приращения кажущейся скорости за интервал съема показаний вычисляются согласно формуле

$$\Delta \vec{V}^e(k) = \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \vec{W}^e \cdot dt, \quad (1.14)$$

где  $\vec{W}^e$  – вектор кажущегося ускорения в проекциях на оси приборного трехгранника, вычисляемый согласно

$$\vec{W}^e = A_{ed} A_{dc} A_{cb} A_{ba} A_{ao} \vec{W}^o. \quad (1.15)$$

В общем случае для моделирования точного акселерометра надо в моделирующей программе предусмотреть численное интегрирование по формуле (1.14) с расшифровкой (1.15) при выбранной модели линейного ускорения объекта в неподвижном трехграннике.

В частном случае, моделирование работы системы на неподвижном или качающемся основании, трехгранник  $d$  можно считать географическим. Вектор кажущегося ускорения в географическом трехграннике, можно принять в виде суммы ускорения силы тяжести  $\vec{W}_g^b = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & g \end{matrix} \right\|^T$  и ускорения качки  $\vec{W}_{roll}^b = \left\| \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{matrix} \right\|^T$ .

Кажущееся ускорение в проекциях на оси приборного трехгранника выражается формулой

$$W^e = A_{eb} W^b$$

Согласно формулам (1.3) выражение для матрицы  $A_{eb}$  имеет вид

$$A_{eb} = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{1 + \cos \beta}{2} + \frac{1 - \cos \beta}{2} \cos 2\omega t & \frac{1 - \cos \beta}{2} \sin 2\omega t & -\sin \omega t \sin \beta \\ \frac{1 - \cos \beta}{2} \sin 2\omega t & \frac{1 + \cos \beta}{2} - \frac{1 - \cos \beta}{2} \cos 2\omega t & \cos \omega t \sin \beta \\ \sin \omega t \sin \beta & -\cos \omega t \sin \beta & \cos \beta \end{array} \right\| \quad (1.16)$$

Приращение кажущейся скорости за такт съема информации равно интегралу по времени от кажущегося ускорения. Вектор кажущегося ускорения в осях географического трехгранника на такте съема информации считаем константой, интеграл от матрицы выражается через интегралы (1.8)

$$\tilde{A}_{eb}(k) = \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} A_{eb} dt = \tau \begin{vmatrix} \frac{1+\cos\beta}{2} + \frac{1-\cos\beta}{2} q_{2c} & \frac{1-\cos\beta}{2} q_{2s} & -q_s \sin\beta \\ \frac{1-\cos\beta}{2} q_{2s} & \frac{1+\cos\beta}{2} - \frac{1-\cos\beta}{2} q_{2c} & q_c \sin\beta \\ q_s \sin\beta & -q_c \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} \quad (1.17)$$

Приращение кажущейся скорости за такт съема информации вычисляется по формуле

$$\Delta \vec{V}^e(k) = \tilde{A}_{eb}(k) (W_g^b + W_{roll}^b) \quad (1.18)$$

Для полностью неподвижного основания,  $W_{roll}^b = 0$ , формулы резко упрощаются. Выражение для  $\Delta \vec{V}^e(k)$  сводится к виду

$$\Delta \vec{V}^e(k) = g\tau \begin{vmatrix} -q_s \sin\beta & q_c \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}^T$$

Выражения для показаний акселерометров на  $k$ -том интервале записываются покомпонентно:

$$\begin{aligned} \Delta V_1^e(k) &= -g\tau \sin\beta \cdot \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \sin(k+1/2)\omega\tau, \\ \Delta V_2^e(k) &= g\tau \sin\beta \cdot \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \cos(k+1/2)\omega\tau, \\ \Delta V_3^e(k) &= g\tau \cos\beta. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Для коэффициентов, не зависящих от номера интервала удобно ввести обозначения

$$rs41 = g\tau \sin\beta \cdot \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}, \quad rs42 = g\tau \cos\beta,$$

и формулы для компонент приращения кажущейся скорости записать так:

$$\Delta V_1^e(k) = -rs41 \cdot \sin(k + 1/2)\omega\tau, \Delta V_2^e(k) = rs41 \cdot \cos(k + 1/2)\omega\tau, \Delta V_3^e(k) = rs42. \quad (1.20)$$

Таким образом, полная математическая модель блока чувствительных элементов гироскопической навигационной системы реализуется вычислением показаний идеальных гироскопов по формулам (1.9) и показаний идеальных акселерометров по формулам (1.14) или (1.18), (1.20). При этих вычислениях используются значения тригонометрических функций, вычисляемые на каждом шаге по формулам (1.9). Коэффициенты  $rs^{**}$  в формулах (1.11) и (1.20), или заготовленные для вычислений по формуле (1.18), вычисляются заранее в подготовительном блоке программы. Точная ориентация подвижного трехгранника в инерциальной системе координат, вычисляется на каждом шаге по формуле (1.2), с учетом выражений (1.1). Преобразование вычисленных векторов произвольным постоянным кватернионом позволяет моделировать произвольную ориентацию блока чувствительных элементов по отношению к осям объекта.

#### 1.4 Сравнение двух алгоритмов вычисления ориентации.

В качестве иллюстрации приведем пример использования предложенных алгоритмов для сравнительного анализа точностных характеристик двух вариантов бортовых алгоритмов вычисления ориентации.

В первом варианте по вектору малого поворота  $\vec{S}$  формируется соответствующий ему кватернион

$$\Lambda = \cos\left(\frac{|\vec{S}|}{2}\right) + \frac{\vec{S}}{|\vec{S}|} \sin\left(\frac{|\vec{S}|}{2}\right)$$

который, с использованием разложения в ряд тригонометрических функций, принимается в виде

$$\Lambda = 1 - r/8 + r^2/348 + (0.5 - r/48 + r^2/3840)\vec{S},$$

$$\text{где } r = \vec{S} \cdot \vec{S}.$$

Численное интегрирование уравнений Пуассона сводится к умножению текущего значения кватерниона на кватернион малого поворота.

Во втором варианте – по серии четырех, последовательно снятых, векторов малых поворотов  $\vec{S}(k)$ ,  $k = 1 \div 4$  строится вектор суммарного малого поворота по следующему алгоритму:

$$\vec{S}_1 = \vec{S}(1) + \vec{S}(2), \quad \vec{S}_2 = \vec{S}(3) + \vec{S}(4), \quad \vec{S}_3 = \vec{S}_1 + \vec{S}_2,$$

$$\vec{S}_\Sigma = \vec{S}_3 + \frac{22}{45} \vec{S}_1 \times \vec{S}_2 + \frac{32}{45} [\vec{S}(1) \times \vec{S}(2) + \vec{S}(3) \times \vec{S}(4)].$$

По полученному вектору суммарного поворота строится кватернион тем же способом, что и в первом случае. Текущее значение кватерниона умножается на кватернион суммарного малого поворота.

Параметры движения основания приняты следующими:

Угол раствора конуса  $30^\circ$ , угловая скорость вокруг оси конуса  $100^\circ/\text{с}$ , частота вибрации 200 Гц, амплитуда вибрации варьируется от нуля до 4 дуговых минут, тактовая частота съема показаний принята равной 2400 Гц и 1200 Гц. Оценка алгоритма определяется по величине погрешности, накопленной к концу 20-той секунды. Результаты сравнительного моделирования сведены в следующую таблицу.

Таблица 1. Погрешности определения ориентации одношаговым и четырехшаговым алгоритмами интегрирования уравнений Пуассона.

Амплитуда вибрации [дуг. мин.]	Тактовая частота съема показаний [Герц]			
	2400		1200	
	погрешность одношагового алгоритма [дуг.сек]	погрешность четырёхшагового алгоритма [дуг.сек]	погрешность одношагового алгоритма [дуг.сек]	погрешность четырёхшагового алгоритма [дуг.сек]
0.5	2.14	0.0002	8.12	0.48
1.0	8.57	0.0008	32.90	1.95

2.0	34.28	0.0035	131.60	7.79
4.0	137.12	0.0140	526.38	31.15

При отсутствии высокочастотной составляющей движения полученная погрешность не превысила  $10^{-8}$  дуговой секунды для обоих алгоритмов.

Полученные результаты хорошо иллюстрируют зависимость точности вычисления ориентации как от типа алгоритма, так и от частоты съема показаний.

### **1.5 Обработка экспериментальных данных.**

В этом разделе приведены результаты обработки показаний блока ЧЭ с тремя лазерными гироскопами, работавшего на вибростенде.

Показания, снимаемые с лазерных гироскопов, на установившейся вибрации записывались в отдельный файл в течение 10 секунд с частотой съема информации 2400 записей в секунду (2400 Герц). В каждом записанном файле немного больше 24000 точек.

Были реализованы следующие режимы вибрации:

- 60 Герц, 0.25g; 60 Герц, 0.5g; 60 Герц, 1.0g;
- 100 Герц, 0.25g; 100 Герц, 0.5g; 100 Герц, 1.0g;
- Один файл записан без вибрации.

По каждому файлу вычислено угловое движение блока ЧЭ по отношению к его начальному положению. Вычисляется кватернион, характеризующий текущую ориентацию.

Каждый файл обработан 6-тью способами.

Во первых, имитируются различные частоты опроса: 2400, 1200 и 600 Герц. При частоте 2400 на обработку поступает каждый записанный в

файл замер, при 1200 – замером считается сумма двух последовательных отсчетов, при 600 – сумма четырех отсчетов.

Во вторых, при имитации каждой частоты съема показаний вычисления выполняются двумя различными алгоритмами вычисления кватерниона.

Первый алгоритм – одношаговый. В этом случае на каждом шаге по вектору малого поворота за такт съема информации строится кватернион этого поворота и на него умножается кватернион текущей ориентации.

Второй алгоритм четырехшаговый. В этом случае выбирается четыре последовательных отсчета векторов малого поворота, по ним специальным алгоритмом вычисляется суммарный вектор малого поворота (за эти четыре такта) и по вектору суммарного поворота строится кватернион, на который умножается кватернион текущей ориентации. Ориентация блока ЧЭ в этом случае определена только на каждом четвертом такте.

Результаты обработки каждого файла каждым из шести способов представлены в виде файла, каждая строка которого дает векторную часть кватерниона вычисленной текущей ориентации, удвоенную и переведенную в дуговые секунды. Практически, это вектор текущего поворота блока ЧЭ (выраженный в дуговых секундах), в проекциях на оси неподвижного относительно звезд трехгранника, совпадавшего в начальный момент с приборным. Для каждой проекции построена линейная аппроксимация. Можно считать, что построенная таким образом линейная аппроксимация характеризует угловое движение относительно звезд среднего положения вибрирующего блока ЧЭ. Коэффициенты линейной аппроксимации дают угловую скорость среднего положения блока ЧЭ, выраженную в градусах в час. По проекциям вычислен модуль

этой угловой скорости. В таблице этот модуль обозначен как  $U$ . В приведенной ниже таблице представлены результаты обработки.

Таблица 2. Угловые скорости, измеренные блоком ЧЭ на работающем вибростенде

Съем (Герц)	Одношаговый алгоритм				Четырехшаговый алгоритм			
	$\Omega_x$	$\Omega_y$	$\Omega_z$	$U$	$\Omega_x$	$\Omega_y$	$\Omega_z$	$U$
	Вибрация 60 Герц, 0,25g							
2400	7.298	12.618	3.285	14.9428	7.299	12.620	3.287	14.9450
1200	7.292	12.616	3.284	14.9378	7.294	12.619	3.286	14.9415
600	7.288	12.611	3.277	14.9301	7.287	12.610	3.276	14.9289
	Вибрация 60 Герц, 0, 5g							
2400	7.635	12.444	4.076	15.1583	7.636	12.445	4.077	15.1605
1200	7.632	12.439	4.073	15.1521	7.634	12.442	4.075	15.1564
600	7.628	12.428	4.062	15.1385	7.627	12.430	4.061	15.1385
	Вибрация 60 Герц, 1, 0g							
2400	7.830	13.558	4.320	16.2422	7.831	13.561	4.322	16.2459
1200	7.812	13.547	4.322	16.2252	7.815	13.557	4.328	16.2365
600	7.808	13.519	4.301	16.1948	7.815	13.551	4.319	16.2290
	Вибрация 100 Герц, 0,25g							
2400	7.827	12.697	4.354	15.5394	7.831	12.700	4.359	15.5443
1200	7.820	12.689	4.345	15.5257	7.829	12.695	4.358	15.5389
600	7.800	12.673	4.298	15.4905	7.827	12.683	4.337	15.5229
	Вибрация 100 Герц, 0, 5g							
2400	8.306	12.789	4.959	16.0362	8.312	12.795	4.968	16.0469
1200	8.299	12.775	4.923	16.0102	8.319	12.791	4.955	16.0435
600	8.277	12.737	4.807	15.9336	8.345	12.785	4.916	16.0404
	Вибрация 100 Герц, 1, 0g							
2400	8.422	11.097	6.604	15.4181	8.401	11.119	6.620	15.4290
1200	8.487	11.029	6.560	15.3866	8.400	11.115	6.622	15.4267
600	8.736	10.782	6.383	15.2760	8.412	11.081	6.596	15.3978
	Стенд неподвижен							
2400	8.416	12.068	4.957	15.5256	8.416	12.068	4.957	15.5258
1200	8.416	12.067	4.956	15.5252	8.416	12.068	4.956	15.5255
600	8.415	12.070	4.956	15.5272	8.415	12.070	4.956	15.5270

Для вариантов работы одношагового алгоритма с максимальной частотой съема информации приведены графики вибрационной составляющей вычисленного углового движения блока ЧЭ на коротком интервале времени (0.05 секунды) в виде углов поворота по каждой из трех осей как функций времени.

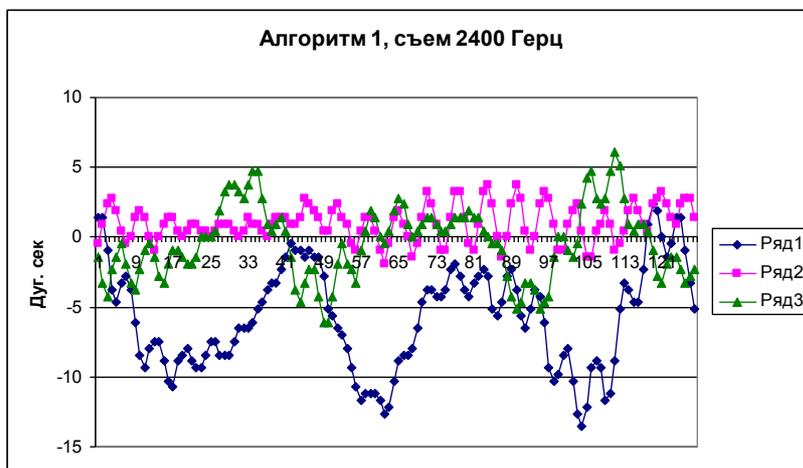


Рисунок 1.2 Вибрация 60 Герц, 0.25g

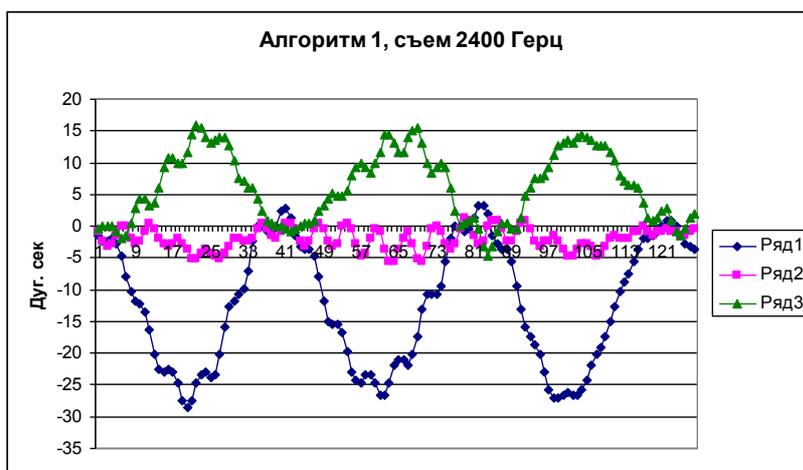


Рисунок 1.3 Вибрация 60 Герц, 0.5g

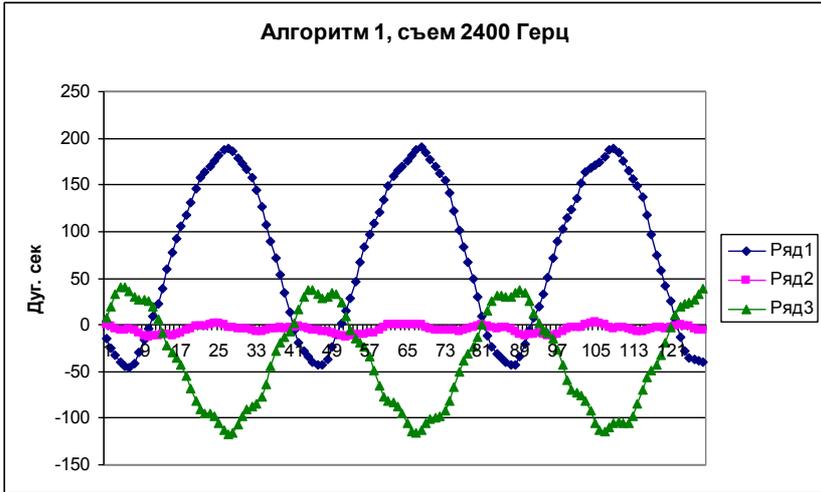


Рисунок 1.4 Вибрация 60 Герц, 1. 0g

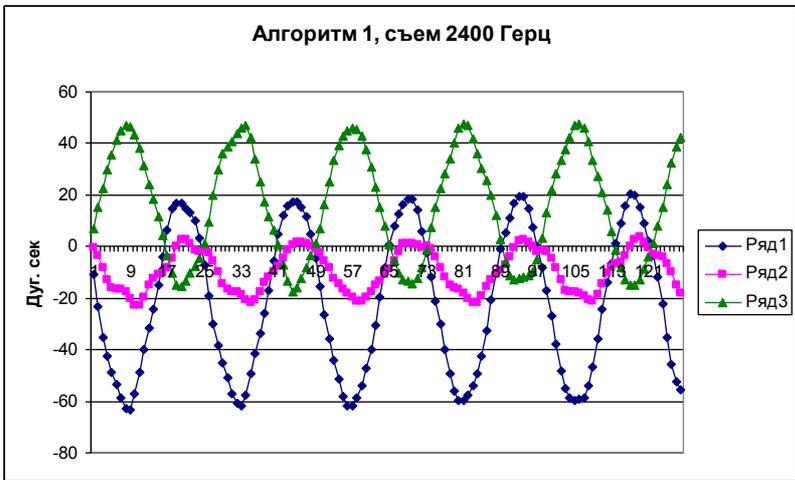


Рисунок 1.5 Вибрация 100 Герц, 0. 25g

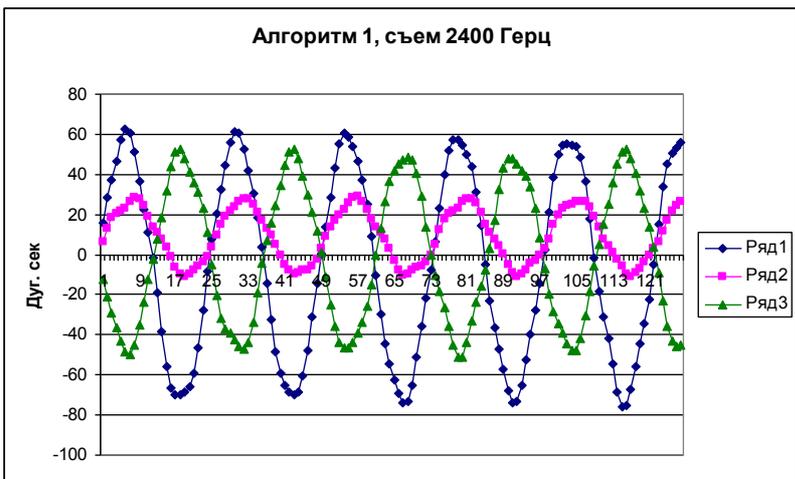


Рисунок 1.5 Вибрация 100 Герц, 0. 5g

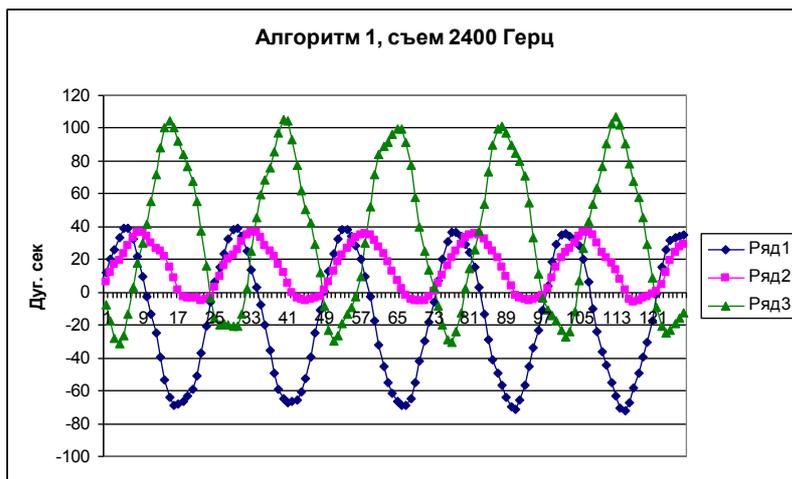


Рисунок 1.7 Вибрация 100 Герц, 1. 0g

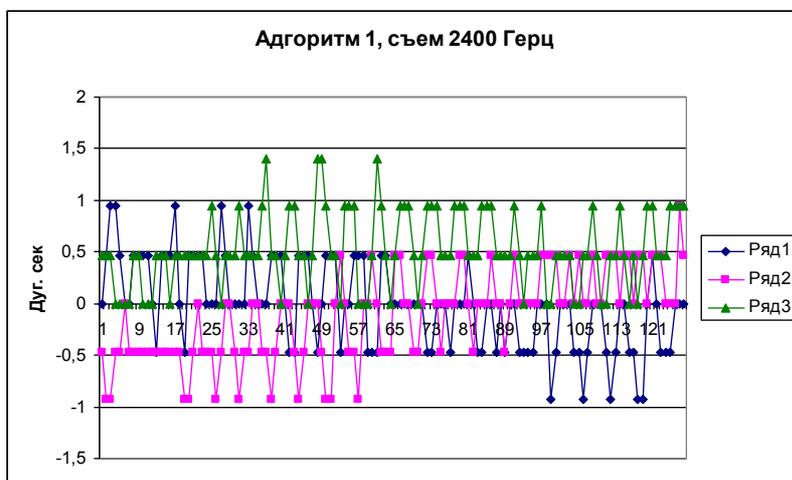


Рисунок 1.8 Работа блока ЧЭ на неподвижном стенде .

Обработка экспериментальных данных показала зависимость погрешности от частоты съема показаний. Отличие погрешностей для частот съема 600 и 2400 Герц при отсутствии вибрации не превышает трех тысячных градуса в час. При вибрации в диапазоне ускорений от 0.25 до 1.0g различие погрешностей поднимается до уровня единиц сотых градуса в час.

## 1.6 Моделирование процесса начальной выставки БИНС.

Предложенная модель блока чувствительных элементов использована при моделировании процесса начальной выставки БИНС. Моделируемый процесс выставки основан на следующем рассуждении.

Если неподвижный в инерциальном пространстве трехгранник в начальный момент совпадает с географическим, обозначим его  $E_0N_0Z_0$ , то проекции кажущегося ускорения на его оси меняются со временем следующим образом:

$$\begin{aligned} W_E &= g \cos \varphi \sin Ut \\ W_N &= g \cos \varphi \sin \varphi (1 - \cos Ut) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Траектория вектора кажущегося ускорения в осях трехгранника  $E_0N_0Z_0$  изображена на рисунке.

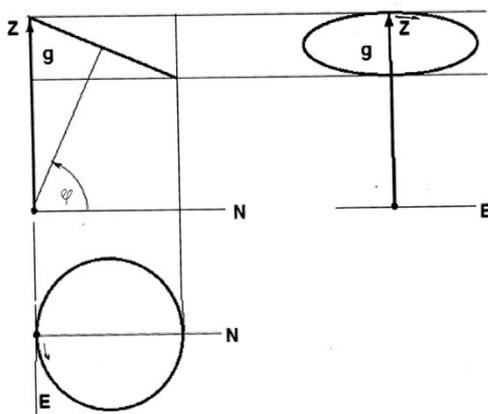


Рисунок 1.9 Траектория вектора кажущегося ускорения в проекциях на оси неподвижного трехгранника, совпадавшего с географическим в момент начала выставки.

Кажущаяся скорость равна интегралам от ускорения

$$V_E = \int_0^t W_E dt = \frac{g}{U} \cos \varphi (1 - \cos Ut) \approx \frac{g}{U} \cos \varphi \cdot \frac{1}{2} (Ut)^2 \quad (1.22)$$

$$V_N = \int_0^t W_N dt = \frac{g}{U} \cos \varphi \sin \varphi (Ut - \sin Ut) \approx \frac{g}{U} \cos \varphi \sin \varphi \cdot \frac{1}{6} (Ut)^3$$

Для трехгранника  $x_1x_2x_3$ , неподвижного в инерциальном пространстве, с вертикальной осью  $x_3$  и повернутого относительно географического на угол  $\alpha$

$$\begin{aligned} W_{x_1} &= W_E \cos \alpha + W_N \sin \alpha \\ W_{x_2} &= -W_E \sin \alpha + W_N \cos \alpha \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$V_{x_1} = V_E \cos \alpha + V_N \sin \alpha$$

$$V_{x_2} = -V_E \sin \alpha + V_N \cos \alpha$$

Наклон трехгранника вокруг осей  $x_1, x_2$  на углы  $\rho_1, \rho_2$  соответственно добавляет к кажущимся скоростям слагаемые

$$V_{x_1}^p = -\rho_2^0 g t, \quad V_{x_2}^p = \rho_1^0 g t \quad (1.24)$$

Таким образом, коэффициенты полиномиального представления кажущихся скоростей

$$V_{x_1} = a_1 + b_1 t + c_1 t^2 + d_1 t^3 \quad (1.25)$$

$$V_{x_2} = a_2 + b_2 t + c_2 t^2 + d_2 t^3$$

связаны с углами ориентации соотношениями

$$b_1 = -\rho_2^0 g$$

$$b_2 = \rho_1^0 g$$

$$c_1 = \frac{1}{2} g U \cos \varphi \cos \alpha \quad (1.26)$$

$$c_2 = \frac{1}{2} g U \cos \varphi \sin \alpha$$

откуда следуют формулы

$$\rho_1^0 = b_2 / g$$

$$\rho_2^0 = -b_1 / g$$

$$\cos \alpha = c_1 / \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad (1.27)$$

$$\sin \alpha = c_2 / \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

Моделирование процесса начальной выставки реализуется следующим образом. По первому отсчету приращения кажущейся линейной скорости строится трехгранник, третья ось которого направлена по измеренному вектору приращения скорости. Построение состоит в том, что вычисляется кватернион взаимной ориентации приборного

трехгранника и вновь построенного, который принимается в качестве аналитического. На каждом следующем такте съема показаний с чувствительных элементов приборного трехгранника вычисляется кватернион текущей ориентации приборного трехгранника относительно неподвижного аналитического и измеренное в осях приборного трехгранника приращение кажущейся скорости перепроектируется на оси аналитического.

Проекции приращений кажущейся скорости на первые две оси аналитического трехгранника (оси, близкие к горизонту) интегрируются по времени (суммируются). Для вычисления проекций и интегралов используются формулы:

Уравнение для кватерниона взаимной ориентации

$$\dot{\Lambda}_{ax} = \frac{1}{2} \Lambda_{ax} \circ \omega_x \quad (1.28)$$

Перепроектирование кажущегося ускорения (приращения кажущейся скорости) на оси аналитического (неподвижного) трехгранника

$$w_a = \Lambda_{ax} \circ w_x \circ \bar{\Lambda}_{ax} \quad (1.29)$$

Интегрирование (суммирование)

$$v_a = \int_0^t w_a dt \quad (1.30)$$

Параллельно вычисляются суммы, необходимые для построения аппроксимации интегралов кубической параболой. В конце режима выставки для каждого из интегралов строится аппроксимация кубической параболой (1.25).

По коэффициентам при квадратах времени, по формулам (1.27), определяется направление меридиана в плоскости первых двух осей, коэффициенты при первых степенях позволяют, по той же группе формул, определить отклонение аналитического трехгранника от горизонта в момент начала режима выставки. В результате определяется ориентация

приборного трехгранника относительно трехгранника, совпадавшего с географическим в момент начала выставки. Поворот географического трехгранника за время выставки вычисляется по широте места и времени, затраченному на выставку. По этому повороту вычисляется ориентация приборного в географическом на момент завершения выставки.

После завершения процесса выставки программа переходит в режим моделирования работы БИНС с горизонтируемым аналитическим трехгранником, свободным в азимуте, по ее штатным алгоритмам.

Штатные алгоритмы моделируются в следующем виде.

Интегрируется система уравнений:

Горизонтные составляющие линейной скорости

$$\begin{aligned} \dot{v}_{x_1} &= w_{x_1} - \rho U^2 a_{33} a_{13} \\ \dot{v}_{x_2} &= w_{x_2} - \rho U^2 a_{33} a_{23} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Матрица ориентации аналитического трехгранника в осях Земли

$$\dot{A}_{x\eta} = \hat{\omega}_x A_{x\eta} - A_{x\eta} \hat{U}_\eta$$

Матрица ориентации аналитического трехгранника в осях приборного

$$\dot{A}_{xy} = \hat{\omega}_x A_{xy} - A_{xy} \hat{\omega}_y$$

При вычислении правых частей используются соотношения:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{a_0}{\sqrt{1 - e^2 a_{33}^2}} \\ \omega_{x_1} &= \frac{1}{\rho} [v_{x_2} + l^2 a_{23} (v_{x_1} a_{13} + v_{x_2} a_{23})] \\ \omega_{x_2} &= \frac{1}{\rho} [v_{x_1} + l^2 a_{13} (v_{x_1} a_{13} + v_{x_2} a_{23})] \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\omega_{x_3} = 0$$

$$w_x = A_{xy} w_y$$

Использованы следующие обозначения:

$w_y$  - вектор кажущегося ускорения, измеренный акселерометрами блока ЧЭ.

$\hat{\omega}_y$  - кососимметричная матрица из компонент угловой скорости, измеренной гироскопами блока ЧЭ.

$\omega_x$  - вектор угловой скорости аналитического трехгранника, с компонентами  $\omega_{x_1}, \omega_{x_2}, \omega_{x_3}$

$U_\eta$  - вектор угловой скорости суточного вращения Земли (в осях Земли).

$A_{x\eta}$  и  $A_{xy}$  матрицы перехода к осям аналитического трехгранника от осей Земли и от осей приборного трехгранника.

$a_{ij}$  - элементы матрицы  $A_{x\eta}$ .

$e^2$  – квадрат первого эксцентриситета Земли.

$l^2$  – квадрат второго эксцентриситета.

$a_0$  – экваториальный радиус Земли.

$v_{x_1}, v_{x_2}$  - рабочие переменные, определяющие компоненты линейной скорости в проекциях на горизонтальные оси аналитического трехгранника.

В моделирующей программе учтена дискретность по времени поступающей от блока ЧЭ информации и вместо матричной алгебры используется кватернионная, с вычислением элементов матрицы  $A_{x\eta}$  для правых частей уравнений (1.31), (1.32) по соответствующему кватерниону  $\Lambda_{x\eta}$

В приведенных ниже таблицах дан поминутный вывод погрешности определения ориентации аналитического трехгранника в процессе шестиминутной выставки и следующие четыре минуты работы. Погрешность дана в виде трех компонент погрешности ориентации в

угловых минутах. Частота съема показаний при моделировании принята равной 2400 Герц. Уравнения Пуассона интегрируются четырехшаговым алгоритмом. Блоку ЧЭ, кроме вращения Земли, дано вибрационное движение с амплитудой 2 градуса и периодом 10 секунд и линейные гармонические колебания с амплитудным ускорением 0.04g с тем же периодом (в качестве имитации ветровой нагрузки на корпус самолета).

Таблица 3. Моделирование процесса начальной выставки БИНС при съеме показаний с частотой 2400 Герц. Погрешность ориентации аналитического трехгранника (время в минутах и вектор погрешности ориентации в дуговых минутах)

Начальное положение

0 135.557369 655.072422 1796.488339

После грубого горизонтирования (процесс выставки)

1 0.052962 0.028053 1747.797551

2 0.052962 0.028053 1747.797551

3 0.052962 0.028053 1747.797551

4 0.052962 0.028053 1747.797551

5 0.052962 0.028053 1747.797551

После коррекции ориентации по результатам выставки

6 0.002961 0.000349 -0.287755

7 0.003589 0.000364 -0.287748

8 0.004216 0.000382 -0.287739

9 0.004843 0.000402 -0.287729

10 0.005471 0.000425 -0.287718

На графике рисунка 1.10 изображены колебания БИНС в течение суток после завершения выставки. Выведены три компонента вектора погрешности ориентации аналитического трехгранника.

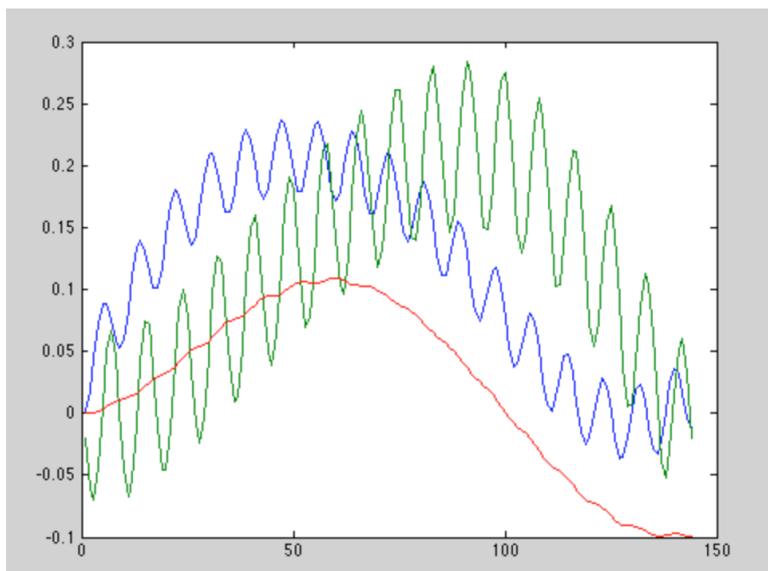


Рисунок 1.10 - Колебания БИНС в течение суток после завершения начальной выставки (время в 10 минутных интервалах, углы – в долях дуговых минут).

Моделирование подтвердило эффективность алгоритма выставки и отлаженность рабочих алгоритмов.

### 1.7 Заключение по главе 1

Предложенная модель блока чувствительных элементов бесплатформенной инерциальной навигационной системы удобна для математического моделирования при отработке бортовых алгоритмов навигационной системы, включая рабочие алгоритмы и алгоритмы начальной выставки. Модель предоставляет возможность сравнить по точности различные варианты вычисления ориентации трехгранников, используемых в алгоритмах системы. Выполненная обработка, с помощью использованных в модели алгоритмов, реальных показаний лазерного блока чувствительных элементов дала возможность оценить качество рассмотренных алгоритмов вычисления ориентации.

## **2 Коррекция масштабного коэффициента датчика угловой скорости БИНС быстровращающегося объекта**

В этой главе рассматривается задача совместной обработки показаний триады датчиков угловой скорости (ДУС) и одноосного гиросtabilизатора в бесплатформенной инерциальной навигационной системе объекта с быстрым вращением вокруг продольной оси. Потребность в совместной обработке определяется слишком высокими требованиями к знанию масштабного коэффициента ДУС с осью чувствительности по оси быстрого вращения [1, 2]. Простая замена ДУС одноосным стабилизатором не дает удовлетворительного результата, если цена младшего разряда его датчика угла недостаточна для обеспечения нужной точности. В основе решения задачи совместной обработки лежит возможность уточнения масштабного коэффициента соответствующего ДУС за счет сравнения интеграла по времени от показаний ДУС с углом поворота рамки стабилизатора за то же время [3].

Для оценки масштабного коэффициента используется линейная аппроксимация разности отсчетов угла поворота вокруг продольной оси, измеренных одноосным стабилизатором и продольным ДУСом, как функции угла поворота, замеренного ДУСом. Отсчеты снимаются в течение всего полета, масштабный коэффициент уточняется эпизодически. Для устранения погрешности в определении ориентации объекта, накопленной к моменту очередного уточнения коэффициента, предложен специальный алгоритм коррекции кватерниона, характеризующего текущую ориентацию объекта. Работа алгоритма от моделирована. Результаты моделирования показывают, что предложенный алгоритм коррекции устраняет погрешность от неточного знания масштабного коэффициента, практически, полностью.

## 2.1 Определение углов ориентации объекта при эпизодическом уточнении масштабного коэффициента ДУС оси быстрого вращения

С объектом свяжем приборный трехгранник  $X$ . Его ориентация по отношению к некоторому неподвижному в инерциальном пространстве трехграннику  $S$  может быть задана кватернионом  $\Lambda_{SX}(t)$ .

На каждом такте временной длительности  $\tau$  с гироскопических чувствительных элементов снимается информация об углах поворота трехгранника вокруг каждой его оси за такт опроса. Эту информацию можно представить в виде вектора малого поворота в проекциях на оси приборного трехгранника  $\vec{s}_X$ . По вектору  $\vec{s}_X$  можно построить кватернион  $\Lambda_\tau$  и вычислить кватернион  $\Lambda_{SX}(t+\tau)$  по формуле

$$\Lambda_{SX}(t+\tau) = \Lambda_{SX}(t) \circ \Lambda_\tau \quad (2.1)$$

Для точного построения кватерниона  $\Lambda_\tau$  по вектору  $\vec{s}_X$  надо сосчитать модуль вектора  $\vec{s}_X$  и вычислить кватернион по формуле

$$\Lambda_\tau = \cos\left(\frac{|\vec{s}_X|}{2}\right) + \frac{\vec{s}_X}{|\vec{s}_X|} \sin\left(\frac{|\vec{s}_X|}{2}\right). \quad (2.2)$$

Если трехгранник вращается с угловой скоростью  $\vec{\omega}_x$ , заданной своими проекциями на оси трехгранника  $X$ , то изменение кватерниона  $\Lambda_{SX}$  со временем описывается уравнением

$$\dot{\Lambda}_{SX} = \frac{1}{2} \Lambda_{SX} \circ \vec{\omega}_x \quad (2.3)$$

При численном интегрировании уравнения (2.3), записанном в виде формулы (2.1), используется вектор угловой скорости, измеренный с точностью до собственного дрейфа  $\Delta\vec{\omega}_x$  приборного трехгранника, в результате вычислений получается кватернион  $\Lambda_{SX}$ , который фактически удовлетворяет уравнению

$$\dot{\Lambda}_{S'X} = \frac{1}{2} \Lambda_{S'X} \circ (\vec{\omega}_x - \Delta \vec{\omega}_x), \quad (2.4)$$

поскольку система съема информации не чувствует собственного дрейфа. Кватернион  $\Lambda_{S'X}$ , при одинаковых начальных условиях для (2.3) и (2.4), немного отличается от кватерниона  $\Lambda_{SX}$  и построенный с опорой на трехгранник  $X$  по этому кватерниону трехгранник  $S'$  отличается от трехгранника  $S$ . Ориентация трехгранник  $S'$  относительно трехгранника  $S$  характеризуется кватернионом

$$\Lambda_{SS'} = \Lambda_{SX} \circ \bar{\Lambda}_{S'X}, \quad (2.5)$$

так что выполняется соотношение

$$\Lambda_{SX} = \Lambda_{SS'} \circ \Lambda_{S'X} \quad (2.6)$$

Кватернион  $\Lambda_{SS'}$  можно назвать корректирующим, поскольку он по формуле (2.6) позволяет устранить погрешность вычисления ориентации, вызванную погрешностью в измерении угловой скорости. Зависимость корректирующего кватерниона от времени определяется уравнением

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_{SS'} &= \dot{\Lambda}_{SX} \circ \bar{\Lambda}_{S'X} + \Lambda_{SX} \circ \dot{\bar{\Lambda}}_{S'X} = \frac{1}{2} \Lambda_{SX} \circ \vec{\omega}_x \circ \bar{\Lambda}_{S'X} - \frac{1}{2} \Lambda_{SX} \circ (\vec{\omega}_x - \Delta \vec{\omega}_x) \circ \bar{\Lambda}_{S'X} = \\ &= \frac{1}{2} \Lambda_{SX} \circ \Delta \vec{\omega}_x \circ \bar{\Lambda}_{S'X} = \frac{1}{2} \Lambda_{SS'} \circ \Lambda_{S'X} \circ \Delta \vec{\omega}_x \circ \bar{\Lambda}_{S'X} = \frac{1}{2} \Lambda_{SS'} \circ \Delta \vec{\omega}_{S'} \end{aligned}$$

Т.е.

$$\dot{\Lambda}_{SS'} = \frac{1}{2} \Lambda_{SS'} \circ \Delta \vec{\omega}_{S'} \quad (2.7)$$

где

$$\Delta \vec{\omega}_{S'} = \Lambda_{S'X} \circ \Delta \vec{\omega}_x \circ \bar{\Lambda}_{S'X} \quad (2.8)$$

Таким образом, трехгранник  $S'$ , который согласно счислению должен быть неподвижным, дрейфует относительно действительно неподвижного трехгранника  $S$  с угловой скоростью дрейфа приборного трехгранника, которую для записи уравнения удобно представить в проекциях на собственные оси дрейфующего, почти неподвижного, трехгранника.

Если для получения точного значения проекции угловой скорости на ось  $x_3$  показания соответствующего ДУСа надо умножить на уточняющий множитель  $1 + \Delta m$ , то собственный дрейф приборного трехгранника можно представить в виде

$$\Delta \vec{\omega}_x = \vec{e}_3 \omega_{x3} \Delta m, \quad (2.9)$$

где  $\vec{e}_3 = \parallel 0 \ 0 \ 1 \parallel^T$  единичный вектор оси  $x_3$  трехгранника  $X$ .

В проекциях на оси трехгранника  $S'$  вектор дрейфа имеет вид

$$\Delta \vec{\omega}_{s'} = \Lambda_{s'X} \circ \vec{e}_3 \omega_{x3} \Delta m \circ \bar{\Lambda}_{s'X} = (\Lambda_{s'X} \circ \vec{e}_3 \omega_{x3} \circ \bar{\Lambda}_{s'X}) \Delta m \quad (2.10)$$

Это значение вектора дрейфа можно использовать при интегрировании уравнения (2.7) для корректирующего кватерниона, в котором надо подправить нижний индекс кватерниона

$$\dot{\Lambda}_{\tilde{s}s'} = \frac{1}{2} \Lambda_{\tilde{s}s'} \circ \Delta \vec{\omega}_{s'} \quad (2.11)$$

чтобы отразить тот факт, что трехгранник  $\tilde{S}$ , поставленный на место неподвижного трехгранника  $S$  в (2.7), не становится неподвижным пока уточняющий множитель  $1 + \Delta m$  определен неточно.

Ввиду малости угловой скорости  $\Delta \vec{\omega}_{s'}$ , при численном интегрировании уравнения (2.11) можно использовать достаточно крупный шаг по времени, кратный целому числу тактов съема информации длительностью  $\tau$ , обозначим его  $T$ . Следующие друг за другом интервалы времени длительностью  $T$ , начиная с момента начала работы системы счисления, пронумеруем порядковыми номерами  $T_i$ . Для каждого из этих интервалов в рабочем такте численного интегрирования основного уравнения (2.1) для кватерниона ориентации  $\Lambda_{s'X}$  предусмотрим вычисление интеграла по времени от вектора  $\Lambda_{s'X} \circ \vec{e}_3 \omega_{x3} \circ \bar{\Lambda}_{s'X}$ :

$$\vec{r}_i = \int_{T_i} \Lambda_{s'X} \circ \vec{e}_3 \omega_{x3} \circ \bar{\Lambda}_{s'X} dt \quad (2.12)$$

По завершении некоторого интервала  $T$ , обозначим его номер как  $n_T$ , вычисляется новое значение поправки  $\Delta m$  к уточняющему множителю масштабного коэффициента. Для каждого интервала  $T_i$  по хранящемуся в памяти значению вектора  $\vec{r}_i$  можно рассчитать вектор малого поворота, умножив вектор  $\vec{r}_i$  на одинаковый для всех интервалов множитель  $\Delta m$ , и рассчитать соответствующий ему кватернион  $\Lambda_i$ . Корректирующий кватернион вычисляется как последовательное произведение (слева направо) полученных кватернионов.

Если положения, которые трехгранник  $S'$  принимает в моменты завершения интервалов  $T_i$ , обозначить  $S'_i$  и кватернион, задающий его ориентацию, обозначить  $\Lambda_{\tilde{S}S'_i}$ , то, используя соотношения

$$\Lambda_{\tilde{S}\tilde{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

$$\Lambda_{\tilde{S}S'_i} = \Lambda_{\tilde{S}S'_{i-1}} \circ \Lambda_i \quad (2.14)$$

можно вычислить кватернион  $\Lambda_{\tilde{S}S'_{N_T}}$ .

Кватернион  $\Lambda_{S'_{N_T}S'}$  строится как все кватернионы  $\Lambda_i$ , но вместо величины  $\vec{r}_i$  используется текущее значение интеграла  $\vec{r}_{N_T+1}$  незавершенного интервала  $T_{N_T+1}$ . Рабочее значение корректирующего кватерниона, как и кватернион  $\Lambda_{S'_{N_T}S'}$ , вычисляется на каждом такте съема информации. Вычисление выполняется по формуле

$$\Lambda_{\tilde{S}S'} = \Lambda_{\tilde{S}S'_{N_T}} \circ \Lambda_{S'_{N_T}S'} \quad (2.15)$$

В качестве выходной информации о вычисленной ориентации выдается кватернион  $\Lambda_{\tilde{S}X}$ , вычисленный по формуле

$$\Lambda_{\tilde{S}X} = \Lambda_{\tilde{S}S'} \circ \Lambda_{S'X} \quad (2.16)$$

## 2.2 Уточнение масштабного коэффициента ДУС по показаниям одноосного стабилизатора

Трехгранник  $\tilde{S}$ , который можно построить от трехгранника  $X$  по кватерниону  $\Lambda_{\tilde{S}X}$  будет тем ближе к неподвижному трехграннику  $S$  и тем медленнее дрейфовать, чем точнее определена поправка  $\Delta m$  уточняющего множителя. Возможная точность определения этой поправки возрастает по мере роста угла суммарного поворота объекта вокруг оси  $x_3$ , т.е. – растет со временем.

Для вычисления уточняющего множителя  $1 + \Delta m$  используются замеры поворота объекта вокруг оси  $x_3$ , полученные интегрированием показаний ДУСа этой оси:

$$\gamma_n^{dus} = \sum_{i=1}^n s_{x_3}(i) \quad (2.17)$$

где  $s_{x_3}(i)$  – угол малого поворота, замеренный ДУСом оси  $x_3$  на  $i$ -том такте съема информации. И полученные по отсчетам поворота рамки одноосного стабилизатора

$$\gamma_n^{os} = \sum_{i=1}^n (\gamma(i) - \gamma(i-1)) \quad (2.18)$$

где  $\gamma(i)$  – угол поворота рамки стабилизатора, зафиксированный на  $i$ -том такте съема информации. Суммирование разностей отсчетов на каждом такте съема информации вместо вычисления разности текущего отсчета с начальным позволяет представить произвольное значение суммарного угла поворота по показаниям датчика с диапазоном измерения угла от 0 до  $2\pi$ .

Грубую оценку величины уточняющего множителя масштабного коэффициента можно получить по формуле

$$1 + \Delta m = \frac{\gamma_n^{os}}{\gamma_n^{dus}}, \quad (2.19)$$

Или, что, фактически то же

$$\Delta m = \frac{\gamma_n^{os} - \gamma_n^{dus}}{\gamma_n^{dus}}. \quad (2.20)$$

Оценка тем точнее, чем больше угол в знаменателе, но ее гарантированная точность не выше отношения цены младшего разряда отсчета  $\gamma_n^{os}$  к знаменателю. Точность оценки значительно повышается, если использовать линейную аппроксимацию разности  $y_i = \gamma_i^{os} - \gamma_i^{dus}$  как функции угла, замеренного ДУСом  $x_i = \gamma_i^{dus}$ :

$$y_i = a + bx_i, \quad i = \text{от } 1 \text{ до } n.$$

Коэффициент  $b$  дает более точную оценку величины  $\Delta m$ ,

$$\Delta m = b. \quad (2.21)$$

Для вычисления коэффициентов по стандартному алгоритму линейной аппроксимации требуются суммы:

$$\Sigma_n^x = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}, \quad \Sigma_n^{xx} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{n}, \quad \Sigma_n^{yx} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i x_i}{n}, \quad \Sigma_n^y = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{n}. \quad (2.22)$$

Выражения для коэффициентов имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta_a &= \Sigma_n^y \cdot \Sigma_n^{xx} - \Sigma_n^{yx} \cdot \Sigma_n^x \\ \Delta_b &= \Sigma_n^{yx} - \Sigma_n^y \cdot \Sigma_n^x \\ \Delta &= \Sigma_n^{xx} - \Sigma_n^x \cdot \Sigma_n^x \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta}, \quad b = \frac{\Delta_b}{\Delta}.$$

Вычисление уточняющего коэффициента удобно выполнять с периодичностью равной или кратной интервалу  $T$ . Вычисление сумм линейной аппроксимации удобно выполнить с той же периодичностью, предусмотрев промежуточное суммирование на каждом такте съема информации внутри каждого интервала  $T_i$ :

$$\tilde{\Sigma}_k^x = \sum_{j=1}^k x_j, \quad \tilde{\Sigma}_k^{xx} = \sum_{j=1}^k x_j^2, \quad \tilde{\Sigma}_k^{yx} = \sum_{j=1}^k y_j x_j, \quad \tilde{\Sigma}_k^y = \sum_{j=1}^k y_j, \quad (2.24)$$

где  $k$  определяется соотношением  $T = k \cdot \tau$ . С перевычислением сумм аппроксимации по завершению каждого такта  $T_i$ :

$$\tilde{\Sigma}_{n+k}^x = \tilde{\Sigma}_n^x \frac{n}{n+k} + \frac{\tilde{\Sigma}_k^x}{n+k}, \quad (2.25)$$

с такими же формулами для остальных трех сумм, с верхними индексами  $xx$ ,  $xy$ ,  $y$ , и последующей заменой значения  $n$  на значение  $n+k$ , в том числе и в индексах. Коэффициент  $b$ , для использования в формуле (2.21), вычисляется по соответствующей формуле из (2.23).

При вычислении нового значения корректирующего кватерниона используется новое значение поправки  $\Delta m$  к уточняющему множителю. Использование линейной аппроксимации при формировании поправки  $\Delta m$  эффективно сглаживает не только шум дискретности съема угла, но и румбовую погрешность датчика угла и даже динамическую погрешность следящей системы стабилизации.

### **2.3 Математическое моделирование работы предложенного алгоритма коррекции**

Для проверки эффективности предложенного алгоритма выполнено математическое моделирование его работы.

Угловое движение приборного трехгранника  $X$  моделируется в виде двух вращений:

- быстрое вращение с постоянной угловой скоростью вокруг оси  $x_3$ , неподвижной в приборном трехграннике  $X$ ,
- менее быстрое вращение с постоянной угловой скоростью вокруг оси, отклоненной на некоторый угол  $\alpha$  от оси первого вращения и неподвижной в инерциальном пространстве, с которым связан трехгранник  $S$ .

Ось быстрого вращения участвует во втором вращении и движется в инерциальном трехграннике  $S$  по конусу с углом  $\alpha$  при вершине.

В отмоделированных вариантах угловая скорость быстрого вращения принята равной  $360^\circ / \text{сек.}$ , угловая скорость второго вращения -  $40^\circ / \text{сек.}$  углу  $\alpha$  придаются значения  $1^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ . Угловое движение трехгранника моделируется на 30-минутном интервале времени. Тактовая частота съема информации принята равной 1000 Герц, что соответствует значению  $\tau = 0.001 \text{сек.}$ , интервал обновления коррекции масштабного коэффициента взят равным  $T = 1 \text{сек.}$

При отсутствии всех других погрешностей, кроме масштабного коэффициента ДУСа по оси 3, принятого равным 1.0001, погрешность вычисления ориентации с использованием алгоритма коррекции на всем 30-минутном интервале времени не превысила 3 дуговых секунд. Моделирование выполнено с перебором угла между осями:  $1^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ .

При постоянном дрейфе ДУСа по оси 3 погрешность вычисления ориентации при точном масштабном коэффициенте (без коррекции) составила  $90'$ , погрешность вычисления при масштабном коэффициенте 1.0001, с использованием алгоритма коррекции, не превысила  $3.5''$ . Моделирование выполнено с углом между осями  $20^\circ$ .

При наличии погрешностей ДУСов осей 1 и 2, включающих постоянный дрейф по каждой оси  $x_1$  и  $x_2$ , перекос осей  $x_1$  и  $x_2$  между собой на  $32''$ , отклонение масштабных коэффициентов по осям  $x_1$  и  $x_2$   $\Delta m_1 = 0.0001, \Delta m_2 = 0.0001$ , моделирование выполнено с перебором угла между осями:  $1^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ . Погрешность алгоритма с коррекцией при  $\Delta m_3 = 0.0001$  практически совпадает с погрешностью алгоритма без коррекции при  $\Delta m_3 = 0$ .

На рисунках представлены результаты двух вариантов моделирования, иллюстрирующих эффективность предложенного алгоритма.

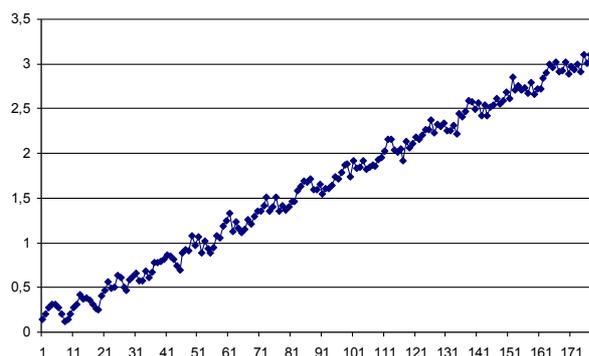


Рисунок 2.1 Погрешность определения ориентации при отклонении масштабного коэффициента на величину 0.0001 при работе алгоритма с коррекцией (остальные инструментальные погрешности отсутствуют).

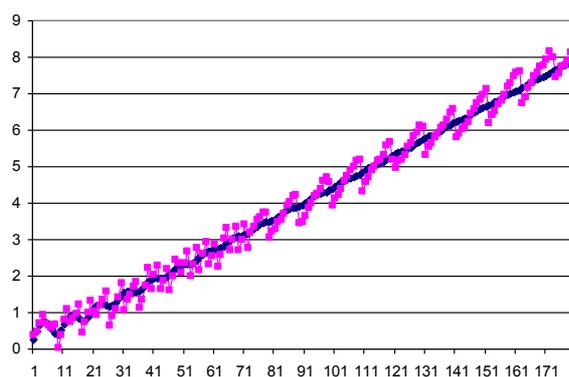


Рисунок 2.2 Погрешность определения ориентации при полном наборе инструментальных погрешностей, без отклонения масштабного коэффициента, без коррекции и с отклонением масштабного коэффициента на величину 0.0001 при работе алгоритма с коррекцией.

На обоих рисунках шкала времени - в количестве 10-секундных интервалов (180 интервалов = 1800 секунд = 30 минут). Отсчет погрешности – в дуговых секундах.

Из рисунка 2.2 видно, что погрешность алгоритма с коррекцией при  $\Delta m_3 = 0.0001$  практически совпадает с погрешностью алгоритма без коррекции при  $\Delta m_3 = 0$ .

По результатам моделирования можно сделать вывод о достаточно высокой эффективности рассмотренного алгоритма коррекции неточного значения масштабного коэффициента.

## **2.4 Алгоритм вычисления кватерниона ориентации объекта при использовании алгоритма коррекции**

### ***Входная информация (на каждом такте съема)***

$V$  - трехмерный вектор малого поворота БЧЭ, измеренный ДУСами.

$\mathcal{U}$  - угол малого поворота БЧЭ вокруг оси 3, измеренный ОС.

### ***Выходная информация***

$\Lambda$  - кватернион текущей ориентации БЧЭ относительно начального положения.

### ***Используемые константы***

$V_0$  - нулевой вектор,

$\Lambda_E$  - единичный кватернион.

### ***Используемые переменные, сохраняемые от такта к такту.***

$DMr$  - корректирующий множитель для учета погрешности масштабного коэффициента,

$S$  - сумма поворотов, измеренных ДУСом по оси 3,

$S_r$  - сумма поворотов, измеренных ОС,

$S_x, S_{x2}, S_y, S_{xy}$  - суммы, вычисляемые для построения линейной аппроксимации,

$N_{tek}$ ,  $N_{calc}$ ,  $N_{line}$  - счетчики тактов для управления вычислением сумм и формированием коррекции,

$V_d[N]$  - массив векторов, формируемых алгоритмом в процессе работы,

$\Lambda_{dus}$  - кватернион текущей ориентации, вычисляемый по показаниям ДУСов,

$\Lambda_d$  - кватернион коррекции.

В начальном состоянии все сохраняемые переменные, кроме  $\Lambda_{dus}$ , обнулены.

Кватерниону  $\Lambda_{dus}$  присвоено значение единичного кватерниона

$$[\Lambda_{dus} = \Lambda_E = (1 \ 0 \ 0 \ 0)].$$

### **Операции на каждом такте**

Прием входной информации  $V$  и  $\gamma$

$V_{rab} = \{0 \ 0 \ V_3\}$  - вектор поворота, измеренный ДУСом по оси 3.

$S = S + V_3$  - суммирование отсчетов ДУС оси 3.

$S_\gamma = S_\gamma + \gamma$  - суммирование отсчетов ОС

$V_{rab} = \Lambda_{dus} \circ V_{rab} \circ \bar{\Lambda}_{dus}$  - вектор поворота по оси 3 в неподвижных осях.

$V_d[N_{calc}] = V_d[N_{calc}] + V_{rab}$  - суммирование векторов в неподвижных

осях.

$\Lambda_{rab}$  - кватернион, соответствующий повороту на вектор  $V$ .

$\Lambda_{dus} = \Lambda_{dus} \circ \Lambda_{rab}$  - новое значение кватерниона ориентации, вычисляемого по показаниям ДУСов.

$N_{tek} = N_{tek} + 1;$  - сдвиг счетчика тактов (в пределах очередной 1000).

$S_x = S_x + S$  вычисление четырех сумм для линейной аппроксимации

$$S_{x2} = S_{x2} + S * S$$

$$S_y = S_y + S_\gamma - S$$

$$S_{xy} = S_{xy} + (S_\gamma - S) * S$$

Если  $N_{tek} = 1000$  (шаг обновления корректирующего множителя DMr),

то выполнить операции:

$$N_{line} = N_{line} + N_{tek}; \quad - \text{общее число точек}$$

$$r3 = S_{x2} - S_x * (S_x / N_{line}); \quad \text{в линейной аппроксимации.}$$

$$r2 = S_{xy} - S_y * (S_x / N_{line});$$

$$DMr = r2 / r3; \quad - \text{поправка к масштабному коэффициенту.}$$

$$V_{rab} = V_d[0] * DMr; \quad - \text{вектор корректирующего поворота по первой сумме (из массива сумм).}$$

$\Lambda_d$  кватернион, соответствующий повороту на вектор

$V_{rab}$ .

В цикле по  $i$ , от 1 до  $N_{calc}$  выполнить:

$$V_{rab} = V_d[i] * DMr;$$

$\Lambda_{rab}$  - кватернион по вектору  $V_{rab}$ .

$\Lambda_d = \Lambda_{rab} \circ \Lambda_d$  - произведение

кватернионов всех завершенных сумм.

Конец операций в цикле по  $i$ .

$$N_{calc} = N_{calc} + 1; \quad - \text{сдвиг счетчика завершенных сумм}$$

(по 1000 тактов в каждой)

$$N_{tek} = 0; \quad - \text{обнуление счетчика тактов}$$

суммирования

$$V_d[N_{calc}] = V_0; \quad - \text{обнуление элемента массива для}$$

очередной суммы

Конец операций по условию  $N_{tek} = 1000$

$V_{rab} = V_d[N_{calc}] * DMr;$  - дополнение к вектору корректирующего поворота, соответствующее незавершенной сумме

$\Lambda_{rab}$  - кватернион по вектору  $V_{rab}$ .

$\Lambda_{rab} = \Lambda_{rab} \circ \Lambda_d$  - кватернион корректирующего поворота,

учитывающий все завершенные суммы (это  $\Lambda_d$ ) и незавершенную ( $\Lambda_{rab}$ )

$\Lambda = \Lambda_{rab} \circ \Lambda_{dus}$  - откорректированное значение кватерниона ориентации

(выходная переменная)

***Конец операций алгоритма на такте.***

## **2.5 Заключение по главе 2**

Особенность предложенного алгоритма состоит в следующем. Уточнение масштабного коэффициента за счет сравнения интеграла по времени от показаний ДУС с углом поворота стабилизатора выполняется эпизодически в течение всего полета с точностью, повышающейся со временем. Вся погрешность в определении ориентации объекта, накопленная за время, прошедшее до уточнения коэффициента, при каждом сеансе коррекции устраняется полностью. Если фактическое значение масштабного коэффициента стабильно, то погрешность от неточности его начальной оценки практически исключается.

### **3 Блок чувствительных элементов с избыточным количеством осей чувствительности.**

В этой и следующей главах на примере системы ДОСов рассматривается возможность повышения точности измерения трехмерного вектора при использовании избыточной системы одноосных чувствительных элементов. Выполнен анализ работы блока чувствительных элементов с различным количеством гироскопов, с учетом их инструментальных погрешностей, на некоторых эталонных движениях объекта. Предложен метод оценки качества каждого чувствительного элемента по отличию его замеров от измерения той же проекции остальными ЧЭ и специальный алгоритм формирования измеряемого вектора угловой скорости по избыточной информации. Особенность алгоритма состоит в том, что показания чувствительных элементов по всем осям чувствительности учитываются с индивидуальными весовыми коэффициентами. Весовые коэффициенты выбираются с учетом оценки качества чувствительных элементов. Показано, что предложенный алгоритм выбора весовых коэффициентов заметно повышает точность измерений при выходе отдельных ЧЭ за пределы допуска.

#### **3.1 Ориентация осей чувствительности при различном их количестве**

Критерием выбора ориентации осей может служить средняя величина векторно-скалярного произведения любой тройки их единичных векторов.

##### **3.1.1 Число измерительных осей равно трем ( $n = 3$ ).**

Максимум векторно-скалярного произведения равен 1 и достигается, если оси образуют ортогональный трехгранник.

Единичные векторы осей чувствительности ориентированы по взаимно ортогональным ребрам единичного куба. В наиболее удобной системе координат с осями  $x, y, z$  это векторы:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

Векторно-скалярное произведение этих векторов  $\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)$  выражается детерминантом

$$\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \Delta_{123} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Этот трехгранник можно представить как три образующих кругового конуса, равномерно распределенных по его поверхности. Если ось конуса ориентировать по оси  $z$ , то единичные векторы осей чувствительности могут иметь вид:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ \cos \alpha \\ \sin 120^\circ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ \cos \alpha \\ -\sin 120^\circ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix},$$

Или, если подставить значения тригонометрических функций

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -0.5 \cos \alpha \\ 0.5\sqrt{3} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -0.5 \cos \alpha \\ -0.5\sqrt{3} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

При  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$  единичные векторы взаимно ортогональны, их детерминант (векторно-скалярное произведение)

$$\Delta_{123} = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ -0.5 \cos \alpha & 0.5\sqrt{3} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -0.5 \cos \alpha & -0.5\sqrt{3} \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \sqrt{3} \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha \quad (3.3)$$

принимает максимальное (как функция угла  $\alpha$ ) значение, равное единице, при выписанных чуть выше значениях тригонометрических функций угла  $\alpha$ .

### 3.1.2. Число измерительных осей равно четырем ( $n = 4$ ).

К трем единичным векторам (3.2) добавим четвертый.

$\vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , его векторно-скалярное произведение с любой парой первых трех одинаково по модулю и равно (по модулю)

$$\vec{e}_4 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -0.5 \cos \alpha & 0.5\sqrt{3} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -0.5 \cos \alpha & -0.5\sqrt{3} \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cos^2 \alpha \quad (3.4)$$

Векторно-скалярные произведения (3.3) и (3.4) сравниваются между собой при

$$\sin \alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (3.5)$$

и принимают значение

$$\Delta = \frac{4}{3\sqrt{3}} \quad (3.6)$$

При таком значении угла  $\alpha$  векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$  по взаимной ориентации совпадают с нормальными к граням тетраэдра. Если у вектора  $\vec{e}_1$  сменить знак, то скалярные произведения всех четырех векторов на вектор

$$\vec{l} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

сравниваются:

$$\begin{aligned} -\vec{e}_1 \cdot \vec{l} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos \alpha - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} & \vec{e}_2 \cdot \vec{l} &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \cos \alpha + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{l} &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \cos \alpha + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} & \vec{e}_4 \cdot \vec{l} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(3.8)

Если ось  $z$  системы координат сориентировать по вектору  $\vec{l}$ , то все четыре вектора  $\vec{e}$  будут лежать на том же конусе, что и векторы (3.2).

Составляющие векторов  $-\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ , ортогональные вектору  $\vec{l}$ , можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
 -\vec{e}_1 - \vec{l}(\vec{e}_1 \cdot \vec{l}) &= \begin{vmatrix} -\cos \alpha \\ 0 \\ -\sin \alpha \end{vmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 \\ -\sin \alpha - \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \end{vmatrix}, \\
 \vec{e}_2 - \vec{l}(\vec{e}_2 \cdot \vec{l}) &= \begin{vmatrix} -0.5 \cos \alpha \\ 0.5\sqrt{3} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{vmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.5 \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0.5\sqrt{3} \cos \alpha \\ \sin \alpha - \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{vmatrix}, \\
 \vec{e}_3 - \vec{l}(\vec{e}_3 \cdot \vec{l}) &= \begin{vmatrix} -0.5 \cos \alpha \\ -0.5\sqrt{3} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{vmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.5 \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{3} \\ -0.5\sqrt{3} \cos \alpha \\ \sin \alpha - \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{vmatrix}, \\
 \vec{e}_4 = -\vec{l}(\vec{e}_4 \cdot \vec{l}) &= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{vmatrix},
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Эти составляющие либо противоположно направлены, либо ортогональны, значит, сами векторы равномерно распределены по поверхности кругового конуса и лежат в двух взаимно ортогональных плоскостях. В системе координат с осью  $z$ , направленной по оси конуса, рассмотренные векторы, с учетом смены знака у  $\vec{e}_1$ , имеют вид:

$$\vec{e}_1 = \begin{vmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{vmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{vmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{vmatrix} -\cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{vmatrix}, \quad \vec{e}_4 = \begin{vmatrix} 0 \\ -\cos \alpha \\ \sin \alpha \end{vmatrix},$$

При том же, что и (1.2) значении угла  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Модуль векторно-скалярного произведения любой тройки указан в (3.6) и равен

$$\Delta = \frac{4}{3\sqrt{3}} = 0.7698, \text{ не на много меньше единицы.}$$

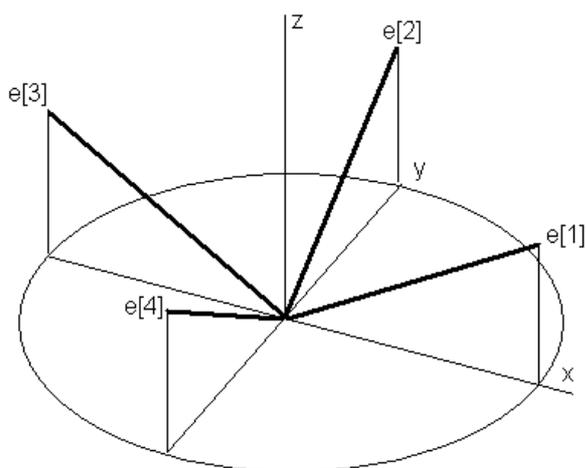


Рисунок 3.1 Расположение осей чувствительности в четырехосном блоке

### 3.1.3. Число измерительных осей равно пяти ( $n = 5$ ).

Пять осей расположим равномерно на круговом конусе (3.2)

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos 72^\circ \cos \alpha \\ \sin 72^\circ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -\cos 36^\circ \cos \alpha \\ \sin 36^\circ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\vec{e}_4 = \begin{pmatrix} -\cos 36^\circ \cos \alpha \\ -\sin 36^\circ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_5 = \begin{pmatrix} \cos 72^\circ \cos \alpha \\ -\sin 72^\circ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Векторно-скалярное произведение

$$\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_5) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos 72^\circ \cos \alpha & \cos 72^\circ \cos \alpha \\ 0 & \sin 72^\circ \cos \alpha & -\sin 72^\circ \cos \alpha \\ \sin \alpha & \sin \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} = \sin \alpha \cos^2 \alpha \begin{vmatrix} 1 & \cos 72^\circ & \cos 72^\circ \\ 0 & \sin 72^\circ & -\sin 72^\circ \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \sin \alpha \cos^2 \alpha \begin{vmatrix} 1 & \cos 72^\circ - 1 & \cos 72^\circ - 1 \\ 0 & \sin 72^\circ & -\sin 72^\circ \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \sin \alpha \cos^2 \alpha \cdot 2(1 - \cos 72^\circ) \sin 72^\circ \quad (3.11)$$

При  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ,  $2 \sin \alpha \cos^2 \alpha = \frac{4}{3\sqrt{3}} = 0.7698$ .

Принимая во внимание, что  $\sin 72^\circ = 0.951$  и  $\cos 72^\circ = 0.309$ , получим

$$\Delta_{125} = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_5) = 0.506$$

Такие же по модулю значения принимают детерминанты (векторно-скалярные произведения)  $\Delta_{231}$ ,  $\Delta_{342}$ ,  $\Delta_{453}$  и  $\Delta_{512}$ .

Другой вариант детерминанта

$$\Delta_{134} = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_3 \times \vec{e}_4) = \sin \alpha \cos^2 \alpha \begin{vmatrix} 1 & -\cos 36^\circ & -\cos 36^\circ \\ 0 & \sin 36^\circ & -\sin 36^\circ \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \sin \alpha \cos^2 \alpha \begin{vmatrix} 1 & -\cos 36^\circ - 1 & -\cos 36^\circ - 1 \\ 0 & \sin 36^\circ & -\sin 36^\circ \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha \sin 36^\circ (\cos 36^\circ + 1)$$

Принимая во внимание, что  $\sin 36^\circ = 0.588$  и  $\cos 36^\circ = 0.809$ , получим

$$\Delta_{134} = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_3 \times \vec{e}_4) = 0.819$$

Такие же значения по модулю имеют остальные четыре комбинации (всего их  $C_5^3 = 10$ ). Таким образом, среднее значение детерминанта для всех троек из пяти осей, лежащих на конусе равно 0.6625.

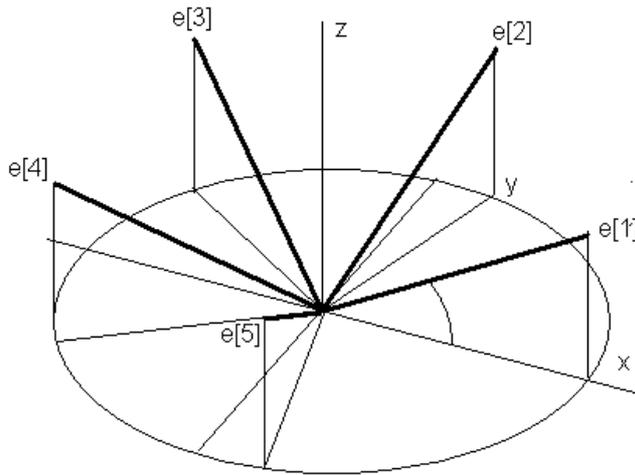


Рисунок 3.2 Расположение осей чувствительности в пятиосном блоке

### 3.1.4. Число измерительных осей равно шести ( $n = 6$ ).

На том же круговом конусе (3.2) равномерно разместим шесть осей

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ \cos \alpha \\ \sin 60^\circ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} -\cos 60^\circ \cos \alpha \\ \sin 60^\circ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix},$$

$$\bar{e}_4 = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_5 = \begin{pmatrix} -\cos 60^\circ \cos \alpha \\ -\sin 60^\circ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_6 = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ \cos \alpha \\ -\sin 60^\circ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix},$$

Или, если подставить значения тригонометрических функций

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0.5 \cos \alpha \\ 0.5\sqrt{3} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} -0.5 \cos \alpha \\ 0.5\sqrt{3} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix},$$

(3.12)

$$\bar{e}_4 = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_5 = \begin{pmatrix} -0.5 \cos \alpha \\ -0.5\sqrt{3} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_6 = \begin{pmatrix} 0.5 \cos \alpha \\ -0.5\sqrt{3} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

Детерминанты различных троек векторов имеют три варианта значений модуля

$$\begin{aligned} \Delta_{123} = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) &= \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0.5 \cos \alpha & 0.5\sqrt{3} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -0.5 \cos \alpha & 0.5\sqrt{3} \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} = 0.5\sqrt{3} \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha \\ \Delta_{124} = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_4) &= \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0.5 \cos \alpha & 0.5\sqrt{3} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\cos \alpha & 0 & \sin \alpha \end{vmatrix} = \sqrt{3} \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha \\ \Delta_{135} = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_3 \times \vec{e}_5) &= \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ -0.5 \cos \alpha & 0.5\sqrt{3} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -0.5 \cos \alpha & -0.5\sqrt{3} \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} = 1.5\sqrt{3} \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha \end{aligned} \quad (3.13)$$

При соответствующих выбранному конусу  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

детерминанты принимают значения

$$\Delta_{123} = \frac{1}{3}, \quad \Delta_{124} = \frac{2}{3}, \quad \Delta_{135} = 1 \quad (3.14)$$

Из 20 различных комбинаций по три оси в каждой (из шести) значения  $\frac{1}{3}$  и  $\frac{2}{3}$  повторяются по 6 и по 12 раз соответственно, а значение 1 - два раза.

Сумма всех двадцати детерминантов составит

$$\sum \Delta_{ijk} = 6 \cdot \frac{1}{3} + 12 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot 1 = 12,$$

Так что среднее значение детерминанта составляет 0.6.

Можно показать, что это значение немного увеличивается (до значения 0.615), если к пятиосному варианту, с немного подправленным значением угла  $\alpha$  ( $\sin \alpha^* = 0.477$ , вместо 0.577 в пятиосном) добавить шестую ось, ориентированную по оси z. Детерминанты, в этом случае, принимают два различных значения: 0.47 и 0.76, по 10 вариантов конфигурации для каждого.

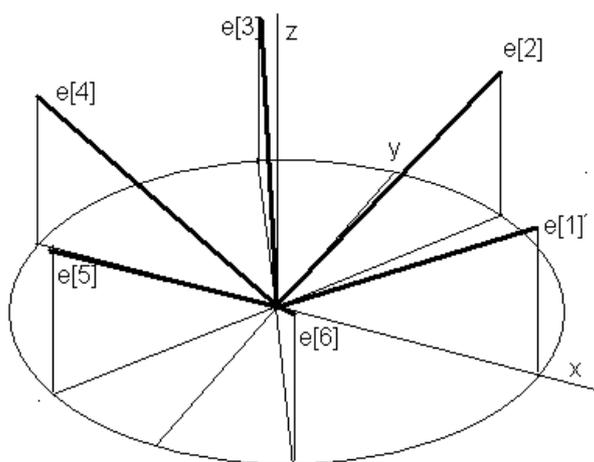


Рисунок 3.3 Расположение осей чувствительности в шестиосном блоке

## 3.2 Формирование замера при избыточном количестве измеряющих осей.

### 3.2.1 Формирование замера при произвольном расположении измеряющих осей.

Пусть номинальная ориентация  $n$  осей чувствительности задана матрицей  $A$ , размерности  $n \times 3$ , каждая строчка которой состоит из компонент единичного вектора соответствующей оси. Тогда, при истинном значении измеряемого трехмерного вектора  $r$ , представленного в виде матрицы-столбца, идеальные отсчеты  $n$  чувствительных элементов можно представить вектором-столбцом  $h$ , размерности  $n \times 1$ . Точные значения векторов  $r$  и  $h$  связаны соотношением

$$h^* = Ar^* \quad (3.15)$$

Звездочка означает, что значение точное.

Вектор реальных замеров  $h$  содержит погрешность измерений и в общем случае не совпадает с точным значением. Задача формирования замера сводится к построению оценки  $r$  для вектора  $r^*$  по вектору  $h$ . В силу отличия  $h$  от  $h^*$  в общем случае нет возможности найти такой вектор  $r$ , чтобы выполнялось соотношение

$$h = Ar \quad (3.16)$$

Но можно найти такое  $r$ , чтобы соотношение

$$h + \Delta h = Ar \quad (3.17)$$

выполнялось при минимальном по модулю векторе  $\Delta h$ . Надо найти такое  $r$ , при котором сумма квадратов компонент вектора  $\Delta h$

$$J = \Delta h^T \Delta h = (Ar - h)^T (Ar - h) \quad (3.18)$$

принимает минимальное значение.

Раскрывая скобки в правой части, можно записать

$$J = r^T A^T Ar - r^T A^T h - h^T Ar + h^T h = r^T A^T Ar - 2r^T A^T h + h^T h \quad (3.19)$$

Коэффициент 2 появился потому, что все слагаемые – скаляры, а транспонирование скаляра не меняет его значения.

Если трехмерный вектор-столбец с единичкой на  $k$ -том месте и остальными нулями обозначить  $l_k$ , то частную производную  $J$  по  $k$ -той компоненте вектора  $r$  можно представить в виде

$$\frac{\partial J}{\partial r_k} = l_k^T A^T Ar + r^T A^T A l_k - 2l_k^T A^T h = 2l_k^T A^T Ar - 2l_k^T A^T h \quad (3.20)$$

При выполнении матричного равенства

$$A^T Ar = A^T h, \quad (3.21)$$

которое можно рассматривать как линейное уравнение для нахождения вектора  $r$ , все три частных производных обнуляются.

Таким образом, алгоритм формирования замера  $r$ , обеспечивающего минимизацию суммы квадратов невязок, сводится к решению линейной системы уравнений (3.21).

$$r = (A^T A)^{-1} A^T h \quad (3.22)$$

Если статистика погрешностей чувствительных элементов по различным осям различна, то минимизировать лучше взвешенную сумму квадратов (каждый квадрат невязки со своим коэффициентом). Весовые коэффициенты удобно свести в диагональную матрицу размерности  $n \times n$ , обозначим ее  $D$ . Взвешенная сумма квадратов невязок принимает вид

$$J = \sum_{i=1}^n \Delta h_i^2 d_i = \Delta h^T D \Delta h = (Ar - h)^T D (Ar - h) \quad (3.23)$$

Выкладки, аналогичные выполненным, приводят к линейному уравнению для нахождения  $r$ :

$$A^T D A r = A^T D h \quad (3.24)$$

### 3.2.2 Формирование замера при симметричном расположении измеряющих осей.

При симметричном размещении  $n$  осей по конусу с углом раствора  $\alpha$ , ориентацию  $i$ -той оси можно задать строкой матрицы ориентации осей

$$A_i = \|\cos \alpha \cdot \cos \beta_i \quad \cos \alpha \cdot \sin \beta_i \quad \sin \alpha\| \quad (3.25)$$

при  $i$ , меняющемся от 0 до  $n$ , и  $\beta_i = 2\pi i / n$

Уравнение для формирования замера  $r$  принято в виде (3.21) с решением (3.22), требующим обращения матрицы  $A^T A$ .

С учетом выражения (3.25) для строк матрицы  $A$ , можно записать

$$A^T A = \left\| \begin{array}{ccc} \cos^2 \alpha \cdot \sum_i \cos^2 \beta_i & \cos^2 \alpha \cdot \sum_i \cos \beta_i \sin \beta_i & \cos \alpha \sin \alpha \sum_i \cos \beta_i \\ \cos^2 \alpha \cdot \sum_i \cos \beta_i \sin \beta_i & \cos^2 \alpha \cdot \sum_i \sin^2 \beta_i & \cos \alpha \sin \alpha \sum_i \sin \beta_i \\ \cos \alpha \sin \alpha \sum_i \cos \beta_i & \cos \alpha \sin \alpha \sum_i \sin \beta_i & \sin^2 \alpha \sum_i 1 \end{array} \right\| \quad (3.26)$$

В силу равномерности распределения углов по окружности, все недиагональные элементы матрицы обнуляются, так что

$$A^T A = \left\| \begin{array}{ccc} \cos^2 \alpha \cdot \sum_i \cos^2 \beta_i & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \alpha \cdot \sum_i \sin^2 \beta_i & 0 \\ 0 & 0 & n \cdot \sin^2 \alpha \end{array} \right\|$$

Опять же, в силу равномерности углов,

$$\sum_i \cos^2 \beta_i = \sum_i \sin^2 \beta_i = n/2, \text{ так как } \sum_i \cos^2 \beta_i + \sin^2 \beta_i = \sum_i 1 = n, \text{ поэтому}$$

$$A^T A_r = n \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \cos^2 \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2 \alpha \end{vmatrix}$$

С учетом значений

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Получаем

$$A^T A = \frac{n}{3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{n}{3} E$$

Значит

$$(A^T A)^{-1} = \frac{3}{n} E \quad (3.27)$$

Решение (3.22) принимает вид

$$r = \frac{3}{n} A^T h \quad (3.28)$$

### 3.3 Статистика погрешности замера.

#### 3.3.1 Достоверность замера.

При произвольной матрице  $A$ , строки которой задают единичные векторы измерительных осей, формирование замера вектора угловой скорости может строиться по формуле (3.22)

$$r = (A^T A)^{-1} A^T h \quad (3.29)$$

Дисперсионную матрицу погрешностей измерения вектора  $h$  можно считать диагональной вида,

$$P_h = pE, \quad (3.30)$$

где  $p$  - дисперсия замера по каждой оси.

Дисперсионная матрица погрешностей, построенного по формуле (3.29), вычисляется так:

$$P_r = (A^T A)^{-1} A^T P_h [(A^T A)^{-1} A^T]^T = p(A^T A)^{-1} A^T [(A^T A)^{-1} A^T]^T$$

$$= p(A^T A)^{-1} A^T A (A^T A)^{-1} = p(A^T A)^{-1}.$$

Таким образом, получено соотношение

$$P_r = p(A^T A)^{-1} \quad (3.31)$$

Для симметричного расположения  $n$  измерительных осей матрица  $(A^T A)^{-1}$  имеет вид (3.27)  $(A^T A)^{-1} = \frac{3}{n} E$ . В этом случае  $P_r = \frac{3d}{n} E$ .

Это значит, что дисперсия погрешности измерения вектора  $\vec{r}$  по любому направлению одна и та же и равна  $d_r = \frac{3d}{n}$ .

### 3.3.2 Оценка качества ЧЭ по отношению невязки к среднеквадратичному значению невязки.

Номинальная оценка измеряемого вектора задана формулой (3.29)

$$r = (A^T A)^{-1} A^T h$$

Соответствующие оценки проекции этого вектора на измерительные оси, обозначим их  $\hat{h}$ , могут быть записаны в виде

$$\hat{h} = Ar = A(A^T A)^{-1} A^T h \quad (3.32)$$

Отличие каждой компоненты этой оценки от показаний соответствующей измерительной оси

$$\Delta h = h - \hat{h} = [E - A(A^T A)^{-1} A^T] h \quad (3.33)$$

можно рассматривать как невязку показаний измерительной оси с оценкой этой проекции всей системой осей.

Считая дисперсионную матрицу погрешностей измерений  $h$

диагональной (3.30), можем сосчитать дисперсионную матрицу невязок

(3.33)

$$P^{\Delta h} = [E - A(A^T A)^{-1} A^T]^T P_h [E - A(A^T A)^{-1} A^T] =$$

$$= [E - A(A^T A)^{-1} A^T]^T [E - A(A^T A)^{-1} A^T] p =$$

$$= [E - 2A(A^T A)^{-1} A^T + A(A^T A)^{-1} A^T A (A^T A)^{-1} A^T] p =$$

$$= [E - 2A(A^T A)^{-1} A^T + A(A^T A)^{-1} A^T] p =$$

$$= [E - A(A^T A)^{-1} A^T] p$$

Т.е., для вычисления этой матрицы можно пользоваться формулой

$$P^{\Delta h} = [E - A(A^T A)^{-1} A^T] p \quad (3.34)$$

Диагональные элементы этой матрицы  $p_{ii}^{\Delta h}$  дают номинальные дисперсии невязок по каждой измерительной оси. Квадратный корень из них дает их среднеквадратичные значения (сигмы). С этими значениями  $\sqrt{p_{ii}^{\Delta h}}$  можно сравнивать фактические значения невязок  $\Delta h_i$ , сосчитанные по формуле (3.33), чтобы оценить насколько они соответствуют номинальной статистике. Например, превышение невязки по модулю уровня трех сигм, если это не очень редко, говорит о том, что с чувствительным элементом этой измерительной оси не все в порядке. Сравнение можно вести и не извлекая корень, сравнивая дисперсию с квадратом невязки.

### **3.4 Рабочий алгоритм формирования вектора поворота $r$ , размерности $(3 \times 1)$ , по вектору измерений $h$ , размерности $(n \times 1)$**

В рассматриваемом ниже рабочем алгоритме весовые коэффициенты измерительных осей, образующие диагональную матрицу  $D$ , формируются в зависимости от отношений квадратов фактически полученных невязок к номинальным значениям их дисперсий. Для полной системы осей, в силу симметрии номинальные значения дисперсий одинаковы для всех осей, но если не все оси в рабочем состоянии, то и номинальные дисперсии становятся различными, но их значения легко вычисляются, как это сказано в пояснениях к формуле (3.34). Вычисленные отношения квадратов невязок к их дисперсиям  $u[i]$  масштабируются умножением на одну и ту же величину так, чтобы их среднее значение было равно единице. Весовой коэффициент невязки принимается равным функции  $d[i] = 1/(1 + u[i]^{2k})$ , усиливающей отклонение

аргумента от единицы с отрицательной производной. Коэффициент усиления увеличивается с увеличением показателя степени  $k$ .

Номинальная ориентация измерительных осей задана матрицей  $A$ , размерности  $(n \times 3)$ . В подготовительном блоке алгоритма заготавливается матрица  $M$ , размерности  $(n \times n)$

$$M = E - A(A^T A)^{-1} A^T \quad (3.35)$$

Операции алгоритма (после получения вектора измерений  $h$ ):

$U$  - рабочая переменная, вектор размерности  $(n \times 1)$ .

$U = Mh$  - вектор невязок.

$u[i] = (u[i])^2 / m[ii]$  - деление квадратов компонент вектора  $U$  на диагональные элементы матрицы  $M$ , равные номинальным дисперсиям невязок

$S$  - рабочая переменная, скаляр.  $S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u[i]$

$U = U / S$  - масштабирование отношений.

$k = 2$  - рабочая переменная, скаляр.

$$d[i, i] = 1 / (1 + u[i]^{2k}) \quad (3.36)$$

$d[i, i]$  - вектор отношений, после выполненных преобразований, служит диагональю матрицы  $D$  размерности  $(n \times n)$ .

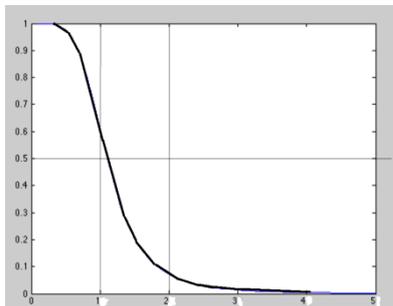


Рисунок 3.4 Вид функции  $d = 1 / (1 + u^4)$

Выходная переменная, вектор  $r$ , вычисляется по формуле

$$r = (A^T D A)^{-1} A^T D h \quad (3.37)$$

### **3.5 Заключение по главе 3**

Предложен алгоритм формирования выходной информации о трехмерном векторе при наличии избыточного количества осей чувствительности соответствующих измерителей. Алгоритм не меняет своей формы при отказе допустимого количества чувствительных элементов. Алгоритм позволяет использовать индивидуальные весовые коэффициенты для учета информации каждого ЧЭ. Предложен алгоритм формирования весовых коэффициентов по сравнительному анализу показаний ЧЭ.

## 4 Математическое моделирование работы БЧЭ с избыточным количеством осей чувствительности

### 4.1 Влияние инструментальных погрешностей.

Отклонение реальных показаний измерительных осей, вектора  $h$ , от фактических поворотов блока ЧЭ вокруг осей номинальной ориентации  $h^*$  приводит к погрешности определения вектора поворота. При отсутствии управления весами невязок, погрешность в векторе поворота, в проекциях на оси блока, выражается соотношением

$$\Delta r = (A^T A)^{-1} A^T \Delta h \quad (4.1)$$

Постоянные дрейфы ДУСов, их можно характеризовать вектором  $\Delta h_{const}$ , приводят к постоянному, в проекциях на приборные оси, дрейфу базового трехгранника. На каждом такте постоянный поворот

$$\Delta r_{const} = (A^T A)^{-1} A^T \Delta h_{const} \quad (4.2)$$

Его влияние на погрешность вычисления ориентации, несмотря на постоянство дрейфа, не может быть вычислено заранее, поскольку зависит от углового движения объекта.

Отклонение ориентации измерительных осей и отклонения от номинала их масштабных коэффициентов можно характеризовать отклонением элементов матрицы  $A$  от их номинальных значений. Эти отклонения удобно записать в виде погрешности матрицы  $\Delta A$ , так чтобы фактические показания ДУСов можно было представить в виде

$$h + \Delta h = (A + \Delta A)r^* + \Delta h_{const} \quad (4.3)$$

Тогда можно считать

$$\Delta h = \Delta A r^* + \Delta h_{const}$$

Погрешность в определении вектора поворота, связанная с искажением матрицы  $A$  представляется, таким образом, в виде

$$\Delta r = (A^T A)^{-1} A^T (\Delta A r^* + \Delta h_{const}) \quad (4.4)$$

Формулы (4.2) и (4.4) определяют влияние инструментальных погрешностей ДУС на точность определения вектора поворота. Связанная с этими погрешностями ошибка вычисления ориентации зависит от углового движения объекта.

## 4.2 Работа БЧЭ на орбитальном режиме вращения

При стабилизации на орбите объект равномерно вращается с угловой скоростью орбитального движения вокруг оси, ортогональной плоскости орбиты. Проекции угловой скорости на базовые оси блока чувствительных элементов остаются постоянными. В этом случае все инструментальные погрешности, учтенные формулами (4.2) и (4.4) сводятся к дрейфу, постоянному в проекциях на вращающиеся оси базового трехгранника блока ЧЭ. Накапливающаяся погрешность вычисления ориентации может быть проанализирована аналитически. Дрейф, в виде малого угла поворота за такт, определенный формулами (4.2) и (4.4), надо разложить на две составляющие:

$\Delta\omega_{\parallel}$  - дрейф, коллинеарный угловой скорости вращения объекта, и

$\Delta\omega_{\perp}$  - дрейф, ортогональный угловой скорости вращения объекта.

Реальное движение – равномерное вращение вокруг некоторой неподвижной оси, вычисляемое движение - равномерное вращение вокруг оси несколько отклоненной от оси реального вращения на угол, пропорциональный модулю  $\Delta\omega_{\perp}$ , с угловой скоростью, отличающейся от реальной на величину  $\Delta\omega_{\parallel}$ . Отклонение вычисленной ориентации от реальной выражается произведением двух кватернионов с линейно растущими углами поворота.

Математическим моделированием выполнен анализ влияния инструментальных погрешностей одной из осей шестиосного БЧЭ при различных комбинациях (и их количества) функционирующих осей. В

качестве инструментальных погрешностей рассматриваются – постоянный дрейф 0.01 градуса в час, отклонение масштабного коэффициента на 0.0002 (от единицы), перекос оси чувствительности на 30 дуговых секунд в двух ортогональных направлениях. Инструментальные погрешности во всех отмоделированных вариантах приписываются первой измерительной оси – ДУС\_1.

Результаты расчетов погрешностей вычисления ориентации для орбитального режима в течение суток (24 часа) приведены в таблицах.

Таблица 4. Влияние постоянного дрейфа ДУС\_1 (0.01 град. в час). Шестиосный вариант блока ЧЭ. 24 часа работы на орбите.

Вращение 0.07 град в сек. вокруг оси	Скорости дрейфа трехгранника [град/мин]		Накопленная погрешность вычисления ориентации [дуг. сек]		Активные оси с №					
	$\Delta\omega_{II}$	$\Delta\omega_{\perp I}$	$\Delta S_{II}$	$\Delta S_{\perp I}$	1	2	3	4	5	6
1-0-0	0.0070	0.0251	607.19	20.59	+	+	+	+		
	0.0087	0.0134	758.94	11.02	+		+	+	+	
	0.0070	0.0251	607.19	20.59	+	+		+	+	
	0.0063	0.0113	546.47	9.31	+	+	+	+	+	
	0.0070	0.0113	607.19	9.31	+	+	+	+		+
	0.0063	0.0038	546.47	3.15	+	+	+		+	+
	0.0052	0.0057	455.39	4.72	+	+	+	+	+	+
0-1-0	-0.0091	0.0214	-788.77	17.55	+	+	+	+		
	0.0000	0.0211	0.00	18.12	+		+	+	+	
	-0.0045	0.0180	-394.36	14.75	+	+		+	+	
	-0.0030	0.0170	-262.92	13.94	+	+	+	+	+	
	0.0000	0.0120	0.00	9.83	+	+	+	+		+
	0.0000	0.0145	0.00	11.92	+	+	+		+	+
	-0.0000	0.0120	-0.00	9.83	+	+	+	+	+	+
0-0-1	0.0086	0.0222	748.29	18.18	+	+	+	+		
	0.0067	0.0175	581.96	14.37	+		+	+	+	
	0.0043	0.0182	374.12	14.94	+	+		+	+	
	0.0048	0.0153	415.72	12.53	+	+	+	+	+	
	0.0028	0.0105	249.43	8.62	+	+	+	+		+
	0.0019	0.0140	166.27	11.50	+	+	+		+	+
	0.0028	0.0105	249.43	8.62	+	+	+	+	+	+

Таблица 5. Влияние отклонения масштабного коэффициента ДУС\_1 (0.0002). Шестиосный вариант блока ЧЭ. 24 часа работы на орбите.

Вращение 0.07 град в сек. вокруг оси	Скорости дрейфа трехгранника [град/мин]		Накопленная погрешность вычисления ориентации [дуг. сек]		Активны оси с №					
	$\Delta\omega_{II}$	$\Delta\omega_{\perp I}$	$\Delta S_{II}$	$\Delta S_{\perp I}$	1	2	3	4	5	6
1-0-0	0.0224	0.0802	1935.49	65.66	+	+	+	+		
	0.0280	0.0429	2419.20	35.14	+		+	+	+	
	0.0252	0.0401	2177.28	32.83	+	+		+	+	
	0.0201	0.0362	1741.94	29.70	+	+	+	+	+	
	0.0168	0.0184	1451.62	15.06	+	+	+	+		+
	0.0224	0.0122	1935.36	10.04	+	+	+		+	+
	0.0168	0.0184	1451.62	15.06	+	+	+	+	+	+
0-0-1	0.0252	0.0646	2177.43	52.90	+	+	+	+		
	0.0196	0.0511	1693.43	41.84	+		+	+	+	
	0.0126	0.0537	1088.63	43.48	+	+		+	+	
	0.0140	0.0445	1209.68	36.47	+	+	+	+	+	
	0.0084	0.0306	725.81	25.10	+	+	+	+		+
	0.0056	0.0408	483.83	33.47	+	+	+		+	+
	0.0084	0.0306	725.81	25.10	+	+	+	+	+	+

При вращении вокруг оси 0 – 1 – 0, это ось  $y$ , проекция угловой скорости на ось чувствительности ДУС\_1 равна нулю, поэтому отклонение его масштабного коэффициента не вызывает погрешности в замере вектора угловой скорости. Эти нули в таблицу не включены.

Таблица 6. Влияние перекоса оси чувствительности ДУС\_1 (30 дуговых секунд вокруг оси, пересекающейся с осью  $z$ ). Шестиосный вариант блока ЧЭ.

Вращение 0.07 град в сек. вокруг оси	Скорости дрейфа трехгранника [град/мин]		Накопленная погрешность вычисления ориентации [дуг. сек]		Активны оси с №					
	$\Delta\omega_{\parallel}$	$\Delta\omega_{\perp}$	$\Delta S_{\parallel}$	$\Delta S_{\perp}$	1	2	3	4	5	6
	0.0334	0.0786	2891.01	64.34	+	+	+	+		
	0.0000	0.0811	0.00	66.41	+		+	+	+	
	0.0167	0.0660	1445.40	54.08	+	+		+	+	
	0.0111	0.0624	963.67	51.09	+	+	+	+	+	
	0.0000	0.0440	0.00	36.05	+	+	+	+		+
	0.0000	0.0534	0.00	43.71	+	+	+		+	+
	0.0000	0.0440	0.00	36.05	+	+	+	+	+	+

При этом перекосе ось чувствительности ДУС\_1 отклоняется ровно в сторону оси  $y$ , поэтому погрешность в измерении вектора угловой скорости возникает только от вращения вокруг этой оси, вращение вокруг осей  $1 - 0 - 0$ , это ось  $x$ , и  $0 - 0 - 1$ , ось  $z$ , погрешности в замере вектора угловой скорости не вызывает.

Таблица 7. Влияние перекоса оси чувствительности ДУС\_1 (30 дуговых секунд вокруг оси, ортогональной оси  $z$ ). Шестиосный вариант блока ЧЭ.

Вращение 0.07 град в сек. вокруг оси	Скорости дрейфа треугольника [град/мин]		Накопленная погрешность вычисления ориентации [дуг. сек]		Активные оси с №					
	$\Delta\omega_{II}$	$\Delta\omega_{\perp I}$	$\Delta S_{II}$	$\Delta S_{\perp I}$	1	2	3	4	5	6
1-0-0	-0.0148	0.0532	-1284.89	43.58	+	+	+	+		
	-0.0185	0.0285	-1606.00	23.33	+		+	+	+	
	-0.0167	0.0266	-1445.40	21.79	+	+		+	+	
	-0.0133	0.0240	-1156.40	19.72	+	+	+	+	+	
	-0.0111	0.0122	-963.67	10.00	+	+	+	+		+
	-0.0148	0.0081	-1284.80	6.66	+	+	+		+	+
	-0.0111	0.0122	-963.67	10.00	+	+	+	+	+	+
0-0-1	0.0200	0.0514	1734.60	42.14	+	+	+	+		
	0.0156	0.0407	1349.04	33.33	+		+	+	+	
	0.0100	0.0423	867.24	34.64	+	+		+	+	
	0.0111	0.0355	963.67	20.05	+	+	+	+	+	
	0.0066	0.0244	578.20	20.00	+	+	+	+		+
	0.0044	0.0325	385.44	26.66	+	+	+		+	+
	0.0066	0.0244	578.20	20.00	+	+	+	+	+	+

Угловая скорость вокруг оси  $y$  погрешности не вызывает.

Результаты моделирования трех вариантов из Таблицы 4 приведены на графиках рисунков 4.1 – 4.3. Графически изображена погрешность вычисления ориентации. Погрешность ориентации представлена двумя составляющими. Одна составляющая линейно растет со временем, она вызвана той составляющей погрешности измерения вектора угловой скорости, которая коллинеарна вектору угловой скорости вращения объекта. Эта составляющая погрешности измерения вектора угловой скорости в неподвижных осях постоянна, поэтому и приводит к

линейному росту погрешности вычисления ориентации, если только сама не равна нулю. Вторая составляющая – периодическая, вызвана той составляющей погрешности измерения вектора угловой скорости, которая ортогональна вектору угловой скорости вращения объекта. В неподвижных осях эта составляющая погрешности измерения вектора угловой скорости равномерно вращается вместе с объектом, ее среднее значение равно нулю, поэтому нет линейного роста погрешности вычисления ориентации, остается только периодическая погрешность. На графике выведен модуль этой составляющей.

Ось времени на графиках проградуирована в 10-минутных интервалах (такт вывода на печать), погрешность дана в дуговых секундах.



Рисунок 4. 1 Погрешность определения ориентации шестисосным БЧЭ при использовании первых четырех измерительных осей.

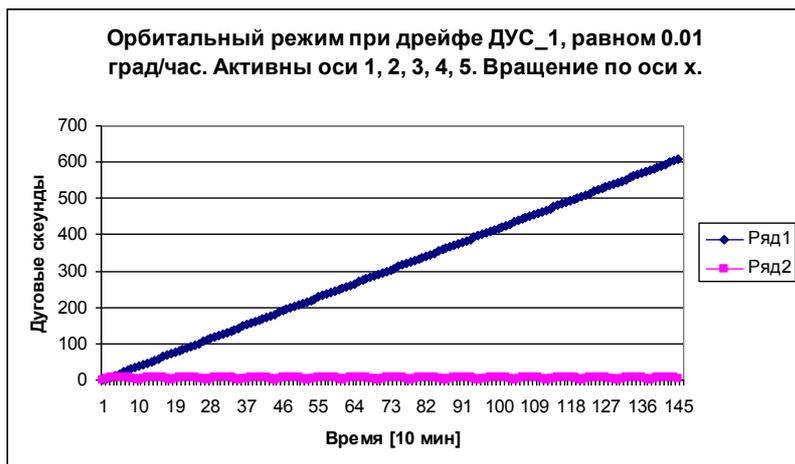


Рисунок 4. 2 Погрешность определения ориентации шестиосным БЧЭ при использовании первых пяти измерительных осей.

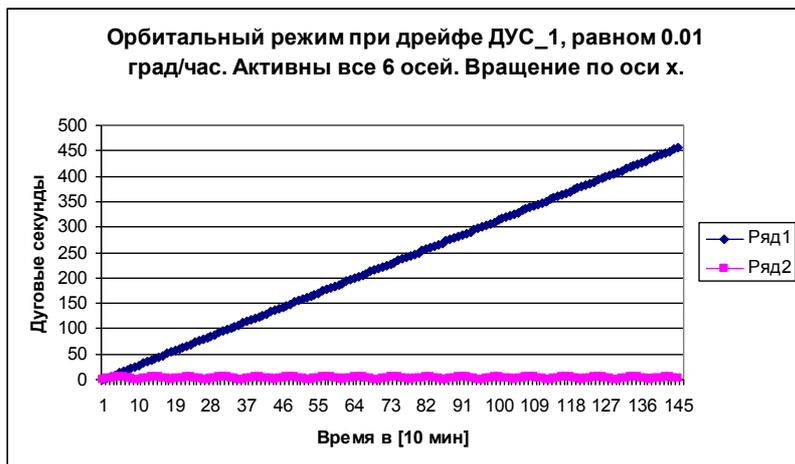


Рисунок 4. 3 Погрешность определения ориентации шестиосным БЧЭ при использовании всех шести измерительных осей.

Результаты расчетов влияния инструментальных погрешностей при использовании всех шести осей чувствительности собраны в таблице 8.

Таблица 8. Работа шестиосного БЧЭ с полным комплектом функционирующих осей при наличии инструментальных погрешностей.

Вращение 0.07 град в сек. вокруг оси	Скорость дрейфа трехгранника [град/мин]		Погрешность вычисления ориентации [дуг. сек]		Инструм. погрешн.
	$\Delta\omega_{\parallel}$	$\Delta\omega_{\perp}$	$\Delta S_{\parallel}$	$\Delta S_{\perp}$	
1 – 0 – 0	0.0052	0.0057	455.39	4.72	дрейф
	0.0168	0.0184	1451.62	15.06	масштаб
	0	0	0	0	Перекос $\alpha$
	-0.0111	0.0122	-963.67	10.00	Перекос $\beta$
	0.0109	0.0119	943.09	9.78	Все вместе
0 – 1 – 0	0	0.0120	0	9.83	дрейф
	0	0	0	0	масштаб
	0	0.0440	0	36.050	Перекос $\alpha$
	0	0	0	0	Перекос $\beta$
	0	0.0320	0	26.22	Все вместе
0 – 0 – 1	0.0028	0.0105	249.43	8.62	дрейф
	0.0084	0.0306	725.81	25.10	масштаб
	0	0	0	0	Перекос $\alpha$
	0.0066	0.0244	578.20	20.00	Перекос $\beta$
	0.0179	0.0656	1553.45	53.73	Все вместе

Для периодической составляющей погрешности в таблицах приводится ее модуль, поэтому эта погрешность при совместном действии инструментальных погрешностей не равна простой сумме погрешностей, вызванных исходными инструментальными погрешностями.

Результаты моделирования БЧЭ с различным количеством осей чувствительности при функционировании всех имеющихся осей при действии всех моделируемых инструментальных погрешностей по оси ДУС-1 сведены в таблицу 9.

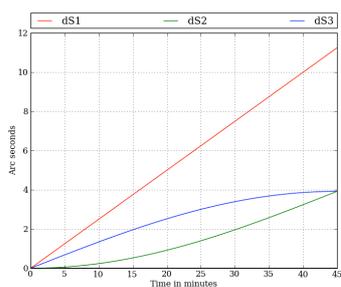
Таблица 9. Погрешности БЧЭ с различным количеством осей чувствительности при функционировании всех имеющихся осей при одновременном действии всех моделируемых инструментальных погрешностей на оси ДУС-1

Вращение 0.07 град в сек. вокруг оси	Скорость дрейфа треугольника [град/мин]		Погрешность вычисления ориентации [дуг. сек]		Число осей В блоке ЧЭ
	$\Delta\omega_{//}$	$\Delta\omega_{\perp}$	$\Delta S_{//}$	$\Delta S_{\perp}$	
1 – 0 – 0	0.0163	0.0179	1414.63	14.68	четыре
	0.0130	0.0143	1131.70	11.74	пять
	0.0109	0.0119	943.09	9.78	шесть
0 – 1 – 0	0	0.0480	0	39.33	четыре
	0	0.0384	0	31.47	пять
	0	0.0320	0	26.22	шесть
0 – 0 – 1	0.0269	0.0984	2330.17	80.60	четыре
	0.0215	0.0787	1864.14	64.48	пять
	0.0179	0.0656	1553.45	53.73	шесть

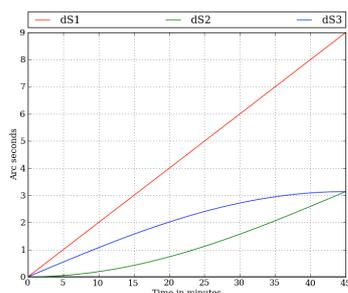
### 4.3 Работа БЧЭ в режиме разворота.

Режим разворота состоит в равномерном повороте на 90 градусов за 45 секунд.

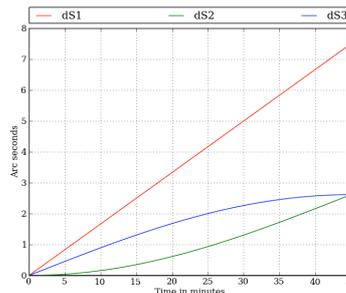
Разворот выполняется вокруг каждой координатной оси ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ).  
Поведение погрешности вычисления ориентации для БЧЭ с различным количеством осей чувствительности иллюстрируется графиками рисунков 4.6 – 4.8 и таблицей 10.



Четырехосный БЧЭ

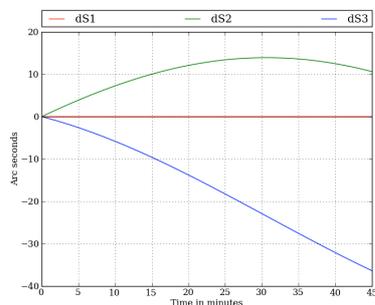


Пятиосный БЧЭ

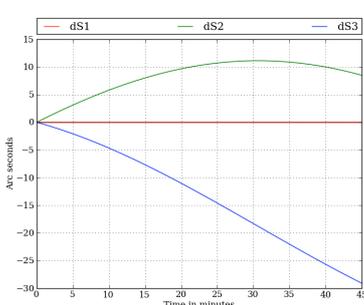


Шестиосный БЧЭ

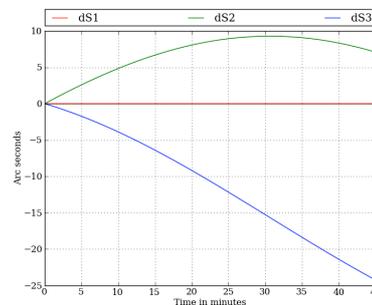
Рисунок 4.6 Разворот на 90 градусов (2 град./сек) вокруг оси  $x$  при действии всех инструментальных погрешностей (шкала времени - в секундах)



Четырехосный БЧЭ

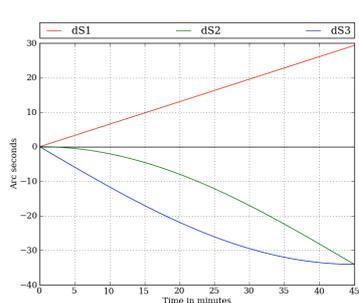


Пятиосный БЧЭ

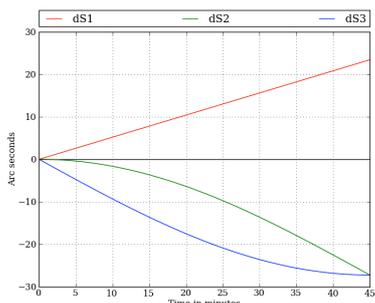


Шестиосный БЧЭ

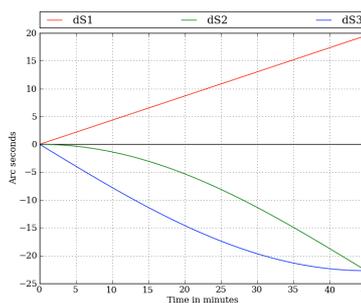
Рисунок 4.7 Разворот на 90 градусов (2 град./сек) вокруг оси  $y$  при действии всех инструментальных погрешностей (шкала времени - в секундах)



Четырехосный БЧЭ



Пятиосный БЧЭ



Шестиосный БЧЭ

Рисунок 4.8 Разворот на 90 градусов (2 град./сек) вокруг оси  $z$  при действии всех инструментальных погрешностей (шкала времени - в секундах)

Таблица 10. Максимальные погрешности при разворотах

Поворот на 90 град. за 45 секунд вокруг оси	Погрешность вычисления ориентации [дуг. сек]	Число осей в блоке ЧЭ
1 – 0 – 0	12	Четыре
	10	Пять
	8	Шесть
0 – 1 – 0	38	Четыре
	28	Пять
	24	Шесть
0 – 0 – 1	48	Четыре
	38	Пять
	34	Шесть

#### 4.4 Использование весовых коэффициентов

Все изложенные выше в этой главе исследования выполнены без использования возможности регулирования весовых коэффициентов функционирующих осей в зависимости от вычисленных для них невязок. Это позволило более четко представить вклад инструментальных погрешностей выбранной оси в погрешность вычисления ориентации в целом. Использование весовых коэффициентов дает возможность оперативного уменьшения влияния на результат вычислений показаний оси, отклоняющейся от нормативного уровня погрешностей. Результаты моделирования работы БЧЭ с использованием алгоритма регулирования

весовых коэффициентов, полученные на примере шестиосного БЧЭ, представлены в таблицах.

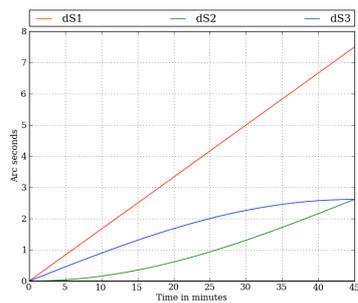
Таблица 11. Шестиосный вариант блока ЧЭ при работе всех шести осей. Сравнение погрешностей вычисления ориентации в орбитальном режиме при действии на ДУС\_1 всего комплекта инструментальных погрешностей.

Вращение 0.07 град в сек. вокруг оси	Скорость дрейфа трехгранника		Погрешность вычисления ориентации [дуг. сек]		Использование весовых коэффициентов.
	$\Delta\omega_{\parallel}$	$\Delta\omega_{\perp}$	$\Delta S_{\parallel}$	$\Delta S_{\perp}$	
1 – 0 – 0	0.0109	0.0119	943.09	9.78	нет
	0.0016	0.0020	139.00	1.65	да
0 – 1 – 0	0	0.0320	0	36.05	нет
	0	0.0048	0	4.00	да
0 – 0 – 1	0.0179	0.0656	1553.45	53.73	нет
	0.0030	0.0096	262.80	7.92	да

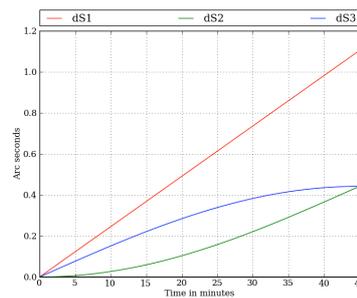
Таблица 12. Шестиосный вариант блока ЧЭ при работе всех шести осей. Сравнение погрешностей вычисления ориентации в режиме разворота при действии на ДУС\_1 всего комплекта инструментальных погрешностей.

Поворот на 90 град. за 45 секунд вокруг оси	Погрешность вычисления ориентации [дуг. сек]	Использование весовых коэффициентов.
1 – 0 – 0	8.0	нет
	1.5	да
0 – 1 – 0	24.0	нет
	4.0	да
0 – 0 – 1	34.0	нет
	5.0	да

Варианты таблицы 12 проиллюстрированы графиками рисунков 4.9- 4.11.

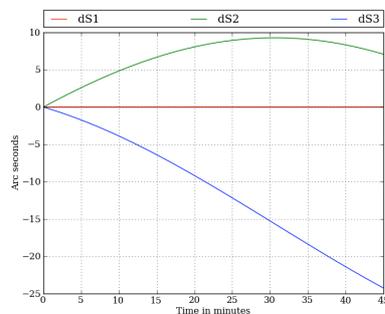


Без использования весов

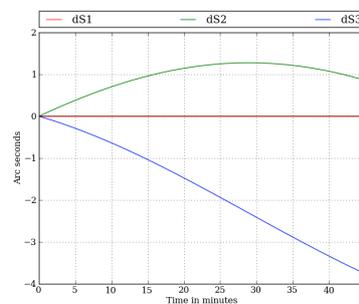


С использованием весов

Рисунок 4.9 Разворот на 90 градусов (2 град./сек) вокруг оси  $x$  при действии всех инструментальных погрешностей (шкала времени - в секундах)

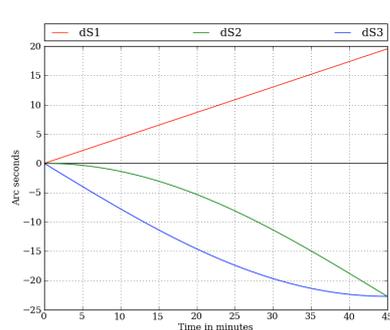


Без использования весов

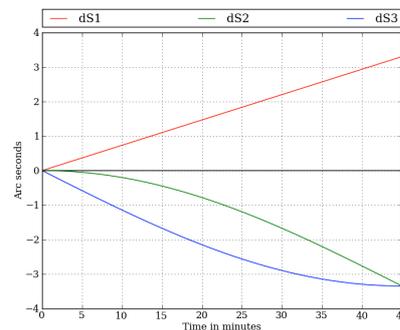


С использованием весов

Рисунок 4.10 Разворот на 90 градусов (2 град./сек) вокруг оси  $y$  при действии всех инструментальных погрешностей (шкала времени - в секундах)



Без использования весов



С использованием весов

Рисунок 4.11 Разворот на 90 градусов (2 град./сек) вокруг оси  $z$  при действии всех инструментальных погрешностей (шкала времени - в секундах)

#### **4.4 Заключение по главе 4**

Математическое моделирование работы блока ЧЭ с избыточным количеством чувствительных элементов подтвердило эффективность предложенного метода формирования и учета весовых коэффициентов чувствительных элементов. При увеличении погрешности одного из шести чувствительных элементов алгоритм автоматически снижает весовой коэффициент для учета его информации настолько, что вызываемая им погрешность в несколько раз меньше погрешности, вызываемой этим чувствительным элементом при одинаковых весовых коэффициентах.

## Заключение

В диссертационной работе изложены решения выбранных для исследования задач, способствующие повышению точности бесплатформенных инерциальных навигационных систем.

Основные результаты данной работы:

1. Предложена модель блока чувствительных элементов бесплатформенной инерциальной навигационной системы, удобная для отработки бортовых алгоритмов. Выбрана такая механика движения блока чувствительных элементов, которая для достаточно сложного движения с четырьмя произвольными параметрами позволяет вычислить аналитически интегралы от угловых скоростей и кажущихся ускорений, не прибегая к интегрированию дифференциальных уравнений. С использованием предложенной модели отработан бортовой алгоритм начальной выставки бесплатформенной инерциальной навигационной системы, выполнено сравнение двух различных вариантов бортового алгоритма вычисления ориентации приборного трехгранника и выбран лучший. Преимущества выбранного варианта расчета ориентации продемонстрировано обработкой реальных показаний лазерных гироскопов бесплатформенной инерциальной навигационной системы при ее испытаниях на вибростенде.

2. Решена задача использования бесплатформенной инерциальной навигационной системы на объекте с быстрым вращением вокруг продольной оси в полете. Предложен алгоритм уточнения масштабного коэффициента продольного датчика угловой скорости по показаниям одноосного гиросtabilизатора с одновременной коррекцией параметров ориентации объекта. Вся погрешность в определении ориентации объекта, накопленная за время, прошедшее до уточнения масштабного

коэффициента, при каждом сеансе коррекции устраняется, практически, полностью.

3. Выполнен анализ возможности повышения точности навигационной системы при использовании избыточного количества чувствительных элементов. Предложен алгоритм формирования выходной информации о трехмерном векторе при наличии избыточного количества осей чувствительности соответствующих измерителей. Алгоритм позволяет использовать индивидуальные веса для информации каждого чувствительного элемента. Предложен алгоритм формирования весовых коэффициентов по сравнительному анализу показаний чувствительных элементов, позволивший повысить точность навигационной системы в целом. Математическим моделированием работы блока чувствительных элементов с избыточным количеством осей чувствительности подтверждена эффективность предложенного метода формирования весовых коэффициентов.

Выполнен анализ точности работы бесплатформенной инерциальной навигационной системы с шестиосным блоком чувствительных элементов, с учетом механики невесомости в условиях орбитального полета.

## Литература

1. Азарова В.В., Гуляев Ю.Д., Дмитриев В.Г., Дроздов М.С., Казаков А.А., Колодный Г.Я., Мельников А.В., Назаренко М.М., Спирин В.Н., Тихменев Н.В. Зеэмановские лазерные гироскопы. Состояние и перспективы развития. // Гироскопия и навигация. 1997. № 4. С. 7-16.
2. Александров В.В., Парусников Н.А. Развитие теории навигации и А.Ю. Ишлинский. //Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2013. № 5. С. 51-53
3. Алехин А.В., Липатников В.И., Матвеев В.А. Проектирование волновых твердотельных гироскопов. //М.: Из-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 1988, 168 с.
4. Алехова Е.Ю., Жбанов Ю.К., Климов Д.М. Использование избытка осей чувствительности для повышения точности измерений. //МТТ, 2013, т. 48, № 5, с. 500-503
5. Алехова Е.Ю., Жбанов Ю.К., Климов Д.М., Петелин В.Л., Слёзкин Л.Н., Терёшкин А.И. Коррекция масштабного коэффициента датчика угловой скорости БИНС быстровращающегося объекта. // Гироскопия и навигация №3 (78), 2012, с.78-85
6. Алехова Е.Ю. Тестирование алгоритмов численного решения уравнений Пуассона. // Гироскопия и навигация №4, 2009, с. 81- 83
7. Алехова Е.Ю. Математическая модель блока чувствительных элементов для обработки бортовых алгоритмов навигационных систем. //МТТ №3, 2008, с. 42-47.
8. Андреев, В.Д. Теория инерциальной навигации. Автономные системы. //М.: Физматгиз, 1966, 579 с.

9. Андреев, В. Д. Теория инерциальной навигации. Корректируемые системы. // М.: Физматгиз, 1967, 648 с.
10. В.А.Анисимов, Ю.К.Жбанов, Б.С.Зильберман, Г.В.Попов Быстрое компасирование на неподвижном основании. // Гироскопия и навигация, №2, 2003г, с а б
11. Басараб М.А., Лунин Б.С., Матвеев В.А., Чуманкин Е.А.. Балансировка полусферических резонаторов волновых твердотельных гироскопов методом химического травления. // Гироскопия и навигация. 2015, № 1 (88), с. 61-70
12. Басараб М.А., Лунин Б.С., Матвеев В.А., Фомичев А.В., Чуманкин Е.А., Юрин А.В. Миниатюрные волновые твердотельные гироскопы для малых космических аппаратов. // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Приборостроение. 2014, № 4 (97), с. 80-96.
13. Басараб М.А., Лунин Б.С., Матвеев В.А. Навигационные системы на волновых твердотельных гироскопах для малых космических аппаратов. Москва, 2008.
14. Блюмин И. Д., Ишлинский А. Ю. Теория гироскопических и инерциальных систем. — В кн.: История механики с конца XVIII века до середины XX века. М.: Наука, 1972. с. 245-264
15. Бодунов Б.П., Бодунов С.Б., Лопатин В.М., Чупров В.П. Разработка и испытание волнового твердотельного гироскопа для использования в инклинометрической системе. // Гироскопия и навигация. 2001, № 3 (34), с. 74-82.
16. Бранец В.Н. Лекции по теории бесплатформенных инерциальных навигационных систем управления. // Учеб. пособие. М.: МФТИ, 2009, 304 с.

17. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. // М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992, 280 с.
18. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твёрдого тела. // М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973, 320 с.
19. Брозгуль Л.И., Смирнов Е.Л. Вибрационные гироскопы. – М. Машиностроение, 1970, 215 с.
20. Броксмайер Ч.Ф. Системы инерциальной навигации. // Л. Судостроение, 1967, 279 с.
21. Бромберг П. В. Теория инерциальных систем навигации. // М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979, 296 с.
22. Булгаков Б.В. Прикладная теория гироскопов. М. Изд-во МГУ, 1976, 401 с.
23. Водичева Л.В., Алиевская Е.Л., Кокшаров Е.А., Парышева Ю.В. Повышение точности определения угловой скорости быстровращающихся объектов. // Гироскопия и навигация. 2012, № 1 (76), с. 27-41.
24. Гавриленко А.Б., Меркурьев И.В., Подалков В.В. Алгоритмы управления колебаниями резонатора волнового твердотельного гироскопа. // Юбилейная XV Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. Сборник материалов. ГНЦ РФ ФГУП ЦНИИ "Электроприбор". Санкт-Петербург, 2008. С. 34-36.
25. Гавриленко А.Б., Меркурьев И.В. Разработка алгоритмов начальной выставки инерциальной навигационной системы летательного аппарата на подвижном основании. // Гироскопия и навигация. 2007, № 2 (57), с. а

26. Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Часть 1. Математические модели инерциальной навигации. //Изд-е 3-е. М. Изд-во МГУ, 2011, 132 с.
27. Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Часть 2. Приложение методов оптимального оценивания к задачам навигации. //М. Изд-во МГУ, 2012, 170 с.
28. Горенштейн И.А., Шульман И.А. Инерциальные навигационные системы. //М. Машиностроение, 1970, 232 с.
29. Гусинский В.З., Лесючевский В.М., Литманович Ю.А., Столбов А.А. Алгоритм калибровки трехосного блока акселерометров, предназначенного для использования в БИНС. //XX11 научно-техническая конференция памяти Н.Н.Острякова. СПб. ЦНИИ «Электроприбор», 2000.
30. Гусинский В.З., Пешехонов В.Г. О перспективах применения электростатических гироскопов в системах ориентации и стабилизации космических аппаратов. //Гироскопия и навигация. 1993, № 1 (1), с. 3-6.
31. Девянин Е.А. О возможных принципах построения систем инерциальной навигации. //Известия АН СССР. МТТ, 1969, № 6, с. 10-14.
32. Девянин Е.А., Ишлинский А.Ю., Климов Д.М. Механика гироскопических навигационных систем. //Механика в СССР за 50 лет. Т.1. М. Физматгиз, 1968. С. 245-294
33. Джанджгава Г.И., Требухов А.В., Бахонин К.А., Редькин С.П., Соловьев В.М., Меркушов Д.А., Алехин А.В., Некрасов А.В.

- Практическая разработка инерциальных систем ориентации и навигации на твердотельных волновых гироскопах для высокоманевренных летательных аппаратов. //Авиакосмическое приборостроение. 2015, № 8, с. 67-77
34. Джанджгава Г.И., Бахонин К.А., Виноградов Г.М., Требухов А.В. Бесплатформенная инерциальная навигационная система на базе твердотельного волнового гироскопа. //Гироскопия и навигация. 2008, № 1 (60), с. 22-32.
35. Евстифеев М.И. Проблемы проектирования и опыт разработки микромеханических гироскопов. //Мехатроника, автоматизация, управление. 2009, № 6, с. 70-76.
36. Егоров А.В., Ландау Б.Е., Левин С.Л., Романенко С.Г. Движение ротора бескарданного электростатического гироскопа в условиях орбитального полета космического аппарата. //Гироскопия и навигация. 2011, № 4 (75), с. 64-76.
37. Емельянцеv Г.И., Степанов А.П., Блажнов Б.А., Семёнов И.В. О решении задачи ориентации в интегрированной системе с использованием микромеханических датчиков для объектов с быстрым вращением. //XXI Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. Сборник материалов. 2014, с. 60-64.
38. Жбанов Ю.К. Контур управления амплитудой в волновом твердотельном гироскопе с автоматической компенсацией разнородности. // Изв. РАН. МТТ. 2008, № 3, с. 17-22.
39. Жбанов Ю.К. Самонастраивающийся контур подавления квадратуры волнового твердотельного гироскопа. //Гироскопия и навигация, №2, 2007, с. 30-43.

40. Жбанов Ю.К., Журавлев В.Ф. Влияние подвижности центра резонатора на работу волнового твердотельного гироскопа. //МТТ, 2007, №5, с. 14-24.
41. Ю.К.Жбанов Инерциальная навигация на эллипсоидальной Земле. //Сборник научных трудов «Проблемы механики», к 90-летию академика А.Ю.Ишлинского. Москва, Физматлит, 2003, с. 363-368
42. Жбанов Ю.К., Климов Д.М., Урюпин М.А. Математическое моделирование инерциальных навигационных систем. // Техническая кибернетика, № 1, 1993, с. 97-105
43. Журавлев В.Ф. К вопросу о предельной точности неконтактного гироскопа. //Доклады академии наук. 2006, т. 410, № 2, с. 200-202.
44. Журавлёв В.Ф., Бесплатформенная инерциальная система минимальной размерности. МТТ, №5, 2005, с. 5-10.
45. Журавлёв В.Ф., Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов. //МТТ, 1997, №6, с. 27-35.
46. Журавлёв В.Ф., Линч Д.Д. Электрическая модель волнового твердотельного гироскопа. //Изв.РАН, МТТ, №5, 1995, с. 27-35.
47. Журавлёв В.Ф. Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа (ВТГ). //Изв.РАН.МТТ, №3, с 6-19.
48. Журавлёв В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы теории колебаний. // М.: Наука. 1988. 328 с.
49. Журавлёв В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. //М.: Наука, 1985. 125 с.
50. Журавлёв В.Ф., Климов Д.М., О динамических эффектах в упругом вращающемся кольце. //Изв. АН СССР, МТТ, №5, 1983 с. 17-23.
51. Жанруа А., Буве А., Ремиллье Ж. Волновой твердотельный гироскоп и его применение в морском приборостроении. //Гироскопия и навигация. 2013, № 4 (83), с. 24-34.
52. Игнатьев А.А., Проскуряков Г.М., Васильев А.В. Алгоритмы работы

- миниатюрной системы ориентации вращающихся подвижных объектов //Гетеромагнитная микроэлектроника. 2014, № 17, с. 78-91.
- 53.Измайлов Е.А., Кухтевич С.Е., Тихомиров В.В., Стафеев Д.В., Фомичев А.В. Анализ составляющих дрейфа лазерного гироскопа. //Гироскопия и навигация. 2015, № 2 (89), с. 40-46.
- 54.Измайлов Е.А., Кухтевич С.Е., Тихомиров В.В., Стафеев Д.В., Фомичев А.В. Анализ методов оценки случайной составляющей дрейфа лазерных гироскопов с виброслотной подставкой. //Труды ФГУП НПЦАП. Системы и приборы управления. 2015, № 2 (32), с. 22-28.
- 55.Измайлов Е.А. Современные тенденции развития технологий инерциальных чувствительных элементов и систем летательных аппаратов. //Труды ФГУП НПЦАП. Системы и приборы управления. 2010, № 1, с. 30-43.
- 56.Измайлов Е.А. Некоторые результаты разработки и исследования макетов малогабаритного ВТГ. //Гироскопия и навигация. 2005, № 1 (48), с. 127-128.
- 57.Измайлов Е.А., Колесник М.М., Осипов А.М., Акимов А.В. Технология волнового твердотельного гироскопа. Проблемы и возможные пути их решения. //Гироскопия и навигация. 1999, № 4 (27), с. 83-96.
- 58.Ишлинский А.Ю. Механика, идеи, задачи, приложения. //М., Наука, 1985, 623с.
- 59.Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М., Наука, 1976, 670с.
- 60.Ишлинский А.Ю. Инерциальное управление баллистическими ракетами систем. М., Наука, 1968, 142с.
- 61.Ишлинский А.Ю. Механика гироскопических систем. М., Изд-во АН СССР, 1963, 482с.
- 62.Ишлинский А.Ю. Об автономном определении местоположения движущегося объекта посредством пространственного

- гироскопического компаса, гироскопа направления и интегрирующего устройства. // ПММ, т. 23, вып. 1, 1959, с. 58-63.
- 63.Ишлинский А.Ю. Об уравнениях задачи определения местоположения движущегося объекта посредством гироскопов и измерителей ускорений. // ПММ, т. 21, вып. 6, 1957, с. 725-739.
- 64.Ишлинский А.Ю. К теории гиригоризонткомпаса. //ПММ, т. 20, вып. 4, 1956, с. 487-499.
- 65.Ишлинский А.Ю. Механика специальных гироскопических систем. //Киев, Изд-во АН УССР, 1952, 432 с.
- 66.Климкович Б.В. Метод алгоритмической коррекции погрешности углового положения кольцевого лазерного гироскопа с виброподставкой. //Гироскопия и навигация. 2011, № 4 (75), с. 58-63.
- 67.Климов Д.М. Инерциальная навигация на море. //Изд. Наука, Москва, 1984, 116 с.
- 68.Климов Д.М., Харламов С.А.«Динамика гироскопа в карданном подвесе». //М. Наука, 1978, 208 с.
- 69.Климов Д.М. Об интегрировании кинематических уравнений инерциальных систем навигации. //Изв. Вузов. Приборостроение, 1968, т. 11, № 7, с. 95-98
- 70.Климов Д.М., Потапенко В.А. Об уходе гироскопа в карданном подвесе на подвижном основании. //Инж. журнал МТТ , 1966, № 1, с. 3-5
- 71.Климов Д.М. Об условиях невозмущаемости гироскопической рамы. //ПММ, 1964, т. 28, вып. 3 , с. 511-513
- 72.Климов Д.М., Рабинович Ю.И. Механика невозмущаемых гироскопических систем //Изв. АН СССР, МТТ, 1983, № 4, с. 57-68
- 73.Кузнецов А.Г., Измайлов Е.А. Технология создания инерциальных навигационных систем. //Труды ФГУП НПЦАП. Системы и приборы управления. 2012, № 1, с. 3-16.
- 74.Кузовков, Н. Т., Салычев О. С. Инерциальная навигация и оптимальная

- фильтрация. //М.: Машиностроение, 1982, 216 с.
- 75.Ландау Б.Е., Гуревич С.С., Емельянцеv Г.И., Левин С.Л., Романенко С. Калибровка погрешностей бескарданной инерциальной системы на электростатических гироскопах в условиях орбитального полета. //Гироскопия и навигация. 2010, № 1 (68), с. 36-45.
76. Ландау Б.Е. Электростатический гироскоп со сплошным ротором. //Гироскопия и навигация. 1993, № 1 (1), с. 6-12.
77. Лестев А.М., Попова И.В., Евстифеев М.И., Пятышев Е.Н., Лурье М.С., Семенов А.А. Особенности микромеханических гироскопов. //Нано- и микросистемная техника. 2000, № 4, с. 5.
- 78.Лукьянов Д., Филатов Ю., Гуляев Ю., Курятов В., Виноградов В., Шрайбер К.У., Перлмуттер М. 50 лет лазерному гироскопу. Часть II. //Фотоника. 2014, № 2 (44), с. 20-37.
- 79.Мартыненко Ю.Г., Меркурьев И.В., Подалков В.В. Динамика кольцевого микромеханического гироскопа в режиме вынужденных колебаний. //Гироскопия и навигация. 2009, № 3 (66), с. 10-22.
- 80.Мартыненко Ю.Г. Тенденции развития современной гироскопии. //Соросовский образовательный журнал. 1997. №1. С 120-1]27.
- 81.Мартыненко Ю.Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988, 368 с.
- 82.Матвеев В.А., Лунин Б.С., Басараб М.А., Чуманкин Е.А. Балансировка металлических резонаторов волновых твердотельных гироскопов низкой и средней точности //Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013, № 6, с. 251-266.
- 83.В. А. Матвеев, В. П. Подчезерцев, В. В. Фатеев . Гироскопические стабилизаторы на динамически настраиваемых вибрационных гироскопах. Из-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2005. Сер. Учебное пособие по курсу "Теория гироскопов и гиростабилизаторов"
- 84.Матвеев В.А. Гироскоп это просто. // Из-во МГТУ им, Н.Э. Баумана,

2012, 209 с.

85. Мезенцев А.П., Доронин В.П., Новиков Л.З., Харламов С.А., Неаполитанский А.С., Логинов Б.А. Основные проблемы создания инерциальных измерительных блоков на базе микромеханических гироскопов и акселерометров. //Гироскопия и навигация. 1997, № 1 (16), с. 7-14.
86. Меркурьев И.В., Подалков В.В. Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. //М. Физматлит, 2009. 228 с.
87. Меркурьев И.В., Подалков В.В. Управление амплитудой и формой колебаний резонатора волнового твердотельного гироскопа. //Вестник МЭИ. 2008, № 4, с. 5-13.
88. Мешковский И.Е., Дейнека Г.Б., Пешехонов В.Г., Волынский Д.В., Унтилов А.А., Стригалева В.Е. Трехосный волоконно-оптический гироскоп. Результаты разработки и предварительных испытаний. //Гироскопия и навигация. 2011, №3 (74), с. 67-74.
89. Мешковский И.К., Стригалева В.Е., Пешехонов В.Г., Несенюк Л.П. Трехосный волоконно-оптический гироскоп для морских навигационных систем. //Гироскопия и навигация. 2009, №3, с. 3-9.
90. Миллер Р.Б. Новый алгоритм определения параметров ориентации для бесплатформенных систем. // Аэрокосмическая техника, № 5, 1984, с. 127-133
91. Панов А.П. "Математические основы теории инерциальной ориентации" - Киев, Наукова думка, 1995 год, 277 стр.,
92. Парусников Н.А. Задача калибровки бескарданной инерциальной навигационной системы. //Известия РАН, МТТ, 2009, т.4, с. 3-9.
93. Пельпор Д.С., Матвеев В.А., Арсеньев В.Л. Динамически настраиваемые гироскопы. // М. Машиностроение, 1988, 264 с.
94. Гироскопические системы. Проектирование гироскопических систем. Ч.1. Системы ориентации и навигации (под ред. Д.С. Пельпора.) //М.:

- Высшая школа, 1977, 215 с.
95. Переляев С.Е., Челноков Ю.Н. Новые алгоритмы определения инерциальной ориентации объекта //ПММ. 2014, т. 78, № 6, с 778-789.
96. Переляев С.Е. О глобальных параметризациях группы трехмерных вращений. //Изв. РАН. МТТ, 2006, № 3, с. 30-44.
97. Пешехонов В.Г. Лидеры отечественной гироскопии. //Гироскопия и навигация. 2013, № 3(82), с. 139-154.
98. Пешехонов В.Г., Некрасов Я.А., Пфлюгер П., Кергерис Ц., Хаддара Х., Эльсайед А. Результаты испытаний установочной партии микромеханических гироскопов г-типа. //Гироскопия и навигация. 2011, № 1 (72), с. 37-48.
99. Пешехонов В.Г. Современная инерциальная навигация. //Труды Института прикладной астрономии РАН . 2009, № 20, с . 65-73.
100. Пешехонов В.Г., Несенюк Л.П. Микромеханический гироскоп. проблемы создания и состояние разработки в ЦНИИ "Электроприбор". //Мехатроника, автоматизация, управление. 2007, № 4, с. 32-36.
101. Пешехонов В.Г. , Ландау Б.Е. Бескарданная система определения ориентации низкоорбитальных космических аппаратов на электростатических гироскопах. //Гироскопия и навигация. 2006, № 4(55), с. 83.
102. Пешехонов В.Г., Несенюк Л.П., Евстифеев М.И., Некрасов Я.А., Ренар С., Пфлюгер П., Пизелла К., Кояле Ж. Результаты разработки микромеханического гироскопа. //Гироскопия и навигация. 2005, № 3 (50), с. 44-51.
103. Пешехонов В.Г. Гироскопы начала XXI века. //Гироскопия и навигация. 2003, № 4 (43), с. 5-18.
104. Пешехонов В.Г. Ключевые задачи современной автономной навигации // Гироскопия и навигация. 1996, № 1 (12), с.48-55.
105. Поттер, Деккерт Минимаксный метод детектирования и

- идентификации отказов в резервированных системах гироскопов и акселерометров. // Вопросы ракетной техники № 12, 1973, с. 58-70
106. Проскуряков Г.М., Игнатъев А.А., Спиридонова Т.А., Спиридонов Д.М. Алгоритмы начальной выставки автономной ориентации управляемой платформы на подвижном объекте. // Гетеромагнитная микроэлектроника. 2014, № 17, с. 91-101
107. Распопов В.Я. Гироскопы для вращающихся по крену летательных аппаратов. // Материалы докладов XII конференции молодых ученых, в сборнике: «Навигация и управление движением». Науч. редактор О.А.Степанов, под общей редакцией В. Г. Пешехонова. Санкт-Петербург, 2010, с. 21-42
108. Распопов В.Я., Никулин А.В., Лихошерст В.В. Классификация конструкций микромеханических гироскопов. // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2005, т. 48, № 8, с. 5-8.
109. Степанов А.П. Имитационная модель работы интегрированной системы ориентации и навигации на основе бескарданного инерциального измерительного модуля на волоконно-оптических гироскопах в условиях орбитального космического аппарата. // Гироскопия и навигация. 2006, № 2 (53), с. 97.
110. Степанов О.А. Интегрированные инерциально-спутниковые системы навигации. // Гироскопия и навигация. 2002, № 1 (36), с. 23-45.
111. Федоров А.Е., Рекунов Д.А., Переляев С.Е., Челноков Ю.Н. Калибровка блока инерциальных чувствительных элементов и моделирование автономного режима функционирования инерциальной системы на базе монолитного трехкомпонентного лазерного гироскопа. // Новости навигации. 2010, № 3, с. 20-25.
112. Фридлиндер, Г.О. Инерциальные системы навигации. // М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1961, 155 с.

113. Развитие механики гироскопических и инерциальных систем. // М. Наука, 1973, 456 с..
114. Челноков, Ю. Н. Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением // М.: Физматлит, 2011, 560 с.
115. Челноков, Ю. Н. Кватернионные алгоритмы систем пространственной инерциальной навигации. // Изв. АН СССР. МТТ. 1983, №6, с. 14–21.
116. Чуманкин Е.А. Результаты проектирования и испытаний датчика угловой скорости на основе волнового твердотельного гироскопа. //Гироскопия и навигация. 2013, № 2 (81), с. 104-111.
117. Шереметьев А.Г. Волоконный оптический гироскоп. //М. Радио и связь, 1987, 152 с. ил.
118. Шрайбер У., Великосельцев А., Стедман Г.Е., Хёрст Р.Б., Ключегель Т. Большие кольцевые лазерные гироскопы как датчики высокой разрешающей способности для применения в геофизических исследованиях. //Гироскопия и навигация. 2004, № 3 (46), с. 38-47.
119. Lynch D.D. Vibrating gyro analysis by the method of averaging // 2<sup>nd</sup> Saint- Petersburg Intern.Conf. on Gyroscopic Technology and Navigation. Saint-Petersburg, 1995. P. 26-34.