Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева»

На правах рукописи

Дорошин Антон Владимирович

РЕГУЛЯРНАЯ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА СПУТНИКОВ-ГИРОСТАТОВ ПРИ ДЕЙСТВИИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

01.02.01 - теоретическая механика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
д.т.н., профессор Асланов В.С.

Самара - 2019

Оглавление

Введение

Изучение динамики пространственного движения космических аппаратов с учетом нелинейных и нерегулярных аспектов было и остается одной из важных проблем динамики космического полета и современной механики. Неотъемлемой частью общей проблемы является исследование динамики важного класса космических аппаратов с двойным вращением, структурно выполненных на основе известной схемы осевого спутника-гиростата.

Широкое распространение соосной схемы определяется простотой конструкции, позволяющей использование эффективного метода пассивной гироскопической стабилизации спутников-гиростатов за счет быстрого вращения одного из соосных тел при покое, либо медленном вращении второго соосного тела, обеспечивающего ориентацию рабочих элементов (антенн, телескопов и т.п.) в заданном направлении. Типичным режимом спутников-гиростатов является его движение с гироскопически стабилизированной осью вращения соосных тел по направлению вдоль нормали к плоскости орбиты, когда ротор обеспечивает гироскопическую стабилизацию своим быстрым вращением, а главное соосное тело находится в медленном вращении с орбитальной угловой скоростью, выполняя «лунное» движение с постоянным визированием земной поверхности. В этом случае кинетический момент спутника-гиростата близок к оси вращения соосных тел и направлен перпендикулярно к плоскости орбиты – такой динамический режим называют цилиндрической прецессией.

Для описания динамики движения спутников-гиростатов необходимо построение ряда математических моделей движения, учитывающих различные конструкционные и функциональные аспекты, а также наличие внутренних и внешних силовых моментов различной природы.

Главными элементами в изучении динамики движения, безусловно, являются аналитические решения, соответствующие различным динамическим режимам спутников-гиростатов, которые в полной мере содержат внутри себя всю необходимую информацию о качественных и количественных характеристиках всех динамических параметров. В этой связи, поиск аналитических решений всегда является одной из главных задач любого исследования. В настоящей работе осуществляется поиск пяти различных видов общих и гетероклинических аналитических решений для динамики спутников-гиростатов при действии внутренних и внешних возмущений.

Одним из наиболее интересных и слабо изученных феноменов в возмущенной динамике спутников-гиростатов является возникновение и реализация хаотических режимов движения, учет которых необходим в рамках разработки реальных космических систем, так как подобные явления могут приводить к непредсказуемым и нежелательным последствиям в рамках выполнения космической программы, либо к ее полному срыву. Задача исследования хаотического поведения становится еще более актуальной при понимании того, что любое реальное движение всегда происходит в условиях действия широкого комплекса внутренних и внешних возмущений, что неизбежно влечет за собой развитие нерегулярного поведения спутников-гиростатов, в том числе хаоса. Анализ хаотической динамики является одной из главных задач настоящего исследования.

Очевидно также, что существенный практический интерес представляет задача разработки методов подавления хаоса.

Несмотря на непредсказуемость процессов хаотической динамики, оказывается вполне возможным использовать естественные свойства динамического хаоса в прикладных целях. Так в работе будет предложен и детально разработан метод намеренной инициации хаоса в динамике спутника-гиростата для выполнения за счет его динамических свойств пространственных переориентаций спутника. Задача пространственной переориентации спутников всегда остается актуальной и предполагает разработку новых схем и систем своей реализации. В рамках этой проблемы в работе осуществляется разработка новых методов переориентации спутников-гиростатов постоянного и переменного состава. В настоящем диссертационном исследовании будут рассмотрены и решены задачи моделирования, анализа и синтеза регулярной и хаотической динамики движения супников-гиростатов при действии малых возмущений.

Проблемой исследования является комплексное изучение регулярной и хаотической динамики пространственного движения нормальных спутников-гиростатов.

Целью диссертационного исследования является получение необходимых новых аналитических решений для нормальных типов гиростатов в случаях действия внешних и внутренних возмущений с проведением на их основе анализа регулярного и хаотического движения с последующим синтезом требуемых динамических свойств, новых схем и методов управления угловым положением спутников-гиростатов постоянного и переменного состава, использующих естественные свойства детерминированного хаоса.

В рамках решения проблемы для достижения поставленной цели в работе будут найдены необходимые аналитические решения и выполнен анализ и синтез важных режимов регулярной и хаотической динамики нормальных гиростатов, в том числе:

1. Будут получены ***шесть видов аналитических решений*** для динамики одноосных спутников-гиростатов. Эти решения будут обобщать решения для свободного гиростата, а также являться гиростатическим обобщением решений динамики тела под действием восстанавливающих моментов.

2. Будет ***исследован феномен гетероклинического хаоса*** в динамике движения спутника-гиростата при действии внутренних и внешних возмущений, в т.ч. определены условия возникновения и способы подавления хаоса.

3. На основе новых решений и результатов анализа динамического хаоса будут разработаны ***методы пространственной переориентации*** спутников-гиростатов, использующие естественные свойства регулярной динамики и хаоса.

Методы и подходы, используемые в рамках диссертационного исследования, базируются на современных методах механики, динамики твердого тела и систем твердых тел постоянного и переменного состава, механики космического полета, развитые в известных работах Акуленко Л.Д., Архангельского Ю.А., Асланова В.С., Белецкого В.В., Гантмахера Ф.Р., Жуковского Н.Е., Журавлёва В.Ф., Ишлинского А. Ю., Климова Д.М., Козлова В.В., Космодемьянского А.А., Лещенко Д.Д., Маркеева А.П., Моисеева Н.Н., Морозова В.М., Нейштадта А.И., Овчинникова М.Ю., Охоцимского Д.Е., Румянцева В.В., Садова Ю.А., Сазонова В. В., Сарычева В.А., Сидоренко В.В., Стеклова В.А., Тихонова А.А., Черноусько Ф.Л., а также Andoyer H., Arichandran K., Bainum P.M., Cochran J.E., Deprit A., Elipe A., Hall C.D., Hughes P.C., Iñarrea M., Kuang J., Lanchares V., Leung A.Y.T, Mingori D.L., Tan S., Serret J.A., Volterra V., Wittenburg J. В диссертационном исследовании также используются методы качественной теории дифференциальных уравнений, методы хаотической динамики, в частности метод Мельникова В.К. и его модификации Wiggins S., Holmes P.J., Marsden J.E., отображения H.Poincaré, методы теории динамических систем, развитые в работах таких известных ученых, как Колмогоров А.Н., Арнольд В.И., Moser J., Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С. Д., Кузнецов С.П., Анищенко В.С., Астахов В.В., Леонов Г.А., Лоскутов А.Ю, Guckenheimer J., Holmes P.J., Boccaletti S., Grebogi, Lichtenberg A.J., Lieberman M.A., Tabor M.

Ценность работы характеризуется тем, что результаты диссертационных исследований, включая аналитические модели, методы и решения, будут способствовать развитию *фундаментальной* составляющей динамики систем твердых тел и ее *прикладных аспектов* в рамках разработки модифицированных платформ космических аппаратов и спутников с новыми схемами управления угловым движением, парирующими возникновение хаотических режимов, либо, наоборот, инициирующими хаотическую динамику в позитивных целях, например, для решения задачи пространственной переориентации посредством использования естественных свойств динамического хаоса.

Публикации по теме диссертации, проиндексированные в системе Scopus, включают 32 работы, в том числе:

- 7 статей в журналах РАН [50, 24-29];
- 13 статей в ведущих зарубежных журналах *Q1* и *Q2* [190-202].

Многократно выполнялось участие на международных и всероссийских конференциях [206-215, 51-54].

По результатам исследований получено ***два патента на изобретение*** (способ пространственной переориентации космических аппаратов за счет инициации хаоса; способ переориентации космических аппаратов за счет раскруток-захватов соосных роторов), а также осуществлена регистрация авторского программного обеспечения для численного моделирования динамики нелинейных систем.

В 2009 году по результатам исследований автору была присуждена Медаль Российской академии наук с премиями для молодых ученых (направление №5: Проблемы машиностроения, механики и процессов управления) за цикл работ «Динамика пространственного движения неуравновешенных гиростатов и соосных космических аппаратов постоянного и переменного состава». Исследования по теме диссертации поддерживались пятью проектами РФФИ под руководством диссертанта, а также в рамках четырех проектов - персональных Грантов Президента РФ в рамках Программы Президента Российской Федерации по поддержке молодых российских ученых и ведущих научных школ РФ.

1. Состояние решаемой проблемы и методы исследования

Изучение динамики пространственного движения спутников-гиростатов (СГ) с учетом нелинейных и нерегулярных аспектов было и остается одной из важных проблем современной механики и динамики космического полета. Для описания текущего состояния проблемы и ее развития в рамках настоящей работы необходимо отметить широту самого понятия гиростата, а также указать отличительные черты рассматриваемых систем гиростатов.

1.1. Классические определения и типы гиростатов

Проблема исследования гиростатов, как известно, берет начало с классических работ по динамике твердого тела, в том числе при его движении в идеальной жидкости, либо при наличии внутри тела полостей с жидкостью. В рамках этих исследований были, во-первых, обобщены динамические уравнения движения тела вокруг неподвижной точки и, во-вторых, сформулированы связи между динамикой тел в жидкости (или с жидким наполнением) с динамикой движения тел с присоединенными роторами. В этом аспекте необходимо отметить основополагающие работы Г. Кирхгофа [255], У. Томсона (лорда Кельвина) [324], Н.Е. Жуковского [55], В. Вольтерра [329], также последовавшие за ними работы А. Грея [229], В.В. Румянцева и Н.Н. Моисеева [98-100, 290], П.В. Харламова [120-123], Й. Виттенбурга [338, 339]. После этих работ закрепились классические определения гиростатов, среди которых упоминаются “гиростаты Жуковского-Вольтерра”, “гиростаты Кельвина” и некоторые другие.

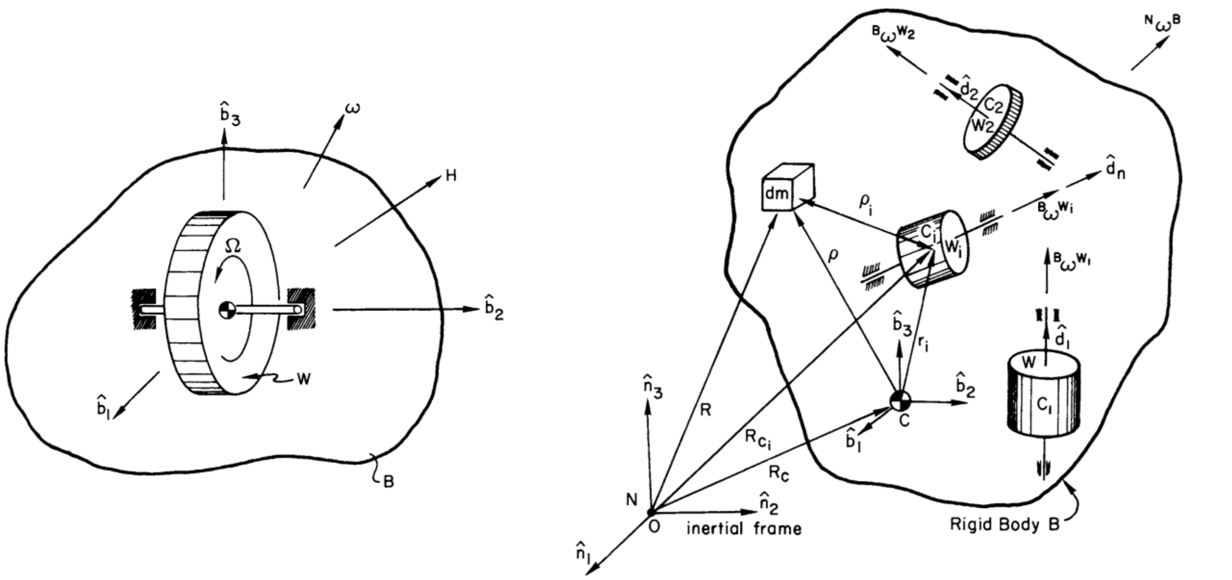
Понятие *гиростата Кельвина* используют для описания динамики гиростата с внутренними роторами при условии, что они имеют *постоянные относительные компоненты суммарного кинетического момента*, вычисленные по отношению к телу-носителю (телу-платформе) [229]. Это условие представляет собой кинематическую связь и запрещает независимое движение и соответствующие степеней свободы роторов. Обеспечить подобное движение возможно при создании специальных внутренних моментов сил, стабилизирующих постоянство относительного кинетического момента роторов.

Понятие *гиростата Жуковского-Вольтера* [55, 329] структурно подразумевает систему, образованную телом-носителем с внутренними полостями с циркулирующей в них жидкостью, причем величины этих циркуляций рассматриваются постоянными, что позволяет в итоге записать три динамических уравнения движения системы вокруг неподвижной точки, и что также отрицает наличие независимых внутренних степеней свободы.

В последнее время также стали использоваться понятия систем гиростатов, уравнения движения которых приводятся к известным динамическим системам, содержащим в своих фазовых пространствах нерегулярные объекты. Так, например, введено и используется понятие *гиростата Лоренца* [227], уравнения движения которого совпадают с известной системой Лоренца [282]. Возможны и другие случаи приведения уравнений гиростата к системам, демонстрирующим наличие странных хаотических аттракторов [191, 206, 211, 213, 265, 206, 318, 220, 175, 330, 284, 274, 276, 279, 261, 266].

С точки зрения прикладных аспектов использования гиростатов в области динамики космического полета, вопрос о самостоятельных степенях свободы роторов является существенно важным, так как он определяет возможность реализации управляемой динамики спутника-гиростата. В этой связи в работе Кана и Флауэра [249] описывается проблема интерпретации уравнений гиростата и условий стабилизации, где рассматриваются системы гиростатов с постоянными скоростями вращения роторов относительно тела-носителя (гиростаты Кельвина) и гиростаты с роторами, являющимися независимыми телами. В развитие поставленного вопроса о конкурентности моделей описания динамики гиростатов Робертсон в своей работе [304] показал симметрию форм уравнений динамики свободного движения для гиростата Кельвина и *нормального/явного гиростата* (“*apparent gyrostat*” [304]), имеющего независимые степени свободы для своих роторов. Однако, несмотря на симметрию форм уравнений, аналогичной симметрии их решений не будет, что очевидно объясняется различием требований по наличию внутренних моментов сил, обеспечивающих постоянство относительных скоростей роторов, и различием интегралов энергии и кинетического момента. С этих позиций следует различать типы гиростатов Кельвина и нормальных гиростатов.

Со структурной стороны среди нормальных спутников-гиростатов могут быть выделены осевые спутники-гиростаты, также именуемые космическими аппаратами с двойным вращением («Dual-Spin Spacecraft Configuration») [248], изображенными на рис. 1.1-a, а также многороторные конфигурации, именуемые космическими аппаратами с множественным вращением («general Multi-Spin Spacecraft Configuration») [240], представленными на рис. 1.1-b.



(a) (b)

Рис. 1.1. *Конфигурации нормальных спутников-гиростатов*:
(a) – осевой спутник-гиростат, (b) – многороторный спутник-гиростат

1.2. Аспекты использования спутников-гиростатов в динамике космического полета и их связь с основными фундаментальными результатами исследований

С точки зрения решаемых практических задач спутники-гиростаты, как правило, применяются в космических системах телекоммуникаций, метеорологии и дистанционного зондирования. Одним из типовых режимов динамики осевых спутников-гиростатов является цилиндрическая прецессия [35, 77, 83, 232 и др.], соответствующая такому орбитальному движению спутника-гиростата, при котором осуществлена гироскопическая стабилизация его продольной оси (за счет быстрого вращения тела-ротора) в направлении, перпендикулярном плоскости орбиты (рис. 1.2).

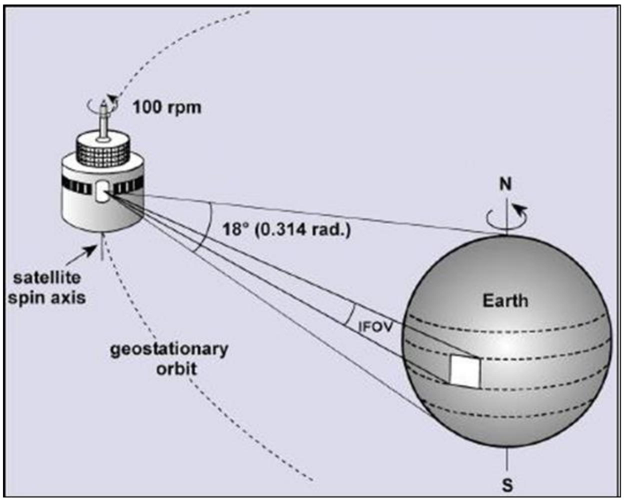


Рис. 1.2. *Типовой режим функционирование спутника-гиростата в режиме цилиндрической прецессии*

Ротор при этом совершает вращение с абсолютной угловой скоростью порядка 60÷100 об./мин., а основное тело-платформа имеет малую угловую скорость, например, компенсирующую орбитальное вращение, для отслеживания своими рабочими элементами (антеннами, телескопами, радиометрами и т.п.) выбранного участка поверхности Земли, либо обеспечивающую ориентацию на заданный объект (на другой спутник группировки, на звезду и т.д.). Часто такие спутники-гиростаты являются еще и геостационарами, что позволяет реализовывать привязку к координатам земной поверхности и непрерывное функционирование спутника.

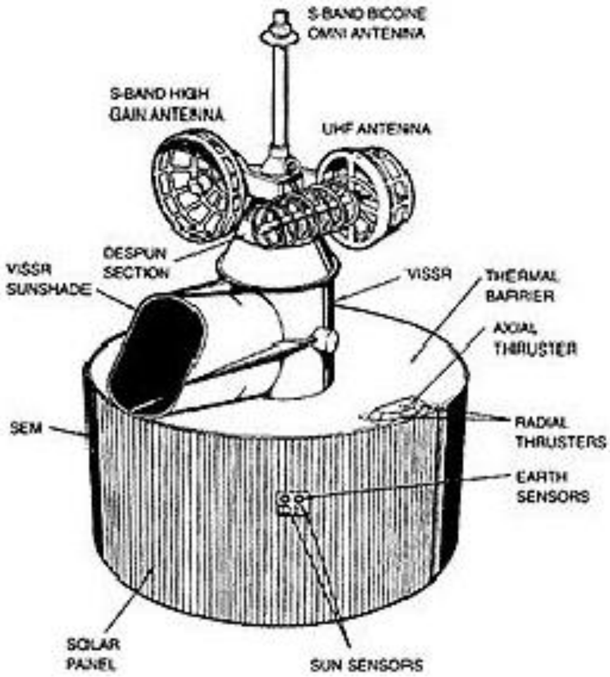
Важно также упомянуть об использовании структуры осевого спутника-гиростата для решения других задач, отличных от выполнения режима цилиндрической прецессии. Возможны самые разные типы космических миссий, в рамках которых могут использоваться нормальные осевые спутники-гиростаты, включая миссии по изучению физики Земли и Солнца, а также дальнего космоса. Ниже будут представлены конкретные примеры реальных космических программ, в которых использовались осевые спутники-гиростаты. Среди реальных программ изначально необходимо указать проекты по осуществлению задач орбитальной связи, метеорологии и навигации – это такие проекты, как исторически первый тактический спутник-гиростат навигации и связи TACSAT, спутники связи и метеорологии Huges HS-333, HS-376, HS-381, HS-393, HS-389 таких космических программ, как Intelsat, Comstar, Anik, Marisat, Geostationary Meteorological

Satellites (GMS), Geostationary Operational Environmental Satellites (GOES), Satcom, Arabsat, Aussat, Optus, Brasilsat, Galaxy, Marco Polo, MEASAT, Africasat, Palapa, SBS, Telstar, Westar, AsiaSat, ChinaSat, Sirius, Thor и др. (рис. 1.3 – 1.5).

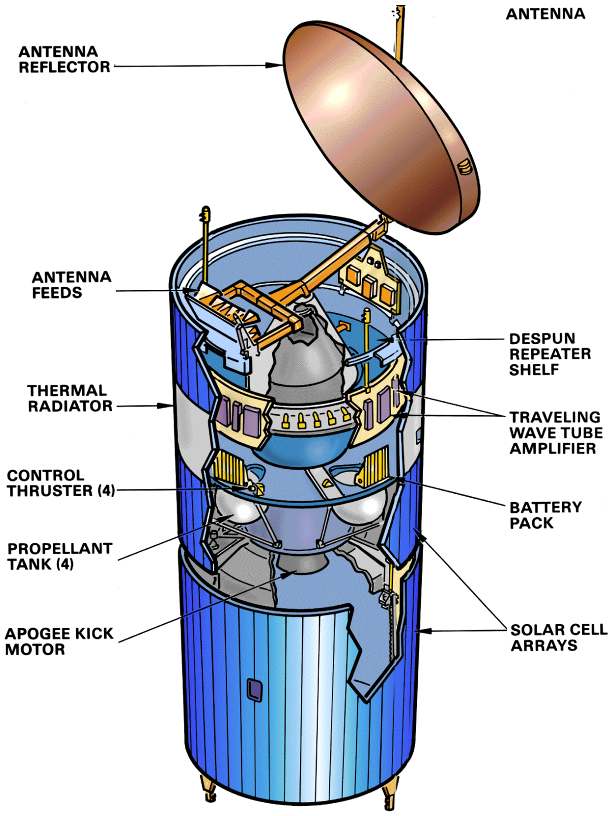
HS-312	HS-351	HS-353

Intelsat-4 (22.05.1975)	Comstar (1D) (21.02.1981)	Intelsat-4A (31.03.1978)

Рис. 1.3. *Спутники-гиростаты типов HS-312/ 351/ 353*
https://space.skyrocket.de/doc_sdat/geotail.htm



HS-378
Geostationary Meteorological Satellite - GMS 2, 3, 4, 5 (11.08.1981-18.03.1995)
Рис. 1.4. *Спутники-гиростаты типов HS-335…378*
https://space.skyrocket.de/doc_sdat/geotail.htm



HS-376 (1982-2002):
Anik C1 → D2; Satcom 4R → Arabsat 1D; Aussat A1, A3 → Optus A3; Brasilsat A1,A2;
BSat 1a, BSat 1b; Galaxy 1→ Galaxy 9; Marco Polo; MEASAT 1, 2 → Africasat 2; Palapa B1→ B4;
SBS 1→5; Telstar; Westar 4, 5, 6; AsiaSat 1; ChinaSat7; Astra 2D→3A; Bonum 1; Sirius 3; Thor 2, 3;

Рис. 1.5. *Спутники-гиростаты типов Hughes / Boeing: HS-376 / BSS-376*
https://space.skyrocket.de/doc_sdat/geotail.htm

Также стоит отметить высокую востребованность осевых спутников-гиростатов в рамках программ изучения дальнего космоса. Можно указать космический аппарат Pioner-12 (Venera Orbiter), запущенный в сторону планеты Венера (рис.1.6), космический аппарат-зонд GIOTTO (рис.1.7), запущенный к комете Галлея, и, безусловно, один из самых известных космических аппаратов с двойным вращением GALILEO, запущенный к планете Юпитер (рис. 1.8).

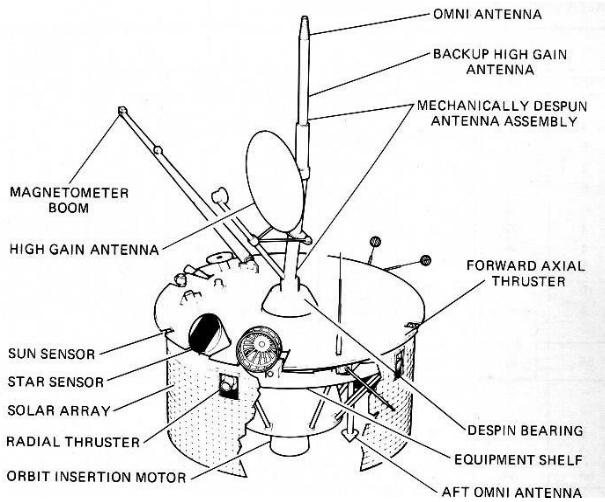


Рис. 1.6. *Спутник-гиростат PIONEER 12 - VENUS ORBITER (20.05.1978)*
https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/pioneer_venus.html

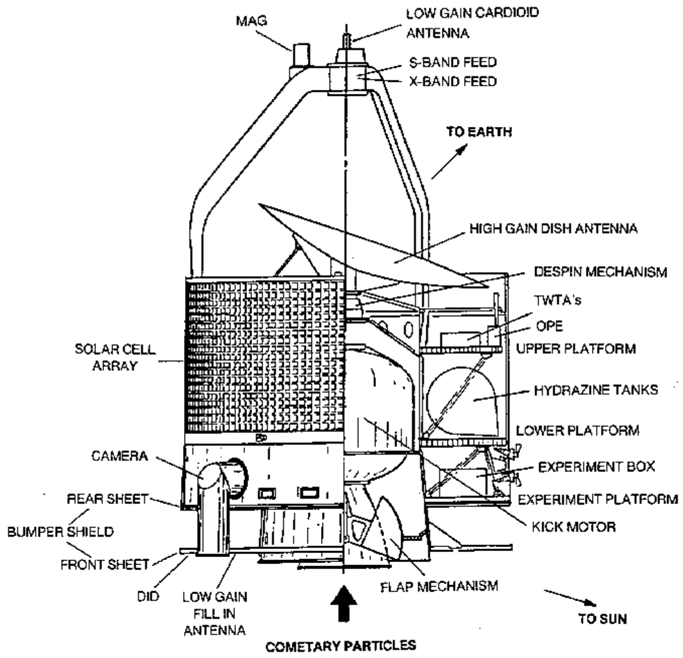


Рис. 1.7. *Спутник-гиростат GIOTTO (02.07.1985):*
Автоматическая межпланетная станция Европейского космического агентства.
Цель: полёт мимо ядра кометы Галлея и его изучение.
https://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Giotto_overview
https://solarsystem.nasa.gov/missions/giotto/in-depth/

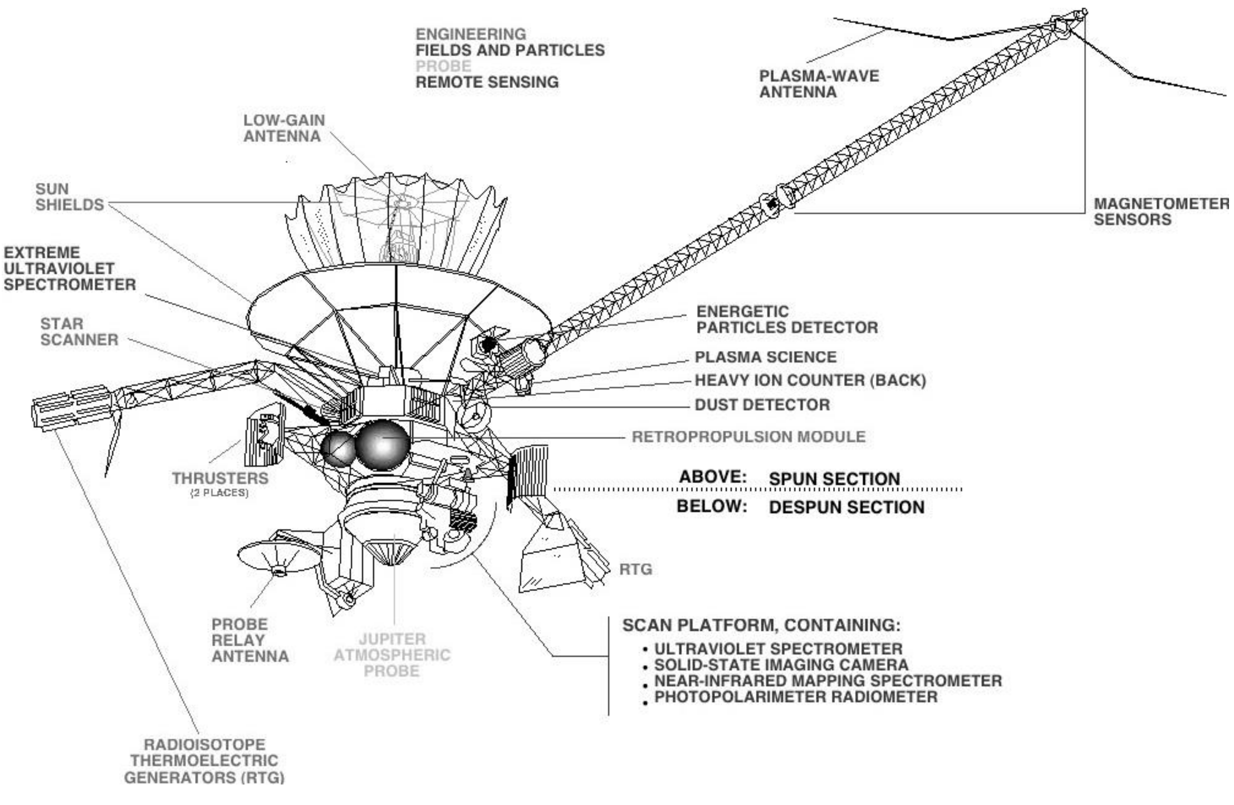


Рис. 1.8. *Спутник-гиростат GALILEO:*
Выведен на орбиту Земли 18.10.1989 и прибыл на орбиту Юпитера 07.12.1995
https://www.jpl.nasa.gov/missions/galileo/

Начиная с 2000г., гироскопически стабилизируемые спутники, как правило, изготавливались на основе цилиндрической монотельной конфигурации и принципа «электронной» соосности, когда одна антенна заменяется на целый пакет равнозначных антенн, установленных круговым образом по борту спутника, что позволяет последовательно переключать сигнал с одной антенны на соседнюю для компенсации осевого вращения спутника, сохраняя при этом направление приема-вещания. Примерами подобных спутников с электронной соосностью являются спутники проекта MSG-meteo-second-generation (2002-2012) с аппаратами Meteosat-8…-10, а также программа EUMETSAT.

В последнем десятилетии, начиная с 2015 года, схема механического спутника-гиростата снова стала актуальной в связи с выполнением задач в условиях сложной электромагнитной обстановки. Так, в настоящее время разрабатывается [254, 292] проект “Solar sentinels” («солнечные стражи»), который планируется к запуску в 2020 году. В рамках этого проекта будут выведены на внутреннюю орбиту Солнца космические аппараты спутники-гиростаты “Inner Heliospheric Sentinels” (рис.1.9) – это четыре идентичных спутника-зонда, расположенные внутри орбит Венеры и Меркурия для предупреждения и постоянного мониторинга солнечной активности, вспышек и ветров непосредственно вблизи Солнца в условиях сильного излучения. В таких сложных электромагнитных условиях снова целесообразно перейти к механической соосности для предупреждения сбоев электроники при действии интенсивного солнечного излучения.

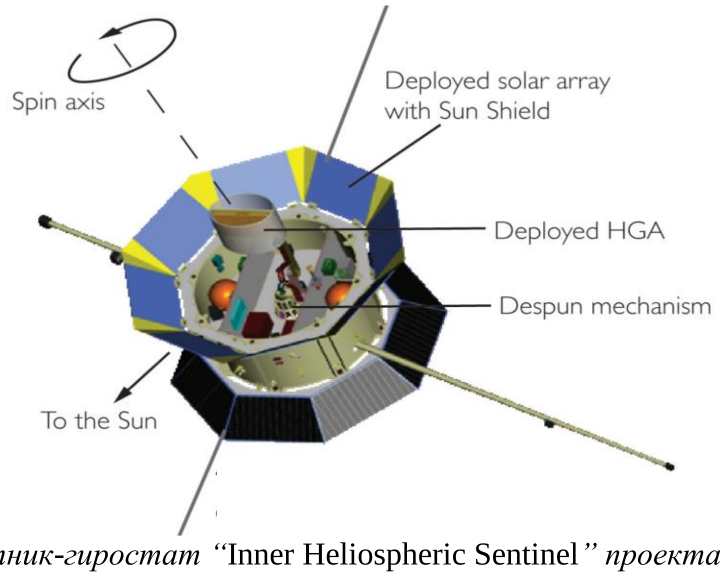


Рис. 1.9. *Спутник-гиростат “*Inner Heliospheric Sentinel*” проекта* Solar Sentinels
https://science.nasa.gov/science-news/science-at-nasa/2006/01sep_sentinels/

Одним из наиболее развивающихся направлений в рамках проектирования космических систем является разработка микро- и наноспутников. Среди реальных наноспутников, выполненных по схеме осевого спутника-гиростата, можно отметить проекты MicroMAS-1 и MicroMAS-2 (Micro-sized Microwave Atmospheric Satellite), разработанные и реализованные в Массачусетском институте технологий (Massachusetts Institute of Technology, Lincoln Laboratory) [163]. Наноспутник-гиростат MicroMAS-1 формата 3U-CubeSat (рис. 1.10) был запущен с борта международной космической станции 04.03.2015. Наноспутник-гиростат MicroMAS-2A был запущен 12.01.2019 с помощью индийского носителя Polar Satellite Launch Vehicle, который стартовал с площадки Satish Dhawan Space Centre в Sriharikota (Индия).

Рис. 1.10. *Наноспутник-гиростат проектов MicroMAS-1 и MicroMAS-2A:*
https://www.ll.mit.edu/news/micromas-cubesat-technology-provides-fresh-approach-weather-forecasting
https://directory.eoportal.org/web/eoportal/satellite-missions/content/-/article/micromas-1
http://digitalcommons.usu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=3292&context=smallsat

Космические аппараты и спутники совершают свое пространственное движение в условиях действия гравитационных и электромагнитных моментов сил. Наличие соответствующей инерционно-массовой компоновки в купе с магнитными системами управления угловым движением позволяет осуществлять стабилизацию пространственного положения, а также выполнять определенные режимы и целевые маневры углового движения, включая цилиндрические/конические прецессии, остановку вращения (сброс кинетического момента), совмещение оси спутника с вектором кинетического момента и т.п. В этой связи, в настоящей работе рассматриваются спутники-гиростаты, имеющие в своем составе *магнитные системы управления движения*, позволяющие генерировать собственный магнитный дипольный момент и тем самым взаимодействовать с внешним геомагнитным полем. В качестве актуаторов магнитных систем управления могут использоваться постоянные магниты и электромагнитные катушки индуктивности. Магнитный дипольный момент, генерируемый системой магнитных актуаторов может быть, как постоянным, так и переменным вектором в координатных осях тела-платформы.

Важные этапы динамики космического полета связаны с активными участками движения на которых осуществляется работа ракетных двигателей и имеет место переменный состав ракетно-космической системы. Применительно к структуре осевого гиростата задача изучения систем переменного состава, исследуемая в работе, возникает, например, в случаях описания динамики выполнения коррекции орбит спутников-гиростатов, а также движении соосных связок разгонных блоков с космическими аппаратами на столах закрутки. Ярким примером таких соосных связок является разгонный блок AJ10, производимый Aerojet Rocketdyne (США), который используется в качестве вторых ступеней ракет-носителей Delta II и Titan III (рис. 1.11).

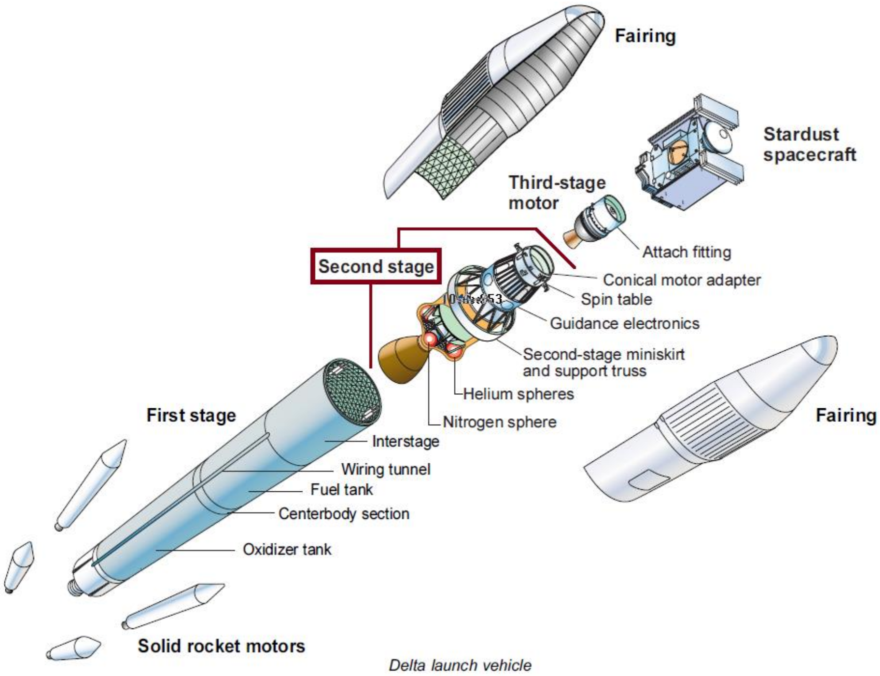


Рис. 1.11. *Разгонный блок AJ-10 в составе ракеты- Delta II*
https://www.ulalaunch.com/rockets/delta-ii

Вывод космического аппарата с помощью подобного разгонного блока предполагает отрезок движения, на котором осуществляется раскрутка аппарата на столе раскрутки (“spin table”). В этих случаях одновременно имеет место относительное соосное вращение тел и переменность их состава (рис.1.12).

Рис. 1.12. *Движение связки переменного состава на базе разгонного блока AJ-10*
https://marsmobile.jpl.nasa.gov/odyssey/mission/timeline/mtlaunch/launch2/

На рис.1.12 показан этап движения разгонного блока AJ-10, на котором система представляет собой осевой гиростат переменного состава в процессе выполнения активной раскрутки космического аппарата на столе раскрутки (на примере миссии “Mars Odyssey” https://mars.nasa.gov/odyssey/mission/). Подобным образом на ракете Delta II с разгонным блоком AJ-10 были выведены такие известные космические аппараты, как ICESat-2 (15.09.2018), Aquarius (06.10.2011), Mars Odyssey (24.10.2001), Kepler (03.06.2009), Stardust (07.02.1999), Polar Lander (03.01.1999) и другие.

В настоящей работе будет рассматриваться влияние изменения инерционно-массовых параметров на динамику нутационно-прецессионного движения осевых спутников-гиростатов переменного состава с опорой на известные результаты Мещерского И.В, Космодемьянского А.А. [67], Iñarrea M., Lanchares V., Rothos V. M., Salas J.P. [242, 243] и др.

1.3. Характеристика результатов исследования регулярной динамики движения спутников-гиростатов

Основные результаты исследования динамики движения спутников-гиростатов имеют широкий охват разнообразных тематических исследований в различных постановках проблем и задач. Так проблематика движения гиростатов и спутников изучалась в разрезе анализа устойчивости режимов движения, где необходимо отметить работы Румянцева В.В. [15, 16, 98, 100], Гутника С.А., Сарычева В.А. [49], Маркеева А.П. [74-83], Морозова В.М. [86-90], Самсонова В.А., Рубановского В.Н. [90, 97], Стрыгина В.В., Соболева В.А. [114, 115], Черноусько Ф.Л. [129], Bainum P. M., Fuechsel P. G., Mackison D.L. [156], Cloutier G.J. [182], Crespo da Silva M. R. M. [186], Elmandouh A.A. [222], Gutnik S.A., Santos L., Sarychev V.A., Silva A. [234], Iñarrea M., Lanchares V., Pascual A.I., Elipe A. [245, 246], Kane T.R., Mingori D.L. [250, 289], Likins P.W. [272], Longman R.W. [281], Markeev A.P., Bardin B.S. [285], Meng Y., Hao R., Chen Q. [288], Moiseev N.N., Rumjancev V.V. [290], Nazari M., Butcher E.A. [293], Vera J.A. [328] и др.

Важными результатами являются изучение перманентных вращений, регулярных и других прецессий, полученные в т.ч., в работах Анчева А. [15], Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. [11], Гуляева М.П. [48], Маркеева А.П. [77-80, 83], Сазонова В.В., Сидоренко В.В. [102], Узбека Е.К. [119], Черноусько Ф.Л. [129], Cochran J.E. [183], Elmandouh A.A. [222], Galiullin I.A. [224], Kinsey K.J., Mingori D.L., Rand R.H. [253], Yehia H.M. [343].

Динамика движения твердых тел, космических аппаратов и спутников-гиростатов в магнитном поле изучалась ранее в различных постановках такими авторами, как Белецкий В.В. [34], Козлов В.В. [65], Мартыненко Ю.Г. [84], Морозов В.М. [86], Овчинников М.Ю. [168, 297, 298, 303], Пивоваров М.Л. [94], Самсонов В.А. [105], Сидоренко В.В. [110], Тихонов А.А. [116, 117], Avanzini G. [155, 344], Bayat F. и Bolandi H., Jalali A.A. [160], Chen Li-Qun и Liu Yan-Zhu [176, 177178], Cheng G. И Liu Y. Z. [178], Iñarrea M. [241], Lovera M., Astolfi A. и Silani E. [283, 316], Shigehara M. [313], Zavoli A., Giulietti F., Matteis G.D. [344], Zhou [346] и многими другими. Управляемое движение спутников с переменным магнитным дипольным моментом, обеспечивающим реализацию конкретного целевого маневра рассматривали Stickler A. Craig и Alfriend K.T. [320], а синтез типовых маневров, например, такого важного маневра, как “B-dot”, нацеленного на остановку вращения спутника путем взаимодействия с внешним магнитным полем, описано в [223], а его частная разновидность “Y-dot” изучалась, например, в [344].

В диссертационном исследовании изучается динамика гиростата в плоском и центральном полях тяготения, а также при действии восстанавливающих моментов. Эта проблематика рассматривалась такими авторами, как Анчев А. [15], Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. [5, 6, 8], Асланов В.С. [22, 23], Белецкий В.В. [33], Бозюков А.Ю., Сазонов В.В. [35, 69, 103], Морозов В.М. [86, 87], Охоцимский Д.Е., Сарычев В.А. [92, 107, 234], Тихонов А.А. [116, 117, 325], Черноусько Ф.Л. [128], Cochran J.E. [183], Crespo da Silva M. R. M.[186], Kuang J., Tan S., T. Leung A.Y. [256, 258], Longman R.W. [280, 281], Tong X., Tabarrok B., Rimrott F.P.J. [327] и др.

Вопросы динамики спутников при реализации разнообразных прецессий, рассматриваемых в настоящей работе, в том числе цилиндрических, а также вопросы плоских движений изучали Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. [11, 129], Белецкий В.В. [32], Гуляев М.П. [48], Маркеев А.П. [77-83], Бозюков А.Ю., Сазонов В.В. [35], Сидоренко В.В. [102], Узбек Е.К. [119], Cochran J.E. [183], Kinsey K.J., Mingori D.L., Rand R.H. [253], Yehia H.M. [343].

Следует отметить основные исследования по изучению динамики тел в жидкости или с полостями, содержащими жидкость, во многом определившие развитие проблематики гиростата, включающие работы Жуковского Н.Е. [55], Стеклова В.А. [112, 113], Моиссева Н.Н., Румянцева В.В. [290], Харламова П.В. [120], Черноусько Ф.Л. [130, 131].

Нелинейные эволюции движения тел и гиростатов при действии сил различной природы изучались в работах Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. [179, 135], а также в их соавторстве с Зинкевичем Я.С., Козаченко Т.А., Рачинской А.Л. и др. [3-8, 140].

Вопросы динамики, управления движением и стабилизации спутников, твердых тел и гиростатов рассматривались Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. и др. [1, 27], Амелькиным Н.И. [13], Аслановым В.С. [151, 153], Белецким В.В. [32], Буровым А.А. [38], Виттенбургом Й. [40, 338], Воротниковым В.И. и др. [41, 42], Охоцимским Д.Е., Энеевым Т.М., Акимом Э.Л., Сарычевым В.А. [92б 93], Румянцевым В.В. [99], Черноусько Ф.Л., Ананьевским И.М., Баничуком Н.В., Соколовым Б.Н., Решминым С.А. [132, 133, 134], Банщиковым А.В. [31], Горром Г.В., Ковалевым А.М. [47], Кошляковым В.Н. [68], Chobotov V.A. [181], Guirao J.L.G., Vera J.A. [232, 234], Hall C.D. [235-237], Hughes P.C. [240], Likins P.W. [271], Or A.C. [295], Rauschenbach B.V., Ovchinnikov M.Yu., McKenna Lawlor S.[303], Santos L.F., Melicio R., Silva A. [308], Shrivastava S.K., Modi V.J. [315], Tikhonov A.A., Tkhai V.N. [325].

Отдельно следует указать работы, в которых найдены аналитические решения для параметров свободного движения гиростатов Кельвина и нормальных спутников-гиростатов. Результаты, определяющие общие аналитические решения для свободных гиростатов Кельвина, представлены в работах Wittenburg J. [338], Elipe A., Lanchares V. [221], Basak I. [159], при этом гетероклинические решения записаны Tong X., Tabarrok B., Rimrott F.P.J. [327], Kuang J., Tan S., Arichandran K., Leung A.Y.T. [257], специальные случаи решений описаны в работе Горр Г.В., Ковалев А.М. [47]. Аналитические решения для свободных нормальных спутников-гиростатов получены в работах Cochran J.E., Shu P.H., Rew S.D. [184], Aslanov V.S. [146, 145, 149], при этом гетероклинические решения представлены в работе [28].

1.4. Характеристика результатов исследования хаотической динамики движения спутников-гиростатов

Отдельным направлением исследований в рамках анализа движения спутников-гиростатов, которое найдет свое место в настоящей диссертационной работе, является изучение хаотической динамики с выработкой методов подавления или полного устранения хаоса, возникающего за счет действия внутренних и внешних возмущений.

Здесь важно выделить проблему обнаружения гомо-/гетероклинического хаоса, возникающего за счет расщепления и бесконечнократного взаимопересечения устойчивых и неустойчивых множеств седловых особых точек, ограничивающих сепаратрисные траектории, приводящих в итоге к генерации так называемых гомо-/гетероклинических сетей. Следующим шагом является поиск условий подавления либо полного избегания хаоса в рамках возмущенной динамики, и здесь, как будет показано, имеется целый набор методов и техник подавления хаоса, причем классическим подходом в этом направлении считается использование диссипативных методов, например, использование диссипативных свойств внешней среды с сопротивлением, либо внутреннего трения, что отражено, например, в работах El-Gohary A. [217, 219], Iñarrea M., Lanchares V. [241-244, 263], Kuang J.L., Leung A.Y.T. [256-260, 267, 268], Meechan P.A., Asokanthan S.F. [287], Zhou L. [345].

Самостоятельным направлением исследований является изучение динамического хаоса, связанного с реализацией в фазовом пространстве систем странных (фрактальных) хаотических аттракторов, в том числе применительно к динамике гиростатов [265, 227, 191, 206, 211, 213].

Изучение хаотической динамики опирается на общие фундаментальные результаты в области регулярной и хаотической динамики, включая работы Anishchenko V.S., Astakhov V.V. и др. [143]; Beletskiĭ V.V., Pivovarov M.L., Starostin E.L. [161, 162], Boccaletti S. [164, 165], Celletti A., Lhotka C. [171], Ge Z.-M. [225, 226], Guckenheimer J. [230], Holmes P.J. [238-239]; Chen Li-Qun [176, 177], Lin Yiing-Yuh [273], Meechan P.A., Asokanthan S.F. [287], Meng Y. [288], Nazari M. [293], Pecora L.M. [300], Seo [311], Strogatz S.H. [321], Tabor M. [322], Thompson J.M.T., Stewart H. B. [323], Wiggins S. [333-337], Zhou [345].

Хаотическая динамика спутников-гиростатов в разных постановках исследовалась в работах Асланова В.С., Дорошина А.В. [28], Aslanov V.S., Yudintsev V.V. [150, 152, 154], Bao-Zeng [157, 158], Cheng [178], El-Gohary [219], Ge [225, 226], Holmes [238], Iñarrea, Lanchares [241-244], Leung, Kuang [267, 268], Meechan [287], Or [294], Peng [301], Shirazi [314], Tong, Tabarrok, Rimrott [326, 327]; при этом уместно отметить, что хаотизация динамики *нормальных* спутников-гиростатов из всех указанных здесь работ осуществлялась только в работах [28, 152, 154], в остальных работах исследовалась хаотизация гиростатов Кельвина.

Несмотря на широкий спектр представленных исследований, проблема анализа/подавления гетероклинического хаоса в динамике спутников-гиростатов не достигла своего завершения и будет решатся в настоящей работе.

1.5. Методы исследования гомо/гетероклинического хаоса

Как известно, применение формализма Мельникова и его последующих модификаций основывается на построении функций, нули которых свидетельствуют о динамических фактах пересечения расщепленных сепаратрисс (в направлении вектора $\mathbf{N}(t, t_0)$ с точностью до первого порядка малого параметра возмущения) и рождении гомо/гетероклинических сетей (рис. 1.13), что, собственно, и является главной причиной хаотизации динамики, как это было отражено в работе Анри Пуанкаре [96, 302].

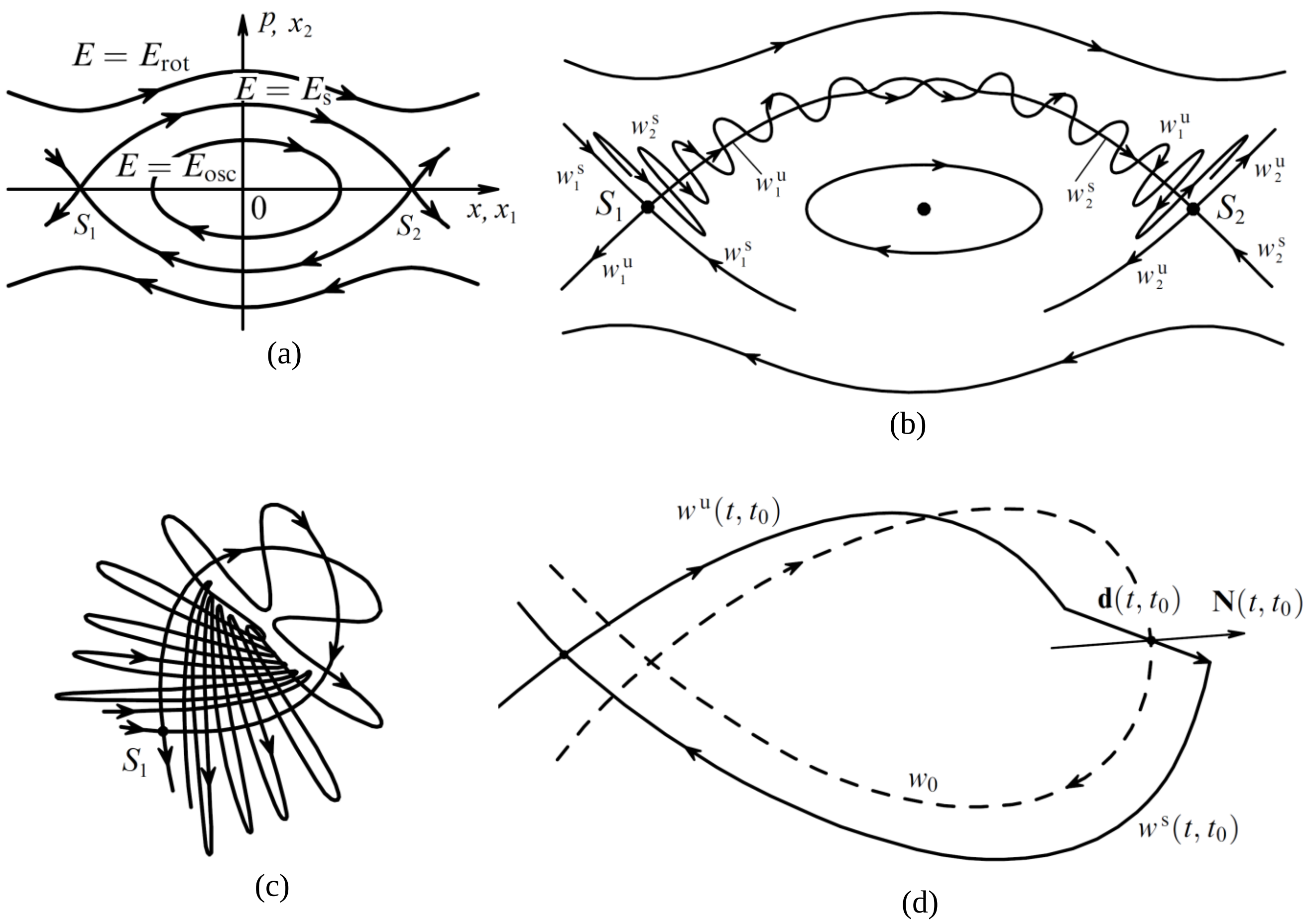


Рис.1.13. *Гомоклинические и гетероклинические точки, траектории, сплетения* [71]

Разработка идеологии и методов указанного формализма стартовало в работах Мельникова В.К. [85], где аналитически впервые был обнаружен факт расщепления и пересечения многообразий гомоклинической сепаратрисы. Далее в работе Арнольда В.И.

[18], подобная аналитическая методика была обобщена с помощью так называемых «усатых торов» [18], базирующихся на инвариантных торах и теории возмущений. В рамках многомерных систем анализ расщепления и пересечения гомоклинических многообразий стал возможен после известных работ P.J. Holmes и J.E. Marsden [238], и S. Wiggins [333]. Необходимо подчеркнуть, что также проблема гомо-/гетероклинических пересечений независимым образом была рассмотрена в работах Козлова В.В. [63, 64], где главным предметом исследований была *неинтегрируемость* динамических систем, проявляющаяся вследствие расщепления сепаратрисс при действии возмущений. Анализ расщепления сепаратрисс в привязке к указанным работам Козлова В.В. был проведен Зиглиным С.Л. [60]. Также можно указать работу Лоскутова А.Ю. [71], содержащую обзор по возможному возникновению хаоса в системах классической механики.

Структура функции Мельникова. Как известно [85], классическая функция Мельникова записывается применительно к уравнениям возмущенной динамики системы с одной степенью свободы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(\mathbf{x}) + \varepsilon g_1(\mathbf{x}, t); \\ \dot{x}_2 = f_2(\mathbf{x}) + \varepsilon g_2(\mathbf{x}, t); \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = f_x(\mathbf{x}) + \varepsilon g_x(\mathbf{x}, t); \\ \dot{p} = f_p(\mathbf{x}) + \varepsilon g_p(\mathbf{x}, t); \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial p} + \varepsilon \dfrac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial p}; \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial x} - \varepsilon \dfrac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial x}; \end{cases} \tag{1.3}$$

где три формы записи системы позволяют явно записать функцию Мельникова в трех случаях, соответствующих общему виду и гамильтоновой форме системы:

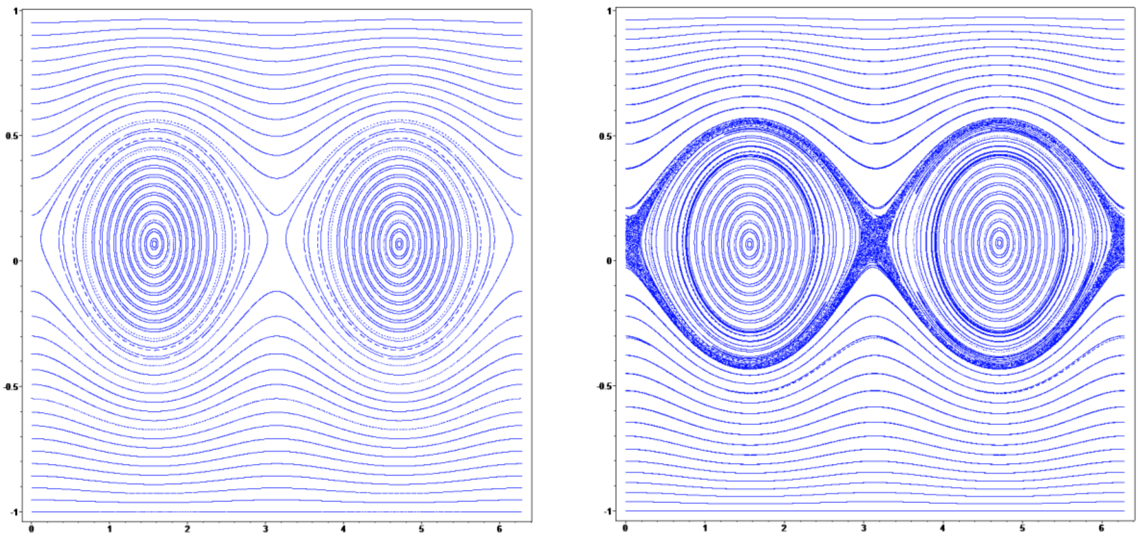
$$M(t_0) = D(t, t_0) = \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f_1(\bar{\mathbf{x}}(t)) g_2(\bar{\mathbf{x}}(t), t + t_0) - f_2(\bar{\mathbf{x}}(t)) g_1(\bar{\mathbf{x}}(t), t + t_0) \right] dt. \tag{1.4}$$

$$M(t_0) = D(t, t_0) = \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f_x(\bar{\mathbf{x}}(t)) g_p(\bar{\mathbf{x}}(t), t + t_0) - f_p(\bar{\mathbf{x}}(t)) g_x(\bar{\mathbf{x}}(t), t + t_0) \right] dt; \tag{1.5}$$

$$M(t_0) = D(t, t_0) = \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0 \right\}_{(\bar{x}(t), \bar{p}(t), t + t_0)} dt = \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial p} - \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial p} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial x} \right]_{(\bar{x}(t), \bar{p}(t), t + t_0)} dt \tag{1.6}$$

Несобственные интегралы вычисляются по переменной t при формальной подстановке в качестве $\bar{\mathbf{x}}(t) = \left[\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t) \right] = \left[\bar{x}(t), \bar{p}(t) \right]$ конкретных явных гомо/гетероклинических зависимостей, соответствующих сепаратрисе; параметр t_0 остается при интегрировании постоянным и фигурирует лишь в членах возмущений, явно зависящих от времени.

Результатом гетероклинических расщеплений и пересечений расщепленных множеств, которые соответствуют нулям функции Мельникова, будет являться порождение хаотического слоя в окрестности невозмущенных сепаратрисс (рис. 1.14).



(a) (b)

Рис.1.14. *Структура невозмущенного (a) и возмущенного (b) фазового пространства (сечения Пуанкаре) с хаотическим слоем – образом множественных гетероклинических пересечений расщепленных сепаратрисс*

Структура функции Мельникова-Виггинса. В случаях многомерных систем (систем с числом свободы больше единицы) формализм Мельникова заменяется его обобщенной модификацией, разработанной С.Виггинсом (Stephen Wiggins) [333-337]. В рамках исследований в настоящей диссертационной работе будет рассматриваться два типа динамических систем, именуемые автором методологии [333], как “System I” и “System III”. Первый тип систем (System I) соответствует системам с негамильтоновыми возмущениями (диссипативными, зависящими от времени и др.), а система второго типа (System III) является гамильтоновой при одновременном требовании гамильтоновости своих возмущений.

Тип System I [333] имеет следующую структуру:

$$\begin{cases} \dot{x} = JD_x\mathcal{H}_0\left(x,I\right) + \varepsilon g^x\left(x,I,w,\mu;\varepsilon\right); \\ \dot{I} = \varepsilon g^I\left(x,I,w,\mu;\varepsilon\right); \\ \dot{w} = \Omega\left(x,I\right) + \varepsilon g^\theta\left(x,I,w,\mu;\varepsilon\right); \end{cases} \tag{1.7}$$

где J – симплектическая матрица, μ – вектор параметров, и фазовый вектор $\left(x,I,w\right) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^m \times T^k$, содержащий канонические позиционные пары координат-импульсов (x), канонические переменные I – представляют собой действия, а w соответствуют угловым переменным для вращающихся фаз, участвующих в возмущениях (поэтому их может быть $k \neq m$).

Тип системы System III [333] имеет следующую структуру, соответствующую полностью гамильтоновой системе, включая возмущения:

$$\begin{cases} \dot{x} = JD_x\mathcal{H}_0\left(x,I\right) + \varepsilon JD_x\mathcal{H}_1\left(x,I,w,\mu;\varepsilon\right); \\ \dot{I} = -\varepsilon D_w\mathcal{H}_1\left(x,I,w,\mu;\varepsilon\right); \\ \dot{w} = D_I\mathcal{H}_0\left(x,I\right) + \varepsilon D_I\mathcal{H}_1\left(x,I,w,\mu;\varepsilon\right); \end{cases} \tag{1.8}$$

где фазовый вектор $(x, I, w) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^m \times T^m$ включает m канонических пар (I, w), соответствующих действиям и угловым переменным для вращающихся фаз.

Для рассматриваемых систем будут актуальны следующие вектор-функции Мельникова-Виггинса [333]:

System I.

$$M^{\bar{I}}(w_0, \alpha; \mu) = \left(M_1^{\bar{I}}(w_0, \alpha; \mu), ..., M_n^{\bar{I}}(w_0, \alpha; \mu)\right), \quad (w_0, \alpha; \mu) \in T^k \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^p, \tag{1.9}$$

где

$$M_i^{\bar{I}}(w_0, \alpha; \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left\langle D_x K_i, g^x \right\rangle + \left\langle D_I K_i, g^I \right\rangle\right]\left(q_0^{\bar{I}}(t), \mu; 0\right) dt - \tag{1.10}$$

$$-\left\langle D_I K_i\left(\gamma\left(\bar{I}\right), \bar{I}\right), \int_{-\infty}^{+\infty} g^I\left(q_0^{\bar{I}}(t), \mu; 0\right) dt \right\rangle; \quad i = 1, ..., n$$

и $q_0^{\bar{I}}(t) = \left(x^{\bar{I}}(t, \alpha), \bar{I}, \int^t \Omega\left(x^{\bar{I}}(s, \alpha), \bar{I}\right) ds + w_0\right)$, что соответствует аналитическому решению вдоль гомо-/гетероклинической траектории для выбранных/заданных значений переменных действий $\bar{I}$; $\mathcal{H}_0 \equiv K_1, K_2, ..., K_n -$ константы, представляющие собой уровни значений «первых интегралов» системы; скобки $\langle \bullet, \bullet \rangle$ обозначают обычное скалярное произведение; аргумент $\gamma\left(\bar{I}\right)$ указывает, что блок $D_I K_i\left(\gamma\left(\bar{I}\right), \bar{I}\right)$ является вычисленным в гомо-/гетероклинической особой точке, соответствующей выбранным значениям действий $\bar{I}$ (где $\gamma(I)$ - есть “кривая”, формируемая положениями особых точек – эта кривая строится в невозмущенном фазовом пространстве и параметризуется параметрами *I* (рис. 1.15)); μ - есть вектор параметров системы; α - параметр, выделяющий конкретное гомо-/гетероклиническое решение из множества таких решений (например, какую-то конкретную гомо-/гетероклиническую ветку, либо какое-то решение из набора многозначных решений).

System III.

$$M^{\bar{I}}(w_0, \alpha; \mu) = \left(M_2^{\bar{I}}(w_0, \alpha; \mu), ..., M_n^{\bar{I}}(w_0, \alpha; \mu), \;\; M_{n+1}^{\bar{I}}(w_0, \alpha; \mu), ..., M_{n+m}^{\bar{I}}(w_0, \alpha; \mu)\right); \tag{1.11}$$

где $(w_0, \alpha; \mu) \in T^m \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^p$,

$$M_i^{\bar{I}}(w_0, \alpha; \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left\langle D_x K_i, J D_x \mathcal{H}_1 \right\rangle - \left\langle D_I K_i, D_w \mathcal{H}_1 \right\rangle\right]\left(q_0^{\bar{I}}(t), \mu; 0\right) dt + \tag{1.12}$$

$$+\left\langle D_I K_i\left(\gamma\left(\bar{I}\right), \bar{I}\right), \int D_w \mathcal{H}_1\left(q_0^{\bar{I}}(t), \mu; 0\right) dt \right\rangle, \qquad i = 2, ..., n;$$

$$M_i^{\bar{I}}(w_0, \alpha; \mu) = -\int_{-\infty}^{+\infty} D_{w_{i-n}} \mathcal{H}_1\left(q_0^{\bar{I}}(t), \mu; 0\right) dt, \qquad i = n+1, ..., n+m; \tag{1.13}$$

и $q_0^{\bar{I}}(t) = \left(x^{\bar{I}}(t, \alpha), \bar{I}, \int^t D_I \mathcal{H}_0\left(x^{\bar{I}}(s, \alpha), \bar{I}\right) ds + w_0\right)$.

Здесь важно сделать ремарку [333], что введенная функция не учитывает и не «измеряет» расстояния между устойчивым и неустойчивым расщепленными гомоклиническими многообразиями (рис. 1.15 – повторен из [333]) вдоль направления гипернормали к невозмущенной гомоклинической траектории в фазовом позиционном подпространстве $\left(D_x K_1, 0\right)$ (где $K_1 = \mathcal{H}_0$ является первым интегралом, определяющим сохранение гамильтониана). Поэтому эти направления есть $\left(D_x\mathcal{H}, 0\right)$, т.е. направления гипернормалей к поверхности гамильтониана и естественной гомоклинической траектории на ней. Так как для чистых гамильтоновых систем (тип System III) уровень энергии поверхности невозмущенного и даже возмущенного гамильтониана $\mathcal{H}_\varepsilon = \mathcal{H} + \varepsilon\mathcal{H}_\varepsilon$ есть «защищенный» от своего изменения уровень при действии гамильтоновых возмущений, то поверхность гамильтониана есть неизменная и «не дышит» во времени. Следовательно, на этих направлениях естественные фазовые траектории, не сходя с защищенной поверхности гамильтониана, не могут пересечься вдоль направления гипернормали к его поверхности. Это же касается и расщепленных многообразий гомо-/гетероклинических траекторий: по направлению $\left(D_x\mathcal{H}, 0\right)$ они пересекаться не будут, т.к. для этого требовалось бы сойти с поверхности гамильтониана. По этой причине вектор-функция Мельникова-Виггинса не содержит соответствующего «первого» компонента в чистом гамильтоновом случае.

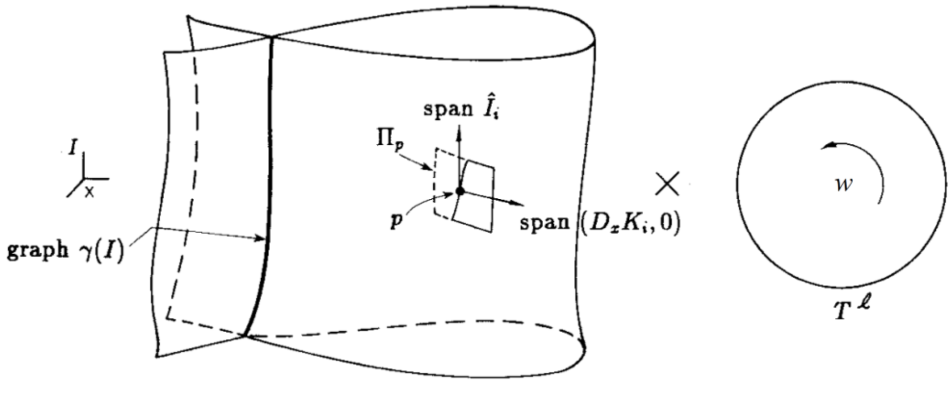


Рис.1.15. *Структура фазового пространства с гомоклиническим многообразием* [333]:

1. Главные направления («гомоклинические координаты») в локальном сечении многообразия подвижной гиперплоскостью Π_p, натянутой на орты, соответствующие направлениям осей действий (указаны как “span $\hat{I}_i$” где i=1..m), и на векторы-гипернормали к текущей невозмущенной гомоклинической траектории на поверхности первого интеграла K_i (причем $K_1 = \mathcal{H}_0$) в позиционном пространстве (указаны как “span $(D_x K_i, 0)$”, где i=1..n).
2. В обозначениях [333] вектор $\left(D_x K_i, 0\right)$ соответствует гипернормали к поверхности первого интеграла K_i, построенной в позиционном фазовом подпространстве, что символизируется добавлением нулей на оставшиеся компоненты вектора в полном фазовом пространстве, т.е.

имеет место следующее обозначение $\left(D_x K_i, 0\right) = \left(\frac{\partial K_i}{\partial x_1}, \frac{\partial K_i}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial K_i}{\partial x_n}, \frac{\partial K_i}{\partial X_1}, \frac{\partial K_i}{\partial X_2}, ..., \frac{\partial K_i}{\partial X_n}, 0, ..., 0\right)^T$, где за x_j обозначены позиционные канонические координаты, а за X_j – соответствующие им канонические импульсы.

3. Фазовое подпространство, в котором построено сечение гомоклинического многообразия гиперплоскостью Π_p имеет размерность $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^m$. Это подпространство расширяется прямым произведением на пространство l – мерного тора T^ℓ (l=≤k), соответствующего конфигурационному пространству вращающихся угловых фаз.

2. Математические модели возмущенного движения спутников-гиростатов

В настоящей главе будут представлены механические и математические модели, описываемые с помощью угловых скоростей и канонических координат Андуайе-Деприи, разработанные и нашедшие свое опубликование в работах диссертанта [196, 197, 198, 199]. На основе представленных моделей в следующих главах будут получены новые общие и гетероклинические аналитические решения, которые будут использованы далее для исследования хаотической динамики спутников-гиростатов на основе методологии Мельникова-Виггинса.

2.1. Геометрические и инерционно-массовые параметры асимметричного спутника-гиростата

Для описания движения спутников-гиростатов как соосных тел с асимметриями (рис. 2.1), будут использованы *следующие системы координат*:

- $CXYZ$ - инерциальная система координат с началом в центре масс системы тел;

- $C_i\bar{x}_i\bar{y}_i\bar{z}_i$ – собственные главные центральные связанные системы координат тел № i, где (i=1 для тела-ротора, i=2 для главного тела-платформы), C_i – центр масс тела i;

- $C_ix_iy_iz_i$ – центральные системы координат, связанные с телами, получаемые поворотами главных центральных связанных осей $C_i\bar{x}_i\bar{y}_i\bar{z}_i$ вокруг точек C_i в положения, когда «продольные» оси C_iz_i становятся параллельными с общей конструкционной осью вращения соосных тел (ось P_1P_2).

- связанные с телами системы координат P_2xyz (связана с телом-платформой) и $P_1x'y'z'$ (связанная с телом-ротором) с началами P_i и осями параллельными соответствующим осям систем $C_ix_iy_iz_i$: $P_1x'y'z' \parallel C_1x_1y_1z_1$; $P_2xyz \parallel C_2x_2y_2z_2$.

- подвижные системы координат с параллельными осями (рис.2.1): $Ox_0y_0z_0 \parallel P_2xyz$; $Ox'_0y'_0z'_0 \parallel P_1x'y'z'$; $C\xi\eta\zeta \parallel Ox_0y_0z_0$; $C\xi'\eta'\zeta' \parallel Ox'_0y'_0z'_0$, где точки C и O соответствуют центру масс системы тел и его проекции на общую ось соосного вращения (подчеркнем здесь совпадение следующих осей: $z \equiv z' \equiv z_0 \equiv z'_0$; $\zeta \equiv \zeta'$).

Взаимные переходы от системы к системе определяются углом относительного вращения тела-ротора по отношению к телу-платформе $\delta = \angle(Cx_0, Ox'_0) \equiv \angle(Oy_0, Oy'_0) \equiv \angle(C\xi, C\xi')$ посредством матрица перехода $[\boldsymbol{\delta}]$:

$$[\boldsymbol{\delta}] : Ox_0y_0z_0 \to Ox'_0y'_0z'_0; \qquad [\boldsymbol{\delta}] : C\xi\eta\zeta \to C\xi'\eta'\zeta' \tag{2.1}$$

где

$$[\boldsymbol{\delta}] = \begin{bmatrix} \cos\delta & \sin\delta & 0 \\ -\sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad [\boldsymbol{\delta}'] = [\boldsymbol{\delta}]^{-1} = [\boldsymbol{\delta}]^T \tag{2.2}$$

Переход из системы $C_i\bar{x}_i\bar{y}_i\bar{z}_i$ в систему $C_i x_i y_i z_i$ можно определить путем двух последовательных поворотов: первый поворот выполняется на угол α_i вокруг «начального» положения оси $C_i\bar{x}_i$ и второй последующий поворот, выполняемый на угол β_i вокруг «α_i-повернутого» положения оси $C_i\tilde{\bar{y}}_i$. Тогда матрица перехода $\mathbf{S}_i$ запишется:

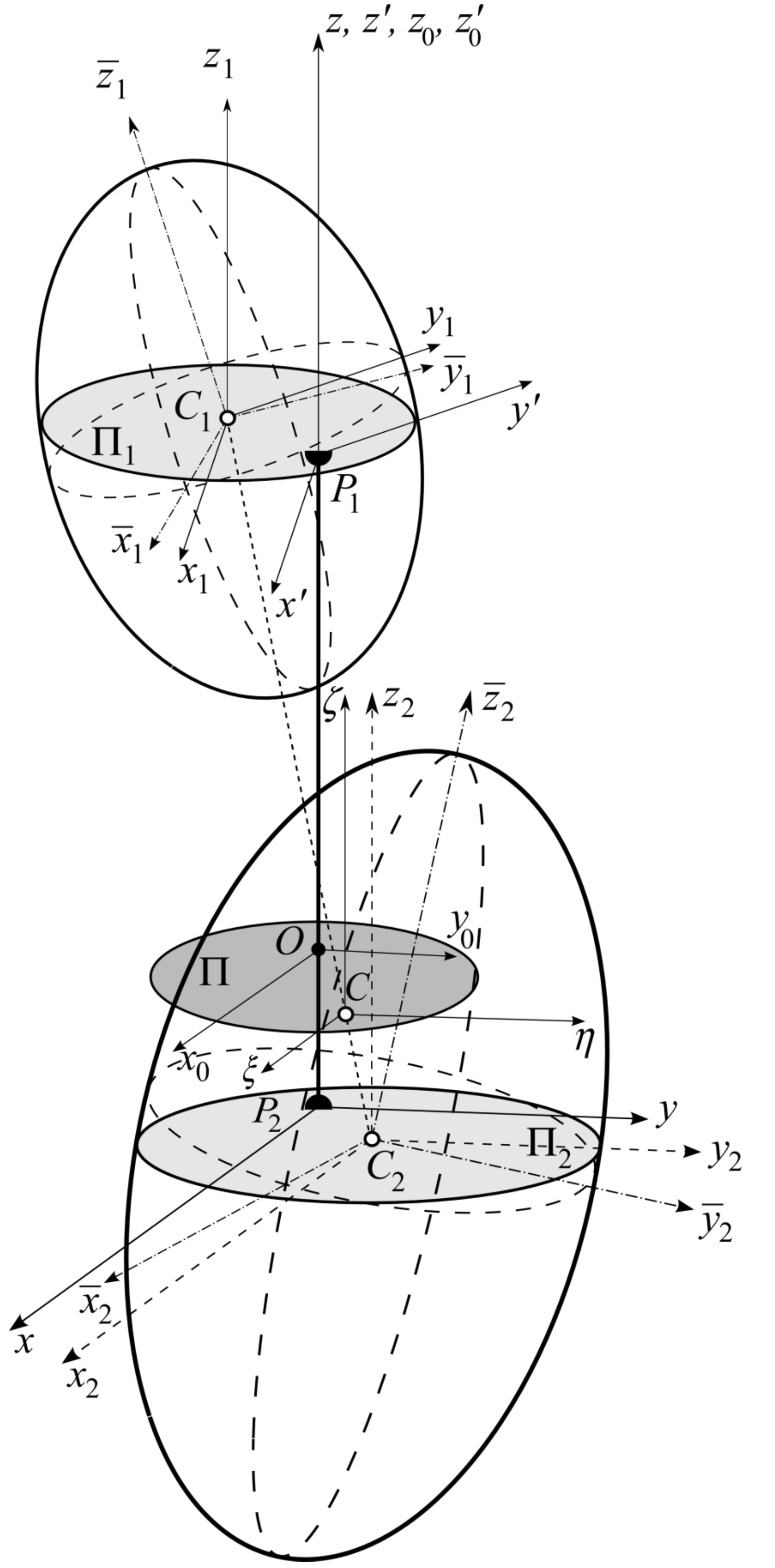
$$\begin{gathered}\mathbf{S}_i=[\boldsymbol{\beta}_i]\cdot[\boldsymbol{\alpha}_i]=\begin{bmatrix}\cos\beta_i & 0 & -\sin\beta_i\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\beta_i & 0 & \cos\beta_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha_i & \sin\alpha_i\\ 0 & -\sin\alpha_i & \cos\alpha_i\end{bmatrix}=\\ =\begin{bmatrix}\cos\beta_i & \sin\beta_i\sin\alpha_i & -\sin\beta_i\cos\alpha_i\\ 0 & \cos\alpha_i & \sin\alpha_i\\ \sin\beta_i & -\sin\alpha_i\cos\beta_i & \cos\alpha_i\cos\beta_i\end{bmatrix}\end{gathered} \tag{2.3}$$

С учетом переходов между системами координат можно связать тензоры инерции тел. Очевидно, что реальные конструкции спутников-гиростата могут представлять собой весьма сложные твердотельные варианты, однако с точки зрения инерционно-массовой геометрии всегда найдется главный эллипсоид и главный тензор инерции соосного тела, представленный в своих центральных осях $C_i\bar{x}_i\bar{y}_i\bar{z}_i$. В этой связи на рисунке (рис.2.1) вместо конкретных конструкций тела-ротора и тела-платформы изображаются их инерционные аналоги - эллипсоиды инерции тел, что обеспечивает унифицированное рассмотрение геометрических и инерционно-массовых параметров системы. В указанных осях тензоры инерции соосных тел являются диагональными:

$$C_i\bar{x}_i\bar{y}_i\bar{z}_i: \quad \left[\bar{\mathbf{I}}_i\right]=diag\left(\bar{A}_i,\bar{B}_i,\bar{C}_i\right), \tag{2.4}$$

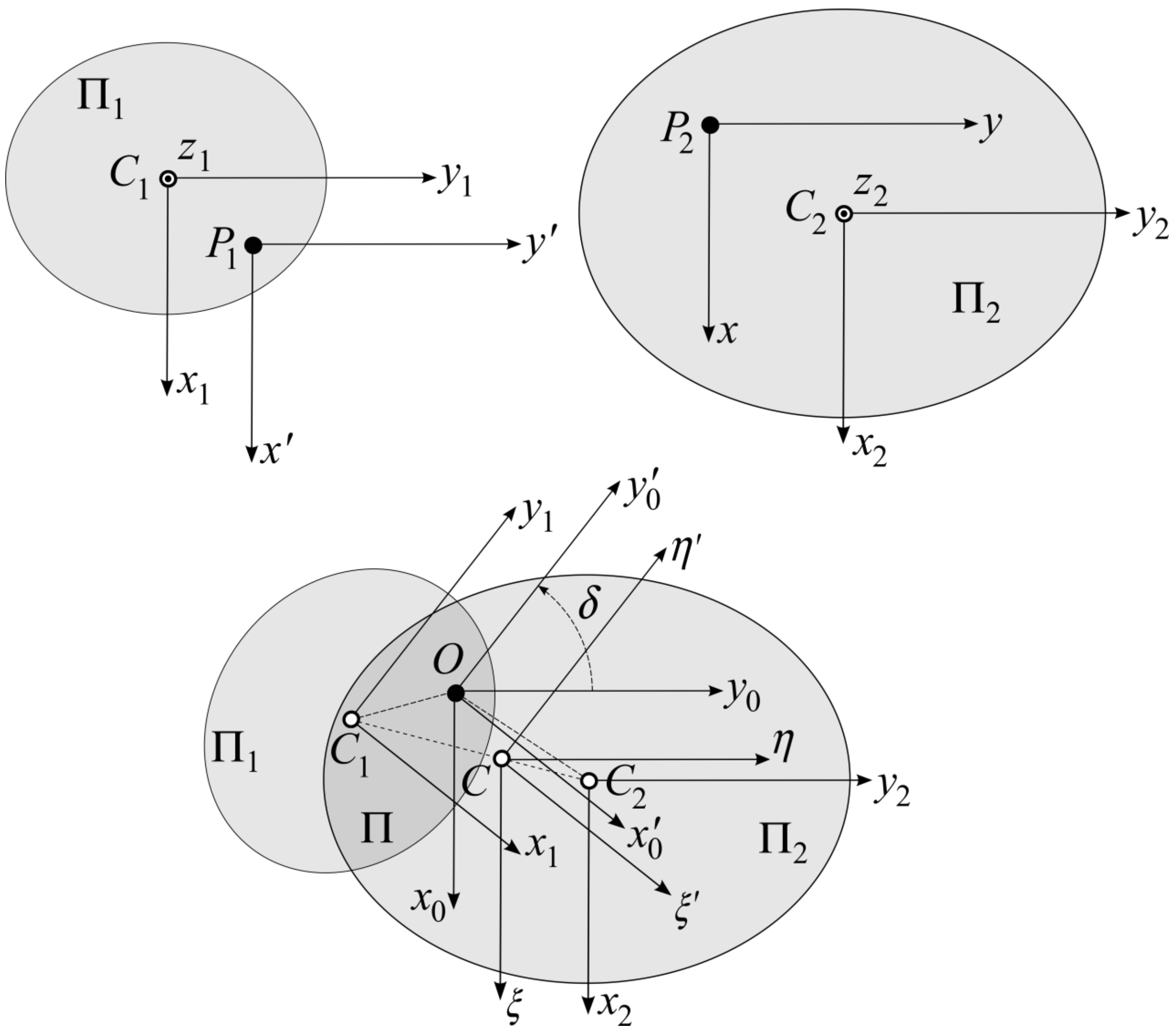
а пересчет тензоров инерции при из записи в системах $C_i x_i y_i z_i$ будет осуществляться ортогональным преобразованием с матрицей перехода $\mathbf{S}_i$:

$$C_i x_i y_i z_i: \quad [\mathbf{I}_i]=\mathbf{S}_i\cdot\left[\bar{\mathbf{I}}_i\right]\cdot\mathbf{S}_i^{-1}. \tag{2.5}$$



(a)

Рис.2.1. *Механическая модель СГ и используемые системы координат*



(b)

Рис.2.1. *Механическая модель спутника-гиростата и используемые системы координат:*
(a) – *общий вид системы с инерционными аналогами тела (эллипсоидами инерции)*
(b) – *сечения* Π_i *и используемые системы координат*

Для того, чтобы явно определить главные геометрические параметры системы, введем геометрическую плоскость Π_i (i=1, 2) которая соответствует плоскости, перпендикулярной к конструкционной общей оси вращения соосных тел P_1P_2, и содержащей центр масс тела C_i ($C_i \in \Pi_i \perp P_1P_2$). Важно подчеркнуть, что плоскость связанной системы координат $C_i x_i y_i$ будет совпадать с плоскостью Π_i. Более того, необходимо отметить, что пересечение плоскости $C_i x_i y_i$ с общей конструкционной осью вращения соосных тел как раз и расположено в точке P_i: $P_i = \left(C_i x_i y_i \cap P_1 P_2\right)$. Тогда координаты точки P_i можно записать в следующем конкретном виде:

$$C_i x_i y_i z_i: \quad x_i\left(P_i\right) = -l_x^{(i)}; \;\; y_i\left(P_i\right) = -l_y^{(i)}; \;\; z_i\left(P_i\right) = 0 \,. \qquad (2.6)$$

Положение центра масс системы соосных тел C, а также положение геометрической точки O на оси P_1P_2, которая будет лежать в плоскости П, проходящей через центр масс системы и параллельной плоскостям Π_i: $(\Pi \parallel \Pi_i;\ O = \Pi \cap P_1P_2)$. Очевидно, что в процессе относительного вращения соосных тел центр масс тела i будет смещаться в своей плоскости Π_i (при этом центр масс тела будет оставаться на окружности с центом P_i), а центр масс всей системы будет перемещаться в плоскости П. Очевидно также, что геометрически переменное положение центра масс системы будет всегда соответствовать точке пересечения отрезка C_1C_2 с плоскостью П $(C = C_1C_2 \cap \Pi)$. Указанное выше геометрическое перемещение центра масс связано исключительно с изменением геометрии относительного расположения соосных тел по отношению друг к другу, при этом в физическом смысле движения центр масс будет двигаться в соответствии с внешними силами (центр масс свободной системы будет оставаться фиксированной точкой инерциального пространства).

Для записи динамических величин будут необходимы геометрические параметры, соответствующие векторам центров масс тел и системы. Базируясь на введенных геометрических описаниях и системах координат, введем следующие геометрические и кинематические параметры системы, записывая их в соответствующих осях:

$$\begin{cases} Ox_0y_0z_0: \ \overrightarrow{OC_2} = \boldsymbol{\rho}_{C_2} = \left[l_x^{(2)}, l_y^{(2)}, -OP_2 \right]^T; \\ Ox_0'y_0'z_0': \ \overrightarrow{OC_1} = \boldsymbol{\rho}'_{C_1} = \left[l_x^{(1)}, l_y^{(1)}, OP_1 \right]^T; \\ Ox_0y_0z_0: \ \overrightarrow{OC} = \boldsymbol{\rho}_C = \dfrac{1}{M_1 + M_2}\left(M_2\boldsymbol{\rho}_{C_2} + M_1[\boldsymbol{\delta}'] \cdot \boldsymbol{\rho}'_{C_1} \right); \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} C\xi\eta\zeta: \ \overrightarrow{CO} = -\boldsymbol{\rho}_C; \\ C\xi\eta\zeta: \ \overrightarrow{CC_2} = \boldsymbol{\rho}_{C_2} - \boldsymbol{\rho}_C; \\ C\xi\eta\zeta: \ \overrightarrow{CC_1} = [\boldsymbol{\delta}'] \cdot \boldsymbol{\rho}'_{C_1} - \boldsymbol{\rho}_C; \\ C\xi'\eta'\zeta': \ \overrightarrow{CC_1} = \boldsymbol{\rho}'_{C_1} - [\boldsymbol{\delta}] \cdot \boldsymbol{\rho}_C; \end{cases} \quad (2.8)$$

где $\boldsymbol{\rho}_{C_2}$ – вектор центра масс тела-платформы с его постоянными компонентами в осях системы координат $Ox_0y_0z_0$; $\boldsymbol{\rho}'_{C_1}$ – вектор центра масс тела-ротора с его постоянными компонентами в осях $Ox_0'y_0'z_0'$; $\boldsymbol{\rho}_C$ – вектор центра масс всей системы с переменными компонентами, представимыми в осях $Ox_0y_0z_0$; M_i – масса соосного тела i.

2.2. Уравнения движения в Эйлеровой форме

Осуществим построение динамических уравнений движения спутника-гиростата. Рассматриваемая механическая система имеет четыре степени свободы, три из которых определяют положение тела-платформы по отношению к инерциальным осям, а четвертая степень свободы описывает вращение тела-ротора относительно тела-платформы на угол δ вокруг оси соосного вращения P_1P_2. Угловые скорости соосных тел в абсолютном пространстве будем описывать векторами, имеющими следующие компоненты в своих связанных осях:

$$C_2x_2y_2z_2: \quad \boldsymbol{\omega} = [p, q, r]^T; \qquad C_1x_1y_1z_1: \quad \boldsymbol{\omega}' = [p', q', r']^T$$

где $\boldsymbol{\omega}$ - это угловая скорость вращения тела платформы относительно своего центра масс C_2 и $\boldsymbol{\omega}'$ - угловая скорость вращения тела-ротора относительно собственного центра масс C_1. С учетом степени свободы относительного вращения соосных тел будет иметь место следующая взаимосвязь компонент угловых скоростей, вычисленных в связанных системах координат с учетом взаимных переходов из системы в систему с помощью матрицы $[\boldsymbol{\delta}]$:

$$\begin{cases} p' = p\cos\delta + q\sin\delta; \\ q' = -p\sin\delta + q\cos\delta; \\ r' = r + \sigma; \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\sigma = \dot{\delta} \tag{2.10}$$

где σ – угловая скорость относительного вращения тела-ротора.

Векторы количества движения и кинетического момента, вычисленные относительно центра масс системы C, могут быть записаны следующим образом:

$$\mathbf{Q}_1 = M_1\mathbf{v}_{C_1}^{abs}; \quad \mathbf{K}_C^{(1)} = \mathbf{K}_{C_1}^{(1)} + \overrightarrow{CC_1} \times \mathbf{Q}_1 \tag{2.11}$$

где абсолютная скорость центра масс тела-ротора может быть представлена в проекциях на оси $C\xi'\eta'\zeta'$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{C_1}^{abs} &= \mathbf{v}_{P_1}^{abs} + \boldsymbol{\omega}_{C_1P_1} \times \overrightarrow{P_1C_1} = \left[[\boldsymbol{\delta}] \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CP_1} + \frac{\tilde{d}}{dt}\left[\overrightarrow{CP_1}\right] \right) + \boldsymbol{\omega}' \times \overrightarrow{P_1C_1} \right] = \\ &= \left[[\boldsymbol{\delta}] \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \left(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OP_1}\right) + \frac{\tilde{d}}{dt}\left(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OP_1}\right) \right) + \boldsymbol{\omega}' \times \overrightarrow{P_1C_1} \right] = \\ &= \left[[\boldsymbol{\delta}] \cdot \left(\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \left((-\boldsymbol{\rho}_C) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ OP_1 \end{bmatrix} \right) + (-\dot{\boldsymbol{\rho}}_C) \right) + \begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_x^{(1)} \\ l_y^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} \right] \end{aligned} \tag{2.12}$$

В проекциях на оси $C\xi'\eta'\zeta'$ кинетический момент тела-ротора относительно точки C будет иметь вид:

$$\mathbf{K}_{C\xi'\eta'\zeta'}^{(1)} = [\mathbf{I}_1] \cdot \begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix} + \left(\boldsymbol{\rho}'_{C_1} - [\boldsymbol{\delta}] \cdot \boldsymbol{\rho}_C\right) \times M_1 \left[[\boldsymbol{\delta}] \cdot \left(\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \left((-\boldsymbol{\rho}_C) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ OP_1 \end{bmatrix} \right) \right) + \begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_x^{(1)} \\ l_y^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} \right] \tag{2.13}$$

Кинетическая энергия тела-ротора будет выражаться следующим образом:

$$T_1 = T_{C_1} + T_{C_1}^{(r)} = \frac{1}{2}M_1\left(\mathbf{v}_{C_1}^{abs}\right)^2 + \frac{1}{2}[p', q', r'][\mathbf{I}_1]\begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Количество движения тела-платформы и его кинетический момент, вычисленный относительно центра масс системы C, имеют вид:

$$\mathbf{Q}_2 = M_2 \mathbf{v}_{C_2}^{abs}; \quad \mathbf{K}_C^{(2)} = \mathbf{K}_{C_2}^{(2)} + \overrightarrow{CC_2} \times \mathbf{Q}_2 \tag{2.15}$$

где абсолютная скорость центра масс тела-платформы в проекциях на оси системы $C\xi\eta\zeta$ запишется:

$$\mathbf{v}_{C_2}^{abs} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CC_2} + \frac{\tilde{d}}{dt}\overrightarrow{CC_2} = \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\rho}_{C_2} - \boldsymbol{\rho}_C\right) + \frac{\tilde{d}}{dt}\left(\boldsymbol{\rho}_{C_2} - \boldsymbol{\rho}_C\right) \tag{2.16}$$

Кинетический момент тела-платформы вокруг точки C в проекциях на оси $C\xi\eta\zeta$ запишется в форме:

$$\mathbf{K}_{C\xi\eta\zeta}^{(2)} = \left[\mathbf{I}_2\right] \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + M_2 \left(\boldsymbol{\rho}_{C_2} - \boldsymbol{\rho}_C\right) \times \left[\boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\rho}_{C_2} - \boldsymbol{\rho}_C\right) + \frac{\tilde{d}}{dt}\left(\boldsymbol{\rho}_{C_2} - \boldsymbol{\rho}_C\right)\right] \tag{2.17}$$

Кинетическая энергия тела-платформы будет выражаться в виде:

$$T_2 = T_{C_2} + T_{C_2}^{(r)} = \frac{1}{2} M_2 \left(\mathbf{v}_{C_2}^{abs}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[p, q, r\right]\left[\mathbf{I}_2\right] \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

Главные динамические уравнения движения системы можно записать на основе теоремы об изменении кинетического момента (2.19), используя понятия локальных производных (в подвижных системах координат $C\xi\eta\zeta$ и $C\xi'\eta'\zeta'$, что указывается нижней индексной подписью у соответствующих векторов) с итоговым проецированием векторов (2.20) на оси главной подвижной системы координат $C\xi\eta\zeta$ [24]:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{K}_C = \mathbf{M}_C^{(e)} \tag{2.19}$$

$$\left[\boldsymbol{\delta}\right]\left[\frac{d}{dt}\mathbf{K}_{C\varsigma'\eta'\zeta'}^{(1)} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{K}_{C\varsigma'\eta'\zeta'}^{(1)}\right] + \left[\frac{d}{dt}\mathbf{K}_{C\varsigma\eta\zeta}^{(2)} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_{C\varsigma\eta\zeta}^{(2)}\right] = \mathbf{M}_{C\varsigma\eta\zeta}^{(e)} \tag{2.20}$$

где $\mathbf{M}_{C\varsigma\eta\zeta}^{(e)}$ - есть вектор внешних моментов сил, а компоненты угловых скоростей выражены через компоненты угловой скорости тела-платформы (p,q,r) и скорость относительного вращения σ с использованием (2.2)-(2.9).

Уравнение относительного движения тела-ротора можно записать на основе изменения «продольной» компоненты кинетического момента тела-ротора при действии внешнего момента сил $M_{C\zeta',1}^{(e)}$ (приложенного к телу-ротору) и внутреннего момента сил, приложенного со стороны тела-платформы $M_\delta^{(i)}$ (например, момент трения соосных тел):

$$\frac{d}{dt}K_{C\zeta'}^{(1)} = M_{C\zeta',1}^{(e)} + M_\delta^{(i)} \tag{2.21}$$

Кинематические уравнения движения соосных тел будут полностью соответствовать классической кинематике углов Эйлера, при этом систему кинематических уравнений остается лишь дополнить уравнением для угла относительного вращения $\dot{\delta} = \sigma$:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \dfrac{1}{\sin\theta}\left(p\sin\varphi + q\cos\varphi\right); & \dot{\theta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi; \\ \dot{\varphi} = r - \operatorname{ctg}\theta\left(p\sin\varphi + q\cos\varphi\right); & \dot{\delta} = \sigma \end{cases} \tag{2.22}$$

2.3. Типы динамической асимметрии

Для явного выделения малых внутренних возмущений, возникающих вследствие асимметрии, введем классификацию типов и соответствующие параметры малой асимметрии. Будем выделять следующие три типа асимметрии:

- малые отклонения тензора инерции тел от главной (диагональной) формы $(\varepsilon_{\mathbf{I}})$;
- малая динамическая асимметрия тела-ротора (ε_B);
- малые линейные смещения осей соосных тел от общей оси вращения (ε_l).

Малые отклонения тензора инерции тел от главной (диагональной) формы будем описывать малым параметром $\varepsilon_{\mathbf{I}}$, который можно определить посредством малости углов перехода в собственную главную систему координат (α_i, β_i) при записи матрицы перехода в линеаризованном виде:

$$\varepsilon_{\mathbf{I}} = \sup\{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2\} \tag{2.23}$$

$$\alpha_1 = \varepsilon_{\mathbf{I}}\bar{\alpha}_1, \quad \alpha_2 = \varepsilon_{\mathbf{I}}\bar{\alpha}_2, \quad \beta_1 = \varepsilon_{\mathbf{I}}\bar{\beta}_1, \quad \beta_2 = \varepsilon_{\mathbf{I}}\bar{\beta}_2, \quad \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i = \text{const} \le 1 \quad (i = 1, 2)$$

Тогда матрицы перехода в связанные системы координат можно записать в линейном приближении:

$$\mathbf{S}_i = |\alpha_i, \beta_i \sim \varepsilon| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta_i \\ 0 & 1 & \alpha_i \\ \beta_i & -\alpha_i & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.24}$$

что позволяет записать и декомпозировать тензоры инерции на главную и «возмущенную» части следующим образом:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{I}_i] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta_i \\ 0 & 1 & \alpha_i \\ \beta_i & -\alpha_i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_i & 0 & 0 \\ 0 & \bar{B}_i & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta_i \\ 0 & 1 & -\alpha_i \\ -\beta_i & \alpha_i & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \bar{A}_i & 0 & \varepsilon_{\mathbf{I}}\bar{\beta}_i(\bar{A}_i - \bar{C}_i) \\ 0 & \bar{B}_i & \varepsilon_{\mathbf{I}}\bar{\alpha}_i(\bar{C}_i - \bar{B}_i) \\ \varepsilon_{\mathbf{I}}\bar{\beta}_i(\bar{A}_i - \bar{C}_i) & \varepsilon_{\mathbf{I}}\bar{\alpha}_i(\bar{C}_i - \bar{B}_i) & \bar{C}_i \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \bar{A}_i & 0 & 0 \\ 0 & \bar{B}_i & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_i \end{bmatrix} + \varepsilon_{\mathbf{I}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{\beta}_i(\bar{A}_i - \bar{C}_i) \\ 0 & 0 & \bar{\alpha}_i(\bar{C}_i - \bar{B}_i) \\ \bar{\beta}_i(\bar{A}_i - \bar{C}_i) & \bar{\alpha}_i(\bar{C}_i - \bar{B}_i) & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Малая динамическая асимметрия тела-ротора описывает малое отклонение моментов инерции тела-ротора от динамической асимметрии, что выражается следующим безразмерным параметром:

$$\varepsilon_B = \frac{\bar{A}_1 - \bar{B}_1}{\bar{A}_1} \tag{2.26}$$

При одновременном учете двух введенных на текущем этапе типов асимметрии тензор инерции тела-ротора может быть записан в следующем виде с выделением главной и возмущенной частей при отбрасывании членов, пропорциональных $\varepsilon_{\mathbf{I}}\varepsilon_B$:

$$
\begin{gathered}
\left[\mathbf{I}_1\right]=\begin{bmatrix}\bar{A}_1 & 0 & 0\\ 0 & \bar{A}_1\left(1-\varepsilon_B\right) & 0\\ 0 & 0 & \bar{C}_1\end{bmatrix}+\varepsilon_{\mathbf{I}}\begin{bmatrix}0 & 0 & \bar{\beta}_1(\bar{A}_1-\bar{C}_1)\\ 0 & 0 & \bar{\alpha}_1(\bar{C}_1-\bar{A}_1\left(1-\varepsilon_B\right))\\ \bar{\beta}_1(\bar{A}_1-\bar{C}_1) & \bar{\alpha}_1(\bar{C}_1-\bar{A}_1\left(1-\varepsilon_B\right)) & 0\end{bmatrix}=\\
=\begin{bmatrix}\bar{A}_1 & 0 & 0\\ 0 & \bar{A}_1 & 0\\ 0 & 0 & \bar{C}_1\end{bmatrix}+\left(\bar{A}_1-\bar{C}_1\right)\begin{bmatrix}0 & 0 & \varepsilon_{\mathbf{I}}\bar{\beta}_1\\ 0 & \dfrac{-\varepsilon_B\bar{A}_1}{\bar{A}_1-\bar{C}_1} & -\varepsilon_{\mathbf{I}}\bar{\alpha}_1\\ \varepsilon_{\mathbf{I}}\bar{\beta}_1 & -\varepsilon_{\mathbf{I}}\bar{\alpha}_1 & 0\end{bmatrix}
\end{gathered}
\tag{2.27}
$$

Малые линейные смещения осей соосных тел от общей оси вращения можно описывать следующим малым безразмерным параметром:

$$
\varepsilon_l=\frac{l}{P_1P_2},
\tag{2.28}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&l=\sup\left\{l_x^{(1)},l_y^{(1)},l_x^{(2)},l_y^{(2)}\right\};\ \ l_x^{(1)}=\varepsilon_l l_{1x};\ \ l_y^{(1)}=\varepsilon_l l_{1y};\ \ l_x^{(2)}=\varepsilon_l l_{2x};\ \ l_y^{(2)}=\varepsilon_l l_{2y};\\
&l_{ij}=\mathrm{const}\le 1\ \ \left(i=1,2;\ j=x,y\right)
\end{aligned}
$$

Таким образом, на основе комбинации введенных выше трех факторов асимметрии можно описывать общий случай асимметрии с введением единого «ведущего» малого параметра ε и масштабированием по типам асимметрии:

$$
\begin{gathered}
\varepsilon=\max\left\{\varepsilon_{\mathbf{I}},\varepsilon_B,\varepsilon_l\right\};\\
\varepsilon_{\mathbf{I}}=e_{\mathbf{I}}\varepsilon;\quad \varepsilon_B=e_B\varepsilon;\quad \varepsilon_l=e_l\varepsilon
\end{gathered}
\tag{2.29}
$$

где e_I, e_B, e_l - есть постоянные масштабирующие параметры.

2.4. Канонические переменные Андуайе-Депри

Введем канонические переменные Серрета-Андуайе-Депри [312, 188, 189, 142]. В работах Архангельского Ю.А. [21] и Козлова В.В. [63] эти переменные принято именовать переменными Андуайе-Депри, и именно это наименование мы будем использовать далее. Для этого предварительно преобразуем основные геометрические, инерционные и кинематические параметры с учетом их линейных частей разложений по малому параметру (~ε). В рамках перехода к каноническим переменным необходимо записать явные выражения для компонент кинетического момента и кинетической энергии с учетом разложения их по малому параметру. В рамках преобразований будут фигурировать геометрические параметры положения центров масс, которые имеют следующий вид в привязке к соответствующим осям систем координат:

$$
\begin{cases}
Ox_0y_0z_0: \ \ \boldsymbol{\rho}_{C_2} = \varepsilon e_l \left[l_{2x}, l_{2y}, -OP_2 \right]^T; \\
Ox_0'y_0'z_0': \ \ \boldsymbol{\rho}'_{C_1} = \varepsilon e_l \left[l_{1x}, l_{1y}, OP_1 \right]^T; \\
Ox_0y_0z_0: \ \ \boldsymbol{\rho}_C = \dfrac{\varepsilon e_l}{M} \begin{bmatrix} M_2 l_{2x} + M_1 \left(l_{1x}\cos\delta - l_{1y}\sin\delta \right) \\ M_2 l_{2y} + M_1 \left(l_{1x}\sin\delta + l_{1y}\cos\delta \right) \\ 0 \end{bmatrix}; \\
C\xi\eta\zeta: \ \overrightarrow{CC_2} = \varepsilon e_l \begin{bmatrix} l_{2x}\left(1 - \dfrac{M_2}{M}\right) - \dfrac{M_1}{M}\left(l_{1x}\cos\delta - l_{1y}\sin\delta \right) \\ l_{2y}\left(1 - \dfrac{M_2}{M}\right) - \dfrac{M_1}{M}\left(l_{1x}\sin\delta + l_{1y}\cos\delta \right) \\ -OP_2 \end{bmatrix};
\end{cases}
\tag{2.30}
$$

где $M = M_1 + M_2$.

Везде далее будем рассматривать случай динамической балансировки тела-ротора относительно оси соосного вращения, считая, что смещение центра масс тела-ротора относительно оси вращения отсутствует ($l_{1x}=l_{1y}=0$). Тогда в рассматриваемом случае динамически сбалансированного тела-ротора абсолютные скорости центров масс тел будут иметь следующие выражения в проекциях на оси, связанные с телами:

$$
\mathbf{v}_{C_1}^{abs} = \begin{bmatrix} OP_1 q' - r\left(P_y \cos\delta - P_x \sin\delta \right) \\ -OP_1 p' + r\left(P_x \cos\delta + P_y \sin\delta \right) \\ P_y p - P_x q \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{v}_{C_2}^{abs} = \begin{bmatrix} -OP_2 q - \left(P_y + \varepsilon e_l l_{2y} \right) r \\ OP_2 p + \left(P_x + \varepsilon e_l l_{2x} \right) r \\ \left(P_y + \varepsilon e_l l_{2y} \right) p - \left(P_x + \varepsilon e_l l_{2x} \right) q \end{bmatrix}; \tag{2.31}
$$

где $\qquad P_x = -\varepsilon e_l \dfrac{M_2}{M} l_{2x}; \qquad P_y = -\varepsilon e_l \dfrac{M_2}{M} l_{2y}$

Тогда кинетические моменты соосных тел (2.17) и (2.13) с учетом малой асимметрии в своих связанных системах координат запишутся:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_{C\xi\eta\zeta}^{(2)} = & \begin{bmatrix} \left(\bar{A}_2 + M_2 \cdot OP_2^2 \right) p \\ \left(\bar{B}_2 + M_2 \cdot OP_2^2 \right) q \\ \bar{C}_2 r \end{bmatrix} + \varepsilon e_l \begin{bmatrix} \bar{\beta}_2 (\bar{A}_2 - \bar{C}_2) r \\ \bar{\alpha}_2 (\bar{C}_2 - \bar{B}_2) r \\ \bar{\beta}_2 (\bar{A}_2 - \bar{C}_2) p + \bar{\alpha}_2 (\bar{C}_2 - \bar{B}_2) q \end{bmatrix} + \\
& + \varepsilon e_l \frac{M_2 M_1 OP_2}{M} \begin{bmatrix} r l_{2x} \\ r l_{2y} \\ p l_{2x} + q l_{2y} \end{bmatrix};
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

$$\mathbf{K}^{(1)}_{C\xi'\eta'\zeta'} = \begin{bmatrix} \left(\bar{A}_1 + M_1 OP_1^2\right)\left(p\cos\delta + q\sin\delta\right) \\ \left(\bar{A}_1 + M_1 OP_1^2\right)\left(q\cos\delta - p\sin\delta\right) \\ \bar{C}_1\left(r+\sigma\right) \end{bmatrix} +$$

$$+\varepsilon e_{\mathbf{I}}\left(\bar{A}_1 - \bar{C}_1\right)\begin{bmatrix} \bar{\beta}_1\left(r+\sigma\right) \\ -\bar{\alpha}_1\left(r+\sigma\right) \\ p\left(\bar{\beta}_1\cos\delta + \bar{\alpha}_1\sin\delta\right) + q\left(\bar{\beta}_1\sin\delta - \bar{\alpha}_1\cos\delta\right) \end{bmatrix} - \tag{2.33}$$

$$-\varepsilon e_B \bar{A}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ \left(-p\sin\delta + q\cos\delta\right) \\ 0 \end{bmatrix} + \varepsilon e_l \frac{M_2 M_1 OP_1}{M}\begin{bmatrix} r\left(l_{2y}\sin\delta + l_{2x}\cos\delta\right) \\ r\left(l_{2y}\cos\delta - l_{2x}\sin\delta\right) \\ pl_{2x} + ql_{2y} \end{bmatrix}$$

В главной подвижной системе координат, связанной с телом-платформой $C\xi\eta\zeta$, кинетический момент системы запишется в виде:

$$\mathbf{K}_{C\xi\eta\zeta} = \mathbf{K}^{(2)}_{C\xi\eta\zeta} + \left[\boldsymbol{\delta}'\right]\cdot\mathbf{K}^{(1)}_{C\xi'\eta'\zeta'} \tag{2.34}$$

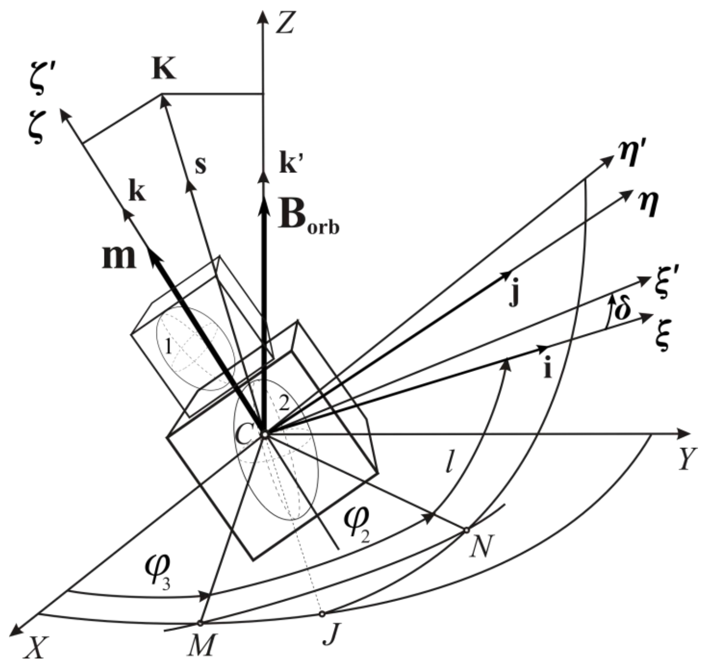


Рис. 2.2 *Расположение осей систем координат и углы Андуайе-Деприи*

Располагая выражением кинетического момента системы, можно перейти к новым динамическим переменным Андуайе-Деприи $\{l, L\}, \{\varphi_2, I_2\}, \{\varphi_3, I_3\}, \{\delta, \Delta\}$. Указанные угловые переменные связаны с описанием углового положения вектора кинетического момента в инерциальном пространстве (рис. 2.2) и могут быть введены классическим путем посредством записи следующих соотношений:

$$L = K_{C\zeta};\ I_2 = |\mathbf{K}|;\ I_3 = K_{Cz};\ \Delta = K_{C\zeta}^{(1)} = K_{C\zeta'}^{(1)};$$
$$\sqrt{I_2^2 - L^2}\sin l = K_{C\xi};\ \sqrt{I_2^2 - L^2}\cos l = K_{C\eta}; \tag{2.35}$$

Для введения переменных Андуайе-Деприи запишем *«союзные» выражения*, связывающие компоненты угловых скоростей с переменными Андуайе-Деприи. Для этого подставим в (2.35) явные выражения для компонент кинетического момента и, рассматривая получаемые соотношения как алгебраические уравнения относительно «неизвестных» $\{p,\ q,\ r,\ \sigma\}$, после формального разрешения и группировки членов по степеням малого параметра можно записать:

$$\begin{cases} p = \hat{p}\left(l, L, \delta, \Delta, I_2\right) = \hat{p}_0\left(l, L, \delta, \Delta, I_2\right) + \varepsilon\hat{p}_1\left(l, L, \delta, \Delta, I_2\right); \\ q = \hat{q}\left(l, L, \delta, \Delta, I_2\right) = \hat{q}_0\left(l, L, \delta, \Delta, I_2\right) + \varepsilon\hat{q}_1\left(l, L, \delta, \Delta, I_2\right); \\ r = \hat{r}\left(l, L, \delta, \Delta, I_2\right) = \hat{r}_0\left(l, L, \delta, \Delta, I_2\right) + \varepsilon\hat{r}_1\left(l, L, \delta, \Delta, I_2\right); \\ \sigma = \hat{\sigma}\left(l, L, \delta, \Delta, I_2\right) = \hat{\sigma}_0\left(l, L, \delta, \Delta, I_2\right) + \varepsilon\hat{\sigma}_1\left(l, L, \delta, \Delta, I_2\right), \end{cases} \tag{2.36}$$

где конкретные соотношения для главных «невозмущенных» $\left(\hat{p}_0, \hat{q}_0, \hat{r}_0, \hat{\sigma}_0\right)$ и «возмущенных» $\left(\hat{p}_1, \hat{q}_1, \hat{r}_1, \hat{\sigma}_1\right)$ частей союзных выражений имеют вид:

$$\hat{p}_0 = \frac{1}{A}\sqrt{I_2^2 - L^2}\sin l;\ \ \hat{q}_0 = \frac{1}{B}\sqrt{I_2^2 - L^2}\cos l;\ \ \hat{r}_0 = \frac{L - \Delta}{\bar{C}_2};\quad \hat{\sigma}_0 = \frac{\left(\bar{C}_1 + \bar{C}_2\right)\Delta - \bar{C}_1 L}{\bar{C}_1\bar{C}_2}; \tag{2.37}$$

$$\hat{p}_1 = e_{\mathbf{I}}\hat{p}_{\mathbf{I}} + e_l\hat{p}_l + e_B\hat{p}_B;\ \ \hat{q}_1 = e_{\mathbf{I}}\hat{q}_{\mathbf{I}} + e_l\hat{q}_l + e_B\hat{q}_B;\ \ \hat{r}_1 = e_{\mathbf{I}}\hat{r}_{\mathbf{I}} + e_l\hat{r}_l + e_B\hat{r}_B;\ \ \hat{\sigma}_1 = e_{\mathbf{I}}\hat{\sigma}_{\mathbf{I}} + e_l\hat{\sigma}_l + e_B\hat{\sigma}_B; \tag{2.38}$$

$$\hat{p}_{\mathbf{I}} = \frac{1}{A\bar{C}_1\bar{C}_2}\left(\bar{\beta}_2\bar{C}_1\left(\bar{A}_2 - \bar{C}_2\right)\left(\Delta - L\right) - \left[\bar{\beta}_1\cos\delta + \bar{\alpha}_1\sin\delta\right]\bar{C}_2\left(\bar{A}_1 - \bar{C}_1\right)\Delta\right);$$

$$\hat{p}_B = \bar{A}_1\sqrt{I_2^2 - L^2}\left(\frac{1}{A^2}\sin l\sin^2\delta - \frac{1}{AB}\cos l\cos\delta\sin\delta\right);$$

$$\hat{p}_l = \frac{1}{A\bar{C}_1\bar{C}_2}\left(\left(\Delta - L\right)\bar{C}_1 M_2 OP_2 l_{2x}\right);$$

$$\hat{q}_{\mathbf{I}} = \frac{1}{B\bar{C}_1\bar{C}_2}\left(\bar{\alpha}_2\bar{C}_1\left(\bar{C}_2 - \bar{B}_2\right)\left(\Delta - L\right) - \left[\bar{\beta}_1\sin\delta - \bar{\alpha}_1\cos\delta\right]\bar{C}_2\left(\bar{A}_1 - \bar{C}_1\right)\Delta\right);$$

$$\hat{q}_B = \bar{A}_1\sqrt{I_2^2 - L^2}\left(\frac{1}{B^2}\cos l\cos^2\delta - \frac{1}{AB}\sin l\cos\delta\sin\delta\right);$$

$$\hat{q}_l = \frac{1}{B\bar{C}_1\bar{C}_2}\left(\left(\Delta - L\right)\bar{C}_1 M_2 OP_2 l_{2y}\right);$$

$$\hat{r}_{\mathbf{I}} = -\frac{\sqrt{I_2^2 - L^2}}{\bar{C}_2}\left(\frac{\bar{\beta}_2}{A}\left(\bar{A}_2 - \bar{C}_2\right)\sin l + \frac{\bar{\alpha}_2}{B}\left(\bar{C}_2 - \bar{B}_2\right)\cos l\right);\qquad \hat{r}_B = 0;$$

$$\widehat{r}_l = \frac{M_1 M_2 OP_2 \sqrt{I_2^2 - L^2}}{M\bar{C}_2}\left(\frac{\cos l}{B} l_{2y} - \frac{\sin l}{A} l_{2x}\right);$$

$$\widehat{\sigma}_{\mathrm{I}} = \sqrt{I_2^2 - L^2}\left(\left[\frac{\left(\bar{C}_1 - \bar{A}_1\right)}{B\bar{C}_1}\bar{\beta}_1 \sin\delta - \frac{\left(\bar{C}_1 - \bar{A}_1\right)}{B\bar{C}_1}\bar{\alpha}_1 \cos\delta + \frac{\bar{\alpha}_2\left(\bar{C}_2 - \bar{B}_2\right)}{B\bar{C}_2}\right]\cos l + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\left(\bar{C}_1 - \bar{A}_1\right)}{A\bar{C}_1}\bar{\alpha}_1 \sin\delta + \frac{\left(\bar{C}_1 - \bar{A}_1\right)}{A\bar{C}_1}\bar{\beta}_1 \cos\delta + \frac{\bar{\beta}_2\left(\bar{A}_2 - \bar{C}_2\right)}{A\bar{C}_2}\right]\sin l\right); \qquad \widehat{\sigma}_B = 0;$$

$$\widehat{\sigma}_l = -\frac{M_1 M_2\left(OP_1\bar{C}_2 - OP_2\bar{C}_1\right)\sqrt{I_2^2 - L^2}}{M\bar{C}_1\bar{C}_2}\left(\frac{\cos l}{B} l_{2y} + \frac{\sin l}{A} l_{2x}\right).$$

и введены следующие обозначения для моментов инерции:

$$A = M_2 OP_2^2 + \bar{A}_2 + M_1 OP_1^2 + \bar{A}_1; \qquad B = M_2 OP_2^2 + \bar{B}_2 + M_1 OP_1^2 + \bar{A}_1; \qquad C = \bar{C}_1 + \bar{C}_2.$$

2.5. Кинетическая энергия спутника-гиростата

Запишем кинетическую энергию системы, принимая во внимание члены не выше первого порядка малости относительно малого параметра ε:

$$T = T_{platform} + T_{rotor}$$

$$T_{platform} = \frac{1}{2}\left(\left[\bar{A}_2 + M_2 OP_2^2\right]p^2 + \left[\bar{B}_2 + M_2 OP_2^2\right]q^2 + \bar{C}_2 r^2\right) +$$

$$+\varepsilon e_I\left[\bar{\beta}_2(\bar{A}_2 - \bar{C}_2)rp + \bar{\alpha}_2(\bar{C}_2 - \bar{B}_2)rq\right] +$$

$$+\varepsilon e_l OP_2 M_2\left[\left(l_{2y}\left[1 - \frac{M_2}{M}\right]\right)qr + \left(l_{2x}\left[1 - \frac{M_2}{M}\right]\right)pr\right] +$$

$$+O\left(\varepsilon^2\right);$$

$$T_{rotor} = \frac{1}{2}\left(\left(\bar{A}_1 + M_1 OP_1^2\right)\left(q^2 + p^2\right) + \bar{C}_1\left(r + \sigma\right)^2\right) - \frac{1}{2}\varepsilon e_B \bar{A}_1\left(-p\sin\delta + q\cos\delta\right)^2 +$$

$$+\varepsilon e_I\left(\bar{A}_1 - \bar{C}_1\right)\left(r + \sigma\right)\left(\bar{\beta}_1\left[p\cos\delta + q\sin\delta\right] - \bar{\alpha}_1\left[-p\sin\delta + q\cos\delta\right]\right) +$$

$$+\varepsilon e_l M_1 OP_1\left\{\left(q\cos\delta - p\sin\delta\right)\left[r\left(\frac{M_2}{M}l_{2y}\right)\cos\delta - r\left(\frac{M_2}{M}l_{2x}\right)\sin\delta\right] + \right.$$

$$\left. +\left(q\sin\delta + p\cos\delta\right)\left[r\left(\frac{M_2}{M}l_{2y}\right)\sin\delta + r\left(\frac{M_2}{M}l_{2x}\right)\cos\delta\right]\right\} + O\left(\varepsilon^2\right)$$

или, принимая во внимание $\left(M_2 OP_2 - M_1 OP_1\right) = 0,$ получим:

$$T = \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + \bar{C}_2 r^2 + \bar{C}_1\left(r + \sigma\right)^2\right) -$$

$$-\varepsilon e_B \frac{\bar{A}_1}{2}\left(-p\sin\delta + q\cos\delta\right)^2 +$$

$$+\varepsilon e_I\left\{\left[\bar{\beta}_2(\bar{A}_2 - \bar{C}_2)rp + \bar{\alpha}_2(\bar{C}_2 - \bar{B}_2)rq\right] + \left(\bar{A}_1 - \bar{C}_1\right)\left(r + \sigma\right)\left(\bar{\beta}_1\left[p\cos\delta + q\sin\delta\right] - \bar{\alpha}_1\left[-p\sin\delta + q\cos\delta\right]\right)\right\} +$$

$$+\varepsilon e_l\left\{M_2 OP_2\left[l_{2y}qr + l_{2x}pr\right]\right\} + O\left(\varepsilon^2\right)$$

Последнее выражение можно переписать в виде с явным выделением слагаемых по признаку принадлежности их к факторам асимметрии и по признаку малости, вводя тем самым главную «невозмущенную» (T_0) и «возмущенную» (T_ε) части выражения для кинетической энергии:

$$\begin{cases} T = T_0 + \varepsilon T_\varepsilon; \\ T_\varepsilon = T_{e_B} + T_{e_I} + T_{e_l}; \\ T_0 = \dfrac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + \bar{C}_2 r^2 + \bar{C}_1\left(r+\sigma\right)^2\right); \\ T_{e_B} = -\dfrac{1}{2} e_B \bar{A}_1\left(-p\sin\delta + q\cos\delta\right)^2; \\ T_{e_I} = e_I\left\{\left[\bar{\beta}_2(\bar{A}_2 - \bar{C}_2)rp + \bar{\alpha}_2(\bar{C}_2 - \bar{B}_2)rq\right] + \right. \\ \qquad \left. +\left(\bar{A}_1 - \bar{C}_1\right)\left(r+\sigma\right)\left(\bar{\beta}_1\left[p\cos\delta + q\sin\delta\right] - \bar{\alpha}_1\left[q\cos\delta - p\sin\delta\right]\right)\right\}; \\ T_{e_l} = e_l M_2 OP_2\left[l_{2y} qr + l_{2x} pr\right]; \end{cases} \tag{2.39}$$

Выражения для кинетической энергии системы в переменных Андуайе-Депри, подставляя в (2.39) союзные выражения (2.36) и сохраняя члены не выше первого порядка малости (т.е. линеаризуя по ε), приобретают вид:

$$T\left(l,L,\delta,\Delta,I_2\right) = T\left(\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r},\widehat{\sigma}\right) \overset{\varepsilon^2\to 0}{=} Lin\left\{T_0\left(\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r},\widehat{\sigma}\right)\right\} + \varepsilon T_\varepsilon\left(\widehat{p}_0,\widehat{q}_0,\widehat{r}_0,\widehat{\sigma}_0\right); \tag{2.40}$$

где

$$\begin{aligned} Lin\left\{T_0\left(\widehat{p},\widehat{q},\widehat{r},\widehat{\sigma}\right)\right\} &= \frac{1}{2}\Big(A\left[\widehat{p}_0^2 + 2\varepsilon\widehat{p}_0\widehat{p}_1\right] + B\left[\widehat{q}_0^2 + 2\varepsilon\widehat{q}_0\widehat{q}_1\right] + \bar{C}_2\left[\widehat{r}_0^2 + 2\varepsilon\widehat{r}_0\widehat{r}_1\right] + \\ &+ \bar{C}_1\left[\left(\widehat{r}_0^2 + 2\varepsilon\widehat{r}_0\widehat{r}_1\right) + 2\widehat{r}_0\widehat{\sigma}_0 + 2\varepsilon\left(\widehat{r}_0\widehat{\sigma}_1 + \widehat{r}_1\widehat{\sigma}_0\right) + \left(\widehat{\sigma}_0^2 + 2\varepsilon\widehat{\sigma}_0\widehat{\sigma}_1\right)\right]\Big) = \\ &= \widehat{T}_0\left(\widehat{p}_0,\widehat{q}_0,\widehat{r}_0,\widehat{\sigma}_0\right) + \varepsilon\tilde{T}\left(\widehat{p}_0,\widehat{p}_1,\widehat{q}_0,\widehat{q}_1,\widehat{r}_0,\widehat{r}_1,\widehat{\sigma}_0,\widehat{\sigma}_1\right); \end{aligned} \tag{2.41}$$

и введены следующие обозначения

$$\begin{cases} \widehat{T}_0 = \dfrac{1}{2}\left(A\widehat{p}_0^2 + B\widehat{q}_0^2 + \bar{C}_2\widehat{r}_0^2 + \bar{C}_1\left(\widehat{r}_0 + \widehat{\sigma}_0\right)^2\right); \\ \tilde{T} = A\widehat{p}_0\widehat{p}_1 + B\widehat{q}_0\widehat{q}_1 + \bar{C}_2\widehat{r}_0\widehat{r}_1 + \bar{C}_1\left[\widehat{r}_0\widehat{r}_1 + \widehat{r}_0\widehat{\sigma}_1 + \widehat{r}_1\widehat{\sigma}_0 + \widehat{\sigma}_0\widehat{\sigma}_1\right] \end{cases} \tag{2.42}$$

В итоге выражение для кинетической энергии с точностью до первого порядка малости по малому параметру принимает вид:

$$T\left(l,L,\delta,\Delta,I_2\right) = \widehat{T}_0\left(\widehat{p}_0,\widehat{q}_0,\widehat{r}_0,\widehat{\sigma}_0\right) + \varepsilon\widehat{T}_1\left(\widehat{p}_0,\widehat{p}_1,\widehat{q}_0,\widehat{q}_1,\widehat{r}_0,\widehat{r}_1,\widehat{\sigma}_0,\widehat{\sigma}_1\right); \tag{2.43}$$

$$\widehat{T}_1\left(\widehat{p}_0,\widehat{p}_1,\widehat{q}_0,\widehat{q}_1,\widehat{r}_0,\widehat{r}_1,\widehat{\sigma}_0,\widehat{\sigma}_1\right) = \tilde{T}\left(\widehat{p}_0,\widehat{p}_1,\widehat{q}_0,\widehat{q}_1,\widehat{r}_0,\widehat{r}_1,\widehat{\sigma}_0,\widehat{\sigma}_1\right) + T_\varepsilon\left(\widehat{p}_0,\widehat{q}_0,\widehat{r}_0,\widehat{\sigma}_0\right)$$

Окончательно *кинетическая энергия* запишется в следующей форме с декомпозицией слагаемых по типам асимметрии в возмущенной части:

$$\begin{cases} T\left(l,L,\delta,\Delta,I_2\right) = \widehat{T}_0\left(l,L,\delta,\Delta,I_2\right) + \varepsilon\widehat{T}_1\left(l,L,\delta,\Delta,I_2\right); \\ \widehat{T}_0\left(l,L,\delta,\Delta,I_2\right) = \dfrac{I_2^2 - L^2}{2}\left[\dfrac{1}{A}\sin^2 l + \dfrac{1}{B}\cos^2 l\right] + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\Delta^2}{\bar{C}_1} + \dfrac{\left(L-\Delta\right)^2}{\bar{C}_2}\right]; \\ \widehat{T}_1 = T_{\mathbf{I}} + T_B + T_l \end{cases} \tag{2.44}$$

где

$$T_B = \frac{1}{2} e_B \bar{A}_1 \left(I_2^2 - L^2 \right) \left(\frac{1}{A} \sin l \sin \delta - \frac{1}{B} \cos l \cos \delta \right)^2; \qquad (2.45)$$

$$T_{\mathrm{I}} = -e_{\mathrm{I}} \sqrt{I_2^2 - L^2} \left\{ \frac{L - \Delta}{\bar{C}_2} \left(\bar{\beta}_2 \left(\bar{A}_2 - \bar{C}_2 \right) \frac{\sin l}{A} + \bar{\alpha}_2 \left(\bar{C}_2 - \bar{B}_2 \right) \frac{\cos l}{B} \right) + \right. \qquad (2.46)$$

$$\left. + \left(\bar{A}_1 - \bar{C}_1 \right) \frac{\Delta}{\bar{C}_1} \left[\frac{\sin l}{A} \left(\bar{\beta}_1 \cos \delta + \bar{\alpha}_1 \sin \delta \right) + \frac{\cos l}{B} \left(\bar{\beta}_1 \sin \delta - \bar{\alpha}_1 \cos \delta \right) \right] \right\};$$

$$T_l = -e_l \sqrt{I_2^2 - L^2} \left[\frac{\sin l}{A} l_{2x} + \frac{\cos l}{B} l_{2y} \right] \frac{M_1 M_2}{\bar{C}_2 M} \left\{ L \cdot OP_2 + \frac{\Delta \left(OP_1 \bar{C}_2 - OP_2 \bar{C}_1 \right)}{\bar{C}_1} \right\}; \qquad (2.47)$$

2.6. Потенциальная энергия магнитного взаимодействия

Рассмотрим базовый случай действия момента сил от взаимодействия собственного дипольного магнитного момента $\mathbf{m}$ и внешнего магнитного поля с постоянным в инерциальном пространстве вектором магнитной индукцией $\mathbf{B_{orb}}$. Такой случай будет характерен для анализа динамики пространственного движения спутника-гиростата на коротком участке его орбитального движения (когда вектор магнитной индукции изменяется крайне мало), либо при длительном орбитальном движении на круговой экваториальной орбите.

Магнитный момент сил имеет следующий общий векторный вид:

$$\mathbf{M_m} = \mathbf{m} \times \mathbf{B_{orb}} \qquad (2.48)$$

Если формально ввести плоский угол между векторами $\vartheta = \angle \left(\mathbf{m}, \mathbf{B_{orb}} \right)$, от которого зависит величина момента сил, то можно определить функцию потенциальной энергии по следующему пути:

$$\left| \mathbf{M_m} \right| = \left| \mathbf{m} \times \mathbf{B_{orb}} \right| = \left| \mathbf{m} \right| \left| \mathbf{B_{orb}} \right| \sin \vartheta;$$

$$P = -\int \left| \mathbf{M_m} \right| d\vartheta = -\left| \mathbf{m} \right| \left| \mathbf{B_{orb}} \right| \cos \vartheta = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B_{orb}}$$

Если «вертикальную» инерциальную ось CZ направить вдоль постоянного в инерциальном пространстве вектора $\mathbf{B_{orb}}$ (рис. 2.3), то выражение для потенциальной энергии запишется посредством компонент вектора $\mathbf{m}$ в связанных осях и направляющих косинусов «вертикальной» оси по отношению к выбранным связанным осям:

$$P = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B_{orb}} = -B_{orb} \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\gamma} = -B_{orb} \left[m_x \gamma_1 + m_y \gamma_2 + m_z \gamma_3 \right]$$

Если при этом выбрать связанную с телом-платформой систему координат, то последнее выражение перепишется в виде:

$$P = -B_{orb} \left[m_x \gamma_1 + m_y \gamma_2 + m_z \gamma_3 \right] = -B_{orb} \left[\sin \theta \left(m_x \sin \varphi + m_y \cos \varphi \right) + m_z \cos \theta \right] \qquad (2.49)$$

где направляющие косинусы выражаются следующим классическим путем посредством углов Эйлера (рис.2.3):

$$\gamma_1 = \sin \theta \sin \varphi; \quad \gamma_2 = \sin \theta \cos \varphi; \quad \gamma_3 = \cos \theta \qquad (2.50)$$

Пусть собственный дипольный магнитный момент спутника-гиростата **m** создается магнитными актуаторами (постоянные магниты, магнитные катушки индуктивности и/или другое электромагнитное оборудование), которые могут быть размещены как внутри тела-платформы, так и внутри тела-ротора. Тогда в случае, когда магнитные актуаторы размещаются внутри тела-ротора дипольный момент имеет следующие проекции в связанной с телом системе:

$$\begin{cases} Ox_0'y_0'z_0': \quad \mathbf{m}' = \left[m_{x'},\ m_{y'},\ m\right]^T; \\ m_{x'} = m_\perp \cos\chi; \quad m_{y'} = m_\perp \sin\chi; \\ m_\perp = \sqrt{m_{x'}^2 + m_{y'}^2} = \text{const}; \quad \chi = \text{const}; \end{cases} \tag{2.51}$$

Магнитный момент (2.48) в проекциях на связанные оси тела-платформы $C\xi\eta\varsigma$ запишется:

$$\mathbf{M_m} = B_{orb}\left(\left[\boldsymbol{\delta}'\right]\cdot\left[m_\perp\cos\chi,\ m_\perp\cos\chi,\ m\right]^T\right)\times\left[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\right]^T = \tag{2.52}$$

$$= B_{orb}\left(m\begin{bmatrix}-\gamma_2\\ \gamma_1\\ 0\end{bmatrix} + m_\perp\begin{bmatrix}\gamma_3\left(c_\chi\sin\delta + s_\chi\cos\delta\right)\\ -\gamma_3\left(c_\chi\cos\delta - s_\chi\sin\delta\right)\\ \gamma_2\left(c_\chi\cos\delta - s_\chi\sin\delta\right) - \gamma_1\left(c_\chi\sin\delta + s_\chi\cos\delta\right)\end{bmatrix}\right);$$

Необходимо заметить, что магнитный момент может быть разложен на два вектора, соответствующие восстанавливающему моменту сил $\mathbf{M}_\theta$ и вращательному моменту сил $\mathbf{M}_\Delta^m$. Восстанавливающий момент сил $\mathbf{M}_\theta$ будет направлен вдоль «линии узлов» *CJ*; вращательный же момент будет иметь малую величину и будет направлен вдоль продольной оси $C\varsigma$:

$$\begin{cases} M_\theta = M_m^\xi\cos\varphi - M_m^\eta\sin\varphi = \\ \quad = B_{orb}\left(-m\sin\theta + m_\perp\cos\theta\left[\left(c_\chi\sin\delta + s_\chi\cos\delta\right)\cos\varphi + \left(c_\chi\cos\delta - s_\chi\sin\delta\right)\sin\varphi\right]\right); \\ M_\Delta^m = M_m^\zeta = m_\perp B_{orb}\sin\theta\left(\left(c_\chi\cos\delta - s_\chi\sin\delta\right)\cos\varphi - \left(c_\chi\sin\delta + s_\chi\cos\delta\right)\sin\varphi\right) \end{cases} \tag{2.53}$$

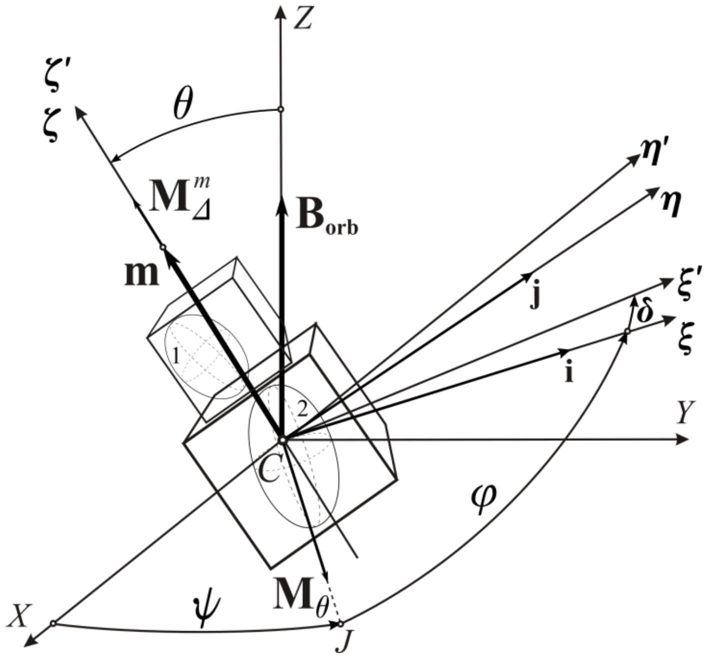


Рис. 2.3. *Случай сонаправленных* $\mathbf{B}_{\mathbf{orb}}$ *и CZ:*

углы Эйлера, восстанавливающая и вращающая части магнитного момента

С учетом выражения (2.49) потенциальная энергия в рассматриваемом случае запишется в виде:

$$P = -mB_{orb}\cos\theta - m_{\perp}B_{orb}\sin\theta\Big[\big(c_\chi\sin\delta + s_\chi\cos\delta\big)\cos\varphi + \big(c_\chi\cos\delta - s_\chi\sin\delta\big)\sin\varphi\Big] \quad (2.54)$$

Из выражения для потенциальной энергии (2.54) также можно получить введенные выше обобщенные моменты сил путем прямого дифференцирования:

$$M_\theta = -\frac{\partial P}{\partial\theta}; \qquad M^m_\Delta = -\frac{\partial P}{\partial\delta} \quad (2.55)$$

Отметим, что если магнитные актуаторы расположены внутри тела-платформы, то без ограничений на общность, компоненты магнитного момента будут иметь тот же вид (2.52) и (2.53), где вместо угла относительной закрутки будет формально положена его нулевая величина $(\delta \equiv 0)$.

Рассмотрим важный динамический случай движения спутника-гиростата в стандартном для него режиме *реализации цилиндрической прецессии*, когда его продольная соосная ось гироскопически стабилизируется относительно нормали к плоскости орбиты за счет быстрого вращения тела-ротора. Отбрасывая пока из рассмотрения возможные малые возмущения, можно считать, что кинетический момент спутника-гиростата в этом случае будет иметь довольно большую величину (для выполнения целевой функции гироскопической стабилизации) и сохранять свое направление, перпендикулярно плоскости орбиты.

В соответствии со структурой геомагнитного поля (рис. 2.4) его силовые линии формируют в пространстве торообразные поверхности, касательные к которым в любой точке будут определять направление вектора магнитной индукции. Если при этом рассматривать экваториальные круговые орбиты Земли, то становится очевидным, что в этом случае при совершении орбитального движения спутник-гиростат будет проходить вдоль касательной к силовым линиям в плоскости главного круга, поэтому любая касательная к проходимым силовым линиям будет перпендикулярна главному кругу – плоскости орбиты. В этом случае можно считать, что вектор магнитной индукции геомагнитного поля $\mathbf{B}_{\mathbf{orb}}$ является постоянным по направлению и по своей величине (т.к. орбита круговая и расстояние до геомагнитного диполя на изменяется).

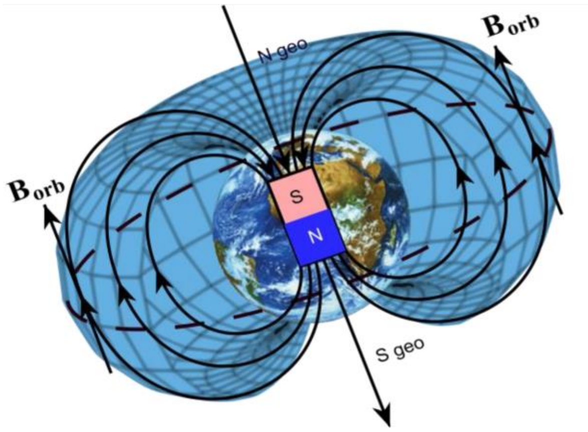


Рис.2.4 – *Структура геомагнитного поля и постоянство вектора магнитной индукции на экваториальной круговой орбите*

Выбирая, таким образом, инерциальную ось CZ вдоль вектора нормали к экваториальной круговой орбите, будет обеспечиваться постоянство и сонаправленность вектора геомагнитной индукции $\mathbf{B}_{\mathbf{orb}}$ с вектором кинетического момента свободного спутника-гиростата $\mathbf{K}$ в режиме цилиндрической прецессии $\left(\mathbf{K}\uparrow\uparrow\mathbf{B}_{\mathbf{orb}}\right)$.

В качестве возмущения магнитный момент будет стремиться изменять вектор кинетического момента, однако, если величины магнитного момента и кинетического момента окажутся в определенном своем отношении, то изменением кинетического момента можно пренебречь и считать его постоянным вектором. Для оценки такого отношения следует ввести безразмерные величины для кинетического момента, времени

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{K}/K;\ \ \tau = tK/A$$

и записать в них базовое динамическое уравнение $\left(\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{m}\times\mathbf{B}_{\mathbf{orb}}\right)$ в инерциальных осях:

$$\frac{d\boldsymbol{\kappa}}{d\tau} = \frac{A|\mathbf{m}||\mathbf{B}_{\mathbf{orb}}|}{K^2}\mathbf{e}_{\mathbf{m}}\times\mathbf{e}_{CZ}; \tag{2.56}$$

где $\boldsymbol{\kappa}-$ безразмерный нормированный кинетический момент системы, K – величина кинетического момента при свободном движении, A – экваториальный момент инерции системы (может быть взят и иной момент инерции), $\tau-$ безразмерное время, $\mathbf{e}_{\mathbf{m}}$, $\mathbf{e}_{CZ}-$ единичный вектор вдоль направления собственного дипольного момента и орт оси CZ, соответственно.

Из уравнения (2.56) следует, что влияние магнитного момента не будет существенно изменять величину и направление вектора кинетического момента при выполнении следующего ограничения на величины:

$$\frac{A|\mathbf{m}||\mathbf{B_{orb}}|}{K^2} << 1 \qquad (2.57)$$

Стоит отметить, что условие (2.57) выполняется и является вполне естественным для реалистичных спутников-гиростатов самых разных компоновок (угловые скорости закрутки от 1 до 10 рад/с, моменты инерции от 0.02 до 100 *кг·м*^{2}, силовые магнитные катушки с дипольным магнитным моментом от 40 до 200 *А·м*^{2}) для самых больших значений индукции геомагнитного поля на низких орбитах (50 *мкТл*), что соответствует созданию магнитного момента сил (mB_{orb}) с величинами от 0.002 до 0.01 *Н·м*.

При выполнении условия (2.57) можно считать, что кинетический момент будет практически постоянным вектором совпадающим с направлением постоянного вектора магнитной индукции $\left(\mathbf{K} \cong \text{const},\ \mathbf{K} \uparrow\uparrow \mathbf{B_{orb}} \uparrow\uparrow CZ\right)$, что позволяет найти направляющие косинусы (2.50) путем вычислений отношений компонент кинетического момента:

$$\gamma_1 = Ap/K;\ \ \gamma_2 = Bq/K;\ \ \gamma_3 = \left(C_b r + \Delta\right)/K, \qquad (2.58)$$

а также записать следующие выражения, связывающие углы Эйлера и переменные Андуайе-Деприи:

$$I_2 = K = \text{const};\quad \cos\theta = L/I_2;\quad \sin\theta = \sqrt{I_2^2 - L^2}/I_2;\quad l = \varphi \qquad (2.59)$$

Выражение для потенциальной энергии (2.49) с учетом последних замечаний перепишется в виде:

$$P = -B_{orb}\left[\frac{\sqrt{I_2^2 - L^2}}{I_2}\left(m_x \sin l + m_y \cos l\right) + m_z \frac{L}{I_2}\right] \qquad (2.60)$$

При допущении, что собственный дипольный момент направлен предпочтительно вдоль продольной оси спутника-гиростата $(m_z = m)$, но имеет относительную малость поперечной составляющей $(m_\perp)$, то можно ввести следующий малый параметр:

$$\varepsilon_m = \frac{m_\perp}{m} << 1 \qquad (2.61)$$

и выполнить соответствующее его масштабирование:

$$\varepsilon = \max\{\varepsilon_{\mathbf{I}}, \varepsilon_B, \varepsilon_l, \varepsilon_m\};\quad \varepsilon_m = \varepsilon e_m;\quad m_\perp = \varepsilon e_m m;\quad e_m \le 1$$

В этом случае выражение (2.60) приобретёт вид, включающий главную и возмущенную части:

$$\begin{gathered} P = P_0 + \varepsilon P_1^m;\quad P_0 = -mB_{orb}\frac{L}{I_2}; \\ P_1^m = -mB_{orb}e_m\frac{\sqrt{I_2^2 - L^2}}{I_2}\left[\left(c_\chi \sin\delta + s_\chi \cos\delta\right)\cos l + \left(c_\chi \cos\delta - s_\chi \sin\delta\right)\sin l\right] \end{gathered} \qquad (2.62)$$

2.7. Неконсервативные возмущающие внутренние моменты сил

Пусть между соосными телами спутника-гиростата (по степени свободы угла относительной закрутки δ) действует *внутренний малый момент трения*, состоящий из двух частей, соответствующих жидкостному типу трения (M_{Δ}^{fl} - “friction of liquid type”) и сухому типу трения (M_{Δ}^{fd} - “ friction of dry-type”), зависящих соответственно от угловой скорости относительного вращения (σ) и ее знака:

$$M_{\Delta}^{fl} = -\nu\sigma; \qquad M_{\Delta}^{fd} = -\mathrm{sign}(\sigma)\kappa = -\kappa\frac{\sigma}{|\sigma|}; \qquad M_{\Delta}^{f} = M_{\Delta}^{fl} + M_{\Delta}^{fd} = -\varepsilon\sigma\left[e_{\nu} + e_{\kappa}/|\sigma|\right], \quad (2.63)$$

где e_{ν}, e_{κ} - есть безразмерные масштабирующие факторы величин жидкостного и сухого типов трения $(\nu = e_{\nu}\varepsilon,\ \kappa = e_{\kappa}\varepsilon)$.

Принимая во внимание члены не выше первой степени малости относительно малого параметра ($\sim\varepsilon$) и базируясь на выражениях (2.36), (2.37), (2.38), можно записать моменты сил трения в зависимости от переменных Андуайе-Деприи:

$$M_{\Delta}^{f} = \varepsilon m_{\Delta}^{f}; \qquad m_{\Delta}^{f} = -\frac{1}{\bar{C}_1\bar{C}_2}\left[\left(\bar{C}_1 + \bar{C}_2\right)\Delta - \bar{C}_1 L\right]\left[e_{\nu} + e_{\kappa}\bar{C}_1\bar{C}_2 \Big/ \left|\left(\bar{C}_1 + \bar{C}_2\right)\Delta - \bar{C}_1 L\right|\right] \quad (2.64)$$

Что также можно представить в форме:

$$\begin{cases} m_{\Delta}^{f} = -\dfrac{e_{\nu}}{\bar{C}_1\bar{C}_2}\left[\left(\bar{C}_1 + \bar{C}_2\right)\Delta - \bar{C}_1 L\right] + e_{\kappa}F(t) = -e_{\nu}\sigma(t) + e_{\kappa}F(t), \\ F(t) = -\mathrm{sign}\left(\dfrac{e_{\nu}}{\bar{C}_1\bar{C}_2}\left[\left(\bar{C}_1 + \bar{C}_2\right)\Delta - \bar{C}_1 L\right]\right) = -\mathrm{sign}\left(\sigma(t)\right) \end{cases} \quad (2.65)$$

Рассмотрим также *момент раскрутки ротора электродвигателем*, действующий между соосными телами спутника-гиростата. Моделирование этого момента сил основывается на соотношениях, связывающих величину момента сил с силой тока (I), на связи величины противо-электродвижущей силы (ЭДС), возникающей вследствие вращения ротора и создающей «обратное» напряжение (E_B), которое нужно преодолеть прямому напряжению раскрутки (U), которое также связывается законом Ома с сопротивлением (R) и силой тока:

$$M_{\Delta}^{DC} = k_I I; \qquad E_B = k_B\sigma; \qquad U = IR + E_B \quad (2.66)$$

Из соотношений (2.66) можно получить следующий вид силового момента раскрутки электродвигателя, учитывающий насыщение своей величины за счет генерирования противо-ЭДС:

$$\begin{cases} m_{\Delta}^{DC} = -e_{\mu}\sigma(t) + e_U F(t), \\ F(t) = U(t) \end{cases} \quad (2.67)$$

Помимо момента раскрутки ротора электродвигателем, управляемого подачей на него напряжения $U(t)$ в виде управляющего сигнала, на тело-ротор посредством электродвигателя может передаваться (вместе или отдельно с основным напряжением) вторичный паразитный сигнал, например, следующий со стороны контура обратной связи угловой скорости ротора при наличии запаздывания и ошибок в цепи. Для описания подобных ситуаций целесообразно учесть *наличие малого полигармонического возмущающего момента,* соответствующего некому конечному разложению сигнала/напряжения в электродвигателе в ряд Фурье по вращающейся фазе – углу относительного вращения ротора δ при сохранении конечного числа гармоник N [195, 197]. Такой полигармонический момент сил и соответствующая ему потенциальная энергия имеют вид:

$$M_{\Delta}^{\delta} = \varepsilon m_{\Delta}^{\delta}; \qquad m_{\Delta}^{\delta} = e_{\delta} \sum_{n=1}^{N} \left[\bar{a}_n \sin(n\delta) + \bar{b}_n \cos(n\delta) \right]; \quad \bar{b}_0 = 0 \tag*{;(2.68)}$$

$$P_1^{\delta} = -\int m_{\Delta}^{\delta} d\delta = e_{\delta} \sum_{n=1}^{N} \left[a_n \sin(n\delta) + b_n \cos(n\delta) \right]; \quad a_n = -\frac{\bar{b}_n}{n}; \quad b_n = \frac{\bar{a}_n}{n}, \tag{2.69}$$

где $\bar{a}_n, \bar{b}_n$ - есть коэффициенты разложения в ряд Фурье, а величина e_{δ} представляет собой масштабирующий фактор малости полигармонического момента сил по отношению к главному малому параметру. Отдельно подчеркнем, что введенный полигармонический момент может соответствовать общему виду разложения в ряд Фурье произвольного действующего между соосными телами возмущающего момента сил, зависящего от позиционной фазы δ .

2.8. Уравнения возмущенного движения в переменных Андуайе-Депри

Запишем *гамильтониан* системы ($\mathcal{H}$), используя полученные выше выражения для кинетической энергии (2.43) (с ее возмущенными частями (2.44), (2.45), (2.46), (2.47)) и потенциальной энергии в виде (2.62), (2.69):

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon \mathcal{H}_1; \qquad \mathcal{H}_0 = T_0 + P_0; \quad \mathcal{H}_1 = T_1 + P_1; \tag{2.70}$$

где

$$\begin{cases} T_0 = \dfrac{I_2^2 - L^2}{2} \left[\dfrac{1}{A} \sin^2 l + \dfrac{1}{B} \cos^2 l \right] + \dfrac{1}{2} \left[\dfrac{\Delta^2}{\bar{C}_1} + \dfrac{(L-\Delta)^2}{\bar{C}_2} \right]; \quad P_0 = -mB_{orb} \dfrac{L}{I_2}; \\ T_1 = T_{\mathrm{I}} + T_B + T_l; \qquad P_1 = P_1^m + P_1^{\delta} \end{cases} \tag{2.71}$$

Соответствующие динамические уравнения в переменных Андуайе-Депри запишутся следующим образом:

$$
\begin{cases}
\dot{L} = -\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial l} = f_L + \varepsilon g_L; & \dot{l} = \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial L} = f_l + \varepsilon g_l; \\
\dot{\Delta} = -\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial \delta} = f_\Delta + \varepsilon g_\Delta; & \dot{\delta} = \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial \Delta} = f_\delta + \varepsilon g_\delta; \\
\dot{I}_2 = -\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial \varphi_2} = 0; & \dot{\varphi}_2 = \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial I_2}; \\
\dot{I}_3 = -\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial \varphi_3} = 0; & \dot{\varphi}_3 = \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial I_3} = 0;
\end{cases}
\tag{2.72}
$$

с функциями

$$
\begin{cases}
f_L = -\dfrac{\partial\mathcal{H}_0}{\partial l}; \quad f_l = \dfrac{\partial\mathcal{H}_0}{\partial L}; \quad f_\Delta = -\dfrac{\partial\mathcal{H}_0}{\partial \delta} = 0; \quad f_\delta = \dfrac{\partial\mathcal{H}_0}{\partial \Delta}; \\
g_L = -\dfrac{\partial\mathcal{H}_1}{\partial l}; \quad g_l = \dfrac{\partial\mathcal{H}_1}{\partial L}; \quad g_\Delta = -\dfrac{\partial\mathcal{H}_1}{\partial \delta} + m_\Delta^f + m_\Delta^{DC}; \quad g_\delta = \dfrac{\partial\mathcal{H}_1}{\partial \Delta};
\end{cases}
\tag{2.73}
$$

где присутствуют негамильтоновы возмущения $\left(m_\Delta^f,\ m_\Delta^{DC}\right)$ в динамическом уравнении для импульса относительного вращения Δ, что нарушает консервативность системы. Стоит подчеркнуть, что из вида гамильтониана (2.70), определяющегося выражениями (2.71), и из системы (2.72) следует, что уравнения для двух пар переменных $\left\{\{L,l\},\ \{\Delta,\delta\}\right\}$ могут быть формально проинтегрированы отдельно от циклических пар координат $\left\{\{I_2,\varphi_2\},\ \{I_3,\varphi_3\}\right\}$, что позволяет редуцировать систему с четырьмя степенями свободы до системы с двумя степенями свободы и двух циклических степеней, интегрируемых отдельно после определения позиционных.

Таким образом, система уравнений (2.72) полностью описывает возмущенную динамику спутника-гиростата и, более того, определяющими будут являться только две пары координат $\left\{\{L,l\},\ \{\Delta,\delta\}\right\}$, анализ которых далее будет проводится отдельно от двух циклических степеней свободы $\left\{\{I_2,\varphi_2\},\ \{I_3,\varphi_3\}\right\}$.

2.9. Выводы по главе

В главе представлены механические и математические модели, описываемые с помощью угловых скоростей и канонических координат Андуайе-Деприи [196-199]. На основе полученных моделей в следующих главах будут получены новые общие и гетероклинические аналитические решения, которые будут использованы далее для исследования хаотической динамики и синтеза методов управления пространственным движением и переориентацией спутников-гиростатов.

3. Аналитические решения в динамике спутника-гиростата

В настоящей главе будут представлены аналитические решения для различных случаев движения спутников-гиростатов, полученные и нашедшие свое опубликование в работах диссертанта [196, 198, 199, 26].

В главе изучаются следующие *три класса движений* нормальных спутников-гиростатов и осуществляется параметрическое обобщение соответствующих им классов аналитических решений:

I. *Класс движений Эйлера* для спутника-гиростата при малых возмущениях магнитной природы с требованием сонаправленности начального кинетического момента и вектора внешней магнитной индукции [199];

II. *Класс движений Лагранжа* для тяжелого динамически симметричного спутника-гиростата при действии между его соосными телами произвольного внутреннего момента [26], а также намагниченного спутника-гиростата [198], обобщающих случай Лагранжа движения твердого тела;

III. Движение спутника-гиростата при малых возмущениях от центрального поля тяготения в режиме конической прецессии [201], *обобщающее случай В.А. Стеклова* движения твердого тела в центральном поле.

3.1. Характеристика классов решений и режимов движения спутника-гиростата

Дадим общую характеристику классов движений и решений, изучаемых в текущей главе, с соответствующими комментариями относительно условий реализации режимов движения спутников-гиростатов, в том числе при действии малых возмущающих моментов сил магнитной природы, больших моментов сил магнитной природы, плоского поля тяготения с одновременным действием произвольных внутренних моментов между телами гиростата, а также малых возмущающих моментов центрального поля тяготения.

Указанные выше классы движения спутников-гиростатов исследуются в дальнейших параграфах с целью записи параметрических обобщений и получения новых решений в соответствии со следующей структурой:

I. В параграфе 3.2 исследуется первый класс движения, соответствующий движению спутника-гиростата в режиме цилиндрической прецессии с переменными компонентами собственного магнитного дипольного момента, пропорциональными компонентам угловой скорости тела-платформы, и при выполнении ограничений на величину магнитного момента сил, определяющихся условиями (2.57). Этот режим актуален на экваториальных круговых орбитах или на малых сегментах произвольных орбит при обеспечении сонаправленности векторов кинетического момента и индукции геомагнитного поля.

В рамках изучения I-го класса движений:

I.1. В пункте 3.2.1 выполняется *параметрическое обобщение общего решения* класса

Эйлера [184, 146, 149] для общего вида полодий.

I.2. В пункте 3.2.2 выполняется *параметрическое обобщение гетероклинического решения* класса Эйлера [184, 146, 149] для гетероклинических полодий (частное решение). В том числе выполняется *параметрическое обобщение* гетероклинического решения Эйлера для твердого тела на случай нормального осевого гиростата при взаимной компенсации гироскопического момента стабилизации и влияния магнитных моментов сил.

I.3. В пункте 3.2.3 находится *новое гетероклиническое решение* для вращающейся фазы угла относительной закрутки ротора в переменных типа действие-угол (необходимо для анализа хаотической динамики спутника-гиростата).

II. В параграфе 3.3 изучается II-й класс движений с разбиением на два подкласса:

II.1. В пункте 3.3.1 исследуется движение динамически симметричного спутника-гиростата в плоском поле сил тяжести с произвольным внутренним моментом сил между соосными телами, в т.ч.:

II.1.1. Выполняется *сведение к общему решению Лагранжа* с его обобщением на случай осевого гиростата с произвольным внутренним моментом сил.

II.1.2. Определяются особые случаи динамики, включая «лунное» движение и другие специальные виды прецессий Лагранжевого типа.

II.2. В пункте 3.3.2 исследуется движение динамически симметричного спутника-гиростата с переменными компонентами собственного магнитного дипольного момента, пропорциональными компонентам угловой скорости тела-платформы, без ограничений на величину магнитного момента сил, в т.ч.:

II.2.1. Находятся *новые общие аналитические решения* для движения в магнитном поле нормального осевого динамически симметричного гиростата при наличии у него переменных компонент дипольного момента, пропорциональных компонентам угловой скорости тела-платформы.

III. В параграфе 3.4 исследуется III-й класс движения спутника-гиростата, соответствующий движению в центральном поле гравитации в режиме конической прецессии при сонаправленности вектора кинетического момента и вектора градиента центрального поля (локальной вертикали). Режим актуален на коротком интервале орбитального движения.

III.1. Находится *параметрическое обобщение* (модификация) решения для свободного нормального осевого гиростата [184, 146, 149] в случае конической прецессии в слабом центральном поле тяготения, гиростатически обобщающее случай В.А. Стеклова движения твердого тела в центральном поле.

Связи указанных классов движения с параметрами спутника-гиростата и динамическими режимами определяются нижеследующей таблицей (табл. 3.1). Связи новых решений с классическими случаями описываются таблицей (табл. 3.2), характеризующей вырождения к известным решениям для гиростата и твердого тела.

Таблица 3.1. *Связи общих решений и классов изучаемых движений*

Класс	**Моменты инерции**	**Силовые параметры**	**Направление вектора кинетического момента**	**Режимы движения**	**Типы решений, §§ с описанием**	**Случай обобщения**
I (Эйлера)	Трехосный тензор инерции тела-платформы и динамически симметричный ротор: $A_b>B_b>C_b$ $A_r=B_r$	Движение при действии малых магнитных моментов в случае (2.57) с переменным дипольным моментом вида: $\mathbf{m}(\boldsymbol{\omega})=\nu\boldsymbol{\omega}+\mu\mathbf{e}_z$	$\mathbf{K}\uparrow\uparrow\mathbf{B}_{\mathbf{orb}}$ $\mathbf{K}\cong\text{const}$	I.1. Цилиндрическая прецессия, ω-режим	Общее, 3.2.1	Параметрические обобщения решения Эйлера [184, 146, 149] для осевого гиростата
				I.2. Цилиндрическая прецессия, ω-режим	Гетероклиническое, 3.2.2	
				I.3. Цилиндрическая прецессия, ω-режим	Гетероклиническое для переменных типа действие-угол для вращающейся фазы (Δ,δ), 3.2.3	
		Движение при действии малых магнитных моментов в случае (2.57) с переменным дипольным моментом вида: $\mathbf{m}(\boldsymbol{\omega})=\nu\boldsymbol{\omega}+\mu\mathbf{e}_z$ при условии $\Delta(1-\nu)=-C_b\mu$	$\mathbf{K}\uparrow\uparrow\mathbf{B}_{\mathbf{orb}}$ $\mathbf{K}\cong\text{const}$	I.4. Взаимная компенсация гироскопической стабилизации и влияния магнитных моментов	Гетероклиническое, 3.2.2	
II (Лагранжа)	динамически симметричный спутник-гиростат: $A_b=B_b$ $A_r=B_r$	Плоское поле тяжести, нет магнитного момента	Нет	II.1.1. Общий режим	Общее, 3.3.1	Сведение к общему ***решению Лагранжа*** с обобщением на случай произвольного внутреннего момента сил
		Движение в отсутствии сил тяжести с переменным дипольным моментом: $\mathbf{m}(\boldsymbol{\omega})=k\boldsymbol{\omega}$ без ограничения на величину внешнего магнитного момента сил	Нет	II.2.1. ω-режим	Общее, 3.3.2	Запись новых аналитических решений
III (Стеклова в центральном поле)	Трехосный тензор инерции тела-платформы и динамически симметричный ротор: $A_b>B_b>C_b$ $A_r=B_r$	Центральное поле гравитации при $\mu_g<<\frac{K^2}{A^2}$	$\mathbf{K}\uparrow\uparrow\mathbf{g}_{\mathbf{orb}}$ $\mathbf{K}\cong\text{const}$	III.1. Коническая прецессия	Общее, 3.4	Параметрическая модификация обобщения решения Эйлера [184, 146, 149] с гиростатическим обобщением ***случая Стеклова*** движения тела в центральном поле

Таблица 3.2. *Вырожденные случаи решений*

Класс	Наименование решений/ режимов	Типы решений, пункт с описанием	Ограничения на силовые параметры	Случаи вырождения
I (Эйлера)	I.1. Цилиндрич. прецессия, ω-режим	Общее, 3.2.1	Движение при действии малых магнитных моментов в случае (2.57) с переменным дипольным моментом вида: $\mathbf{m}(\boldsymbol{\omega}) = \nu\boldsymbol{\omega} + \mu\mathbf{e}_z$	1. $\nu=\mu=0$: **решения** **[184, 146, 149]** для осевого нормального гиростата 2. $\nu=\mu=\Delta=0$: **решения Эйлера** для свободного твердого тела
	I.2. Цилиндрич. прецессия, ω-режим	Гетероклини-ческое, 3.2.2		
	I.3. Цилиндрич. прецессия, ω-режим	Гетероклини-ческое для переменных типа действие-угол для вращающей- ся фазы (Δ,δ), 3.2.3		
	I.4. Взаимная компенсация гироскопическ ой стабилизации и влияния магнитных моментов	Гетероклини-ческое, 3.2.2	Движение при действии малых магнитных моментов в случае (2.57) с переменным дипольным моментом вида: $\mathbf{m}(\boldsymbol{\omega}) = \nu\boldsymbol{\omega} + \mu\mathbf{e}_z$ при условии $\Delta(1-\nu) = -C_b\mu$	
II (Лагранжа)	II.1.1. Общий режим	Общее, 3.3.1	Плоское поле тяжести, нет магнитного момента	$\Delta\equiv 0$: **решение Лагранжа** для тяжелого твердого тела
	II.2.1. ω-режим	Общее, 3.3.2	Движение в отсутствии сил тяжести с переменным дипольным моментом: $\mathbf{m}(\boldsymbol{\omega}) = k\boldsymbol{\omega}$ без ограничения на величину внешнего магнитного момента сил и других ограничений	**нет случаев естественного вырождения к известным решениям (т.к. изученный случай является новым)** -- при принципиальном изменении постановки задачи и вида переменного дипольного момента на постоянный $\mathbf{m}(\boldsymbol{\omega}) = k\boldsymbol{\omega} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}(\boldsymbol{\omega}) = k\mathbf{e}_z$ технически последует вырождение к задаче движения тела в случае Лагранжа
III (Стеклова в центральном поле)	III.1. Коническая прецессия	Общее, 3.4	Центральное поле гравитации при $\mu_g << \frac{K^2}{A^2}$	1. $\mu_g=0$: **решения** **[184, 146, 149]** для осевого нормального гиростата 2. $\Delta=0$: **решения Стеклова** для тела в центральном поле 3. $\nu=\mu=\Delta=0$: **решения Эйлера** для свободного твердого тела

Таким образом, приведенной структурой изучаемых типов движений и параметрическими вырождениями соответствующих решений (табл. 3.1, 3.2) показана общность задач разного класса. Указанные взаимосвязи позволяют расширить применимость известных и новых решений на совокупность задач изучения динамики систем тел со взаимодействиями различной природы.

3.2. Общие решения для движения осевого спутника-гиростата под действием переменного магнитного момента

В параграфе приводятся решения для движения спутника-гиростата в режиме цилиндрической прецессии с переменными компонентами собственного магнитного дипольного момента, пропорциональными компонентам угловой скорости тела-платформы [199], при выполнении ограничений на величину магнитного момента сил, определяющихся условиями (2.57). Этот режим актуален на экваториальных круговых орбитах или на малых сегментах орбит общего вида при обеспечении сонаправленности вектора кинетического момента и вектора индукции геомагнитного поля.

3.2.1. Параметрическое обобщение общего решения в случае переменного магнитного момента

Рассмотрим пространственное движение спутников-гиростатов с магнитными системами управления и при наличии малых возмущений в собственном магнитном дипольном моменте. Пусть компоненты собственного магнитного момента формируются (со стороны системы управления электромагнитным оборудованием) пропорциональными компонентам угловой скорости основного тела-платформы. Пусть также динамика движения спутника-гиростата рассматривается в случае, когда изначальный вектор кинетического момента СГ сонаправлен с вектором напряженности внешнего магнитного поля, т.е. реализуется цилиндрическая прецессия спутника-гиростата на экваториальной орбите.

Указанная проблема может быть декомпозирована на множество различных задач, начиная с фундаментальных постановок о движении твердого тела и гиростата в рамках классической механики [21, 40, 45], продолжая в рамках модернизированных и новых постановок [22, 63, 135, 151, 179], и, фокусируясь на практических приложениях классических и новых фундаментальных результатов нелинейной динамики, включая регулярные и хаотические динамические режимы движения СГ [28, 150, 152, 154, 157, 158, 178, 219, 225, 226, 238, 241-244, 267, 268, 287, 294, 301, 314, 326, 327]. Движение СГ с магнитными системами управления рассматривалось ранее в разных формулировках [34, 65, 84, 86, 94, 105, 110, 116, 117, 155, 160, 168, 176, 177, 178, 223, 283, 297, 298, 303, 313, 316, 320, 344, 346].

Принцип управления СГ в рассматриваемом случае основывается на свойствах взаимодействия внешнего магнитного поля планеты и собственного дипольного момента СГ $\mathbf{m}$, который формируется с помощью специальных актуаторов (магнитные стержни, кольца, катушки индуктивности и т.п.) и отслеживает заданный закон изменения компонент дипольного момента в связанной системе координат, вследствие чего можно получать конкретные временн*ы*е (явные и/или неявные) зависимости дипольного момента. Например, чтобы решить задачу стабилизации пространственного (углового) положения СГ вдоль силовой линии внешнего магнитного поля (вдоль вектора магнитной индукции внешнего магнитного поля) мы можем использовать простейшую форму зависимости дипольного момента от времени, близкую к созданию его постоянных компонент в связанной системе координат. Другим известным примером может послужить так называемый маневр “*B-dot*” [223, 344], выполняющийся для торможения высокой по величине угловой скорости вращения СГ в пространстве, применяя для этого закон изменения собственного дипольного момента, при котором в итоге создается «всегда сопротивляющийся» текущему мгновенному вращению силовой момент от магнитного взаимодействия с внешним полем – это возможно, когда система управления формирует компоненты собственного дипольного момента СГ пропорционально и антинаправленно (с отрицательным знаком) текущим производным от компонент внешнего вектора магнитной индукции, которые измеряются магнитометрами в реальном масштабе времени.

В большинстве случаев для выполнения практически любого маневра углового движения достаточно формировать с помощью системы управления и магнитного актуатора (силовые магниты и катушки) компоненты собственного дипольного момента, описываемые следующим соотношением/законом [316]:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}) = -\left(\varepsilon^2 k_p \mathbf{q} + \varepsilon k_v \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}\right), \tag{3.1}$$

учитывающим зависимость компонент дипольного момента от углового положения спутника ($\mathbf{q}$ – вектор параметров ориентации), а также от текущих значений компонент угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ при заданных константах управления (k_p, k_v, ε) и инерционных характеристиках ($\mathbf{I}$ – тензор инерции).

В рамках настоящих исследований будет использоваться частный вид общего закона управления (3.1), учитывающий только скоростную часть зависимости дипольного момента в случае линейной пропорциональности компонент:

$$\mathbf{m}(\boldsymbol{\omega}) = k\boldsymbol{\omega} \tag{3.2}$$

Режим движения спутника-гиростата с пропорциональным по отношению к угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ законом управления/формирования компонент дипольного момента (3.2), будем называть «*ω-режимом*» (или «*омега-режимом*»).

В случае динамики спутника-гиростата с магнитной системой управления будет реализовываться такое пространственное движение, которое стремится выровнять/совместить направление собственного дипольного магнитного момента с направлением локального вектора индукции геомагнитного поля, словно стрелки компаса вдоль локальной силовой линии поля, с тем осложняющим аспектом, что имеющееся вращение соосных тел и вынуждающее действие силовых моментов приводит к гироскопическим эффектам, выражающимся в реализации сложных вынужденных прецессий и нутационных колебаний с переменной амплитудой.

Пусть в рамках проводимых исследований выполняется условие (2.57) при дополнительном требовании сонаправленности начального положения вектора кинетического момента спутника-гиростата и вектора индукции геомагнитного поля.

Условие (2.57) позволяет рассматривать действие магнитного момента сил, как возмущающее, а сонаправленность $\mathbf{K} \uparrow\uparrow \mathbf{B}_{orb}$ отвечает либо орбитальному движению по экваториальной орбите в режиме цилиндрической прецессии, либо движению по ограниченному орбитальному участку, где силовые линии внешнего магнитного поля коллинеарны вектору кинетического момента (рис.3.1). Очень важно отметить, что режим цилиндрической прецессии является главным режимом функционирования типичного спутника-гиростата (в особенности для телекоммуникационных и метеоспутников).

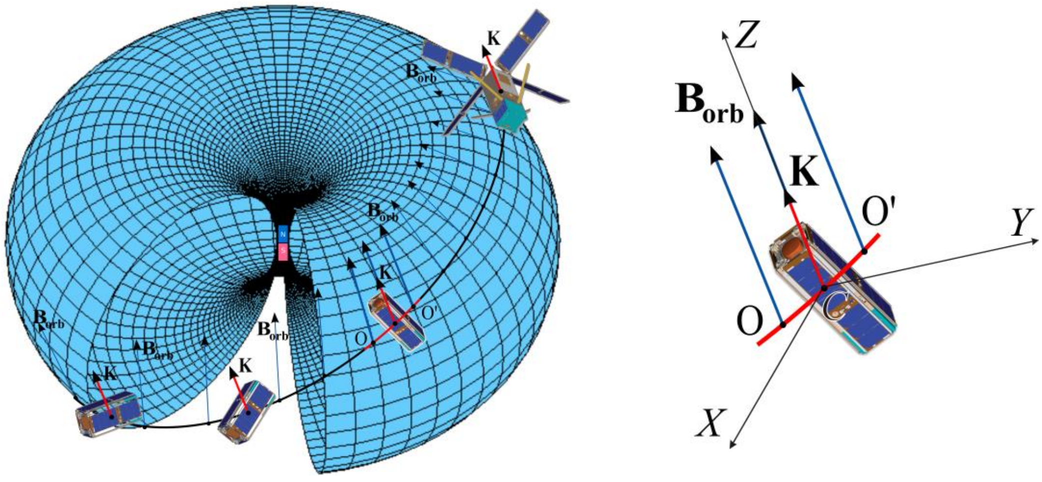


Рис.3.1 – *Модель магнитного поля Земли и «скользящие» вектора его магнитной индукции* $\mathbf{B}_{\mathrm{orb}}$ *вдоль орбиты:*

(a) – скольжение вектора вдоль орбиты СГ ; (b) – главная инерциальная система координат *CXYZ* при совпадении вектора кинетического момента **K** с вектором магнитной индукции поля Земли $\mathbf{B}_{\mathrm{orb}}$ вдоль изучаемого сегмента орбиты OO’

При взаимодействии собственного дипольного момента (**m**) с внешним магнитным полем с вектором индукции $\mathbf{B}_{orb}$ создается следующий силовой момент:

$$\mathbf{M}_{ctrl} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_{orb} \tag{3.3}$$

Основные системы координат представлены на рис.3.2 и включают главную инерциальную систему *CXYZ* и связанную с основным телом-платформой систему *Cxyz*.

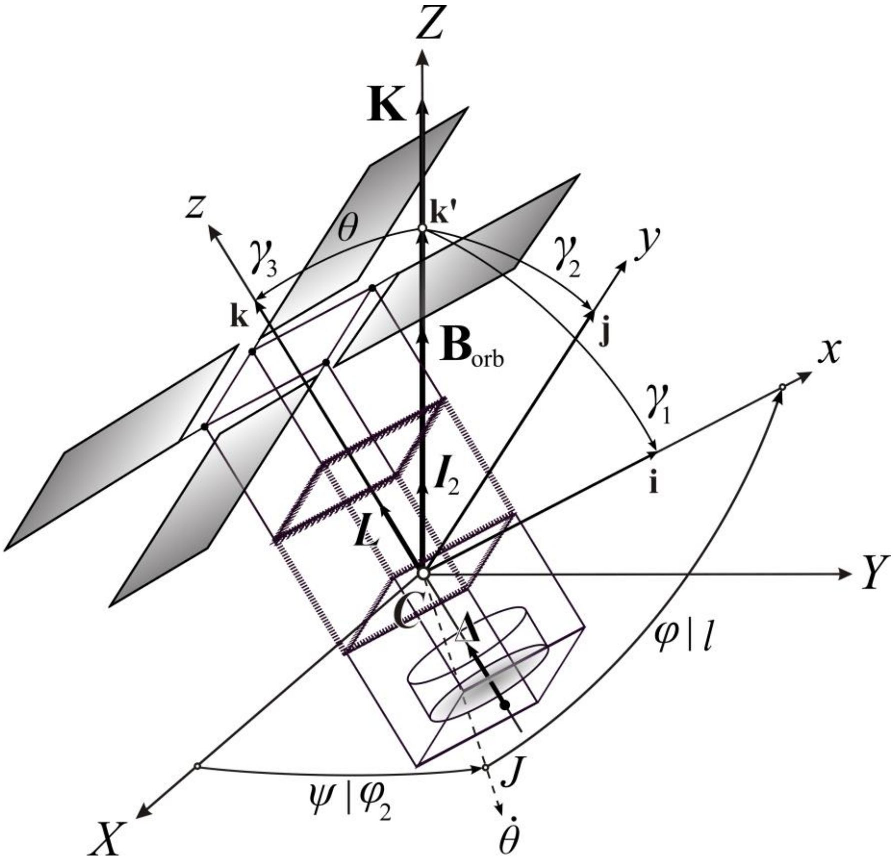


Рис.3.2 – *Структурная схема и используемые системы координат*

В соответствии с предположением о реализации базового движения в режиме цилиндрической прецессии направим инерциальную ось *CZ* вдоль вектора магнитной индукции внешнего поля $\mathbf{B}_{orb}$ – это неизменное направление в инерциальном пространстве описывается направляющими косинусами $\gamma_1 = \cos(CZ, Cx)$, $\gamma_2 = \cos(CZ, Cy)$, $\gamma_3 = \cos(CZ, Cz)$, что позволяет явно записать вектор магнитной индукции в проекциях на связанную систему координат *Cxyz*:

$$\mathbf{B}_{orb} = B_{orb}\left[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\right]^T; \quad \mathbf{m} = k\left[p, q, r\right]^T \tag{3.4}$$

Пусть спутник-гиростат имеет тело-платформу с трехосным главным тензором инерции (три разных главных осевых момента инерции) и динамически симметричный ротор. Уравнения движения спутника-гиростата могут быть записаны в следующей форме:

$$\frac{\tilde{d}}{dt}\mathbf{K} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{M}_{ctrl} + \mathbf{M}_{add}; \quad \dot{\Delta} = M_{internal} \tag{3.5}$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega} \tag{3.6}$$

где $\mathbf{M}_{ctrl}$, $\mathbf{M}_{add}$ – «управляющий» и «дополнительный»/возмущающий момент, $M_{internal}$ – внутренний момент сил, действующий на тела-ротор со стороны тела-носителя (посредством, например, электродвигателя). Компоненты кинетического момента всей системы (оба соосных тела) **K** в проекциях на связанные оси *Cxyz* имеют вид:

$$\mathbf{K} = \left[Ap,\ Bq,\ C_b r + \Delta\right]^T \tag{3.7}$$

где $A = A_b + A_r$, $C = C_b + C_r$; $\{A_b, B_b, C_b\}$ - есть осевые моменты инерции главного тела-корпуса в связанной системе *Cxyz*; $\{A_r, A_r, C_r\}$ - есть главные осевые моменты инерции динамически симметричного ротора в его собственной связанной системе координат.

Пусть момент сил внутреннего взаимодействия соосных тел спутника-гиростата отсутствует ($M_{internal}$=0), поэтому далее имеет место постоянство величины продольного кинетического момента тела-ротора Δ=const.

При выполнении принятого условия (2.57) удобно ввести следующий динамический параметр:

$$\nu = \frac{kB_{orb}}{K} << 1 \tag{3.8}$$

Указанную выше сонаправленность векторов $\mathbf{B}_{orb}$ и **K** можно учесть посредством следующего соотношения:

$$\mathbf{B}_{orb} = \frac{B_{orb}}{K}\mathbf{K} \tag{3.9}$$

Тогда, учитывая соотношения (3.4), (3.8) и (3.9), магнитный момент сил примет вид:

$$\mathbf{M}_{ctrl} = \nu\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} \tag{3.10}$$

а направляющие косинусы для вектора $\mathbf{B}_{\mathrm{orb}}$ запишутся:

$$\gamma_1 = Ap/K;\ \ \gamma_2 = Bq/K;\ \ \gamma_3 = \left(C_b r + \Delta\right)/K \tag{3.11}$$

Помимо управляющего момента (3.10) введём еще один возмущающий момент, соответствующий наличию внутри спутника продольного постоянного магнита с дипольным моментом **d**, что соответствует следующей форме момента сил:

$$\mathbf{M}_{add} = \mathbf{d} \times \mathbf{B}_{orb};\quad \mathbf{d} = \left[0, 0, \tilde{m}_z\right]^T; \tag{3.12}$$

С учетом условия (3.9) момент сил (3.12) примет вид:

$$\mathbf{M}_{add} = \mu\mathbf{e}_z \times \mathbf{K} \tag{3.13}$$

где введен следующий динамический параметр, удовлетворяющий условию (2.57)

$$\mu = \frac{\tilde{m}_z B_{orb}}{K} << 1 \tag{3.14}$$

В таком случае динамические уравнения (3.5), рассматриваемые далее как основные невозмущенные уравнения вынужденного движения, могут быть записаны в следующей векторной и скалярной форме:

$$\frac{\tilde{d}}{dt}\mathbf{K} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \left[\nu\boldsymbol{\omega} + \mu\mathbf{e}_z\right] \times \mathbf{K} \tag{3.15}$$

$$\begin{cases} A\dot{p} + \left[\left(C_b - B\right)qr + q\Delta\right]\left(1-\nu\right) = -B\mu q \\ B\dot{q} + \left[\left(A - C_b\right)pr - p\Delta\right]\left(1-\nu\right) = A\mu p \\ C_b\dot{r} + \dot{\Delta} + pq\left(B - A\right)\left(1-\nu\right) = 0 \\ \dot{\Delta} = 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

Динамические уравнения (3.16) представляют собой важный частный случай общих уравнений, описывающий динамику спутника-гиростата в режиме цилиндрической прецессии при выполнении ограничения (2.57). Эти уравнения имеют замкнутую самодостаточную форму и могут иметь точное аналитическое решение, получаемое независимо от кинематических параметров (углов Эйлера, кватернионов и т.п.).

Для поиска указанных аналитических решений запишем первые интегралы системы. Из комбинаций отдельных динамических уравнений (3.16), когда первое уравнение (3.16) умножается на p, второе – на q, третье– на r, с последующим сложением результатов следует соотношение, подобное интегралу сохранения энергии:

$$A\dot{p}p + B\dot{q}q + C_b\dot{r}r = -\left(B - A\right)\mu pq \tag{3.17}$$

Третье уравнение (3.16) позволит выразить правую часть последнего соотношения (3.17)

$$pq\left(A - B\right) = \frac{1}{\left(1-\nu\right)}\frac{d}{dt}\left[C_b r + \Delta\right] \tag{3.18}$$

и тогда (3.17) примет вид в полных дифференциалах

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(Ap^2 + Bq^2 + C_b r^2\right) = \frac{\mu}{\left(1-\nu\right)}\frac{d}{dt}\left[C_b r + \Delta\right] \tag{3.19}$$

Интегрирование (3.19) дает следующий результат:

$$Ap^2 + Bq^2 + C_b r^2 + \frac{\Delta^2}{C_r} - \frac{2\mu}{(1-\nu)}\left[C_b r + \Delta\right] = 2\tilde{T} \tag{3.20}$$

где

$$\tilde{T} = T_0 - Q\frac{C_2 r_0 + \Delta}{K(1-\nu)} = \text{const}; \quad Q = -EK; \quad E = -\mu;$$

$$2T_0 = Ap_0^2 + Bq_0^2 + C_2 r_0^2 + \frac{\Delta^2}{C_1} = \text{const}; \quad D = \frac{K^2}{2\tilde{T}} = \text{const}$$

Интеграл постоянства величины кинетического момента также следует из комбинаций уравнений (3.16), когда первое уравнение умножается на *Ap*, второе – на *Bq*, третье – by ($C_b r+\Delta$), а получаемые результаты складываются:

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + \left[C_b r + \Delta\right]^2 = \text{const} = K^2 = 2D\tilde{T} \tag{3.21}$$

где константа *D* связывает величины кинетической энергии и кинетического момента системы.

После умножения выражения (3.20) на *A* и вычитания выражения (3.21) можно получить:

$$B(A-B)q^2 + A\left(C_b r^2 + \frac{\Delta^2}{C_r} + \frac{2E}{(1-\nu)}\left[C_b r + \Delta\right]\right) - \left[C_b r + \Delta\right]^2 = 2\tilde{T}(A-D) \tag{3.22}$$

После умножения (3.20) на *B* и вычитания (3.21) получим:

$$A(B-A)p^2 + B\left(C_b r^2 + \frac{\Delta^2}{C_r} + \frac{2E}{(1-\nu)}\left[C_b r + \Delta\right]\right) - \left[C_b r + \Delta\right]^2 = 2\tilde{T}(B-D) \tag{3.23}$$

Выделение полного квадрата в выражениях (3.23), (3.22) позволяет записать:

$$-A(A-B)p^2 + C_b(B-C_b)\left[r - \frac{\Delta - E(1-\nu)^{-1}B}{B-C_b}\right]^2 = F \tag{3.24}$$

$$B(A-B)q^2 + C_b(A-C_b)\left[r - \frac{\Delta - E(1-\nu)^{-1}A}{A-C_b}\right]^2 = H \tag{3.25}$$

где

$$
\begin{aligned}
F &= 2\tilde{T}\left(B-D\right)+\frac{C_b}{B-C_b}\left(\Delta-\frac{E}{(1-\nu)}B\right)^2-\left[\left(\frac{B}{C_r}-1\right)\Delta^2+2\frac{E}{(1-\nu)}B\Delta\right];\\
H &= 2\tilde{T}\left(A-D\right)+\frac{C_b}{A-C_b}\left(\Delta-\frac{E}{(1-\nu)}A\right)^2-\left[\left(\frac{A}{C_r}-1\right)\Delta^2+2\frac{E}{(1-\nu)}A\Delta\right]
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

Из выражений (3.24) и (3.25) следует

$$
\begin{aligned}
p &= \pm\sqrt{\frac{C_b\left(B-C_b\right)\left[r-\dfrac{\Delta-E\left(1-\nu\right)^{-1}B}{B-C_b}\right]^2-F}{A\left(A-B\right)}};\\
r &- \frac{\Delta-E\left(1-\nu\right)^{-1}B}{B-C_b}=\pm V\left(q\right)-\Delta\beta-\frac{E\alpha}{(1-\nu)};
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

где

$$
V\left(q\right)=\sqrt{\frac{H-B\left(A-B\right)q^2}{C_b\left(A-C_b\right)}};\quad \beta=\frac{A-B}{\left(B-C_b\right)\left(A-C_b\right)};\ \alpha=\frac{\left(B-A\right)C_b}{\left(B-C_b\right)\left(A-C_b\right)}
$$

Теперь второе динамическое уравнение (3.16) можно записать в факторизованной форме, зависящей только от компоненты q:

$$
B\dot{q}=\mp\left(1-\nu\right)\left(A-C_b\right)W\left(q\right)V\left(q\right)
\tag{3.28}
$$

где

$$
W\left(q\right)=\sqrt{\frac{C_b\left(B-C_b\right)}{A\left(A-B\right)}\left[\pm V\left(q\right)-\Delta\beta-\frac{E}{(1-\nu)}\alpha\right]^2-\frac{F}{A\left(A-B\right)}}
$$

С помощью замены переменных

$$
x=\pm V\left(q\right)-\Delta\beta-\frac{E}{(1-\nu)}\alpha
\tag{3.29}
$$

уравнение (3.28) принимает вид с разделенными дифференциалами

$$
dt=\pm\frac{M}{\left(1-\nu\right)\sqrt{ac}}\frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\dfrac{H}{a}}\right)^2-\left(x+b\right)^2}\sqrt{x^2-\left(\sqrt{\dfrac{G}{c}}\right)^2}}
\tag{3.30}
$$

где используются следующие константы и начальные условия:

$$M = C_2\sqrt{\frac{B}{A-B}};\ \ G = \frac{F}{A(A-B)};\ a = C_b\left(A - C_b\right);\ b = \Delta\beta + \frac{E}{(1-\nu)}\alpha;\ c = \frac{C_b\left(B-C_b\right)}{A(A-B)} \tag{3.31}$$

$$x\left(t_0\right) = x_{ini} = \pm\sqrt{\frac{H - B(A-B)q_0^2}{C_b\left(A-C_b\right)}} - \Delta\beta - \frac{E}{(1-\nu)}\alpha \tag{3.32}$$

После второй замены переменных можно получить следующий вид уравнения (3.30):

$$dt = \pm 2eM\,\frac{\sqrt{R/P}}{(1-\nu)\sqrt{aG}}\left[\sqrt{s_2 s_4}\sqrt{\left(1-\frac{z^2}{c_1^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{c_2^2}\right)}\right]^{-1} dz; \qquad z = \sqrt{\frac{R(x-e)}{P(x+e)}}; \tag{3.33}$$

где

$$R = -b-d+e;\ P = -b-d-e;\ d = \sqrt{H/a};\ \ e = \sqrt{G/c};\ \ c_1^2 = s_2/s_1;\ \ c_2^2 = s_4/s_3;$$

$$s_1 = d+e-b;\ s_2 = \frac{R}{P}\left[d-e-b\right];\ s_3 = d-e+b;\ s_4 = \frac{R}{P}\left[d+e+b\right];$$

Выполняя еще одну замену переменных $\left(z = \tilde{c}y;\ \ \tilde{c} = \min\{c_1, c_2\};\ \ \underset{\sim}{c} = \max\{c_1, c_2\};\ \ \ k = \tilde{c}/\underset{\sim}{c}\right)$, можно провести интегрирование уравнения (3.33) в эллиптических интегралах:

$$\pm\left[N(1-\nu)\left(t-t_0\right) + I_0\right] = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\left(1-y^2\right)\left(1-k^2y^2\right)}}; \tag{3.34}$$

где

$$N = \left[2eM\,\frac{\tilde{c}\sqrt{R/P}}{\sqrt{aG}\sqrt{s_2 s_4}}\right]^{-1};\ \ I_0 = \int_0^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{\left(1-y^2\right)\left(1-k^2y^2\right)}} = \mathrm{const}$$

После обращения эллиптического интеграла получим явное точное решение [199] в эллиптических функциях Якоби

$$y(t) = \mathrm{sn}\left[\pm\left(N(1-\nu)\left(t-t_0\right) + I_0\right), k\right] \tag{3.35}$$

Обратные последовательные замены позволяют записать следующие точные явные аналитические решения для всех компонент угловых скоростей

$$\begin{cases} q(t) = \pm\sqrt{\dfrac{1}{B(A-B)}\left[H - C_b\left(A-C_b\right)\left(x(t)+\Delta\beta\right)^2\right]}; \\ p(t) = \pm\sqrt{\dfrac{1}{A(A-B)}\left[C_b\left(B-C_b\right)x^2(t) - F\right]}; \\ r(t) = \dfrac{\Delta}{A-C_b} \pm\left(x(t) + \Delta\beta - \dfrac{\mu}{(1-\nu)}\alpha\right); \\ x(t) = e\dfrac{R/P + \tilde{c}^2\,\mathrm{sn}^2\left[\pm\left(N(1-\nu)\left(t-t_0\right)+I_0\right), k\right]}{R/P - \tilde{c}^2\,\mathrm{sn}^2\left[\pm\left(N(1-\nu)\left(t-t_0\right)+I_0\right), k\right]}; \end{cases} \tag{3.36}$$

Графики зависимостей (рис.3.3) демонстрируют положительный результат верификации аналитического решения (3.36) для следующего набора параметров: A_b=15, B_b=10, C_b=7, A_r=5, C_r=4 [kg·m^2]; p_0=0.60, q_0=2.31, r_0=1.86 [1/s]; Δ=3, K=40 [kg·m^2/s]; Q=10 [kg·m^2/s^2]; μ=-0.25 [1/s]; ν=0.30.

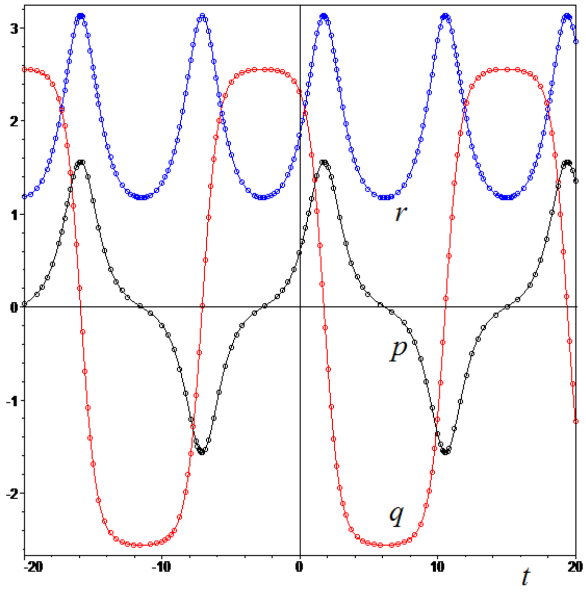


Рис.3.3 – *Результаты численного интегрирования (линии) и аналитические (точки) решения* (3.36)

Таким образом, получены явные точные общие решения динамических уравнений вынужденного движения спутника-гиростата при выполнении цилиндрической прецессии и омега-режима.

Из полученных решений (3.36) следуют решения для свободного нормального осевого гиростата [184, 146, 149] при $\nu=\mu=0$, а также решения для твердого тела в случае Эйлера при $\Delta=\nu=\mu=0$.

3.2.2. Параметрическое обобщение гетероклинического решения в случае переменного магнитного момента

Для дальнейшего анализа хаотической динамики движения спутника-гиростата необходимо получить явный вид гетероклинических решений, следующих из общих решений (3.36) при выполнении условия F=0, когда эллиптические функции вырождаются в гиперболические (при этом эллиптический модуль равен единице, т.е. k=1). Эти решения соответствуют движению вдоль сепаратрисс в фазовом пространстве системы и определяют динамику образования гетероклинических расщеплений при действии возмущений.

Запишем эти важные для дальнейшего исследования гетероклинические решения при подстановке F=0 в общие решения (3.36), что отражается на величине эллиптического модуля (он становится равен единице: k=1) и вырождении эллиптических функций в гиперболические:

$$\begin{cases} \bar{p}(t) = \pm\sqrt{\dfrac{C_b(B-C_b)}{A(A-B)}}\bar{x}(t); \qquad \bar{q}(t) = \pm\sqrt{\varsigma^2 - \chi^2\left(\bar{x}(t) + \Delta\beta + \dfrac{E}{(1-\nu)}\alpha\right)^2}; \\ \bar{r}(t) = \bar{x}(t) + \dfrac{\Delta - \dfrac{E}{(1-\nu)}B}{B-C_b}; \qquad \bar{\sigma}(t) = \dfrac{\Delta}{C_r} - \bar{r}(t); \\ \bar{x}(t) = \dfrac{4a_0\Phi_0\exp\left(\mp\dfrac{\tilde{M}\sqrt{a_0}}{\chi^2}(1-\nu)t\right)}{\left[\Phi_0\exp\left(\mp\dfrac{\tilde{M}\sqrt{a_0}}{\chi^2}(1-\nu)t\right) - a_1\right]^2 - 4a_2a_0} \end{cases} \tag{3.37}$$

где

$$\Delta = \text{const} > 0; \quad a_2 = -\chi^2; \quad a_1 = -2\left(\Delta\beta + \frac{E}{(1-\nu)}\alpha\right)\chi^2; \quad a_0 = \varsigma^2 - \chi^2\left(\Delta\beta + \frac{E}{(1-\nu)}\alpha\right)^2;$$

$$\varsigma^2 = \frac{\tilde{H}}{B(A-B)}; \quad \chi^2 = \frac{C_b(A-C_b)}{B(A-B)}; \quad \tilde{M} = \frac{(A-C_b)}{B}\sqrt{\frac{C_b(B-C_b)}{A(A-B)}};$$

$$\tilde{H} = 2\tilde{T}\left(A-\tilde{D}\right) + \frac{C_b}{A-C_b}\left(\Delta - \frac{E}{(1-\nu)}A\right)^2 - \left[\left(\frac{A}{C_r}-1\right)\Delta^2 + 2\frac{E}{(1-\nu)}A\Delta\right];$$

$$\tilde{D} = B + \frac{1}{2\tilde{T}}\left(\frac{C_b}{B-C_b}\left(\Delta - \frac{E}{(1-\nu)}B\right)^2 - \left[\left(\frac{B}{C_r}-1\right)\Delta^2 + 2\frac{E}{(1-\nu)}B\Delta\right]\right);$$

$$E = -\mu; \; Q = \mu K; \; \tilde{T} = T_0 - Q\frac{C_2 r_0 + \Delta}{K(1-\nu)} = \text{const}; \quad 2T_0 = Ap_0^2 + Bq_0^2 + C_b r_0^2 + \frac{\Delta^2}{C_r};$$

$$\Phi_0 = \Phi\left(y_0^{\pm}\right); \quad \Phi(z) = \frac{1}{z}\left(2a_0 + a_1 z + 2\sqrt{a_0}\sqrt{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}\right); \quad y_0^{\pm} = \pm\frac{\varsigma}{\chi} - \left(\Delta\beta + \frac{E}{(1-\nu)}\alpha\right)$$

Аналитические решения (3.37) обобщают соответствующие гетероклинические решения [28, 146, 149], полученные для случая свободного нормального осевого гиростата (при μ=ν=0) и свободного твердого тела (Δ=μ=ν=0). Положительная верификация решений (3.37) приводится на рис.3.4 для набора параметров: A_b=15, B_b=10, C_b=6, A_r=5, C_r=4 [kg·m^2]; p_0=3.5, q_0=0, r_0=5.4 [1/s]; Δ=3, K=78.44 [kg·m^2/s]; Q=10 [kg·m^2/s^2]; μ=-0.13 [1/s]; ν=0.30.

Полученные гетероклинические решения, как уже отмечалось, будут использованы далее для проведения анализа хаотической динамики в случае реализации гетероклинического хаоса.

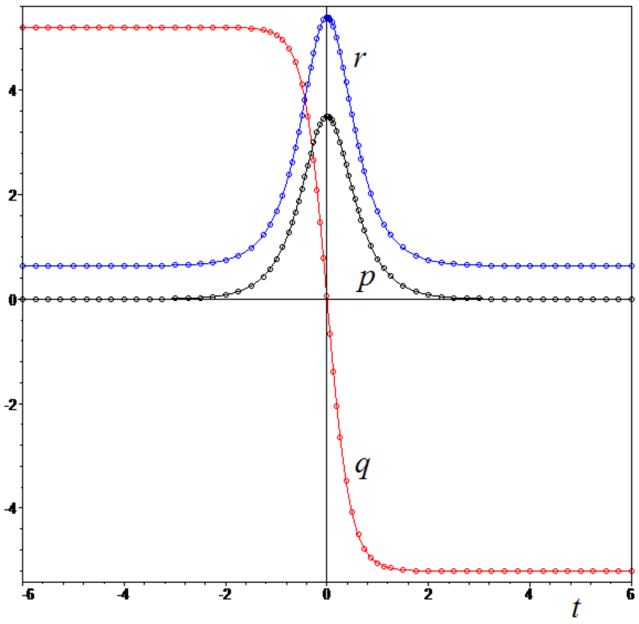


Рис.3.4 – *The Результаты численного интегрирования (линии) и аналитические (точки) решения* (3.37)

Из выражения (3.37) для относительной скорости вращения ротора следует гетероклиническое решение для угла относительного вращения тела-ротора δ:

$$\bar{\delta}=\int\bar{\sigma}(t)dt=\int\left[\frac{\Delta}{C_r}-\bar{r}(t)\right]dt=\left[\frac{\Delta}{C_r}-\frac{\Delta-\dfrac{E}{(1-\nu)}B}{B-C_b}\right]t-\int\bar{x}(t)dt; \tag{3.38}$$

или в перезаписанной форме:

$$\bar{\delta}=\sigma_* t-\bar{v}_\delta(t)+\delta_0; \tag{3.39}$$

где

$$\sigma_*=\left[\frac{\Delta}{C_r}-\frac{\Delta-\dfrac{E}{(1-\nu)}B}{B-C_b}\right] \tag{3.40}$$

$$\bar{v}_\delta(t)=\Theta(t)-\Theta(0); \tag{3.41}$$

$$\Theta(t)=\int \overline{x}(t)\,dt=\frac{2}{\vartheta}\sqrt{\frac{a_0}{|a_2|}}\,\mathrm{arctg}\left[\frac{\Phi_0\exp(\vartheta t)-a_1}{2\sqrt{a_0|a_2|}}\right];\quad \vartheta=\mp\frac{\tilde{M}\sqrt{a_0}}{\chi^2}(1-\nu) \tag{3.42}$$

Отдельно здесь отметим, что функция $y(t)$ является затухающей к нулю при $t\to\pm\infty$ (рис.3.5), а функция $\overline{\nu}_\delta(t)$ есть нечетная функция затухающая к значениям $\pm\nu_*$:

$$\Theta(+\infty)=\frac{\pi}{\vartheta}\sqrt{\frac{a_0}{|a_2|}};\qquad \nu_*=\frac{\pi}{\vartheta}\sqrt{\frac{a_0}{|a_2|}}-\Theta(0) \tag{3.43}$$

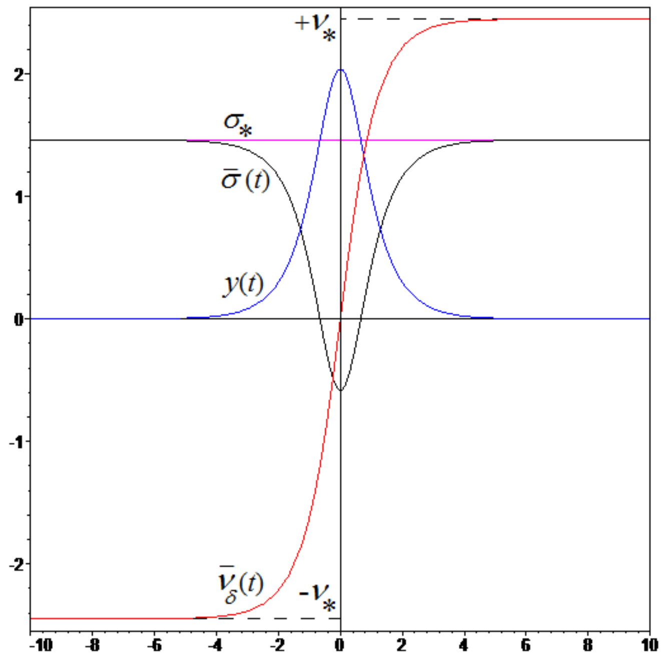


Рис.3.5. *Вспомогательные гетероклинические зависимости*

На основании связей (2.37) запишем гетероклинические решения для переменных Андуайе-Депри:

$$\overline{L}(t)=C_b\overline{r}(t)+\Delta;\quad \sin\left(\overline{l}(t)\right)=\frac{A\overline{p}(t)}{\sqrt{\overline{I}_2^2-\overline{L}^2(t)}};\quad \left(\text{или}\quad \cos\left(\overline{l}(t)\right)=\frac{B\overline{q}(t)}{\sqrt{\overline{I}_2^2-\overline{L}^2(t)}}\right) \tag{3.44}$$

Решения (3.37), (3.42) и (3.44) будут использованы для анализа процессов хаотизации динамики спутников-гиростатов.

Стоит отметить, что может иметь место важный частный случай полученных гетероклинических решений. Этот частный случай реализуется при выполнении следующего условия, накладываемого на параметры системы (на начальные условия движения, либо на инерционные параметры или силовые факторы):

$$\Delta(1-\nu)+C_b\mu=0 \tag{3.45}$$

Выполнение указанного дополнительного условия может быть обеспечено магнитной системой управления, которая назначит соответствующее значение констант управления, либо путем создания соответствующего продольного кинетического момента тела-ротора

Δ в процессе раскрутки внутренним электродвигателем. При выполнении условия/ограничения (3.45) уравнения (3.16) принимают вид:

$$\begin{cases} A\dot{p} + \left(C_b - B\right) q\left[r + \tilde{\mu}\right]\left(1-\nu\right) = 0 \\ B\dot{q} + \left(A - C_b\right) p\left[r + \tilde{\mu}\right]\left(1-\nu\right) = 0 \\ C_b\dot{r} + pq\left(B - A\right)\left(1-\nu\right) = 0 \end{cases} \tag{3.46}$$

где $\tilde{\mu} = \mu/\left(1-\nu\right)$.

Уравнения (3.46), как это можно проверить путем прямой подстановки, имеют следующий вид частных решений:

$$\overline{p}\left(t\right) = p_0/\mathrm{ch}\,\lambda t; \quad \overline{q}\left(t\right) = \rho\,\mathrm{th}\,\lambda t; \quad \overline{r}\left(t\right) = \frac{r_0 + \tilde{\mu}}{\mathrm{ch}\,\lambda t} - \tilde{\mu}; \tag{3.47}$$

где начальные значения p_0 и r_0 удовлетворяют условию (3.24) реализации гетероклинической фазовой траектории (когда F=0), а $\{\rho,\ \lambda\}$ – есть неизвестные (не определенные) постоянные параметры. Решения (3.47) представляют собой частный случай гетероклинических решений (3.37), и при этом имеют форму, выраженную простейшими гиперболическими функциями. Чтобы полностью определить неизвестные параметры и в итоге получить корректные частные гетероклинические решения осуществим прямую подстановку формул (3.47) в уравнения (3.46). Используя свойства симметрии производных от гиперболических функций можно записать:

$$\dot{\overline{p}} = -p_0\lambda\frac{\mathrm{sh}\,\lambda t}{\mathrm{ch}^2\,\lambda t}; \quad \dot{\overline{q}} = \lambda\rho\frac{1}{\mathrm{ch}^2\,\lambda t}; \quad \dot{\overline{r}} = -\left(r_0 + \tilde{\mu}\right)\lambda\frac{\mathrm{sh}\,\lambda t}{\mathrm{ch}^2\,\lambda t}$$

В результате указанной подстановки мы можем перейти от дифференциальных уравнений к алгебраическим, т.к. блоки выражений, содержащие гиперболические функции, сократятся:

$$\begin{cases} -A\lambda p_0 + \left(C_b - B\right)\rho\left[r_0 + \tilde{\mu}\right]\left(1-\nu\right) = 0 \\ B\lambda\rho + \left(A - C_b\right) p_0\left[r_0 + \tilde{\mu}\right]\left(1-\nu\right) = 0 \\ -C_b\lambda\left[r_0 + \tilde{\mu}\right] + \left(B - A\right)\rho p_0\left(1-\nu\right) = 0 \end{cases} \tag{3.48}$$

Из рассмотрения алгебраических уравнений (3.48) можно получить следующие соотношения:

$$\rho^2 = \frac{\left(C_b - A\right)A}{\left(C_b - B\right)B}p_0^2; \quad \lambda^2 = \frac{\left(C_b - A\right)\left(B - A\right)}{BC_b}p_0^2 \tag{3.49}$$

Принимая во внимание (3.45), условие (3.24) примет вид:

$$A\left(A-B\right)p_0^2 = C_b\left(B-C_b\right)\left[r_0 + \frac{\Delta}{C_b}\right]^2 \tag{3.50}$$

Последнее выражение (3.50) позволяет записать четыре случая ($i\cdot j$, i=1..2, j=1..2) возможных начальных условий, обеспечивающих корректность искомых решений:

$$r_0 = f\left(p_0\right) = \frac{\left(-1\right)^i \sqrt{A\left(A-B\right)}p_0}{\left(-1\right)^j \sqrt{C_b\left(B-C_b\right)}} - \frac{\Delta}{C_b} \tag{3.51}$$

Таким образом, базируясь на начальных условиях (3.51) и параметрах (3.49), мы будем иметь полностью определенные параметры гетероклинических решений (3.47) при единственном произвольном и полностью определяющим все остальные параметры значении p_0, которое последует из начальных условий движения.

3.2.3. Гетероклиническое решение в переменных действие-угол для вращающейся фазы ротора

В целях корректного применения формализма Виггинса [333] для обнаружения фактов пересечения расщепленных многообразий гомо-/гетероклинических фазовых траекторий необходимо обеспечить корректный переход от обычных картезианских импульсов и переменных для вращающихся фаз к их соответствующим формам типа «действие-угол». Дополнительно отметим, что переход от картезианских переменных к переменным действие-угол также необходим для корректного применения других многомерных модификаций формализма В.К. Мельникова, включая методологию В.И. Арнольда [18] и формализм Holms-Marsden [238]. По крайней мере, необходимо преобразование и переход к переменным «играющим роль переменных действие-угол» (“…play the role of action angle variables…”) [238].

В динамике спутника-гиростата роль вращающейся фазы играет угол δ (со своим сопряженным каноническим импульсом Δ), и, поэтому, необходимо корректно модифицировать форму динамической системы (2.72) с реализацией перехода от картезианской канонической пары $\{\delta, \Delta\}$ к паре соответствующих переменных действие-угол $\{w_\delta, I_\Delta\}$. Важно отметить полученные результаты декомпозиции переменных в задаче динамики гиростата [61], а также нахождения интегралов действия [146].

В рамках введения канонических переменных действие-угол для вращающейся фазы $\{w_\delta, I_\Delta\}$ необходимо, во-первых, построить производящую функцию для перехода между каноническими переменными $\left\{\delta, \Delta\right\} \to \left\{w_\delta, I_\Delta\right\}$. Во-вторых, что не менее важно, для последующего использования формализма S.Wiggins необходимо иметь точные аналитические решения для гетероклинических зависимостей, представленных в переменных действие-угол $\left\{\overline{w}_\delta, \overline{I}_\Delta\right\}$.

Будем искать производящую функцию в следующей общей форме:

$$W = W\left(t, q_i, \tilde{p}_i\right) \tag{3.52}$$

где $\{q_i,\, \tilde{q}_i\}$ обозначают “старую” и “новую” каноническую координату, а $\{p_i, \tilde{p}_i\}$ - есть соответствующие “старый” и “новый” канонические импульсы. В этом случае имеют место следующие соответствия ($\tilde{\mathcal{H}}$ - есть “новый” гамильтониан):

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i; \qquad \frac{\partial W}{\partial \tilde{p}_i} = \tilde{q}_i; \qquad \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{\partial W}{\partial t} \tag{3.53}$$

Конкретизированный вид порождающей функции можно получить, базируясь на работах [21] и [101].

Для рассматриваемой нами задачи выполняются следующие первые интегралы

$$\alpha_1 = \text{const} = \mathcal{H}_0\left(l, L, \delta, \Delta\right); \quad \alpha_2 = \text{const} = \Delta \tag{3.54}$$

Формально разрешая соотношения (3.54) относительно импульсов, запишем:

$$L = L\left(l, \alpha_1, \alpha_2\right) = F_L\left(l, \alpha_1, \alpha_2\right); \qquad \Delta = \Delta\left(\delta, \alpha_1, \alpha_2\right) = F_\Delta\left(\delta, \alpha_1, \alpha_2\right) \tag{3.55}$$

где $F_\Delta\left(\delta, \alpha_1, \alpha_2\right) = \Delta = \alpha_2$ и поэтому сразу после подстановки этого интеграла в первое соотношение можно явно получить конкретную форму зависимости $F_L\left(l, \alpha_1, \alpha_2\right)$ как решение первого уравнения (3.54), рассматривая его квадратным уравнением, однако, можно этого не делать (это вовсе не потребуется далее).

Формальные выражения для действий имеют вид:

$$I_L = \frac{1}{2\pi} \oint F_L\left(l, \alpha_1, \alpha_2\right) dl; \tag{3.56}$$

$$I_\Delta = \frac{1}{2\pi} \oint F_\Delta\left(\delta, \alpha_1, \alpha_2\right) d\delta = \Delta = \alpha_2 \tag{3.57}$$

где интегралы берутся по полному периоду интегрируемых функций, либо, в случае постоянства интегрируемой функции – на 2π-интервале аргумента.

Из последних равенств (3.57), (3.56) формально следуют зависимости констант $\alpha_2,\, \alpha_1$ от величин констант действий $I_\Delta,\, I_L$:

$$\alpha_2 = \Delta = I_\Delta; \tag{3.58}$$

$$\alpha_1 = \alpha_1\left(I_L,\, I_\Delta\right); \tag{3.59}$$

где можно не определять явной формы выражения (3.59).

Теперь формально можно записать конкретизированную форму производящей функции, как интеграл от полного дифференциала [21, 101]:

$$W = \int \left(F_L\left(l, \alpha_1, \alpha_2\right) dl + \Delta d\delta \right) = \int F_L\left(l, \alpha_1, \alpha_2\right) dl + \Delta\delta, \tag{3.60}$$

где далее константы α_2, α_1 формально заменяются на свои зависимости от констант действий I_Δ, I_L, используя (3.58) и (3.59):

$$W = \int \left(F_L\left(l, \alpha_1\left(I_L,\, I_\Delta\right), I_\Delta\right) dl + I_\Delta d\delta \right) = \int F_L\left(l, \alpha_1\left(I_L,\, I_\Delta\right), I_\Delta\right) dl + I_\Delta \delta \tag{3.61}$$

Учитывая (3.53), мы получаем формальный вид для угловой переменной вращающейся фазы:

$$w_\delta = \frac{\partial W}{\partial I_\Delta} = \delta + \frac{\partial}{\partial I_\Delta} \int F_L\left(l, \alpha_1\left(I_L,\, I_\Delta\right), I_\Delta\right) dl \tag{3.62}$$

Возможна также обратная интерпретация формулы (3.62), утверждающая что картезианский угол относительного вращения тела-ротора δ выражается через «новую» угловую переменную w_δ и «старую» картезианскую координату l, а также, безусловно, через константы для новых действий:

$$\delta = \delta\left(w_\delta, l\right) = w_\delta - v_\delta\left(l, I_L,\, I_\Delta\right); \tag{3.63}$$

Из выражения (3.63) очевидна равносильность частного дифференцирования:

$$\frac{\partial(\bullet)}{\partial w_\delta} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial \delta} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial w_\delta} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial \delta} \tag{3.64}$$

Если учесть, что каноническая переменная w_δ со своим каноническим импульсом относятся к классу переменных типа действие-угол, то, основываясь на свойствах таких переменных, “действие” (I_Δ) будет постоянной величиной, а “угол” будет являться линейной функцией времени ($w_\delta = \omega_\delta \cdot t + w_0$).

В рассматриваемой задаче записи гетероклинических зависимостей необходимо сфокусировать внимание на получении именно гетероклинического решения для угловой переменной w_δ. Как видно из гетероклинического решения для картезианского угла δ (3.39), для него характерны главная линейная (по времени) часть $\sigma_* t$ и дополнительный апериодический затухающий член $\bar{v}_\delta(t)$. Если сравнить теперь структуру гетероклинического решения для $\bar{\delta}$, определяемого формулой (3.39), со структурой, следующей из (3.63), то можно сделать явное заключение, что будет корректно следующее соответствие:

$$\begin{gathered} \bar{v}_\delta(t) = v_\delta\left(\bar{l}(t), \bar{I}_L,\, \bar{I}_\Delta\right)\Big|_{\{\bar{p},\bar{q},\bar{r},\bar{\sigma},\bar{\delta}\}} = \\ = \left[\frac{\partial}{\partial I_\Delta} \int F_L\left(\bar{l}, \alpha_1\left(\bar{I}_L,\, \bar{I}_\Delta\right), \bar{I}_\Delta\right) dl\right]_{\{\bar{p},\bar{q},\bar{r},\bar{\sigma},\bar{\delta}\}} = \Theta(t) - \Theta(0); \end{gathered} \tag{3.65}$$

где черта над символом обозначает соответствие переменных гетероклиническим зависимостям $\left\{\bar{p},\bar{q},\bar{r},\bar{\sigma},\bar{\delta}\right\}$, определяя тем самым гетероклинические решения.

В итоге можно записать следующие явные «союзные» соотношения для гетероклинических решений для угловой переменной и картезианского угла, а также их связи друг с другом:

$$\begin{cases} \bar{\delta}(t) = \delta\left(\bar{w}_\delta(t), \bar{l}(t)\right) = \bar{w}_\delta(t) - \bar{v}_\delta(t); \;\Leftrightarrow\; \bar{w}_\delta(t) = \bar{\delta}(t) + \bar{v}_\delta(t); \\ \bar{\delta}(t) = \bar{\omega}_\delta t - \bar{v}_\delta(t) + \delta_0; \quad \bar{w}_\delta(t) = \bar{\omega}_\delta t + w_0; \\ \bar{\omega}_\delta = \sigma_* = \Delta/\bar{C}_1 - (\Delta - EB)/\left(B - \bar{C}_2\right); \\ w_0 \overset{df}{=} \delta_0; \;\; \bar{I}_\Delta = \bar{\Delta} = \Delta; \end{cases} \tag{3.66}$$

Очень важно здесь отметить соответствие “новой” структуры гамильтониана (3.53) и его “старой” структуры после канонических преобразований $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$ (поскольку $\partial W/\partial t = 0$), что не изменяет существа динамической системы и, таким образом, можно принять в рассмотрение только «союзные» взаимные преобразования между “старыми” и “новыми” каноническими переменными. Этот факт позволяет использовать смешанный набор переменных, часть которых будет соответствовать “новым”, а другая часть – “старым” каноническим координатам и импульсам. По этой причине мы можем продолжить использовать “старую” каноническую пару $\{l,\ L\}$ для описания динамики системы в позиционном смысле, а описание движения в части вращающейся фазы удобно проводить с помощью обеих форм (и “старой”, и “новой”), включая картезианские координату-импульс $\{\delta,\ \Delta\}$ для моделирования и понимания естественной динамики системы, а также переменные действие-угол $\{w_\delta,\ I_\Delta\}$ в рамках формализма В.К. Мельникова и его модификаций (S.Wiggins) при вычислении соответствующих функций посредством формальных подстановок-замен на основе “союзных” выражений.

В итоге, выражения (3.66) с дополнением (3.37) и (3.41) представляют собой гетероклиническое решение для переменных действие-угол для вращающейся фазы угла относительного вращения ротора.

3.3. Общие решения для движения спутника-гиростата под действием гравитационных и магнитных моментов

В параграфе приводятся решения для движения тяжелого динамически симметричного спутника-гиростата при действии между его соосными телами произвольного внутреннего момента [26], а также для движения намагниченного спутника-гиростата [198], обобщающие случай Лагранжа движения твердого тела.

3.3.1. Приведение решения для тяжелого осевого гиростата с произвольным внутренним моментом сил к случаю Лагранжа

Рассмотрим движение тяжелого осевого динамически симметричного гиростата с произвольным моментом внутреннего взаимодействия. Введем следующие системы координат: $Oxyz$ - подвижная система, жестко связанная с телом-носителем, с началом в неподвижной точке O; $OXYZ$ – неподвижная в абсолютном пространстве система координат; ось OZ направлена в сторону, противоположную силе тяжести. Момент силы тяжести в проекциях на подвижные оси равен:

$$\mathbf{M} = (Pa\gamma_2, -Pa\gamma_1, 0)^T \tag{3.67}$$

где P - вес гиростата, a - расстояние от центра тяжести гиростата до неподвижной точки O, γ_i - направляющие косинусы единичного вектора вертикальной неподвижной оси OZ в подвижной системе $Oxyz$ ($i = 1, 2, 3$). Ось вращения ротора совпадает с осью динамической симметрии Oz гиростата и точка O принадлежит этой оси.

Динамические уравнения движения тяжелого осевого динамически симметричного гиростата в осях системы координат $Oxyz$ запишутся в виде

$$\begin{aligned} &A\dot{p} + (C - A)qr + C_r q\sigma = Pa\gamma_2 \\ &A\dot{q} + (A - C)pr - C_r p\sigma = -Pa\gamma_1 \\ &C\dot{r} + C_r\dot{\sigma} = 0, \qquad C_r(\dot{r} + \dot{\sigma}) = M_r \end{aligned} \tag{3.68}$$

где $A = A_n + A_r$, $C = C_n + C_r$ – моменты инерции гиростата в системе $Oxyz$; $A_n = B_n$, C_n – главные моменты инерции тела-носителя; $A_r = B_r, C_r$ – моменты инерции ротора; $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)^T$ - угловая скорость несущего тела, σ - относительная угловая скорость вращения ротора.

Кинематические уравнения включают в себя известные уравнения Пуассона [45] и уравнение для угла вращения ротора относительно несущего тела

$$\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2, \quad \dot{\delta} = \sigma \tag{3.69}$$

По аналогии с классическими работами [45] запишем три очевидных первых интеграла системы динамических и кинематических уравнений

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \tag{3.70}$$

$$A(p\gamma_1 + q\gamma_2) + (Cr + C_r\sigma)\gamma_3 = K_Z \tag{3.71}$$

$$Cr + C_r\sigma = K_z \tag{3.72}$$

Интегралы (3.71) и (3.72) определяют сохранение проекций кинетического момента на неподвижную вертикаль *OZ* и на ось динамической симметрии гиростата *Oz*, вдоль которой действует произвольный внутренний момент между соосными телами (поэтому $r \neq \text{const};\ \sigma \neq \text{const}$). Для поиска четвертого интеграла воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии

$$\frac{1}{2}\left[A(p^2+q^2)+C_n r^2 + C_r(r+\sigma)^2\right] - T_0 = -Pa\gamma_3 + \int_0^{\delta} M_r d\delta \tag{3.73}$$

где T_0 - начальная величина кинетической энергии. Представим последние два уравнения системы (3.68) в виде

$$C_n\dot{r} = -M_r, \qquad C_r(\dot{r}+\dot{\sigma}) = M_r \tag{3.74}$$

Умножая первое уравнение на r, а второе – на (r+σ)

$$\frac{1}{2}C_n dr^2 = -M_r r dt, \quad \frac{1}{2}C_r d\left(r+\sigma\right)^2 = M_r\left(r+\sigma\right)dt$$

и складывая два последних соотношения, получим работу внутреннего момента

$$\int_0^{\delta} M_r d\delta = \frac{1}{2}\left[C_n r^2 + C_r(r+\sigma)^2\right] + const, \qquad \left(d\delta = \sigma dt\right)$$

Сопоставляя эту формулу и выражение (3.73), запишем четвертый интеграл в виде

$$\frac{A}{2}(p^2+q^2) + Pa\gamma_3 = \text{const} \tag{3.75}$$

Таким образом, первый интеграл (3.75) совпадает по виду с интегралом энергии для тяжелого твердого тела с учетом того, что в случае тяжелого динамически симметричного твердого тела продольная угловая скорость является постоянной $\left(r = \text{const}\right)$.

Из показанного совпадения первых интегралов движения для тяжелого тела в случае Лагранжа и тяжелого осевого гиростата с произвольным внутренним моментом взаимодействия соосных тел вытекает симметрия и аналогия аналитических решений и динамики систем. Динамически симметричный осевой тяжелый гиростат с произвольным внутренним моментом взаимодействия соосных тел совершает движение, подобное движению тяжелого осесимметричного твердого тела в случае Лагранжа. Ранее [37] качественно показывалась возможность обобщения задачи о движении тяжелого тела в случае Лагранжа для уравновешенного гиростата и движения тела в жидкости.

Очевидно, что схема записи решения уравнений для движения тяжелого неуравновешенного динамически симметричного гиростата будет стандартной, приводящей к эллиптическим функциям. Можно перейти к углам Эйлера, записанным для тела-носителя

$$\gamma_1 = \sin\theta\sin\varphi,\ \gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi,\ \gamma_3 = \cos\theta$$

и заменить уравнения Пуассона (2.3) на кинематические уравнения Эйлера

$$p = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \quad q = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \quad r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} \tag{3.76}$$

Далее с помощью уравнений (3.76) интегралы (3.71) и (3.75) приводятся к виду

$$\dot{\psi}\sin^2\theta + R\cos\theta = G, \qquad \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta + 2g\cos\theta = H \tag{3.77}$$

где $g = Pa/A$, $R = K_z/A$, $G = K_Z/A$, а после замены переменных $u = \cos\theta$ вторая формула из (3.77) записывается в виде, содержащем кубический многочлен относительно u, имеющий три вещественных корня u_1, u_2, и u' $\left(-1 < u_1 \le u_0 \le u_2 < 1 < u' < \infty, \quad u_0 = \cos\theta_0\right)$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = f(u) = (H - 2gu)\left(1 - u^2\right) - \left(G - Ru\right)^2 = 2g\left(u - u_1\right)\left(u - u_2\right)\left(u - u'\right) \qquad (3.78)$$

Очевидно, что переменная u должна изменяться в пределах: $u_1 \le u \le u_2$. С помощью введения новой переменной ξ

$$u = u_1 \cos^2\xi + u_2 \sin^2\xi \qquad (3.79)$$

на основании (3.78) можно записать

$$\frac{d\xi}{dt} = \pm\beta\sqrt{\left(1 - k^2 \sin^2\xi\right)} \qquad \left(\beta = \sqrt{g\left(u' - u_1\right)/2}, \quad k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u' - u_1}, \ \ 0 \le k^2 < 1\right) \ (3.80)$$

Интегрирование (3.80) дает следующий результат:

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\xi}} = \pm\int_0^t \beta dt$$

где ξ_0 находится из уравнения: $\cos\theta_0 = u_1 \cos^2\xi_0 + u_2 \sin^2\xi_0$, а знак перед интегралом в правой части определяется начальными условиями движения. С помощью амплитуды Якоби последнее выражение можно переписать в виде

$$\xi = \mathrm{am}\left(\beta t + \alpha, k\right), \qquad \alpha = \int_0^{\xi_0} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\xi}} = \mathrm{const}$$

и общее решение для угла нутации запишется [26, 45]

$$\cos\theta = \left(u_2 - u_1\right)\mathrm{sn}^2\left(\beta t + \alpha, \ k\right) + u_1 \qquad (3.81)$$

Отметим, однако, что в отличии от тела в случае Лагранжа, для тяжелого осевого гиростата с произвольным внутренним моментом взаимодействия соосных тел продольная угловая скорость является функцией времени, определяемой видом этого момента:

$$r(t) = -\int_0^t \frac{M_r\left(t, \boldsymbol{\omega}(t), \sigma(t), \boldsymbol{\gamma}(t), \delta(t)\right)}{C_n} dt, \qquad (3.82)$$

что отразится на явном виде зависимости от времени для угла собственного вращения, который будет отличаться от соответствующего вида в классическом случае Лагранжа:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^t \left(r(t) - \dot\psi \cos\theta\right) dt = \int_0^t \left(r(t) - \frac{G - R\cos\theta}{\sin^2\theta}\cos\theta\right) dt \qquad (3.83)$$

Более того, можно синтезировать вид внутреннего момента для реализации специальных случаев прецессионного движения гиростата. Например, можно обеспечить "лунное" движения, при котором несущее тело всегда обращено одной стороной к неподвижной вертикальной оси OZ, или, что тоже самое, когда $\dot\varphi \equiv 0$. Так из (3.83) и (3.82) следует, что для реализации «лунного» движения необходимо реализовывать следующий закон для внутреннего момента:

$$M_r = -C_n\dot{r} = -C_n \frac{d}{dt}\left(\dot{\psi}\cos\theta\right) = -C_n \frac{d}{dt}\left(\frac{G - R\cos\theta}{\sin^2\theta}\cos\theta\right) = \\ = -\frac{2R\cos\theta - G\cos^2\theta - G}{\sin^3\theta}\dot{\theta}C_n \tag{3.84}$$

Можно также обеспечить такое прецессионное движение, для которого будет отсутствовать вращение тела-платформы вокруг продольного направления в абсолютном пространстве т.е., когда угол собственного вращения компенсирует поворот по углу прецессии ($\varphi(t) = -\psi(t) + \mathrm{const}$), что, как следует из (3.83), будет реализовываться когда:

$$-\psi = \int\left(r(t) - \dot{\psi}\cos\theta\right)dt$$

или при условии

$$r(t) = \dot{\psi}\left(\cos\theta - 1\right)$$

что выражается назначением внутреннего момента в виде:

$$M_r = -C_n\dot{r} = -C_n \frac{d}{dt}\left[\frac{G - R\cos\theta}{\sin^2\theta}\left(\cos\theta - 1\right)\right] \tag{3.85}$$

Возможен синтез и других специальных режимов движения тяжелого осевого гиростата за счет назначения вид момента внутреннего взаимодействия соосных тел.

Квадратура для угла прецессии для всех случаев движения тяжелого осевого гиростата повторит известный результат [22], следующий из первого соотношения (3.77) и решения (3.81), который приводится к комбинации неполных эллиптических интегралов третьего рода [22, 138]. Для зависимости относительной угловой скорости и угла закрутки ротора можно записать следующие общие интегралы, определяемые видом момента внутреннего взаимодействия:

$$\sigma(t) = \int_0^t \frac{M_r\left(t, \boldsymbol{\omega}(t), \sigma(t), \boldsymbol{\gamma}(t), \delta(t)\right)}{C_r}dt; \qquad \delta(t) = \int_0^t \sigma(t)\,dt \tag{3.86}$$

Таким образом, в случае тяжелого осевого гиростата *актуальным является Лагранжев класс решений* (3.81) с модификациями, касающимися временно́й зависимости продольной угловой скорости (3.82) и угла собственного вращения (3.83), а также с дополнительными зависимостями для координат по степени свободы относительного вращения (3.86).

3.3.2. Общее решение для класса движений динамически симметричного спутника-гиростата с переменным дипольным магнитным моментом

Рассмотрим пространственное движение динамически симметричных спутников-гиростатов при выполнении омега-режимов, реализуемых посредством магнитных систем управления. В омега-режиме реализуется движение под действием внешнего магнитного момента сил, являющегося восстанавливающим (опрокидывающим), и в этом аспекте задача близка к случаю Лагранжа. Ниже определяются аналитические решения для всех динамических параметров, включая компоненты угловой скорости и углы Эйлера для рассматриваемого случая движения спутника-гиростата. Решения записываются в эллиптических функциях Якоби и могут быть охарактеризованы, как дальнейшее развитие фундаментальных задач динамики движения твердых тел и гиростатов. Более того, указанные решения будут являться основой для разработки метода пространственной переориентации, который будет описан в пятой главе.

Пусть движение спутника-гиростата рассматривается в геомагнитном поле в предположении постоянства его магнитной индукции ($\mathbf{B}_{orb}$), т.е. рассматривается короткий участок орбитального движения, либо долговременное движение по круговой экваториальной орбите. Собственный дипольный момент спутника-гиростата создается магнитными актуаторами (катушками индуктивности) пропорционально соответствующим компонентам угловой скорости в связанной с главным телом-корпусом спутника-гиростата системе координат (3.2) – подобный режим движения ранее был назван омега-режимом.

Как рассматривалось в [181, 283, 316, 320] управление пространственным движением СГ можно реализовывать путем изменения величины дипольного момента, учитывая при этом информацию относительно текущих скоростях и углах вращательного движения СГ [223, 344]. Важно также подчеркнуть имеющуюся связь настоящих исследований с исследованиями в области динамики движения СГ с восстанавливающим/опрокидывающим моментом [22, 32, 33, 34].

Важно отметить связь динамики движения СГ с внешним моментом сил (3.3) и классических задач динамики твердого тела и гиростата. Так изучаемый нами случай может быть проинтерпретирован, с одной стороны, как развитие случая Эйлера с малыми возмущениями (когда величина m мала), и, с другой стороны, как развитие случая Лагранжа при действии опрокидывающего/восстанавливающего момента сил (при величинах m не являющихся малыми).

Переходя к модели движения, можно сказать, что рассматривается пространственное движение спутника-гиростата относительно собственного центра масс C (рис.3.6) под действием восстанавливающего/опрокидывающего момента сил (3.3) взаимодействия с внешним магнитным полем постоянной индукции $\mathbf{B}_{orb}$, вектор которой при этом определяет «выделенное» направление в инерциальном пространстве $CXYZ$ (ось CZ сонаправлена с вектором $\mathbf{B}_{orb}$).

Угловое положение связанной системы координат $Cxyz$ относительно инерциальной оси CZ будем определять направляющими косинусами: $\gamma_1 = \cos(CZ, Cx)$, $\gamma_2 = \cos(CZ, Cy)$, $\gamma_3 = \cos(CZ, Cz)$.

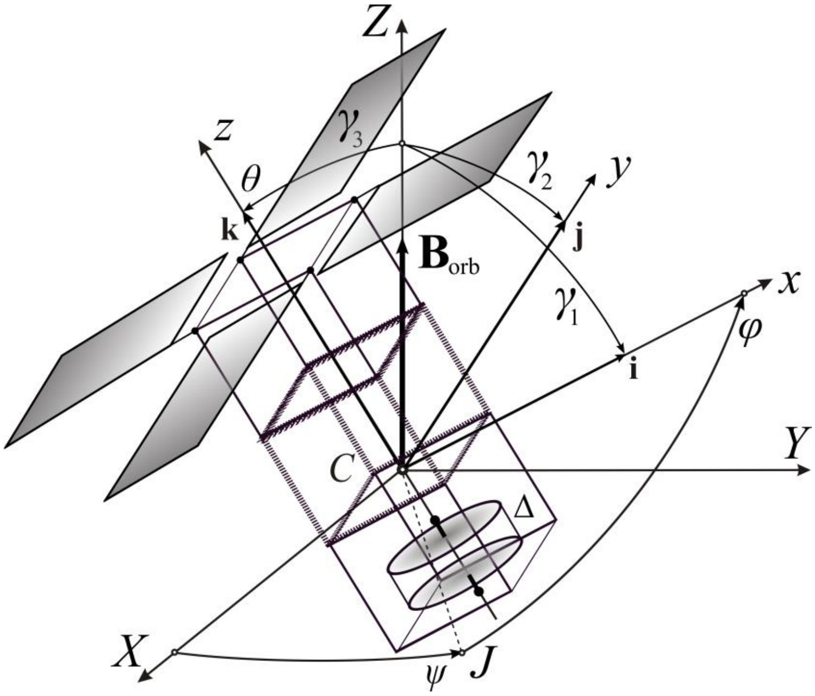


Рис.3.6. *Спутник-гиростат и системы координат*

В связанной системе координат $Cxyz$ будет иметь место следующее покомпонентное представление векторов внешней магнитной индукции и собственного дипольного момента:

$$\mathbf{B}_{orb} = B_{orb}\left[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\right]^T; \quad \mathbf{m} = k\left[p, q, r\right]^T \tag{3.87}$$

С учетом (3.3) и (3.4) динамические и кинематические уравнения движения примут вид:

$$\begin{cases} A\dot{p} + \left(C_b - A\right)qr + q\Delta = kB_{orb}\left(q\gamma_3 - r\gamma_2\right) \\ A\dot{q} + \left(A - C_b\right)pr - p\Delta = kB_{orb}\left(r\gamma_1 - p\gamma_3\right) \\ C_b\dot{r} + \dot{\Delta} = kB_{orb}\left(p\gamma_2 - q\gamma_1\right) \\ \dot{\Delta} = M_\Delta \end{cases} \tag{3.88}$$

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3 \\ \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1 \\ \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2 \end{cases} \tag{3.89}$$

где $A = A_b + A_r$, $C = C_b + C_r$; $\{A_b, A_b, C_b\}$ есть осевые моменты инерции главного динамически симметричного тела; $\{A_r, A_r, C_r\}$ - осевые моменты инерции динамически симметричного ротора; M_Δ – момент внутреннего взаимодействия соосных тел. Связь между направляющими косинусами и углами Эйлера выражается классическим образом (θ – угол нутации, φ – угол собственного вращения, и ψ – угол прецессии, который не входит в кинематические связи):

$$\begin{cases} \gamma_1 = \sin\theta \sin\varphi \\ \gamma_2 = \sin\theta \cos\varphi \\ \gamma_3 = \cos\theta \end{cases} \tag{3.90}$$

В нашем изучаемом случае внутреннее взаимодействие соосных тел гиростата отсутствует (M_Δ=0) и, следовательно, далее имеет место постоянство кинетического момента тела-ротора Δ=const.

Первые интегралы движения.

В рассматриваемом случае будут иметь место следующие *четыре первых интеграла*. Первый интеграл представляет собой тривиальный геометрический интеграл, соответствующий сохранению направления инерциальной оси CZ:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \tag{3.91}$$

Второй интеграл соответствует сохранению «вертикальной» компоненты (вдоль направления CZ) кинетического момента вследствие отсутствия внешних моментов сил вдоль этого направления (3.3):

$$Ap\gamma_1 + Aq\gamma_2 + \left(C_b r + \Delta\right)\gamma_3 = K_Z = \text{const} \tag{3.92}$$

Третий интеграл может быть получен путем алгебраических комбинаций исходных динамических уравнений. Умножая первое уравнение (3.5) на p, второе – на q, третье – на r, и складывая результаты, после интегрирования получим:

$$A\left(p^2 + q^2\right) + C_b r^2 = h = \text{const} \tag{3.93}$$

Последний необходимый первый интеграл следует из подстановки в третье уравнение (3.5) последнего уравнения (3.6):

$$\frac{d}{dt}\left(C_b r + \Delta\right) = kB_{orb}\left(-\dot{\gamma}_3\right) \tag{3.94}$$

что после интегрирования примет вид

$$C_b r + \Delta = -kB_{orb}\gamma_3 + D \tag{3.95}$$

где D постоянная, определяемая начальными условиями движения. В перезаписи последний четвертый интеграл можно представить следующим образом:

$$C_b r^2 = \frac{1}{C_b}\left[D - kB_{orb}\gamma_3 - \Delta\right]^2 \tag{3.96}$$

Важно отметить, что в рамках задачи также выполняется важное соотношение [21], проверяемое прямыми подстановками на основе выражения (3.91):

$$\left(p\gamma_1 + q\gamma_2\right)^2 + \left(q\gamma_1 - p\gamma_2\right)^2 = \left(p^2 + q^2\right)\left(\gamma_1^2 + \gamma_2^2\right) = \left(p^2 + q^2\right)\left(1 - \gamma_3^2\right) \tag{3.97}$$

Таким образом, записаны четыре первых интеграла (3.91)-(3.97), позволяющие в соответствии с теорией последнего множителя Якоби получить аналитические решения для динамических параметров движения гиростата в омега-режиме.

Нахождение явных квадратур.

С помощью последнего кинематического соотношения (3.6) и первых интегралов (3.91)-(3.96) мы можем переписать выражение (3.97) в форме следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{1}{A^2}\left[K_Z-\left(C_b r+\Delta\right)s\right]^2+\dot{s}^2=\frac{1}{A}\left(h-C_b r^2\right)\left(1-s^2\right) \tag{3.98}$$

где введено обозначение $s\overset{df}{=}\gamma_3$.

С учетом (3.96) и (3.95) уравнение (3.98) примет форму:

$$\pm\dot{s}=\sqrt{\frac{1}{A}\left(h-\frac{1}{C_b}\left[D-kB_{orb}s-\Delta\right]^2\right)\left(1-s^2\right)-\frac{1}{A^2}\left[K_Z-\left(D-kB_{orb}s\right)s\right]^2}=\sqrt{\mathrm{poly}_4(s)} \tag{3.99}$$

где $\mathrm{poly}_4(s)$ является полиномом 4-й степени, что относит интеграл, следующий из последнего уравнения, к классу эллиптических интегралов [138, 228]:

$$\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\sqrt{\mathrm{poly}_4(s)}}=\pm\int_0^t dt=\pm t \tag{3.100}$$

Для записи решения для переменной s в форме функций Якоби мы должны обратить эллиптический интеграл (3.100). Для этого выполним следующую замену переменных:

$$s=\frac{\alpha+\beta w}{1+w} \tag{3.101}$$

где постоянные α и β (их конкретные числовые значения) выбираются из условия требования равенства нулю коэффициентов при нечетных степенях новой переменной w, т.е., когда $\{p_3, p_1\}\to 0$ в следующем перезаписанном полиноме (в числителе выражения):

$$\mathrm{poly}_4\left(s\left(w\right)\right)=\frac{p_4w^4+p_3w^3+p_2w^2+p_1w+p_0}{A^2C_b\left(1+w\right)^4}=\frac{p_4w^4+p_2w^2+p_0}{A^2C_b\left(1+w\right)^4} \tag{3.102}$$

Таким образом, величины постоянных α и β следуют из решения системы алгебраических уравнений:

$$\left\{p_1\left(\alpha,\beta\right)=0;\quad p_3\left(\alpha,\beta\right)=0\right\}\to\left\{\alpha,\beta\right\} \tag{3.103}$$

Полином (3.102) можно переписать в факторизованной форме с учетом знака его коэффициента p_4 и корней $\{X_1, X_2\}$ вспомогательного квадратного полинома

$p_4X^2 + p_2X + p_0$ (эти корни можно обозначить как $X_1 = \pm a^2$; $X_2 = \pm b^2$). С учетом сказанного, имеет место пять случаев факторизации:

$$\left[\begin{array}{l} 1)\ p_4 < 0;\ X_1 = a^2 > 0;\ X_2 = b^2 > 0: \quad \mathrm{poly}_4\left(s\left(w\right)\right) = \dfrac{|p_4|\left(a^2 - w^2\right)\left(w^2 - b^2\right)}{A^2 C_b \left(1+w\right)^4}; \\ 2)\ p_4 < 0;\ X_1 = -a^2 < 0;\ X_2 = b^2 > 0: \quad \mathrm{poly}_4\left(s\left(w\right)\right) = \dfrac{|p_4|\left(w^2 + a^2\right)\left(b^2 - w^2\right)}{A^2 C_b \left(1+w\right)^4}; \\ 3)\ p_4 > 0;\ X_1 = a^2 > 0;\ X_2 = b^2 > 0: \quad \mathrm{poly}_4\left(s\left(w\right)\right) = \dfrac{|p_4|\left(w^2 - a^2\right)\left(w^2 - b^2\right)}{A^2 C_b \left(1+w\right)^4}; \\ 4)\ p_4 > 0;\ X_1 = -a^2 < 0;\ X_2 = b^2 > 0: \quad \mathrm{poly}_4\left(s\left(w\right)\right) = \dfrac{|p_4|\left(w^2 + a^2\right)\left(w^2 - b^2\right)}{A^2 C_b \left(1+w\right)^4}; \\ 5)\ p_4 > 0;\ X_1 = -a^2 < 0;\ X_2 = -b^2 < 0: \quad \mathrm{poly}_4\left(s\left(w\right)\right) = \dfrac{|p_4|\left(w^2 + a^2\right)\left(w^2 + b^2\right)}{A^2 C_b \left(1+w\right)^4} \end{array}\right. \qquad (3.104)$$

Формы факторизованных полиномов (3.104) определяют пути обращения эллиптического интеграла (3.100) после перехода к переменной *w*:

$$\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{\mathrm{poly}_4(s)}} = \int_{w_0}^{w} \frac{\left(\beta - \alpha\right) dw}{\left(1+w\right)^2 \sqrt{\mathrm{poly}_4\left(s\left(w\right)\right)}} = \pm t \qquad (3.105)$$

Обращение интеграла (3.105) в первом случае (3.104)-1) может быть выполнено в форме:

$$\int_{w_0}^{w} \frac{\left(\beta - \alpha\right) dw}{\left(1+w\right)^2 \sqrt{\mathrm{poly}_4\left(s\left(w\right)\right)}} = -\left[\int_{w}^{a} + \int_{a}^{w_0}\right] \left(\frac{\beta - \alpha}{\left(1+w\right)^2 \sqrt{\dfrac{|p_4|\left(a^2 - w^2\right)\left(w^2 - b^2\right)}{A^2 C_b \left(1+w\right)^4}}} \right) dw = \pm t$$

или

$$\int_{w}^{a} \frac{a\,dw}{\sqrt{\left(a^2 - w^2\right)\left(w^2 - b^2\right)}} = \frac{\mp a\sqrt{|p_4|}}{\left(\beta - \alpha\right)\sqrt{A^2 C_b}} t - J_0; \quad J_0 = \int_{a}^{w_0} \frac{a\,dw}{\sqrt{\left(a^2 - w^2\right)\left(w^2 - b^2\right)}} = \mathrm{const} \qquad (3.106)$$

В виде (3.106) эллиптический интеграл обращается [138] с использованием эллиптической функции $\mathrm{dn}(x|m)$:

$$w = a\,\mathrm{dn}\left(x\,|\,m\right); \quad x = \frac{\mp a\sqrt{|p_4|}}{\left(\beta - \alpha\right)\sqrt{A^2 C_b}} t - J_0; \quad m = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}; \quad \left(\textit{или} \quad \tilde{m} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) \qquad (3.107)$$

Возвращаясь к естественной переменной γ_3, мы можем окончательно записать аналитическое решение для угла нутации:

$$\cos\theta = s = \gamma_3(t) = \frac{\alpha + \beta a \,\mathrm{dn}\left(x(t)\,|\,m\right)}{1 + a\,\mathrm{dn}\left(x(t)\,|\,m\right)} \tag{3.108}$$

Для верификации аналитического решения (3.108) можно представить сравнительные результаты численного интегрирования (линии) исходных дифференциальных уравнений (3.5) и (3.6) с прямыми вычислениями (точки) по формуле (3.108), что приведено на рисунке (рис. 3.7). Также на рис. 3.7 и 3.8 приведены графики для других динамических параметров. Для моделирования были выбраны следующие гипотетические значения для параметров системы и начальных условий: A_b=12, B_b=12, C_b=6, A_r=10, C_r=6 [kg·m^2]; p_0=0.4, q_0=0.0, r_0=0.1 [rad/s]; Δ=1 [kg·m^2/s]; γ_{10}=0.6, γ_{20}=0.6, γ_{30}=0.5292; kB_{orb}=-8 [N·m·s]; K_Z=6.1266, D=-2.6332 [kg·m^2/s]; h=3.58 [kg·m^2/s^2].

При этих значениях уравнения (3.103) имеют следующий конкретный вид:

$$\begin{cases} p_1 = \left(4096.00\alpha^3 - 3078.2992\alpha^2 - 2087.2031\alpha + 1085.2949\right)\beta - \\ \qquad -1026.0997\alpha^3 - 2087.2031\alpha^2 + 3255.8848\alpha - 172.2312 = 0; \\ p_3 = \left(4096.00\beta^3 - 3078.2992\beta^2 - 2087.2031\beta + 1085.2949\right)\alpha - \\ \qquad -1026.0997\beta^3 - 2087.2031\beta^2 + 3255.8848\beta - 172.2312 = 0; \end{cases}$$

и имеют решения α=-0.3011, β=0.9933 (одно из возможных), при этом коэффициенты полинома (3.102) приобретают следующие значения: p_4=-3.4805; p_2=3306.8803; p_0=-428.0900, с соответствующими корнями: X_1=0.1295; X_2=949.9867.

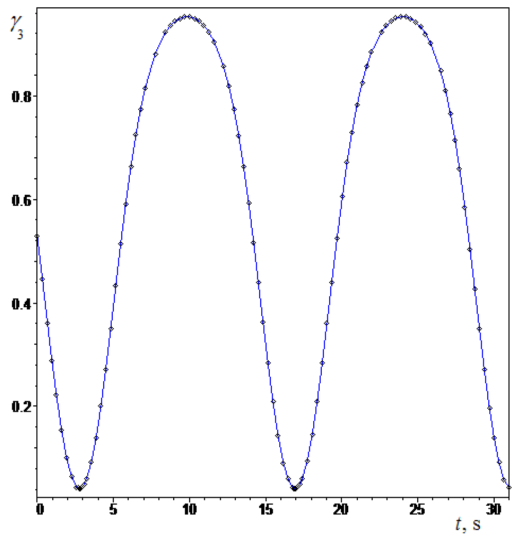


Рис.3.7. *Сравнительные результаты численного моделирования для* $\gamma_3(t)$: *линии – численное интегрирование; точки – аналитическое решение* (3.108)

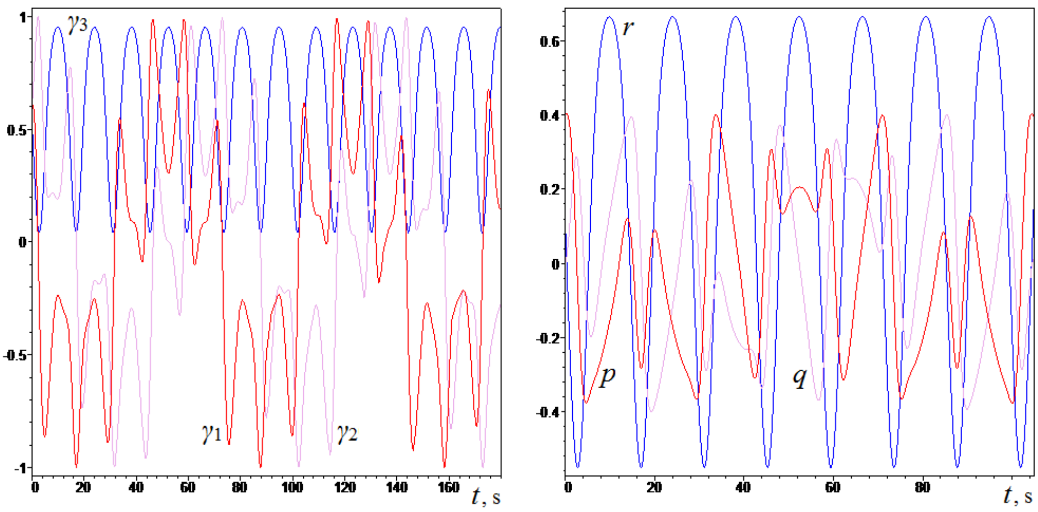


Рис.3.8. *Результаты численного моделирования*

Для других случаев факторизации (3.104)-2) – (3.104)-5) по аналогии следуют соответствующие аналитические решения:

$$\left[\begin{array}{l} 2)\ w = b\,\mathrm{cn}(x\,|\,m);\ x = \dfrac{\mp\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{|p_4|}}{(\beta-\alpha)\sqrt{A^2C_b}}t - J_0;\ m = \sqrt{\dfrac{b^2}{a^2+b^2}};\ J_0 = \displaystyle\int_b^{w_0} \dfrac{a\,dw}{\sqrt{(w^2+a^2)(b^2-w^2)}}; \\ 3)\ w = b\,\mathrm{sn}(x\,|\,m);\ x = \dfrac{\pm a\sqrt{|p_4|}}{(\beta-\alpha)\sqrt{A^2C_b}}t - J_0;\ m = \sqrt{\dfrac{b^2}{a^2}};\ J_0 = \displaystyle\int_{w_0}^{0} \dfrac{a\,dw}{\sqrt{(w^2-a^2)(w^2-b^2)}}; \\ 4)\ w = b\,\mathrm{nc}(x\,|\,m);\ x = \dfrac{\pm\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{|p_4|}}{(\beta-\alpha)\sqrt{A^2C_b}}t - J_0;\ m = \sqrt{\dfrac{a^2}{a^2+b^2}};\ J_0 = \displaystyle\int_{w_0}^{b} \dfrac{a\,dw}{\sqrt{(w^2+a^2)(w^2-b^2)}}; \\ 5)\ w = b\,\mathrm{sc}(x\,|\,m);\ x = \dfrac{\pm a\sqrt{|p_4|}}{(\beta-\alpha)\sqrt{A^2C_b}}t - J_0;\ m = \sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}};\ J_0 = \displaystyle\int_{w_0}^{0} \dfrac{a\,dw}{\sqrt{(w^2+a^2)(w^2+b^2)}}; \end{array}\right. \tag{3.109}$$

где использованы следующие классические функции Якоби: cn(·) – эллиптический косинус, sn(·) – эллиптический синус, nc(·)=1/cn(·), sc(·)=sn(·)/cn(·).

Из выражения (3.95) можно теперь получить решение для компоненты угловой скорости *r*(*t*) на базе имеющегося решения для $\gamma_3(t)$:

$$r(t) = \left[-kB_{orb}\gamma_3(t) + D - \Delta\right] / C_b \tag{3.110}$$

Для получения решений для оставшихся компонент угловой скорости выполним замену переменных:

$$p = G\cos F;\quad q = G\sin F \tag{3.111}$$

Тогда из интеграла энергии (3.93) последует величина амплитуды экваториальной угловой скорости:

$$G(t) = p^2 + q^2 = \left[h - C_b r^2(t)\right] / A \tag{3.112}$$

Для дальнейшей записи решений воспользуемся следующим очевидным соотношением:

$$p\dot{q}-q\dot{p}=\left(p^2+q^2\right)\dot{F} \tag{3.113}$$

Из первого и второго уравнения (3.5) следует выражение:

$$A\left(p\dot{q}-q\dot{p}\right)=\left[\Delta-\left(A-C_b\right)r-kB_{orb}\gamma_3\right]\left(p^2+q^2\right)+kB_{orb}r\left(p\gamma_1+q\gamma_2\right) \tag{3.114}$$

Тогда из интеграла (3.92) можно записать:

$$p\gamma_1+q\gamma_2=\left[K_Z-\left(C_b r+\Delta\right)\gamma_3\right]\big/A \tag{3.115}$$

Принимая во внимание выражения (3.113)-(3.115), можно скомпоновать дифференциальное уравнение для фазы экваториальной угловой скорости:

$$\dot{F}=\frac{1}{A}\left[\Delta-\left(A-C_b\right)r(t)-kB_{orb}\gamma_3(t)\right]+\frac{kB_{orb}r(t)\left[K_Z-\left(C_b r+\Delta\right)\gamma_3(t)\right]}{A\left[h-C_b r^2(t)\right]} \tag{3.116}$$

и интегрируя последнее уравнение (3.116) запишется следующая формальная квадратура:

$$F(t)=\int\left(\frac{1}{A}\left[\Delta-\left(A-C_b\right)r(t)-kB_{orb}\gamma_3(t)\right]+\frac{kB_{orb}r(t)\left[K_Z-\left(C_b r(t)+\Delta\right)\gamma_3(t)\right]}{A\left[h-C_b r^2(t)\right]}\right)dt+\text{const} \tag{3.117}$$

Следует отметить, что при взятии интеграла (3.117) будут интегрироваться эллиптические функции, относя тем самым результат к классу тетта-функций Якоби-Розенхайна [138] (мы не будем останавливаться на этом интегрировании).

Выражения (3.117) и (3.112) полностью определяют аналитические решения для компонент угловой скорости гиростата $p(t)$ и $q(t)$.

Аналитическое решение $\gamma_3(t)$ (например, на базе (3.108)) после своего дифференцирования по времени позволяет рассматривать последнее уравнение (3.6) как алгебраическое уравнение. Добавляя к нему выражение (3.115), мы можем получить замкнутую систему алгебраических уравнений для неизвестных $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$:

$$\begin{cases} q(t)\gamma_1-p(t)\gamma_2=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\alpha+\beta a\,\mathrm{dn}\left(x(t)\,|\,m\right)}{1+a\,\mathrm{dn}\left(x(t)\,|\,m\right)}\right); \\ p(t)\gamma_1+q(t)\gamma_2=\left[K_Z-\left(C_b r(t)+\Delta\right)\gamma_3(t)\right]\big/A; \end{cases}$$

что позволяет записать итоговые решения для направляющих косинусов $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{1}{q(t)} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\alpha + \beta a \operatorname{dn}\left(x(t) \mid m\right)}{1 + a \operatorname{dn}\left(x(t) \mid m\right)} \right) + \dfrac{p(t)}{q(t)} \gamma_2; \\ \gamma_2 = \left[\left[K_Z - \left(C_b r(t) + \Delta \right) \gamma_3(t) \right] \big/ A - \dfrac{p(t)}{q(t)} \dfrac{d}{dt} \left(\dfrac{\alpha + \beta a \operatorname{dn}\left(x(t) \mid m\right)}{1 + a \operatorname{dn}\left(x(t) \mid m\right)} \right) \right] \Bigg/ \left[\dfrac{p^2(t)}{q(t)} + q(t) \right]. \end{cases} \tag{3.118}$$

Таким образом, получены аналитические решения для всех динамических параметров движения спутника-гиростата в ω-режиме. Полученные решения могут быть использованы не только для анализа, но и для синтеза динамики движения намагниченных гиростатов, а также на их основе в пятой главе будет разработан метод пространственной переориентации спутника-гиростата из любого стартового положения в положение, соответствующее реализации цилиндрической прецессии, когда продольная ост совмещена с направлением вектора его кинетического момента.

3.4. Общее решение для движения осевого гиростата в случае конической прецессии в слабом центральном поле тяготения

В настоящем параграфе приводятся решения [201] для движения осевого спутника-гиростата в центральном поле сил тяготения в частном случае расположения начального вектора кинетического момента вдоль вектора градиента центрального поля (т.е. локальной вертикали) при условии относительной малости возникающего момента от сил центрального тяготения. Подобные динамические условия реализуются в рамках режимов «конических прецессий» [35] спутников вокруг локальной вертикали.

Динамика движения спутников-гиростатов в центральном поле сил гравитации рассматривалась ранее в разных постановках. Классические и новые результаты и решения представлены, например, в [32, 33, 183, 319, 167, 169, 120, 122]. Важные случаи анализа режимов динамики, а также синтез условий устойчивости можно найти в [35, 151, 179, 135, 47, 6, 245, 246, 325, 234, 49, 103, 328, 39, 224, 107, 280, 281, 186].

Отдельно следует подчеркнуть работы [112, 113, 120, 167, 319], в которых обнаружена и изучена динамическая аналогия движения твердого тела в жидкости и в центральном гравитационном поле. Эта аналогия была найдена В.А. Стекловым [319] и в последствии обобщена на случай гиростата П.В. Харламовым [120]. Указанная динамическая аналогия позволяет использовать решения [167] для описания движения твердых тел в центральном поле тяготения, что и представлено, например, в [21, 120].

С прикладной точки зрения изучаемый случай динамики спутника-гиростата в центральном поле тяготения является актуальным по причине описания важных прецессий [35] спутников, стабилизируемых гравитационным способом. Гравитационный способ стабилизации с соответствующим возникновением *конических прецессий* является одним из наиболее распространенных способов стабилизации спутников с инерционной геометрией «продольного» типа, для которых характерны «вытянутые» вдоль продольной оси формы конструкций, обеспечивающие наименьший момент инерции вдоль продольной оси. В таком случае спутник совершает прецессионное движение вокруг «локальной вертикали».

3.4.1. Принятые допущения и редукция уравнений движения

Рассмотрим движение спутника-гиростата вокруг центра масс при действии моментов сил от центрального поля тяготения при условии сонаправленности начального кинетического момента с локальной вертикалью (рис.3.9), вдоль которой направим ось *CZ* инерциальной системы координат *CXYZ*, где точка *C* соответствует центру масс системы.

Положение «вертикальной» оси *CZ* по отношению к подвижной системе координат тела-платформы будем описывать с помощью известных направляющих косинусов $\gamma_1 = \cos(CZ, Cx)$, $\gamma_2 = \cos(CZ, Cy)$, $\gamma_3 = \cos(CZ, Cz)$, а кинематическая система уравнений будет соответствовать уравнениям Пуассона:

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3 \\ \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1 \\ \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2 \end{cases} \tag{3.119}$$

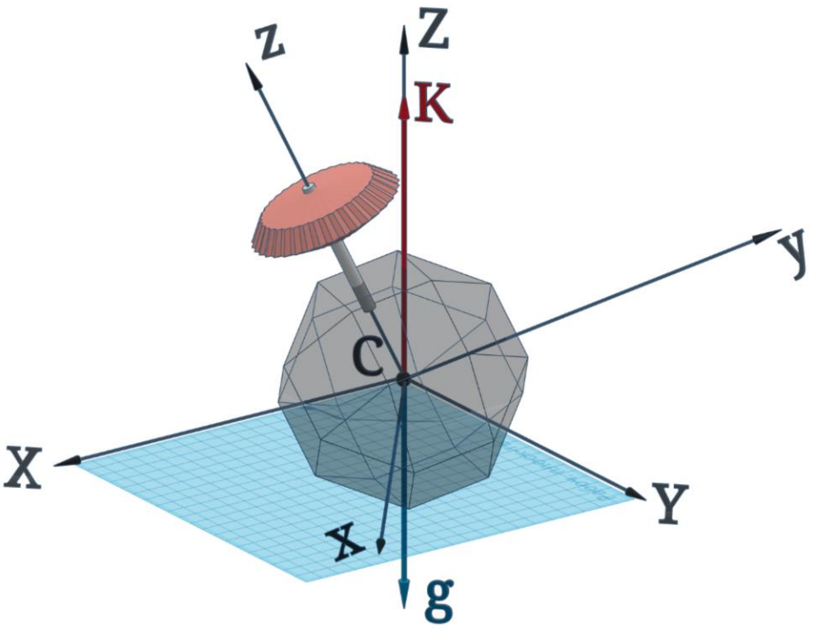


Рис.3.9. *Спутник-гиростат и системы координат в случае сонаправленности локальной вертикали (***g***- вектор градиента центрального поля тяготения) и начального вектора кинетического момента* (**K**)

Уравнения движения спутника-гиростата в проекциях на связанные оси тела-платформы *Cxyz* в векторном виде запишутся:

$$\frac{\tilde{d}}{dt}\mathbf{K} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{M}_g; \quad \dot{\Delta} = M_\Delta \tag{3.120}$$

где $\mathbf{M}_g$ – внешний момент сил от центрального поля тяготения, M_Δ – внутренний момент сил. Кинетический момент имеет компоненты:

$$\mathbf{K} = \left[Ap,\ Bq,\ C_b r + \Delta\right]^T \tag{3.121}$$

где $A = A_b + A_r$, $B = B_b + A_r$, $C = C_b + C_r$; A_b, B_b, C_b - главные моменты инерции основного тела, A_r, A_r, C_r - моменты инерции динамически симметричного ротора, причем будем считать, что выполняются следующие ограничения $A > B > C$, характерные для «продольного» (по оси *z*) типа конструкции спутника-гиростата.

Момент сил от центрального тяготения можно вычислить как сумму от соответствующих его частей, действующих на два соосных тела:

$$\mathbf{M}_g = \mathbf{M}_C^b + \mathbf{M}_C^r \tag{3.122}$$

где [21]:

$$\mathbf{M}_C^b = \mu_g \begin{bmatrix} (C_b - B_b)\gamma_2\gamma_3 \\ (A_b - C_b)\gamma_3\gamma_1 \\ (B_b - A_b)\gamma_1\gamma_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}_C^r = \mu_g \begin{bmatrix} (C_r - A_r)\gamma_2\gamma_3 \\ (A_r - C_r)\gamma_3\gamma_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.123}$$

μ_g – гравитационный параметр $\left(\mu_g = 3g_{orb}/R_{orb}\right)$. Суммарный момент сил от центрального тяготения запишется в форме:

$$\mathbf{M}_g = \mu_g \begin{bmatrix} (C - B)\gamma_2\gamma_3 \\ (A - C)\gamma_3\gamma_1 \\ (B - A)\gamma_1\gamma_2 \end{bmatrix}; \tag{3.124}$$

Динамические уравнения перепишутся:

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C_b - B)qr + q\Delta = \mu_g (C - B)\gamma_2\gamma_3 \\ B\dot{q} + (A - C_b)pr - p\Delta = \mu_g (A - C)\gamma_3\gamma_1 \\ C_b\dot{r} + \dot{\Delta} + (B - A)pq = \mu_g (B - A)\gamma_1\gamma_2 \\ \dot{\Delta} = M_\Delta \end{cases} \tag{3.125}$$

Будем рассматривать случай, когда характерны нижеследующие ограничения на величину гравитационного момента и направление вектора кинетического момента. Запишем главное динамическое уравнение для безразмерного кинетического момента в инерциальной системе координат, аналогичного (2.56):

$$\frac{d\boldsymbol{\kappa}}{d\tau} = \frac{A}{K^2}\mathbf{M}_g \tag{3.126}$$

где момент сил гравитации может быть представлен в следующем векторном виде с использованием матрицы перехода от связанной системы координат в инерциальную (S_{XYZ}):

$$\mathbf{M}_g = \frac{3g_{orb}}{R_{orb}}\left[S_{XYZ}\right] \begin{bmatrix} (C - B)\gamma_2\gamma_3 \\ (A - C)\gamma_3\gamma_1 \\ (B - A)\gamma_1\gamma_2 \end{bmatrix}, \quad \mu_g = \frac{3g_{orb}}{R_{orb}} \tag{3.127}$$

С учетом того, что величины компонент матрицы перехода и величины направляющих косинусов никогда не превышают единичных значений можно записать следующую оценку для величины момента сил гравитации (считая, что $A>B>C$):

$$\left|\mathbf{M}_g\right| < \mu_g \frac{A}{K^2}\left|A-C\right| < \mu_g \frac{A^2}{K^2} \tag{3.128}$$

Таким образом, можно приближенно считать, что безразмерный нормированный кинетический момент не будет изменять своего модуля и направления, если будет выполняться следующее ограничение на динамические величины:

$$\mu_g \frac{A^2}{K^2} << 1,$$

или, что удобнее для использования, в виде, записанном в форме ограничения на величину гравитационного параметра:

$$\mu_g << \frac{K^2}{A^2} \tag{3.129}$$

Таким образом, при выполнении ограничения (3.129) можно считать, что вектор кинетического момента спутника-гиростата не будет существенно изменять своего начального модуля и направления в инерциальном пространстве (в рассматриваемом случае направление вектора кинетического момента совпадает с вектором градиента центрального поля тяготения и эта сонапрвленность не меняется на коротком интервале орбитального движения).

Выполнение ограничения (3.129) является вполне естественным, так как гравитационный параметр центрального поля Земли соответствует следующим интервалам своих малых значений: величины μ_g=(0.1÷0.2)·10^{-7} [1/s^2] соответствуют геостационарным и высоким орбитам Земли, а для низких орбит и вблизи земной поверхности эта величина также не выходит за пределы своих значений (0.4÷0.5)·10^{-5} [1/s^2]. Для таких диапазонов гравитационного параметра динамическое соотношение K^2/A^2 для спутников-гиростатов представляется в относительном плане вполне большим.

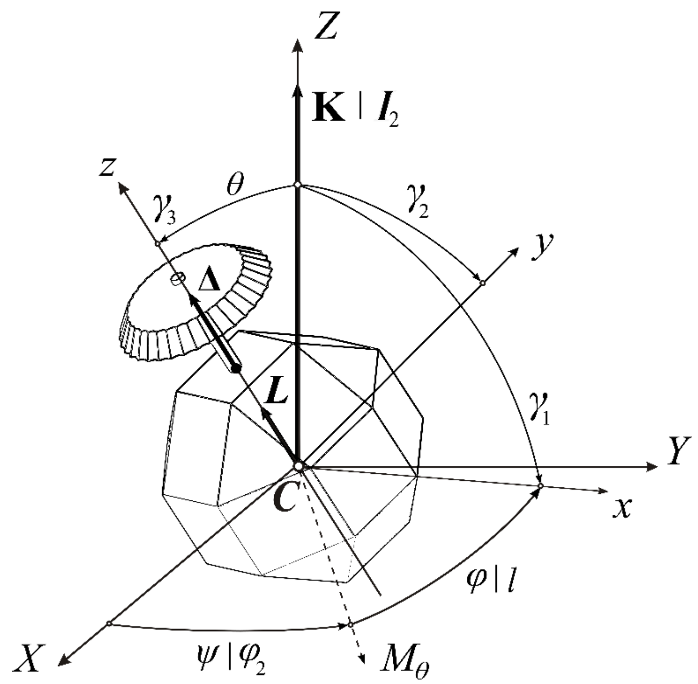


Рис.3.10. *Спутник-гиростат и системы координат*

С учетом ограничения (3.129) и начальной параллельности вектора кинетического момента с вектором градиента центрального поля тяготения $\mathbf{g}_{\mathrm{orb}}$ направляющие косинусы «вертикальной» оси инерциальной системы координат CZ (рис.3.10) можно определить в следующем виде:

$$\gamma_1 = Ap/K; \quad \gamma_2 = Bq/K; \quad \gamma_3 = \left(C_b r + \Delta\right)/K \tag{3.130}$$

Подстановка выражений (3.130) в уравнения (3.125) позволяет записать следующую замкнутую их форму (при M_Δ=0):

$$\begin{cases} A\dot{p} + \left(C_b - B\right)qr + q\Delta = \dfrac{\mu_g}{K^2}\left(C - B\right)Bq\left(C_b r + \Delta\right) \\ B\dot{q} + \left(A - C_b\right)pr - p\Delta = \dfrac{\mu_g}{K^2}\left(A - C\right)Ap\left(C_b r + \Delta\right) \\ C_b\dot{r} + \left(B - A\right)pq = \dfrac{\mu_g}{K^2}\left(B - A\right)ABpq \\ \Delta = \mathrm{const} \end{cases} \tag{3.131}$$

3.4.2. Связь исследуемого случая со случаем Стеклова

Как это известно, решения Ф.Бруна [167] оказались впоследствии решениями и задачи о движении тела в ньютоновском поле сил, причем истолкование решений Бруна дано в работе Е.И. Харламовой [124].

В.А. Стеклов показал [319], что решения Ф.Бруна [167] является частным случаем решения уравнений движения тела в жидкости, которые в обобщенной форме, адаптированной для исследования динамики гиростата, представлены в работе П.В. Харламова (в обозначениях работы [120]):

$$\begin{cases} \left\{ A_1 \dfrac{d\omega_1}{dt} = \left(A_2 - A_3\right)\left(\omega_2\omega_3 - \varepsilon R_2 R_3\right) + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2 + \mu_2 R_3 - \mu_3 R_2 \right\}_{(1,2,3)} \\ \left\{ \dfrac{dR_1}{dt} = \omega_3 R_2 - \omega_2 R_3 \right\}_{(1,2,3)} \end{cases} \tag{3.132}$$

где подписи (1, 2, 3) означают циклическую перестановку всех нижних индексов; параметры λ_i и μ_i определяют циркуляции потоков жидкости; переменные R_i представляют комплексы “импульсивных сил” и циркуляционных параметров. Если в системе (3.125) от абсолютного кинетического момента ротора перейти к относительной скорости его вращения σ, то можно записать:

$$\begin{cases} A\dot{p}+\left(C-B\right)qr+qC_r\sigma=\mu\left(C-B\right)\gamma_2\gamma_3 \\ B\dot{q}+\left(A-C\right)pr-pC_r\sigma=\mu\left(A-C\right)\gamma_3\gamma_1 \\ C\dot{r}+C_r\dot{\sigma}+\left(B-A\right)pq=\mu\left(B-A\right)\gamma_1\gamma_2 \\ C_r\left(\dot{r}+\dot{\sigma}\right)=M_\Delta \end{cases} \qquad (3.133)$$

Переходя к используемым в настоящей работе обозначениям и полагая, что

$$\lambda_1=\lambda_2=0;\ \lambda_3=C_r\sigma;\ \mu_i=0;\ \varepsilon=\mu_g;\ R_i=\gamma_i$$

система (3.132) напрямую редуцируется к (3.133) и (3.6) при условии постоянства относительного кинетического момента ротора $\left(\lambda_3=C_r\sigma=\text{const}\right)$, что может быть выполнено только при действии соответствующего «стабилизирующего» внутреннего момента:

$$M_\Delta=C_r\dot{r} \qquad (3.134)$$

Поэтому при действии стабилизирующего относительное вращение ротора внутренним моментом (3.134) из системы (3.132) следуют уравнения движения гиростата с постоянным относительным кинетическим моментом ротора (гиростата Кельвина) в центральном поле тяготения. Это определяет по своей сути *аналогию* В.А. Стеклова (для твердого тела) в ее гиростатическом обобщении П.В. Харламова:

$$\begin{cases} \begin{cases} A\dot{p}+\left(C-B\right)qr+q\lambda_3=\mu_g\left(C-B\right)\gamma_2\gamma_3 \\ B\dot{q}+\left(A-C\right)pr-p\lambda_3=\mu_g\left(A-C\right)\gamma_3\gamma_1 \\ C\dot{r}+\left(B-A\right)pq=\mu_g\left(B-A\right)\gamma_1\gamma_2 \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{\gamma}_1=r\gamma_2-q\gamma_3 \\ \dot{\gamma}_2=p\gamma_3-r\gamma_1 \\ \dot{\gamma}_3=q\gamma_1-p\gamma_2 \end{cases} \end{cases} \qquad (3.135)$$

Как известно [21], в случае Стеклова уравнения движения твердого тела имеют следующее частное решение:

$$\gamma_1=A'p;\quad \gamma_2=B'q;\quad \gamma_3=C'r \qquad (3.136)$$

где A', B', C' есть определенные константы, при которых динамические уравнения движения редуцируются к динамической системе свободного твердого тела.

В случае Кельвинова гиростата (λ_i=const при действии «стабилизирующего» момента (3.134)) в центральном поле сил тяжести и в соответствии с обобщенной аналогией Стеклова – Харламова аналитические решения найдены П.В. Харламовым [122]. Возвращаясь к случаю исследования нормального гиростата без действия каких-либо внутренних моментов сил $\left(\Delta=\text{const};\ M_\Delta=0\right)$, можно отметить, что решения

П.В. Харламова [122] не являются подходящими. В этой связи необходимо получить другие аналитические решения для уравнений (3.131), что и будет предпринято далее.

Таким образом, учитывая приведенные аспекты аналогии Стеклова – Харламова, и с учетом симметрии вида предположений (3.136) и (3.130), ниже будет получено решение уравнений (3.131), которое можно рассматривать, как частичное обобщение случая Стеклова на случай движения нормального осевого гиростата в центральном поле тяготения.

3.4.3. Нахождение квадратур

Запишем первые интегралы системы. Умножая первое уравнение (3.131) на Ap, второе – на Bq, третье – на $(C_b r+\Delta)$, и суммируя, получим:

$$\frac{d}{dt}\left[A^2p^2+B^2q^2+\left(C_b r+\Delta\right)^2\right]=0$$

что соответствует интегралу сохранения величины кинетического момента:

$$A^2p^2+B^2q^2+\left(C_b r+\Delta\right)^2=\mathrm{const}=K^2 \tag{3.137}$$

Интеграл сохранения полной энергии записывается как сумма кинетической и потенциальной энергии в центральном поле:

$$E=T+P=\frac{1}{2}\left(Ap^2+Bq^2+C_b r^2+\frac{\Delta^2}{C_r}\right)+\frac{\mu_g}{2}\left(A\gamma_1^2+B\gamma_2^2+C\gamma_3^2\right)=h=\mathrm{const} \tag{3.138}$$

Подставляя выражения (3.130) в (3.138), получим следующий интеграл энергии:

$$Ap^2\left(1+\frac{\mu_g A^2}{K^2}\right)+Bq^2\left(1+\frac{\mu_g B^2}{K^2}\right)+C_b r^2+\frac{\Delta^2}{C_r}+\frac{\mu_g C\left(C_b r+\Delta\right)^2}{K^2}=2h \tag{3.139}$$

Первые интегралы (3.137) и (3.139) позволяют редуцировать размерность дифференциальной системы и провести интегрирование. Так, умножая (3.139) на $A\big/\left[1+\mu_g A^2\big/K^2\right]$, и вычитая (3.137), получим:

$$\begin{gathered}\left(AB\frac{K^2+\mu_g B^2}{K^2+\mu_g A^2}-B^2\right)q^2+\frac{AK^2}{K^2+\mu_g A^2}\left[C_b r^2+\frac{\Delta^2}{C_r}+\frac{\mu_g C\left(C_b r+\Delta\right)^2}{K^2}\right]- \\ -\left(C_b r+\Delta\right)^2=\frac{2hAK^2}{K^2+\mu_g A^2}-K^2\end{gathered} \tag{3.140}$$

аналогично, умножая (3.139) на $B\Big/\left[1+\mu_g B^2\big/K^2\right]$, и вычитая (3.137), получим:

$$\left(AB\frac{K^2+\mu A^2}{K^2+\mu B^2}-A^2\right)p^2+\frac{BK^2}{K^2+\mu B^2}\left[C_b r^2+\frac{\Delta^2}{C_r}+\frac{\mu C\left(C_b r+\Delta\right)^2}{K^2}\right]- \\ -\left(C_b r+\Delta\right)^2=\frac{2hBK^2}{K^2+\mu B^2}-K^2 \tag{3.141}$$

Выделение полных квадратов в выражениях (3.140) и (3.141) позволяет записать:

$$B\left(A\frac{K^2+\mu_g B^2}{K^2+\mu_g A^2}-B\right)q^2+a_\alpha\left\{D-\frac{\alpha\Delta}{a_\alpha C_b}\right\}^2=H \tag{3.142}$$

$$-A\left(A-B\frac{K^2+\mu_g A^2}{K^2+\mu_g B^2}\right)p^2+b_\beta\left\{D-\frac{\beta\Delta}{b_\beta C_b}\right\}^2=G \tag{3.143}$$

где введено обозначение

$$D=C_b r+\Delta$$

и используются следующие коэффициенты:

$$\begin{cases} \alpha=\dfrac{AK^2}{K^2+\mu_g A^2};\ \ a_\alpha=\dfrac{\alpha}{C_b}+\mu_g\dfrac{\alpha C}{K^2}-1;\ \ \beta=\dfrac{BK^2}{K^2+\mu_g B^2};\ \ b_\beta=\dfrac{\beta}{C_b}+\mu_g\dfrac{\beta C}{K^2}-1; \\ c_\alpha=\Delta^2\left(\dfrac{\alpha^2}{a_\alpha C_b^2}-\dfrac{\alpha}{C_b}-\dfrac{\alpha}{C_r}\right);\quad H=c_\alpha+\dfrac{2hAK^2}{K^2+\mu_g A^2}-K^2; \\ d_\beta=\Delta^2\left(\dfrac{\beta^2}{b_\beta C_b^2}-\dfrac{\beta}{C_b}-\dfrac{\beta}{C_r}\right);\quad G=d_\beta+\dfrac{2hBK^2}{K^2+\mu_g B^2}-K^2 \end{cases} \tag{3.144}$$

Из (3.142) следует выражение:

$$D-\frac{\alpha\Delta}{a_\alpha C_b}=\pm V\left(q\right);\quad V\left(q\right)=\sqrt{\frac{1}{a_\alpha}\left(H-B\left(A\frac{K^2+\mu_g B^2}{K^2+\mu_g A^2}-B\right)q^2\right)} \tag{3.145}$$

Выражение в квадратных скоках в (3.143) можно переписать в виде:

$$D-\frac{\beta\Delta}{b_\beta C_b}=\left\{D-\frac{\alpha\Delta}{a_\alpha C_b}\right\}-\frac{\Delta}{C_b}\left[\frac{\beta}{b_\beta}-\frac{\alpha}{a_\alpha}\right]$$

и, следовательно, будет корректным выражение:

$$D-\frac{\beta\Delta}{b_\beta C_b}=\pm V(q)-\frac{\Delta}{C_b}\left[\frac{\beta}{b_\beta}-\frac{\alpha}{a_\alpha}\right] \tag{3.146}$$

Тогда из (3.143) следует:

$$p=\pm W(q);\qquad W(q)=\sqrt{\frac{b_\beta\left\{\pm V(q)-\frac{\Delta}{C_b}\left[\frac{\beta}{b_\beta}-\frac{\alpha}{a_\alpha}\right]\right\}^2-G}{A\left(A-B\frac{K^2+\mu_g A^2}{K^2+\mu_g B^2}\right)}} \tag{3.147}$$

Второе уравнение (3.131) может быть приведено к форме:

$$B\dot{q}+p\left\{\frac{A}{C_b}-1-\frac{\mu_g}{K^2}(A-C)A\right\}\left(D-\frac{\alpha\Delta}{a_\alpha C_b}\right)=0$$

и после использования (3.147) и (3.145) примет вид:

$$B\dot{q}=\pm f\cdot W(q)V(q);\qquad f=\left\{\frac{A}{C_b}-1-\frac{\mu_g}{K^2}(A-C)A\right\} \tag{3.148}$$

Для интегрирования (3.148) выполним замену переменных:

$$x=\pm V(q)-\frac{\Delta}{C_b}\left[\frac{\beta}{b_\beta}-\frac{\alpha}{a_\alpha}\right] \tag{3.149}$$

после которой уравнение (3.148) запишется в разделенных дифференциалах в канонической форме для эллиптического интеграла:

$$dt=\pm\frac{M}{\sqrt{ac}}\frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{H}{a}}\right)^2-(x+b)^2}\sqrt{x^2-\left(\sqrt{\frac{G}{c}}\right)^2}} \tag{3.150}$$

где используются следующие константы и начальные условия:

$$M=\frac{a_\alpha B}{f}\sqrt{\frac{A\left(A-B\dfrac{K^2+\mu_g A^2}{K^2+\mu_g B^2}\right)}{B\left(A\dfrac{K^2+\mu_g B^2}{K^2+\mu_g A^2}-B\right)}};\quad a=a_\alpha;\; b=\frac{\Delta}{C_b}\left[\frac{\beta}{b_\beta}-\frac{\alpha}{a_\alpha}\right];\; c=b_\beta \tag{3.151}$$

$$x(t_0)=x_{ini}=\pm V(q_0)-\frac{\Delta}{C_b}\left[\frac{\beta}{b_\beta}-\frac{\alpha}{a_\alpha}\right] \tag{3.152}$$

Вторая замена переменной позволяет записать (3.30) в форме

$$dt=\pm 2eM\,\frac{\sqrt{R/P}}{\sqrt{aG}}\left[\sqrt{s_2 s_4}\sqrt{\left(1-\frac{z^2}{c_1^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{c_2^2}\right)}\right]^{-1}dz;\qquad z=\sqrt{\frac{R(x-e)}{P(x+e)}}; \tag{3.153}$$

где

$$R=-b-d+e;\; P=-b-d-e;\; d=\sqrt{H/a};\; e=\sqrt{G/c};\; c_1^2=s_2/s_1;\; c_2^2=s_4/s_3;$$

$$s_1=d+e-b;\; s_2=\frac{R}{P}[d-e-b];\; s_3=d-e+b;\; s_4=\frac{R}{P}[d+e+b];$$

После третьей замены переменных $\left(z=\tilde{c}y;\; \tilde{c}=\min\{c_1,c_2\};\; \underset{\sim}{c}=\max\{c_1,c_2\};\; k=\tilde{c}/\underset{\sim}{c}\right)$ уравнение (3.33) интегрируется в форме эллиптической квадратуры:

$$\pm\left[N(t-t_0)+I_0\right]=\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}; \tag{3.154}$$

где

$$N=\left[2eM\,\frac{\tilde{c}\sqrt{R/P}}{\sqrt{aG}\sqrt{s_2 s_4}}\right]^{-1};\quad I_0=\int_0^{y_0}\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}=\mathrm{const}$$

Обращение эллиптического интеграла дает следующее аналитическое решение:

$$y(t)=\mathrm{sn}\left[\pm\left(N(t-t_0)+I_0\right),k\right] \tag{3.155}$$

После обратных замен и преобразований получим остальные решения:

$$\begin{cases} p(t)=\pm\sqrt{\dfrac{cx^2-G}{A\left(A-B\dfrac{K^2+\mu_g A^2}{K^2+\mu_g B^2}\right)}};\qquad q(t)=\pm\sqrt{\dfrac{H-a\left(x(t)+b\right)^2}{B\left(A\dfrac{K^2+\mu_g B^2}{K^2+\mu_g A^2}-B\right)}}; \\ r(t)=\dfrac{1}{C_b}\left[x(t)+\dfrac{\beta\Delta}{b_\beta C_b}-\Delta\right];\quad x(t)=e\dfrac{R/P+\tilde{c}^2\,\mathrm{sn}^2\left[\pm\left(N(t-t_0)+I_0\right),k\right]}{R/P-\tilde{c}^2\,\mathrm{sn}^2\left[\pm\left(N(t-t_0)+I_0\right),k\right]} \end{cases} \tag{3.156}$$

Решения (3.156) полностью описывают динамику спутника-гиростата в режимах конической прецессии в центральном поле тяготения при ограничении (3.129).

Для верификации аналитических решений и валидации редуцированной системы уравнений (3.131) (или, что то же самое, для валидации ограничений (3.129)) можно привести сравнительные результаты аналитического и численного моделирования (рис. 3.11). На рис. 3.11 представлены параметры движения, вычисленные по аналитическим решениям (3.156), корректность которых ограничивается выполнением ограничений (3.129), а также с помощью интегрирования полных уравнений (3.125), (3.6). Для вычислений брались значения параметров из табл. 3.3, при этом моменты инерции были равны: A_b=15, B_b=10, C_b=7, A_r=5, C_r=4 [кг·м^2]. Промоделированная динамика (рис. 3.11) соответствует движению малых спутников-гиростатов в центральных полях тяготения с гравитационными параметрами существенно превышающими естественные значения (отметим, что для Земли величины μ_g=(0.1÷0.2)·10^{-7} [1/s^2] соответствуют геостационарным и высоким орбитам, а для низких орбит и вблизи земной поверхности эта величина не выходит за пределы значений (0.4÷0.5)·10^{-5} [1/s^2]).

Как видно из рисунков (рис. 3.11-a, b), имеет место практически полное совпадение результатов численного интегрирования полных систем и аналитических решений редуцированной системы при выполнении (3.129) и значительном превышении естественных величин μ_g, что гарантирует корректность аналитических результатов для практических расчетов. Вместе с тем, при нарушении условия (3.129) аналитические и численные зависимости существенно отличаются (рис. 3.11-c, d). Таким образом, условие (3.129) положительно валидировано, а соответствующие аналитические решения (3.156) численно верифицированы.

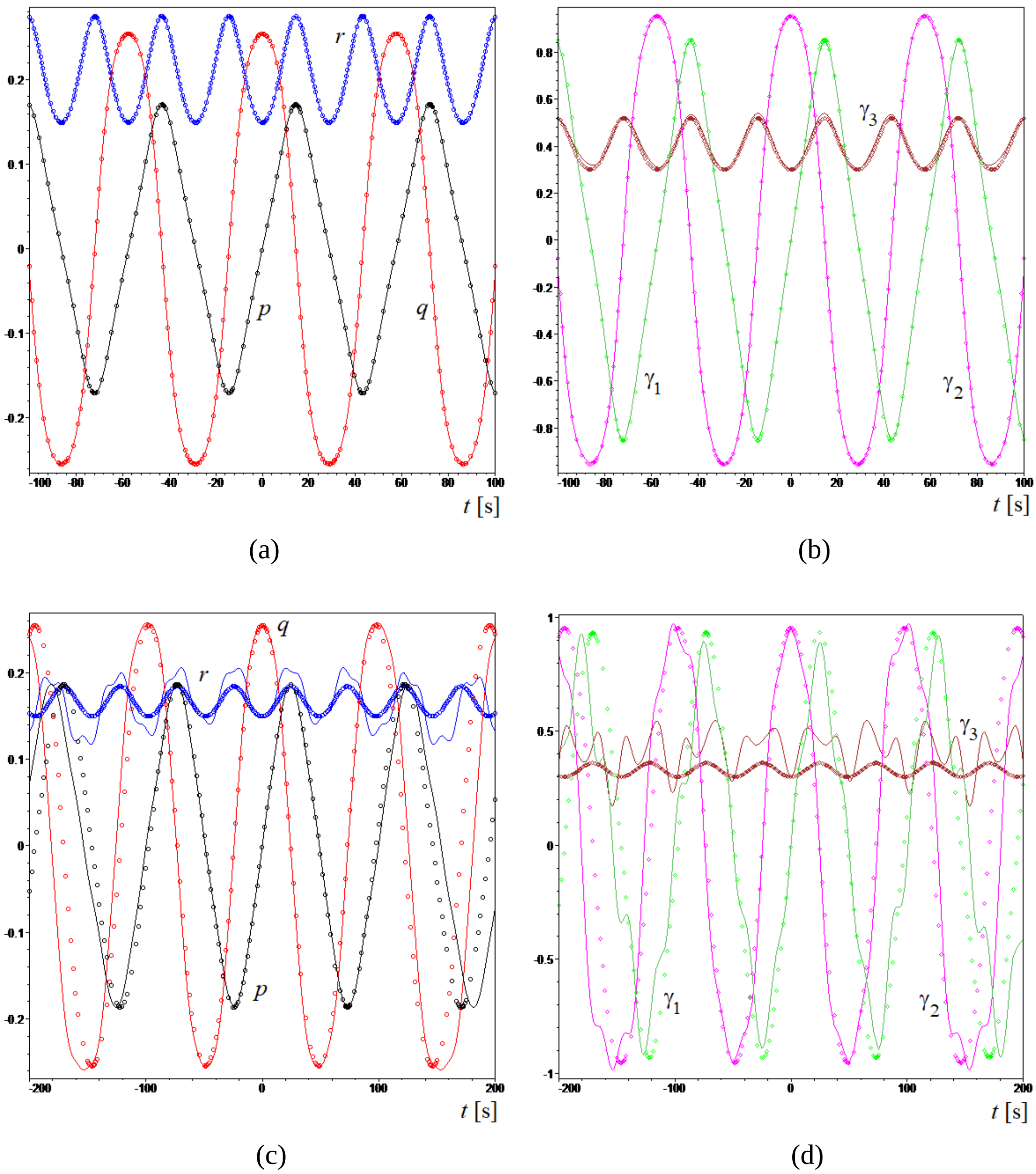


Рис.3.11. *Аналитические и численные зависимости:*
линии – численное интегрирование полных систем ((3.125), (3.6)),
точки – аналитические решения (3.156) *для редуцированной системы* ((3.130), (3.131))

Таблица 3.3.

Рис.	μ_g [1/c^2]	K^2/A^2	Начальные значения угловых скоростей [1/c]			Начальные значения для направляющих косинусов			Кинетические моменты [кг·м^2/с]	
			p_0	q_0	r_0	γ_1	γ_2	γ_3	K	Δ
3.11-a, b	0.0046	0.04	0	0.254	0.149	0	0.954	0.3	4	0.155
3.11-c, d	0.046	0.04	0	0.254	0.149	0	0.954	0.3	4	0.155

3.5. Выводы по главе

В главе представлены общие и гетероклинические аналитические решения для *трех классов движения* нормальных спутников-гиростатов, включая *класс движений Эйлера* при малых возмущениях магнитной природы с требованием сонаправленности начального кинетического момента и вектора внешней магнитной индукции [199], *класс движений Лагранжа* для тяжелого динамически симметричного спутника-гиростата [26] и намагниченного спутника-гиростата [198], а также класс движений спутника-гиростата при малых возмущениях от центрального поля тяготения в режиме конической прецессии [201], *обобщающий случай В.А. Стеклова* движения твердого тела в центральном поле.

В частности, получены шесть видов аналитических решений для динамики одноосных спутников-гиростатов:

1. Общее решение для намагниченного одноосного спутника-гиростата с малым переменным дипольным моментом (в ω-режиме) при реализации цилиндрических прецессий [199];

2. Гетероклиническое решение для намагниченного одноосного спутника-гиростата с малым переменным дипольным моментом (в ω-режиме) при реализации цилиндрических прецессий [199];

3. Гетероклиническое решение типа «действие-угол» для вращающейся фазы угла относительного вращения ротора одноосного гиростата с малым дипольным моментом (в ω-режиме) при реализации цилиндрических прецессий [196];

4. Приведение решения для тяжелого осевого гиростата с произвольным внутренним моментом сил к случаю Лагранжа [26];

5. Общее решение в случае намагниченного одноосного динамически симметричного спутника-гиростата с переменным дипольным моментом (в ω-режиме) без ограничений на его величину [198];

6. Общее решение для конической прецессии спутника-гиростата в слабом центральном гравитационном поле [201].

Представленные решения позволят далее провести исследование процессов хаотизации движения под действием возмущений различной природы, а также осуществить разработку методов управления пространственным движением и переориентации спутников-гиростатов.

4. Анализ и предотвращение гетероклинического хаоса в динамике спутников-гиростатов

В настоящей главе изучаются хаотические процессы, возникающие в динамике движения спутников-гиростатов при действии внутренних и внешних возмущений разной природы. Исследования, посвященные анализу хаотизации и устранению хаоса, нашли свое опубликование в работах диссертанта [192, 194, 195, 196, 197, 199, 200, 201, 202, 216].

Стоит кратко отметить, что природа гетероклинического хаоса связана с наличием в фазовом пространстве системы гетероклинических траекторий (сепаратрисс), представляющих собой соединения седловых особых точек с совпадением их устойчивых и неустойчивых веток. Наличие седловых точек само по себе свидетельствует о неустойчивости системы в их окрестностях. Поэтому при действии на систему, например, периодических возмущений фазовая точка, стартовавшая в окрестности неустойчивого многообразия седла, будет способна оказываться в разных зонах окрестности исходной невозмущенной сепаратрисы с чередованием относительных своих расположений по отношению к ней («то сверху, то снизу» сепаратрисы), что, в свою очередь, подразумевает чередование в рамках динамики разных качеств, соответствующих разным зонам фазового пространства, разделенных сепаратрисой. Это неустойчивое чередование различных качественных свойств в реализации динамики как раз и представляет собой феномен хаоса. В реальности картина поведения в окрестности возмущенных сепаратрисс оказывается еще более сложной. Эту картину описал А. Пуанкаре [96, 302], говоря о том, что неустойчивые и устойчивые множества седловых точек, слившиеся в единую сепаратрису, будут расщепляться под действием возмущений и образовывать сплетения с бесконечным числом пересечений, т.е. образовывать гетероклиническую сеть. Движение фазовой точки в окрестности подобной сети, безусловно, окажется чрезвычайно сложным, причем с таким же сложным чередованием качеств фазовых зон, разделенных возмущенной сепаратрисой (которая теперь сама является целой гереоклинической сетью).

Таким образом, факт образования гетероклинической сети подразумевает факт наличия пересечения расщепленных многообразий сепаратрисы, который можно определить на основе формализма Мельникова и его последующих модификаций и обобщений С. Виггинса, описанных в параграфе 1.5.

Необходимо также отметить, что проблема гомо-/гетероклинических расщеплений независимым образом была рассмотрена в работах Арнольда В.И. [18], и Козлова В.В. [63, 64], где главным предметом исследований был результат этих расщеплений, выражающийся в *неинтегрируемости* уравнений динамических систем.

4.1. Хаос при малых полигармонических внутренних возмущениях

В настоящем параграфе на основе классического метода В.К. Мельникова проводится подтверждение возможности выхода спутника-гиростата на нерегулярные (хаотические) режимы движения при наличии малых полигармонических моментов M_Δ в контуре внутреннего электродвигателя системы гироскопической стабилизации, поддерживающего заданное вращение тела-ротора относительно тела-носителя, т.е. когда между соосными телами спутника действует малый (порядка ε) момент полигармонического вида.

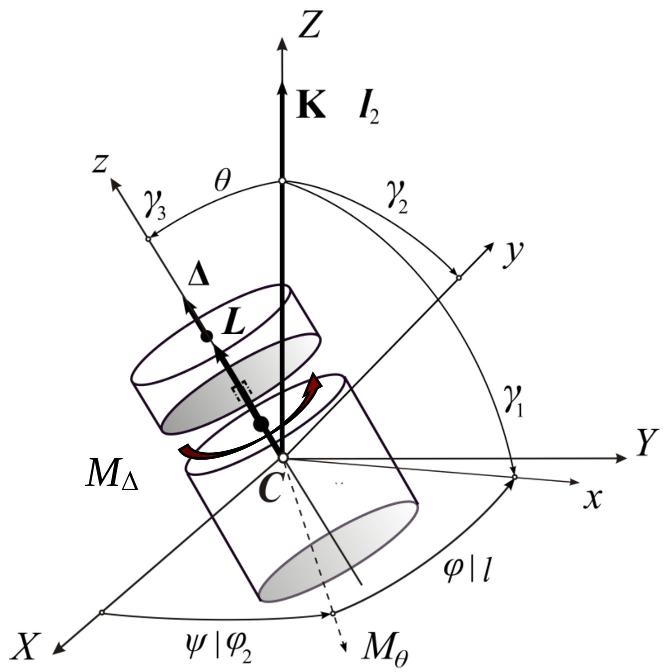


Схема спутника-гиростата при действии внутреннего момента

Это возможно при наличии в системе управления двигателем ошибок, связанных с латентностью датчиков угловых скоростей, а также другими «паразитными» сигналами, которые разложимы в ряд Фурье (с удержанием N членов разложения). Уравнение движения ротора будет иметь вид:

$$\dot{\Delta} = M_\Delta = \varepsilon \cdot polygarm(t) \tag{4.1}$$

Будем при этом считать, что факторы асимметрии конструкции СГ отсутствуют.

4.1.1. Уравнения движения

Динамические уравнения свободного движения спутника-гиростата имеют вид:

$$\begin{gathered} A\dot{p} + \left(C_b - B\right)qr + q\Delta = 0; \qquad B\dot{q} + \left(A - C_b\right)pr - p\Delta = 0; \\ C_b\dot{r} + \dot{\Delta} + \left(B - A\right)pq = 0; \qquad \dot{\Delta} = M_\Delta, \end{gathered} \tag{4.2}$$

Пусть для моментов инерции выполняется условие $A_b > B_b > C_b > A_r > C_r$.

Для исследования хаотической динамики движения удобно использовать введенные ранее переменные Андуайе-Депри, в которых гамильтониан системы в рассматриваемом случае принимает вид:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon \mathcal{H}_1; \quad \mathcal{H}_0 = T = \frac{I_2^2 - L^2}{2}\left[\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta^2}{C_r} + \frac{(L-\Delta)^2}{C_b}\right] \tag{4.3}$$

где T – кинетическая энергия системы, ε – малый безразмерный параметр, а возмущенная часть $\mathcal{H}_1$ определится введением возмущающих воздействий.

В силу гамильтониана (4.3) импульсы невозмущенной системы Δ, I_2 остаются постоянными, а динамическая система сводится к системе с одной степенью свободы $\{l, L\}$:

$$\dot{L} = f_L(l,L) + \varepsilon g_L(t); \quad \dot{l} = f_l(l,L) + \varepsilon g_l(t); \tag{4.4}$$

$$f_L(l,L) = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial l} = \alpha\left(I_2^2 - L^2\right)\sin l \cos l;$$

$$f_l(l,L) = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial L} = L\left[\frac{1}{C_b} - \frac{\sin^2 l}{A} - \frac{\cos^2 l}{B}\right] - \frac{\Delta}{C_b};$$

$$g_L = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial l}; \qquad g_l = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial L}; \qquad \alpha = \frac{1}{B} - \frac{1}{A}$$

После интегрирования линейного дифференциального уравнения с полигармонической правой частью (4.1) получаем решение, соответствующее постоянной порождающей невозмущенной величине $\bar{\Delta}$ (при $M_\Delta = 0$) с малыми полигармоническими слагаемыми-поправками:

$$\Delta = \bar{\Delta} + \varepsilon \sum_{n=0}^{N}\left[\bar{a}_n \sin nt + \bar{b}_n \cos nt\right] \tag{4.5}$$

В этом случае, подставляя решение (4.5) в уравнения (4.4), и распределяя слагаемые в функции f и g соответственно, запишем возмущенную динамическую систему:

$$\dot{L} = f_L(l,L) + \varepsilon g_L(t); \quad \dot{l} = f_l(l,L) + \varepsilon g_l(t);$$

$$f_L(l,L) = \alpha\left(I_2^2 - L^2\right)\sin l \cos l; \quad f_l(l,L) = L\left[\frac{1}{C_b} - \frac{\sin^2 l}{A} - \frac{\cos^2 l}{B}\right] - \frac{\bar{\Delta}}{C_b}; \tag{4.6}$$

$$g_L(t) = 0; \quad g_l(t) = -\frac{1}{C_b}\sum_{n=0}^{N}\left[\bar{a}_n \sin nt + \bar{b}_n \cos nt\right]$$

4.1.2. Функция Мельникова и анализ хаотических режимов движения

Проведем анализ возмущенной гамильтоновой системы (4.6) на предмет возможности возникновения в ней нерегулярных (хаотических) режимов. Для этого применим метод В.К. Мельникова [85]. Для применения метода будем пользоваться гетероклиническими решениями $\{\bar{p}(t), \bar{q}(t), \bar{r}(t)\}$ для сепаратрисных орбит в фазовом пространстве компонент угловой скорости тела-носителя СГ (3.37) при $\nu = \mu = 0$.

Функция Мельникова для возмущенной системы (4.4) имеет вид:

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_L\left(\bar{l}(t), \bar{L}(t)\right) g_l(t + t_0)\, dt, \tag{4.7}$$

где черта сверху показывает соответствие зависимости гетероклиническому решению. Интеграл (4.7) может быть приведен к виду:

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha\left(I_2^2 - \bar{L}^2\right)\sin\bar{l}\,\cos\bar{l}\cdot g_l(t + t_0)\, dt = \tag{4.8}$$

$$= \frac{\alpha}{C_2}\int_{-\infty}^{+\infty} A\bar{p}(t)B\bar{q}(t)\sum_{n=0}^{N}\left[\bar{a}_n \sin n(t + t_0) + \bar{b}_n \cos n(t + t_0)\right]dt =$$

$$= \frac{\alpha}{C_2}\sum_{n=0}^{N}\left[J_s^{(n)}\left\{\bar{a}_n \cos nt_0 - \bar{b}_n \sin nt_0\right\} + J_c^{(n)}\left\{\bar{a}_n \sin nt_0 + \bar{b}_n \cos nt_0\right\}\right],$$

где

$$J_s^{(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(t)\sin(nt)\, dt;\quad J_c^{(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}(t)\cos(nt)\, dt; \tag{4.9}$$

$$\bar{g}(t) = AB\bar{p}(t)\bar{q}(t) = \pm AB\sqrt{\frac{C_b(B - C_b)}{A(A - B)}}\sqrt{\varsigma^2 - \chi^2\left(\bar{x}(t) + \Delta\beta\right)^2}\,\bar{x}(t)$$

Нетрудно показать, что функция $\bar{g}(t)$ является нечетной функцией с нулевым средним, быстро затухающая к нулю при $t \to \pm\infty$. В силу этого обстоятельства несобственные интегралы, как площади криволинейных трапеций, сходятся к постоянным величинам, причем:

$$J_c^{(n)} = 0;\quad J_s^{(n)} = \mathrm{const}_n \tag{4.10}$$

Отметим, что результат (4.10) также можно проверить аналитически.

С учетом (4.10) функция Мельникова (4.8) принимает следующий полигармонический вид:

$$M(t_0) = \frac{\alpha}{C_b}\sum_{n=0}^{N} J_s^{(n)}\left\{\bar{a}_n \cos nt_0 - \bar{b}_n \sin nt_0\right\} \tag{4.11}$$

На основании простого полигармонического вида (4.11) можно заключить, что функция Мельникова будет иметь бесчисленное множество простых корней.

Таким образом, проведенный анализ доказывает возникновение локальных (вблизи сепаратрисных гетероклинических траекторий) хаотических режимов движения при наличии малых полигармонических возмущений.

Приведем частный случай анализа моногармонического возмущения, при котором функцию Мельникова удается записать в явных квадратурах. Пусть имеется следующее малое $(\bar{\varepsilon} << 1)$ моногармоническое возмущение (Ω-некая базовая частота):

$$M_\Delta = \bar{\varepsilon}\bar{b}_1 \cos\Omega t \tag{4.12}$$

Тогда из уравнения (4.1) при начальных условиях отсутствия абсолютного продольного осевого вращения ротора $(\Delta(0) = 0)$ следует:

$$\Delta(t)=\frac{\bar{\varepsilon}\bar{b}_1}{\Omega}\sin\Omega t \tag{4.13}$$

После подстановки решения (4.13) гамильтониан системы, отбрасывая члены второго порядка малости, запишется с выделением главной и возмущенной частей:

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_0+\varepsilon\mathcal{H}_1,$$

$$\mathcal{H}_0=\frac{I_2^2-L^2}{2}\left[\frac{\sin^2 l}{A}+\frac{\cos^2 l}{B}\right]+\frac{1}{2}\frac{L^2}{C_2},\ \mathcal{H}_1=-L\Omega\sin\Omega t, \tag{4.14}$$

где $\varepsilon=\dfrac{\bar{\varepsilon}\bar{b}_1}{C_2\Omega^2}$ - безразмерный малый параметр.

Тогда будут иметь место следующие возмущающие функции:

$$g_L(t)=0;\quad g_l(t)=-\Omega\sin\Omega t \tag{4.15}$$

Если использовать гетероклинические решения (3.47), соответствующие рассматриваемому случаю $(\Delta=\mu=\nu=0)$, то функция Мельникова может быть вычислена в явных квадратурах:

$$M(t_0)=\varepsilon\Omega\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha\left(\bar{I}_2^2-\bar{L}^2\right)\sin\bar{l}\,\cos\bar{l}\,\sin\left(\Omega\left(t+t_0\right)\right)dt=\varepsilon\Omega\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}A\bar{p}(t)B\bar{q}(t)\sin\left(\Omega\left(t+t_0\right)\right)dt=$$

$$=\varepsilon\alpha\rho p_0\Omega AB\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{th}\lambda t}{\operatorname{ch}\lambda t}\cdot\sin\left(\Omega\left(t+t_0\right)\right)dt=\alpha\rho p_0 AB\left[J_1\cos\Omega t_0+J_2\cos\Omega t_0\right]=R\cos\Omega t_0,$$

где

$$J_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{th}\lambda t}{\operatorname{ch}\lambda t}\cdot\sin\left(\Omega t\right)dt=\mathrm{const}=J,\qquad J_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{th}\lambda t}{\operatorname{ch}\lambda t}\cdot\cos\left(\Omega t\right)dt=0,\ \ R=\varepsilon\alpha\rho p_0\Omega ABJ.$$

Интеграл J_1 вычисляется аналитически:

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{th}\lambda t}{\operatorname{ch}\lambda t}\cdot\sin\left(\Omega t\right)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sh}\lambda t}{\operatorname{ch}^2\lambda t}\cdot\sin\left(\Omega t\right)dt \tag{4.16}$$

Интегрируя «по частям», получим [228]:

$$J=\frac{\Omega}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\left(\Omega t\right)}{\operatorname{ch}\lambda t}dt-\left.\frac{\sin\left(\Omega t\right)}{\lambda\operatorname{ch}\lambda t}\right|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\Omega\pi}{\lambda^2}\operatorname{sech}\frac{\Omega\pi}{2\lambda}. \tag{4.17}$$

Окончательно функция Мельникова примет вид:

$$M\left(t_0\right)=\varepsilon R\cos\left(\Omega t_0\right);\quad R=\frac{1}{\lambda^2}\alpha\rho p_0\Omega^2 AB\pi\operatorname{sech}\frac{\Omega\pi}{2\lambda}=\mathrm{const} \tag{4.18}$$

В силу чистого косинусоидального вида (4.18) функции Мельникова, имеющей бесчисленное количество простых нулей, будет иметь место бесчисленное число неустранимых пересечений расщепленных множеств сепаратрисс. Поэтому система будет иметь неустранимые гетероклинические сплетения и хаос, что можно проиллюстрировать на сечениях Пуанкаре (рис. 4.1-4.2), выполняемых по условию $\left(\Omega t \bmod 2\pi\right)=0$ в фазовом пространстве $\left\{l, L/I_2\right\}$.

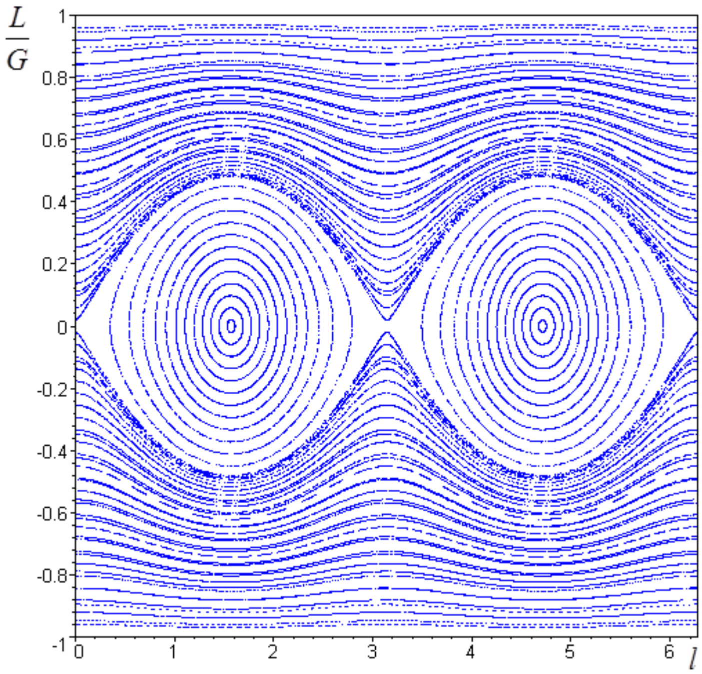


Рис.4.1. *Сечение Пуанкаре невозмущенной системы*:
$A_2 = 15,\ B_2 = 8,\ C_2 = 6,\ A_1 = 5,\ C_1 = 4,$
$G = I_2 = 10,\ \varepsilon = 0.0,\ \Omega = 1$

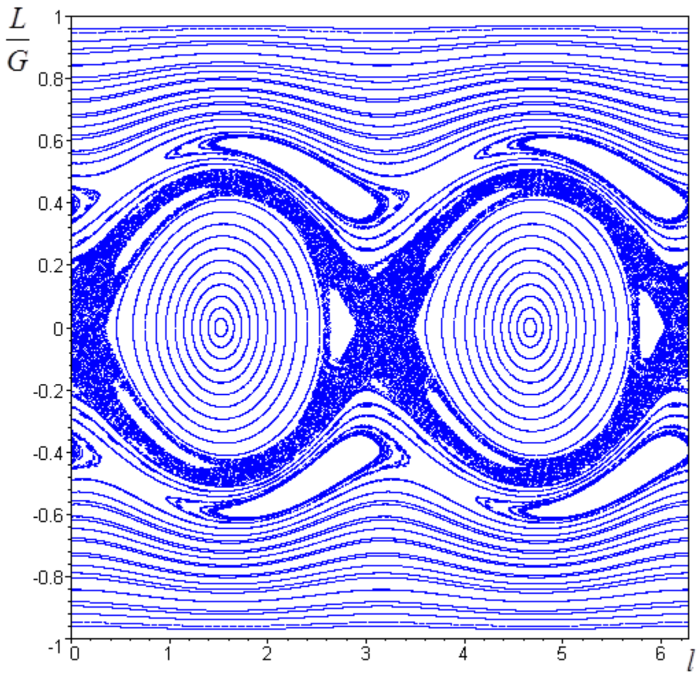


Рис.4.2. *Сечение Пуанкаре возмущенной системы*:
$A_2 = 15,\ B_2 = 8,\ C_2 = 6,\ A_1 = 5,\ C_1 = 4,$
$G = I_2 = 10,\ \varepsilon = 0.1,\ \Omega = 1$

Также хорошим примером хаотического поведения является динамика отдельной фазовой траектории, стартующей близко к невозмущенной сепаратрисе. На рис. 4.3. представлена фазовая траектория в пространстве $\{l, L/I_2\}$ для невозмущенного случая, а на рис.4.4. – траектория с той же стартовой точкой, но при действии возмущений. Из рис. 4.4 наглядно виден нерегулярный процесс в динамике этой траектории, выражающийся в хаотической смене фазовых зон (вращение/колебания).

Рис.4.3. *Регулярная фазовая траектория*:

$A_2 = 15,\ B_2 = 8,\ C_2 = 6,\ A_1 = 5,\ C_1 = 4,$

$G = I_2 = 10,\ \varepsilon = 0.$

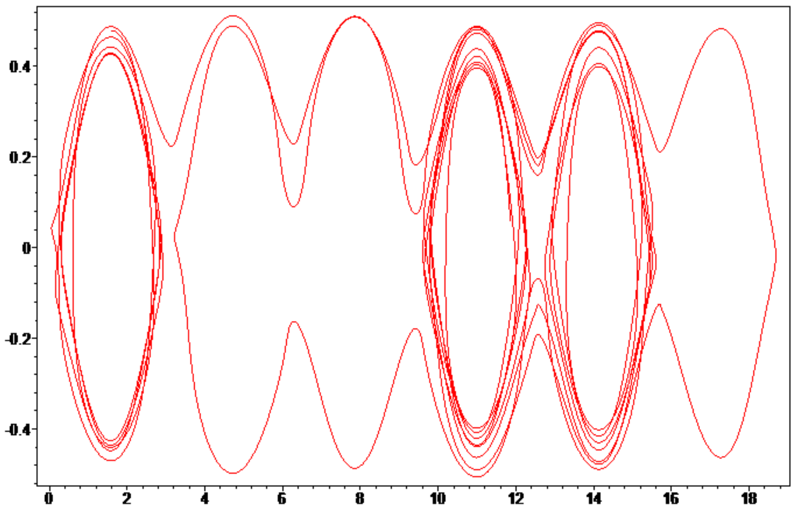


Рис.4.4. *Хаотическая фазовая траектория*:

$A_2 = 15,\ B_2 = 8,\ C_2 = 6,\ A_1 = 5,\ C_1 = 4,$

$G = I_2 = 10,\ \varepsilon = 0.1,\ \Omega = 1$

Таким образом, наличие хаотизации в системе одноосного спутника-гиростата при внутренних полигармонических возмущениях доказана аналитически и подтверждена численными расчетами. Здесь также стоит сказать о том, что хаос будет одинаково опасен для реальных спутников-гиростатов независимо от «толщины» хаотического слоя, т.к. хаос «заставляет» чередовать качественные зоны динамики даже при самых малых возмущениях – для практики космических полетов подобная динамика недопустима.

4.2. Хаос при малых внешних возмущениях

4.2.1. Хаос при полигармонических возмущениях в дипольном моменте спутника-гиростата

Рассмотрим случай возмущенной динамики спутника-гиростата с трехосным тензором инерции тела-платформы, выполняющего опорное движение в режиме цилиндрической прецессии. В указанном случае опорная (невозмущенная) динамика спутника-гиростата соответствует результатам, изложенным в параграфе 3.1.

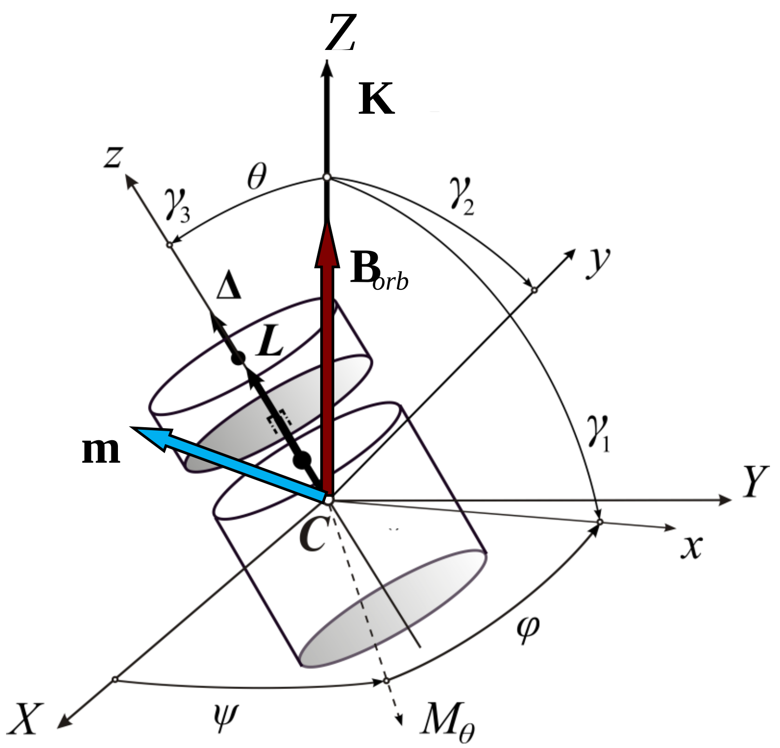


Схема спутника-гиростата в режиме цилиндрической прецессии при возмущении внутреннего переменного дипольного момента **m**

Пусть при этом возможны малые возмущения в собственном дипольном моменте спутника, связанные с его малыми осцилляциями и реализацией омега-маневров, т.е. предположим наличие малых полигармонических возмущений в обоих динамических факторах, описываемых параметрами μ (предпочтительный продольный компонент собственного дипольного момента) и ν (реализация омега-режима).

Для анализа хаотизации целесообразно перейти к каноническим переменным Андуайе-Деприи записать возмущенные уравнения движения.

Потенциальная энергия взаимодействия спутника-гиростата с магнитным полем в переменных Андуайе-Деприи (2.60) с учетом зависимости компонент собственного дипольного магнитного момента спутника от времени (через зависимости от времени компонент угловых скоростей и малых возмущений продольного дипольного магнитного момента и параметров выполнения омега-маневров) запишется в следующей форме:

$$P = -B_{orb}\left[\frac{\sqrt{I_2^2 - L^2}}{I_2}\Big(m_x(\nu,t)\sin l + m_y(\nu,t)\cos l\Big) + m_z(\nu,\mu,t)\frac{L}{I_2}\right] \tag{4.19}$$

Как было отмечено выше, предположим присутствие в системе малых полигармонических возмущений в обоих динамических факторах (описываемых параметрами ν и μ), участвующих в формировании магнитного дипольного момента, и приобретающих переменный характер во времени

$$\nu(t) = \nu\big(1 + e_\nu g(t)\big); \quad \mu(t) = \mu\big(1 + e_\mu g(t)\big) \tag{4.20}$$

где множители $e_\nu,\, e_\mu << 1$, а полигармоническое возмущение имеет базовую частоту ω_p и следующую форму

$$g(t) = \sum_{n=1}^{N}\Big[c_n \cos\big(n\omega_p t\big) + s_n \sin\big(n\omega_p t\big)\Big] \tag{4.21}$$

Тогда в рассматриваемом случае гамильтониан будет иметь следующую возмущенную часть:

$$\begin{gathered}\varepsilon\mathcal{H}_1 = \varepsilon P_1 = -\varepsilon\left[\frac{\sqrt{I_2^2 - L^2}}{I_2}\Big(m_x(\bar{e}_\nu,t)\sin l + m_y(\bar{e}_\nu,t)\cos l\Big) + m_z(\bar{e}_\nu,\bar{e}_\mu,t)\frac{L}{I_2}\right]B_{orb}\, g(t);\\ \varepsilon = \sup\{\nu e_\nu, \mu e_\mu\}; \ \bar{e}_\nu = \nu e_\nu/\varepsilon; \quad \bar{e}_\mu = \mu e_\mu/\varepsilon\end{gathered} \tag{4.22}$$

Как можно видеть из выражения для гамильтониана, только каноническая пара $\{l, L\}$ будет соответствовать позиционной координате и импульсу, а остальные канонические пары будут соответствовать циклическим координатам. Поэтому в рассмотрении целесообразно оставить только позиционную координату и соответствующий импульс $\{l, L\}$, для которых можно записать соответствующие динамические уравнения, формально выполняя частное дифференцирование и подставляя после этого в результат дифференцирования следующие явные зависимости для компонент собственного дипольного момента, характерные для решаемой задачи, выраженные через компоненты угловой скорости и, соответственно, через переменные Андуайе-Деприи:

$$\begin{cases} m_x(\bar{e}_\nu,t) = kp(t) = k\sqrt{I_2^2 - L^2}\,\sin l\big/A;\\ m_y(\bar{e}_\nu,t) = kq(t) = k\sqrt{I_2^2 - L^2}\,\cos l\big/B;\\ m_z(\bar{e}_\nu,\bar{e}_\mu,t) = kr(t) + \tilde{m}_z = k(L-\Delta)\big/C_b + \tilde{m}_z, \end{cases} \tag{4.23}$$

Динамические уравнения для позиционной пары координата-импульс будут иметь вид:

$$\dot{L} = f_L(l,L) + \varepsilon g_L(l,L,t); \qquad \dot{l} = f_l(l,L) + \varepsilon g_l(l,L,t) \tag{4.24}$$

Где, с учетом (4.23), введены следующие функции правых частей:

$$\begin{cases} f_L(l,L) = -(1-\nu)\left[I_2^2 - L^2\right]\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)\dfrac{\sin(2l)}{2}; \\ f_l(l,L) = (1-\nu)L\left[\dfrac{1}{C_b}-\dfrac{\sin^2 l}{A}-\dfrac{\cos^2 l}{B}\right]-(1-\nu)\dfrac{\Delta}{C_b}-\mu; \\ g_L(l,L,t) = \overline{e}_\nu\left[I_2^2 - L^2\right]\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)\dfrac{\sin(2l)}{2}g(t); \\ g_l(l,L,t) = \left[\dfrac{\overline{e}_\nu\Delta}{C_b}-\overline{e}_\nu L\left[\dfrac{1}{C_b}-\dfrac{\sin^2 l}{A}-\dfrac{\cos^2 l}{B}\right]-\overline{e}_\mu\right]g(t) \end{cases} \tag{4.25}$$

Уравнения (4.24) описывают динамику спутника-гиростата в ее главных аспектах при реализации возмущенных омега-маневров в окрестности режимов цилиндрической прецессии.

Возникающая хаотизация в системе может быть подтверждена численными построениями сечений Пуанкаре (рис.4.5), а также посредством вычисления функции Мельникова с доказательством наличия у нее простых корней. Для рассматриваемого случая вполне применима классическая форма функции Мельникова:

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[f_L\left(\overline{l}(t),\overline{L}(t)\right)g_l(t+t_0) + f_l\left(\overline{l}(t),\overline{L}(t)\right)g_L(t+t_0)\right]dt, \tag{4.26}$$

которая с учетом (4.25) запишется в виде:

$$\begin{gathered} M(t_0) = \left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left[I_2^2-\overline{L}^2\right]\sin\overline{l}\,\cos\overline{l}\right\}\times \\ \times\left[2\overline{e}_\nu(1-\nu)\left(\overline{L}\left[\frac{1}{C_b}-\frac{\sin^2\overline{l}}{A}-\frac{\cos^2\overline{l}}{B}\right]-\frac{\Delta}{C_b}\right)-\overline{e}_\nu\mu+\overline{e}_\mu(1-\nu)\right]g(t+t_0)\,dt \end{gathered} \tag{4.27}$$

Выражения в фигурных и квадратных скобках под интегралом в (4.27) с помощью союзных выражений (2.37) можно записать:

$$\begin{gathered} W_{odd}(t) = \left\{\left[I_2^2-\overline{L}^2\right]\sin\overline{l}\,\cos\overline{l}\right\} = AB\overline{p}(t)\overline{q}(t); \\ W_{even}(t) = \left[2\overline{e}_\nu(1-\nu)\left(\overline{L}\left[\frac{1}{C_b}-\frac{\sin^2\overline{l}}{A}-\frac{\cos^2\overline{l}}{B}\right]-\frac{\Delta}{C_b}\right)-\overline{e}_\nu\mu+\overline{e}_\mu(1-\nu)\right] = \\ = 2\overline{e}_\nu(1-\nu)\left(\overline{r}(t)-\left(C_b\overline{r}(t)+\Delta\right)\frac{A\overline{p}^2(t)+B\overline{q}^2(t)}{A^2\overline{p}^2(t)+B^2\overline{q}^2(t)}\right)-\overline{e}_\nu\mu+\overline{e}_\mu(1-\nu), \end{gathered} \tag{4.28}$$

где $\{\overline{p}(t),\overline{q}(t),\overline{r}(t)\}$ соответствуют гетероклиническим решениям (3.37). Так как решения $\overline{p}(t),\overline{r}(t)$ являются четными функциями времени, что представлено на рис. 3.4, а решение $\overline{q}(t)-$нечетной, то, соответственно, функция $W_{odd}(t)$ будет нечетной затухающей к нулю при $t\to\pm\infty$, а функция $W_{even}(t)-$четной. Тогда произведение $W_{odd}(t)\cdot W_{even}(t)$ будет являться нечетной функцией времени, затухающей к нулю при $t\to\pm\infty$. Такое поведение функций гарантирует сходимость несобственного интеграла в

(4.27). Если теперь путем тригонометрических преобразований разложить полигармоническую функцию $g(t+t_0)$ в следующий вид:

$$g(t+t_0)=\sum_{n=1}^{N}\left[C_n(t_0)\cos\left(n\omega_p t\right)+S_n(t_0)\sin\left(n\omega_p t\right)\right],$$

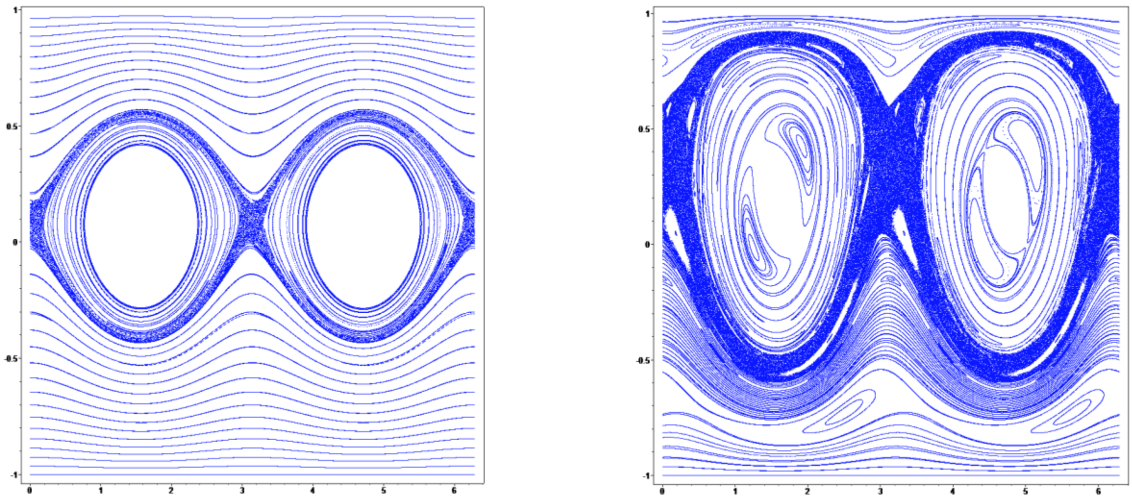
$$C_n(t_0)=\left[c_n\cos\left(n\omega_p t_0\right)+s_n\sin\left(n\omega_p t_0\right)\right],\qquad S_n(t_0)=\left[s_n\cos\left(n\omega_p t_0\right)-c_n\sin\left(n\omega_p t_0\right)\right],$$

то с учетом свойств четности гармонических функций, несобственные интегралы от «затухающих» блоков $W_{odd}(t)W_{even}(t)\cos\left(n\omega_p t\right)$ примут нулевые значения, несобственные интегралы от «затухающих» блоков $W_{odd}(t)W_{even}(t)\sin\left(n\omega_p t\right)$ дадут ненулевые константы $J_s^{(n)}$. В итоге функция Мельникова примет явный полигармонический вид:

$$M(t_0)=\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\sum_{n=1}^{N}J_s^{(n)}\left[s_n\cos\left(n\omega_p t_0\right)-c_n\sin\left(n\omega_p t_0\right)\right]\tag{4.29}$$

Очевидно, что функция Мельникова (4.29) имеет бесконечное число простых корней, что аналитически обнаруживает/доказывает существование гетероклинического хаоса в системе в рассмотренном случае.

Хорошую иллюстрацию присутствия хаотической динамики дают сечения Пуанкаре (рис.4.5), которые имеют выраженные хаотические слои, увеличивающие свои «объемы» с ростом величины возмущения. Для расчетов (рис. 4.5) приняты общие значения моментов инерции $\left(A=15;\ B=10;\ C=6\right)$ и кинетического момента ротора $\left(\Delta=3\right)$, причем все размерности величин соответствуют своим стандартным размерностям в метрической системе (и поэтому не указываются).



(a): $I_2=78;\ \nu=-0.3;\ \mu=0.3;$ $e_\mu=0.13;\ e_\nu=0.13;\ \omega_p=4$

(b): $I_2=78;\ \nu=0.2;\ \mu=0.3;$ $e_\mu=0.05;\ e_\nu=0.05;\ \omega_p=5$

Рис.4.5. *Сечения Пуанкаре возмущенной системы в пространстве* $\{l,\ L/I_2\}$

4.2.2. Хаос в режиме конической прецессии в слабом центральном поле сил тяжести

Рассмотрим феномен хаотизации движения спутника-гиростата в слабом центральном поле сил тяготения в условиях, описанных в параграфе 3.4. Переменные Андуайе-Деприл в рассматриваемом случае имеют типовой вид:

$$K_x = Ap = \sqrt{I_2^2 - L^2}\sin l; \quad K_y = Bq = \sqrt{I_2^2 - L^2}\cos l; \quad K_z = C_b r + \Delta = L; \quad K = I_2 \tag{4.30}$$

при этом с учетом выполнения условия (3.130) буду справедливы следующие выражения для направляющих косинусов:

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{I_2^2 - L^2}}{I_2}\sin l; \quad \gamma_2 = \frac{\sqrt{I_2^2 - L^2}}{I_2}\cos l; \quad \gamma_3 = \frac{L}{I_2} \tag{4.31}$$

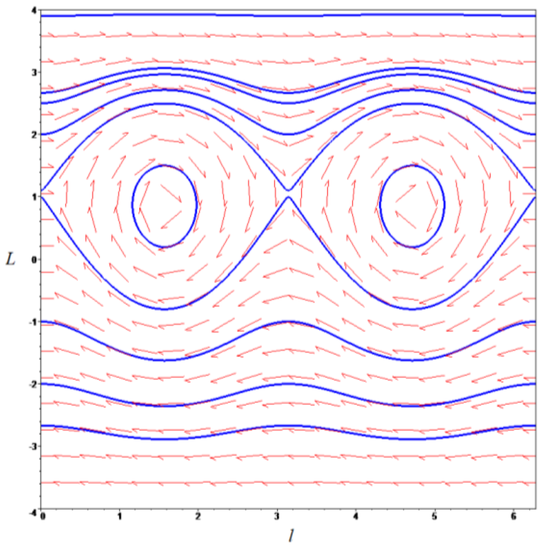
Гамильтониан системы следует из общей формы (3.138) полной энергии:

$$\begin{gathered}
\mathcal{H} = T + P; \\
T = \frac{I_2^2 - L^2}{2}\left[\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta^2}{C_r} + \frac{(L-\Delta)^2}{C_b}\right]; \\
P = \frac{\mu_g}{2I_2^2}\left\{\left(I_2^2 - L^2\right)\left[A\sin^2 l + B\cos^2 l\right] + CL^2\right\}
\end{gathered} \tag{4.32}$$

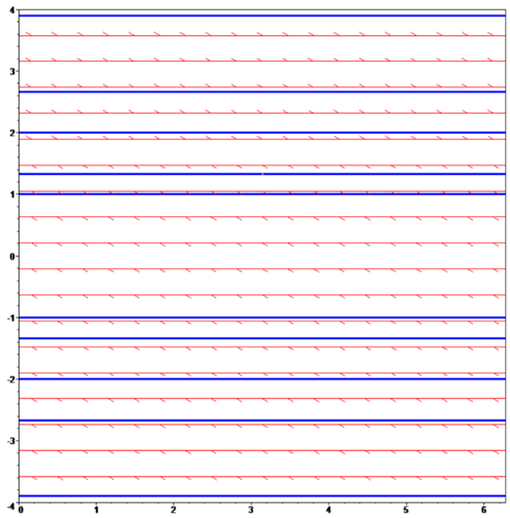
Как это видно из гамильтониана, система имеет одну позиционную координату (остальные являются циклическими):

$$\begin{cases}
\dot{L} = \dfrac{1}{2AB}\left(1 - \dfrac{\mu_g AB}{I_2^2}\right)\left(I_2^2 - L^2\right)(A-B)\sin 2l \\
\dot{l} = L\left[\dfrac{1}{C_b} + \dfrac{\mu_g C}{I_2^2} - \left(\dfrac{1}{A} + \dfrac{\mu_g A}{I_2^2}\right)\sin^2 l - \left(\dfrac{1}{B} + \dfrac{\mu_g B}{I_2^2}\right)\cos^2 l\right] - \dfrac{\Delta}{C_b}
\end{cases} \tag{4.33}$$

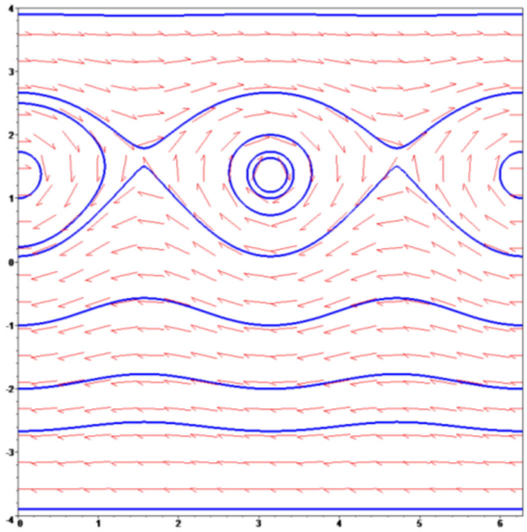
Система (4.33) является консервативной гамильтоновой системой, которая корректно и довольно наглядно (рис. 4.6) описывает динамическое поведение спутника-гиростата в слабом центральном поле при выполнении в режимах конических прецессий (как это описано и обусловлено в параграфе 3.4). С учетом реалистических значений параметров магнитного поля и спутника-гиростата реальная динамика движения будет описываться базовой формой фазового портрета (рис. 4.6-а), что может быть взято за невозмущенную динамику спутника-гиростата, в рамках которой нет причин для развития хаоса. С ростом отклонений от используемых приближений (условия (3.130) и начальная сонаправленность вектора кинетического момента и местной вертикали) необходимо будет вернуться к полным уравнениям (3.125) и (3.6) для описания сложной динамики системы, которая может демонстрировать скрытые нелинейные аспекты, включая возможную хаотизацию. Пример такого нерегулярного поведения представлен на рисунке (рис. 4.7). Так можно видеть сложную зависимость от времени для динамических параметров (рис. 4.7-a, b), малое (не превышающее 5÷10%) хаотическое относительное изменение величины кинетического момента (рис. 4.7-c), а также хаотическую фазовою траекторию (полодию) в пространстве компонент угловой скорости (рис. 4.7-d).



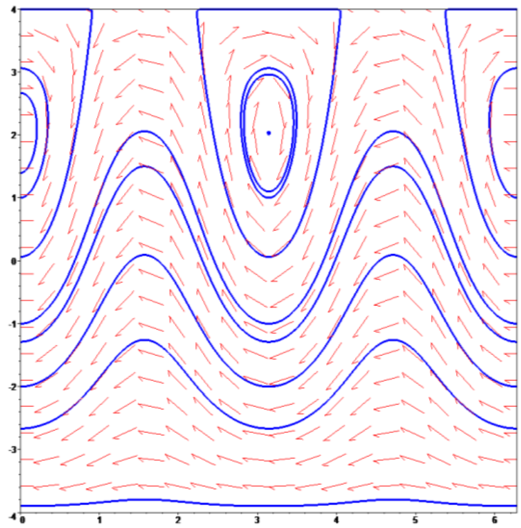
(a): $\mu_g = 0 \in \left[0,\ I_2^2/(AB)\right)$



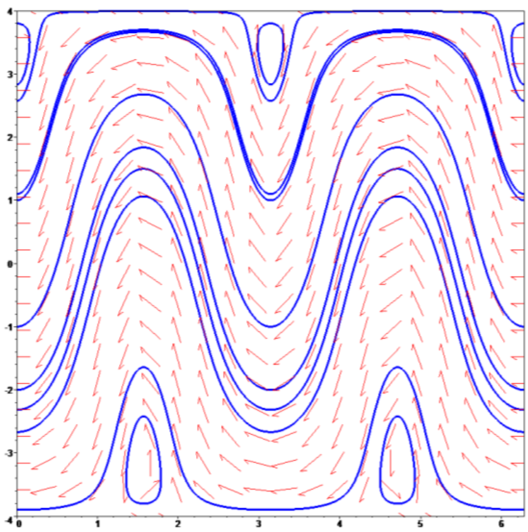
(b): $\mu_g = I_2^2/(AB)$



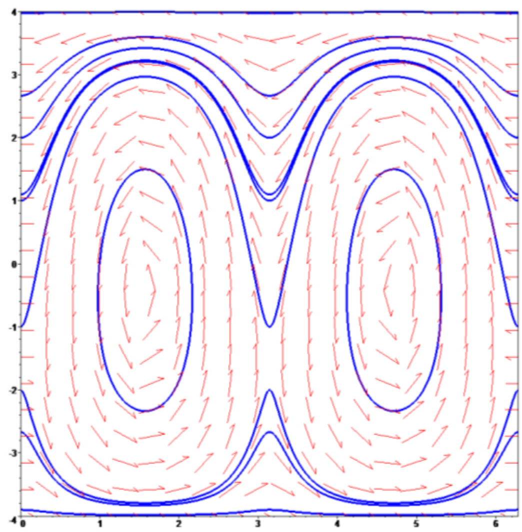
(c): μ=0.075



(d): μ=0.150

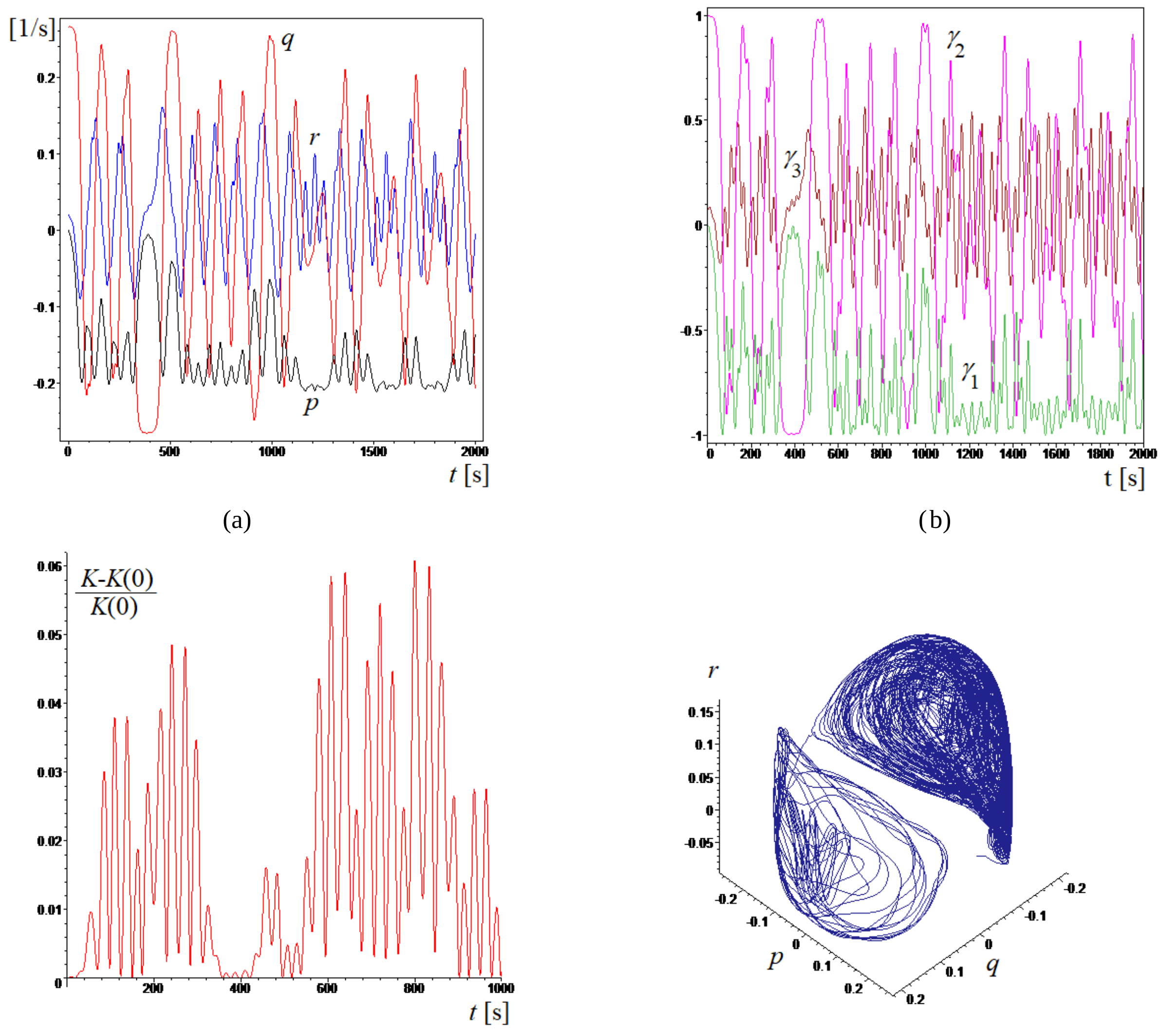


(e): μ=0.210



(f): μ=0.500

Рис. 4.6. *Изменение фазовых портретов в переменных* $\{l, L\}$
при гипотетическом росте величины параметра μ $[1/\mathrm{s}^2]$



(a) (b) (c) (d)

Рис. 4.7. *Хаотический режим динамики*

Для понимания причин продемонстрированной хаотической динамики системы (рис. 4.7) необходимо записать полные динамические уравнения в переменных Андуайе-Деприи без упрощающего условия (3.130), чтобы увидеть факторы выполняющие роль возмущений. В этом случае для системы остается актуальным гамильтониан (3.138) в котором с помощью союзных выражений можно заменить направляющие косинусы посредством переменных Андуайе-Деприи. Однако, отклонимся от подобного классического подхода и запишем смешанную динамическую систему, содержащую часть переменных Андуайе-Деприи и направляющие косинусы. Для это осуществим прямое дифференцирование выражений (4.30), что позволяет получить следующие формулы:

$$\begin{cases} \dot{l} = \dfrac{1}{Bq}\left\{ A\dot{p} - \dfrac{Ap}{A^2p^2 + B^2q^2}\left[A^2 p\dot{p} + B^2 q\dot{q} \right] \right\}; \\ \dot{L} = C_b \dot{r}; \\ \dot{I}_2 = \dfrac{1}{I_2}\left\{ \left[A^2 p\dot{p} + B^2 q\dot{q} \right] + \left(C_b r + \Delta \right) C_b \dot{r} \right\} \end{cases} \tag{4.34}$$

Подставляя выражения для производных угловых скоростей из главных динамических уравнений (3.125) в (4.34), и снова используя (4.30), запишем:

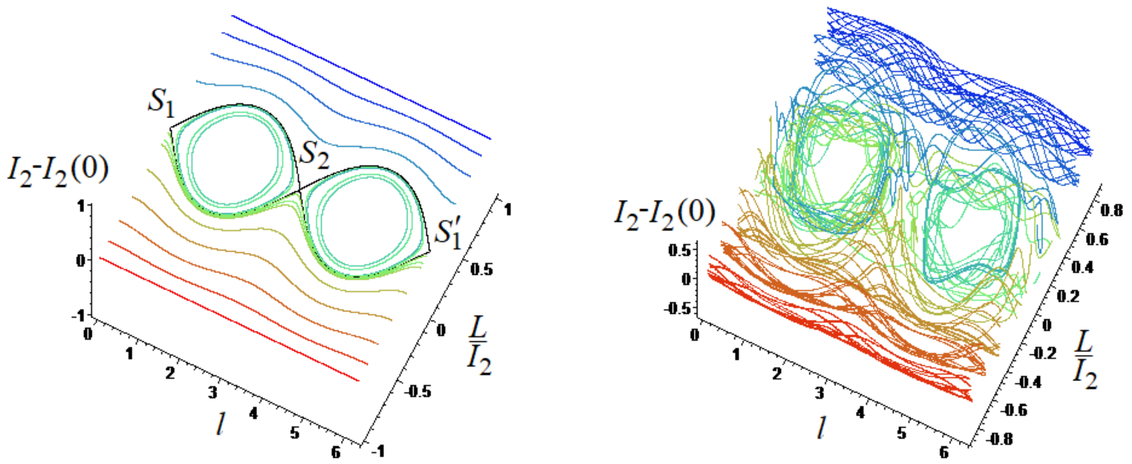
$$\begin{cases} \dot{l} = L\left[\dfrac{1}{C_b} - \dfrac{\sin^2 l}{A} - \dfrac{\cos^2 l}{B}\right] - \dfrac{\Delta}{C_b} + \mu_g \dfrac{\gamma_3}{\sqrt{I_2^2 - L^2}}\left[(C-B)\gamma_2 \cos l - (A-C)\gamma_1 \sin l\right]; \\ \dot{L} = \dfrac{A-B}{2AB}\left(I_2^2 - L^2\right)\sin 2l + \mu_g (B-A)\gamma_1\gamma_2; \\ \dot{I}_2 = \dfrac{\mu_g}{I_2}\left\{\sqrt{I_2^2 - L^2}\left[(C-B)\gamma_2 \sin l + (A-C)\gamma_1 \cos l\right]\gamma_3 + L(B-A)\gamma_1\gamma_2\right\}; \end{cases} \tag{4.35}$$

Дополнительно, переходя от компонент угловой скорости к переменным Андуайе-Деприи, можно представить уравнения Пуассона (3.6) в виде:

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1 = \dfrac{L-\Delta}{C_b}\gamma_2 - \dfrac{\sqrt{I_2^2 - L^2}\cos l}{B}\gamma_3; \\ \dot{\gamma}_2 = \dfrac{\sqrt{I_2^2 - L^2}\sin l}{A}\gamma_3 - \dfrac{L-\Delta}{C_b}\gamma_1; \\ \dot{\gamma}_3 = \sqrt{I_2^2 - L^2}\left[\dfrac{\cos l}{B}\gamma_1 - \dfrac{\sin l}{A}\gamma_2\right] \end{cases} \tag{4.36}$$

Уравнения (4.35) и (4.36) совместно формируют замкнутую динамическую систему полностью описывающую динамику спутника-гиростата посредством смешанного набора параметров $\{l, L, I_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} \in \mathbb{R}^6$. Стоит отметить, что при подстановке допущений (3.130) в (4.35) последуют уравнения (4.33), а третье уравнение (4.35) сводится к $\dot{I}_2 \equiv 0$.

Как можно видеть из структуры уравнений (4.35), действие гравитационных моментов сил, масштабируемое гравитационным параметром μ_g, может быть рассмотрено как возмущение для свободной динамики (при μ_g=0) спутника-гиростата. Невозмущенная динамка свободного спутника-гиростата описывается канонической парой $\{l, L\}$ при соответствующем постоянном значении $I_2 = K$, при этом фазовое пространство системы представляет собой плоскость $\{0 \le l \le 2\pi, -1 \le L/I_2 \le 1\}$ (рис. 4.8-а), где цвета траекторий символизируют разные уровни энергии (черные линии соответствуют гетероклиническим сепаратрисным траекториям). Движение по гетероклиническим траекториям в невозмущенном случае (μ=0) неизбежно приводит изображающую фазовую точку в конечную седловую стационарную точку (одно из седел) с координатами [l={0, π, 2π}; L=L_s] в пространстве переменных Андуайе-Деприи и с координатами [p=0; q=q_s, r=r_s] в пространстве компонент угловых скоростей. При подстановке этих стационарных значений компонент угловой скорости, соответствующих седловой точке, в систему (3.6) можно записать систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:



(a): μ=0 (b): μ=0.046

Рис. 4.8. *Изменение фазового портрета под действием моментов сил гравитации*

$$\begin{cases} \dot{\bar{\gamma}}_1 = r_s\bar{\gamma}_2 - q_s\bar{\gamma}_3 \\ \dot{\bar{\gamma}}_2 = -r_s\bar{\gamma}_1 \\ \dot{\bar{\gamma}}_3 = q_s\bar{\gamma}_1 \end{cases} \tag{4.37}$$

Из системы (4.37) следует линейное уравнение:

$$\ddot{\bar{\gamma}}_1 = -\left(r_s^2 + q_s^2\right)\bar{\gamma}_1 \tag{4.38}$$

Решение уравнения (4.38) имеет простейшую гармоническую структуру:

$$\bar{\gamma}_1(t) = D_1 \sin\Omega t + D_2 \cos\Omega t; \quad \Omega = \sqrt{r_s^2 + q_s^2} \tag{4.39}$$

После интегрирования третьего уравнения (4.37) нетрудно заключить, что все частные решения $\{\bar{\gamma}_1(t), \bar{\gamma}_2(t), \bar{\gamma}_3(t)\}$, соответствующие всем седловым точкам, ограничивающим сепаратрисные гетероклинические траектории, имеют гармоническую структуру. Таким образом, на конечных седловых точках гетероклинических сепаратрисс (и в их окрестностях) направляющие косинусы имеют гармонический вид зависимости от времени, при этом сама изображающая фазовая точка, движущаяся вдоль сепаратрисы, довольно быстро входит в окрестность седловых точек. Это обстоятельство позволяет считать, что зависимости для направляющих косинусов вдоль цельных гетероклинических траекторий являются более сложными функциями времени, которые, тем не менее, разложимы и представимы в формах полигармонических функций:

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \boldsymbol{\eta}(t) \tag{4.40}$$

где $\boldsymbol{\eta}(t) = \left[\eta_1(t), \eta_2(t), \eta_3(t)\right]^T$ – есть вектор полигармонических функций времени, $\bar{\boldsymbol{\gamma}} = \left[\bar{\gamma}_1(t)\big|_{\overline{S_iS_j}}, \ \bar{\gamma}_2(t)\big|_{\overline{S_iS_j}}, \ \bar{\gamma}_3(t)\big|_{\overline{S_iS_j}}\right]^T$ – зависимости для направляющих косинусов, реализующиеся при движении фазовой точки по гетероклинической траектории $\overline{S_iS_j}$ из седла S_i в седло S_j (рис. 4.8-а). Здесь важно отметить, что для последующих исследований конкретный вид полигармонических функций $\boldsymbol{\eta}(t)$ не имеет значения, а важен лишь сам факт того, что они имеют полигармонический вид (сколь угодно сложный и со сколь угодно большим числом составляющих гармоник).

Теперь для описания динамики в окрестности гетероклинических траекторий можно формально перезаписать уравнения (4.35) в классической форме возмущенной системы с малыми полигармоническими возмущениями:

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{l} = f_l(l,L) + \varepsilon g_l(l,L,t); \\ \dot{L} = f_L(l,L) + \varepsilon g_L(l,L,t); \end{cases} \\ \dot{I}_2 = \varepsilon g_{I_2}(l,L,t); \end{cases} \tag{4.41}$$

со следующими правыми частями:

$$\begin{cases} f_l(l,L) = L\left[\dfrac{1}{C_b} - \dfrac{\sin^2 l}{A} - \dfrac{\cos^2 l}{B}\right] - \dfrac{\Delta}{C_b}; \\ f_L(l,L) = \dfrac{A-B}{2AB}\left(\bar{I}_2^2 - L^2\right)\sin 2l; \\ g_l = \dfrac{\bar{I}_2^2}{A^2}\dfrac{\eta_3(t)}{\sqrt{\bar{I}_2^2 - L^2}}\left[(C-B)\eta_2(t)\cos l - (A-C)\eta_1(t)\sin l\right] + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right); \\ g_L(l,L,t) = \dfrac{\bar{I}_2^2}{A^2}(B-A)\eta_1(t)\eta_2(t) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right); \\ g_{I_2}(l,L,t) = \dfrac{\bar{I}_2}{A^2}\left\{\sqrt{\bar{I}_2^2 - L^2}\left[(C-B)\eta_2(t)\sin l + (A-C)\eta_1(t)\cos l\right]\eta_3(t) + \right. \\ \left. + L(B-A)\eta_1(t)\eta_2(t)\right\} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right); \end{cases} \tag{4.42}$$

где $\bar{I}_2 = K$ и $\mathrm{O}\left(\varepsilon^2\right)$ члены второго порядка малости и выше относительно малого параметра

$$\varepsilon = \mu_g A^2 / \bar{I}_2^2 \tag{4.43}$$

Из системы (4.41) видно, что первые два уравнения образуют замкнутую подсистему динамика которой определяет базовые свойства динамики полной системы, включая возможность хаотизации движения спутника-гиростата. Функция Мельникова, построенная для указанной подсистемы $\{l, L\}$, имеет классический вид:

$$M(t_0) = \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[f_L g_l - f_l g_L\right]_{\left(\bar{l}(t), \bar{L}(t), \boldsymbol{\eta}(t+t_0)\right)} dt \tag{4.44}$$

Сходимость слагаемых в подынтегральном выражении несобственного интеграла (4.44) гарантируется затухающими к нулю формами функций f_l (четная) и f_L (нечетная), вычисляемых на наборе гетероклинических решений (рис. 4.9):

$$\begin{cases} f_l\left(\bar{l}(t), \bar{L}(t)\right) = \bar{r}(t) - \left(C_b\bar{r}(t) + \Delta\right)\dfrac{A\bar{p}^2(t) + B\bar{q}^2(t)}{A^2\bar{p}^2(t) + B^2\bar{q}^2(t)}; \\ f_L\left(\bar{l}(t), \bar{L}(t)\right) = (A-B)\,\bar{p}(t)\bar{q}(t) \end{cases} \tag{4.45}$$

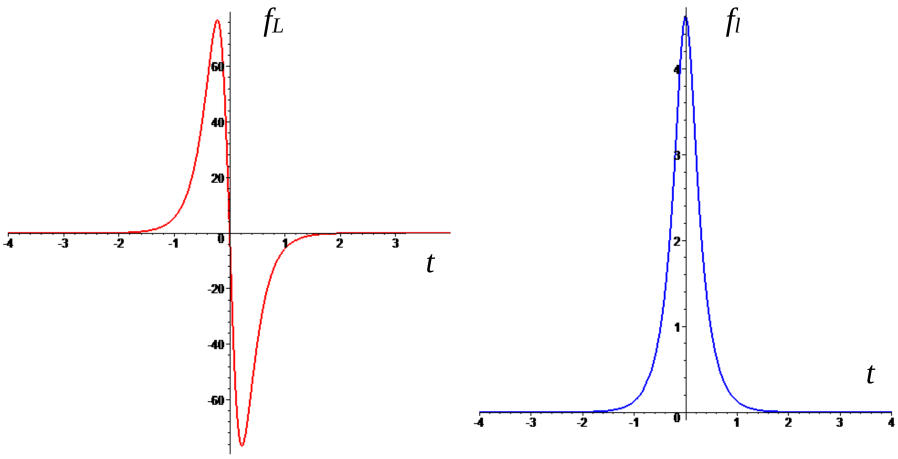


Рис. 4.9. *Нечетная (f_L) и четная (f_l) затухающие формы функций правых частей, вычисленных на гетероклинических решениях*

После разложения полигармонических функций $\boldsymbol{\eta}(t+t_0)$ с целью выделения множителей, явно содержащих гармонические функции аргумента t_0, и после интегрирования с учетом свойств функций (4.45), функция Мельникова получит полигармонический вид:

$$M(t_0) = \text{polyharm}(t_0) \tag{4.46}$$

что предопределяет наличие гетероклинического хаоса в изучаемом случае динамики спутника-гиростата, т.к. для полученной полигармонической функции будет иметь место наличие бесконечного числа простых корней.

Выявленная с помощью функции Мельникова (4.46) возможность хаотизации динамики может быть продемонстрирована с помощью построения фазовых траекторий полной динамической системы {(4.35) и (4.36)} без локализаций вблизи гетероклинических сепаратрисс, а также с помощью отображений Пуанкаре.

Представим фазовые траектории системы, построенные в трехмерном пространстве $\{l,\ L/I_2,\ I_2-I_2(0)\}$ (рис. 4.10, 4.11). Также приведем сечения Пуанкаре этого фазового пространства системы (4.35), построенные на основе условия попадания фазовой траектории на плоскость $I_2=I_2(0)=K$ (рис. 4.10). На рис. 4.10 видно перемешивание фазовых траекторий с разными уровнями энергии в области невозмущенных сепаратрисс (S_1-S_2-S'_1 на рис. 4.8-a). Это подтверждает факт расщепления сепаратрисных множеств и образования гетероклинической сети, позволяющей взаимные проникновения фазовых траекторий в соседние области фазового пространства.

Справедливо отметить, что большинство расчетов в настоящем пункте, включая рис. 4.10 и 4.11, проведено для довольно больших величин гравитационного параметра и кинетического момента, однако, это не влияет принципиальным образом на сделанные выводы, позволяя при этом видеть необходимые качественные эволюции динамики на менее длинных интервалах времени, что позволяет более эффективно осуществлять численное интегрирование. Для более близкого к практическим условиям моделирования динамики спутника-гиростата (низкие орбиты, медленные вращения) проведены расчеты (рис. 4.11-b), демонстрирующие те же самые качественные особенности движения.

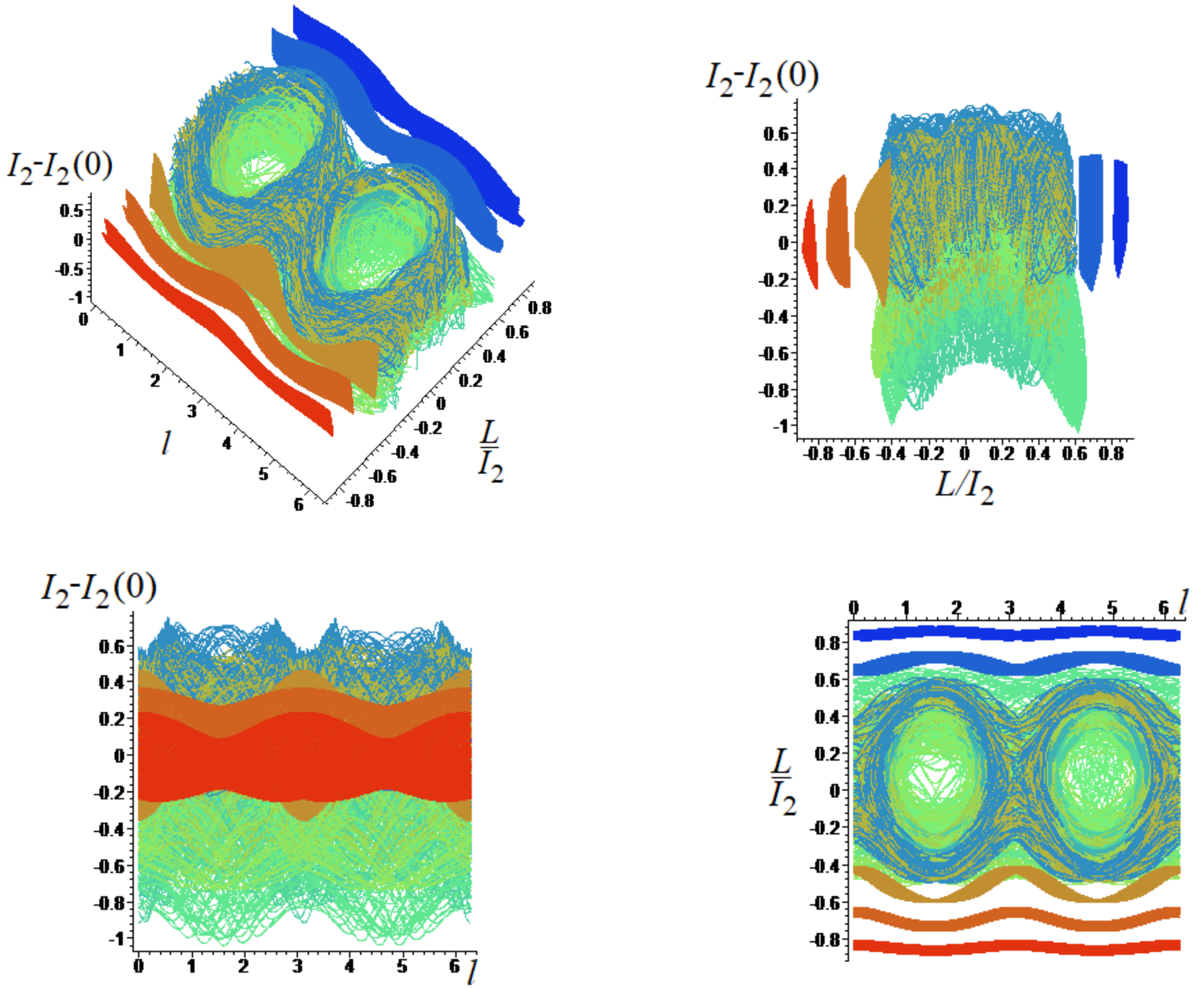
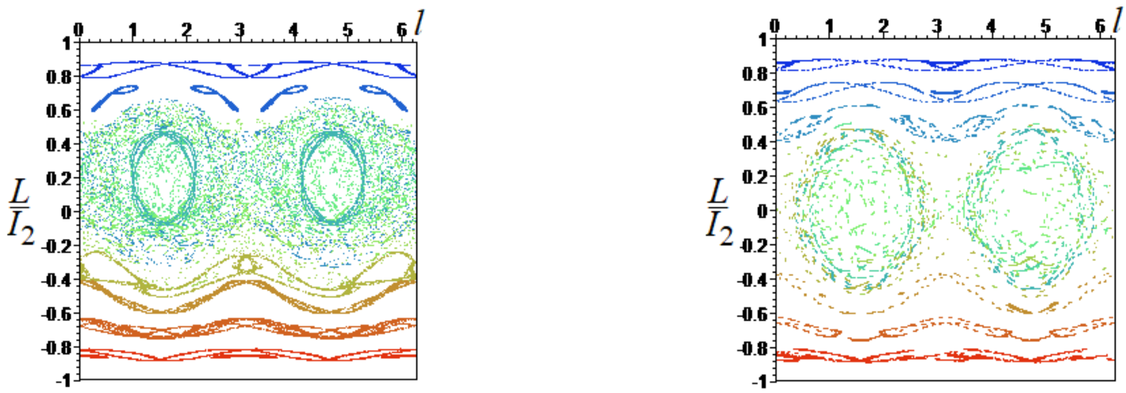


Рис. 4.10. *Трехмерный фазовый портрет и его проекции*



(a) (b)

Рис. 4.11. *Сечения Пуанкаре* (I_2=I_2(0)=K)

Таблица 4.1 – *Числовые параметры*

Моменты инерции: A_b=15, B_b=10, C_b=7, A_r=5, C_r=4 [кг·м^2]

Рис.	μ_g [1/с^2]	Начальные значения угловых скоростей [1/с]			Начальные значения для направляющих косинусов			Кинетические моменты [кг·м^2/с]	
		p_0	q_0	r_0	γ_1	γ_2	γ_3	K	Δ
4.6-a	0	-	-	-	-	-	-	4	0.550
4.6-b	0.053	-	-	-	-	-	-	4	0.550
4.6-c	0.075	-	-	-	-	-	-	4	0.550
4.6-d	0.150	-	-	-	-	-	-	4	0.550
4.6-e	0.210	-	-	-	-	-	-	4	0.550
4.6-f	0.500	-	-	-	-	-	-	4	0.550
4.7	0.046	0	0.266	0.019	0	0.997	0.073	4	0.155
4.8-a	0	-	-	-	0	0.954	0.3	4	0.155
4.8-b	0.046	-	-	-	0	0.954	0.3	4	0.155
4.10	0.046	-	-	-	-	-	-	4	0.155
4.11-a	0.055	-	-	-	-	-	-	4	0.550
4.11-b	$5\cdot10^{-6}$	-	-	-	-	-	-	0.04	10^{-4}

Таким образом, объяснена аналитически и показана численно хаотизация динамики спутника-гиростата в режимах, близких к конической прецессии в слабом центральном поле тяготения.

4.3. Хаос в динамике асимметричных гиростатов

Одной из причин рождения хаоса в динамике системы является ее динамическое несовершенство. Таким динамическим несовершенством можно, в частности, указать конструкционную асимметрию, приводящую к линейным и угловым эксцентриситетам осей вращения соосных тел спутника-гиростата, отклонению тензоров моментов инерции тел от главных и т.д. Все рассматриваемые конструкционные несовершенства указаны в параграфе 2.1, как факторы асимметрии, вносящие малые возмущающие члены во все основные динамические величины и в уравнения движения, описанные в главе 2. Именно эти аспекты хаотизации, возникающие за счет конструкционного несовершенства, будут рассматриваться в настоящем параграфе.

Актуальным направлением исследований в рамках анализа движения спутников-гиростатов является изучение хаотической динамики с выработкой методов подавления или полного устранения хаоса, возникающего за счет действия внутренних и внешних возмущений. К внутренним возмущениям в данном параграфе будут формально отнесены динамические факторы, связанные с присутствием в системе малых конструкционных асимметрий, описанных во второй главе.

Важно выделить проблему обнаружения гомо-/гетероклинического хаоса, возникающего за счет расщепления и бесконечнократного взаимопересечения устойчивых и неустойчивых множеств седловых особых точек, ограничивающих сепаратрисные траектории, приводящих в итоге к генерации так называемых гомо-/гетероклинических сетей. Следующим шагом является поиск условий подавления либо полного избегания хаоса в рамках возмущенной динамики, и здесь, как будет показано, имеется целый набор методов подавления хаоса, причем классическим подходом в этом направлении считается использование диссипативных подходов, например, использование диссипативных свойств внешней среды с сопротивлением, либо внутреннего трения, что отражено, например, в работах El-Gohary A. [217, 219], Iñarrea M., Lanchares V. [241-244, 263], Kuang J.L., Leung A.Y.T. [256-260, 267, 268], Meechan P.A., Asokanthan S.F. [287], Zhou L. [345]. Хаотическая динамика спутников-гиростатов в разных постановках исследовалась в работах Асланова В.С., Дорошина А.В. [28], Aslanov V.S., Yudintsev V.V. [150, 152, 154], Bao-Zeng [157, 158], Cheng [178], El-Gohary [219], Ge [225, 226], Holmes [238], Iñarrea, Lanchares [241-244], Leung, Kuang [267, 268], Meechan [287], Or [294], Peng [301], Shirazi [314], Tong, Tabarrok, Rimrott [326, 327]; при этом уместно отметить, что хаотизация динамики *нормальных* спутников-гиростатов из всех указанных здесь работ осуществлялась только в работах [28, 152, 154], в остальных работах исследовалась хаотизация гиростатов Кельвина.

Несмотря на широкий спектр представленных исследований, проблема анализа/подавления гетероклинического хаоса в динамике спутников-гиростатов не достигла своего завершения и будет решатся в настоящей главе. В частности, будет рассматриваться динамика асимметричного намагниченного спутника-гиростата в условиях реализации динамических режимов, близких к цилиндрическим прецессиям при действии возмущений от внешних и внутренних моментов сил. Изучение вопросов хоатизации динамики будет основываться на применении формализма Мельникова-Виггинса, описанного в параграфе 1.5.

Переходя к применению указанного формализма к детализированному исследованию проблемы хаотизации динамики *нормальных* асимметричных спутников-гиростатов при действии внешних и внутренних возмущений различной природы, стоит еще раз отметить, что необходимые гетероклинические решения получены для всех динамических параметров, включая компоненты угловых скоростей соосных тел (3.37), переменные Андуайе-Деприи (3.44), картезианские вращательная фаза и соответствующий импульс $\left\{\bar{\Delta},\ \bar{\delta}\right\}$, а также соответствующая им пара переменных действие-угол $\left\{\bar{I}_\Delta, \bar{w}_\delta\right\}$ (3.66).

Стоит напомнить, что уравнения движения порождаются возмущенным гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon\mathcal{H}_1$$

и конкретизированным видом возмущенными частями кинетической и потенциальной энергии (2.71).

Связывая типы систем Виггинса (параграф 1.5) и параметры динамики спутника-гиростата, отметим, что для обоих типов систем Виггинса n=m=k=1, а также имеют место следующие соответствия:

$$\begin{cases} x \leftrightarrow (l, L); \quad I \leftrightarrow \Delta = I_\Delta; \quad w \leftrightarrow \delta(w_\delta); \\ g^x(x, I, w, \mu; \varepsilon) = \left\{g_l\left(l, L, I_\Delta, \delta(w_\delta)\right),\ g_L\left(l, L, I_\Delta, \delta(w_\delta)\right)\right\}; \\ g^I(x, I, w, \mu; \varepsilon) = g_\Delta\left(l, L, I_\Delta, \delta(w_\delta)\right); \ g^w(x, I, w, \mu; \varepsilon) = g_\delta\left(l, L, I_\Delta, \delta(w_\delta)\right); \\ \Omega(x, I) = D_I\mathcal{H}_0(x, I) = f_\delta(l, L, I_\Delta). \end{cases} \tag{4.47}$$

Как можно видеть из (2.73) (принимая во внимание (2.70), (2.71)), все возмущения $g_l,\ g_L,\ g_\delta,\ g_\Delta$ (4.47) являются 2π-периодическими функциями угла относительного вращения δ.

В рамках необходимых описаний типов систем и их связей с системой асимметричного гиростата *могут быть выделены два главных варианта*, разделяющих случаи исследования динамики спутника-гиростата.

Вариант 1. Если рассматривать движение спутника-гиростата при действии общего вида возмущений (2.73) в присутствии их негамильтоновых частей $\left(m_\Delta^f,\ m_\Delta^{DC}\right)$, тогда в рамках исследования хаотизации динамики необходимо использовать систему первого типа “System I” (1.7) и (т.к. n=1) монокомпонентную функцию Мельникова $M_1^{\bar{I}}\left(w_0, \alpha; \mu\right)$, вычисляемую по формуле (1.10) следующим образом (здесь и далее прекращается упоминание о выполненном выборе конкретного гомо-/гетероклинического решения с маркированием его параметром α, а также о возможном параметрическом разнообразии системы, описываемом вектором параметров μ):

$$M_1^{\bar{I}}(w_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[D_l\mathcal{H}_0 \cdot g_l + D_L\mathcal{H}_0 \cdot g_L + D_\Delta\mathcal{H}_0 \cdot g_\Delta\right]\Big|_{q_0^{\bar{I}}(t)} dt - D_\Delta\mathcal{H}_0\Big|_{\gamma(\bar{\Delta})} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g_\Delta\Big|_{q_0^{\bar{I}}(t)} dt; \tag{4.48}$$

или, принимая во внимание (2.73), имеем:

$$M_1^{\bar{I}}\left(w_0\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f_l\cdot g_L-f_L\cdot g_l+f_\delta\cdot g_\Delta\right]\Big|_{q_0^{\bar{I}}(t)}dt-f_\delta\big|_{\gamma(\bar{\Delta})}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}g_\Delta\big|_{q_0^{\bar{I}}(t)}dt;\qquad(4.49)$$

$$q_0^{\bar{I}}\left(t\right)=\left\{\bar{l}\left(t\right),\bar{L}\left(t\right),\bar{\Delta},\int^t f_\delta\left(s\right)ds+w_0\right\},$$

где в составе вектора гомо-/гетероклинических решений $q_0^{\bar{I}}\left(t\right)$ последний компонент представляет собой гетероклиническое решение для картезианского угла относительного вращения, которое может быть записано посредством соответствующей угловой переменной с помощью «союзных» соответствий (3.66):

$$\int^t f_\delta\left(s\right)\Big|_{\bar{l}(s),\bar{L}(s),\bar{\Delta}}ds=\bar{\delta}\left(t\right)=\bar{w}_\delta\left(t\right)-\bar{v}_\delta\left(t\right)\qquad(4.50)$$

В результате будет иметь место следующий вектор гетероклинических решений, включающий выражения (3.37), (3.39) и (3.44):

$$q_0^{\bar{I}}\left(t\right)=\left\{\bar{l}\left(t\right),\;\;\bar{L}\left(t\right),\;\;\bar{I}_\Delta,\;\;\int^t f_\delta\left(s\right)ds+w_0=\bar{\delta}\left(t\right)+w_0\right\}=\qquad(4.51)$$

$$=\left\{\bar{l}\left(\bar{p}\left(t\right),\bar{q}\left(t\right),\bar{r}\left(t\right),\bar{\sigma}\left(t\right)\right),\,\bar{L}\left(\bar{p}\left(t\right),\bar{q}\left(t\right),\bar{r}\left(t\right),\bar{\sigma}\left(t\right)\right),\,\bar{\Delta},\,\bar{\delta}\left(\bar{w}_\delta\left(t\right)\right)+w_0=\bar{w}_\delta\left(t\right)-\bar{v}_\delta\left(t\right)+w_0\right\}$$

Как видно, в (4.51) явно фигурирует начальное значение для угла относительного вращения, показанное как начальное значение для угловой переменной w_0, что является корректным в силу введенных союзных соотношений (3.66). Явное указание в векторе (4.51) начального значения w_0, подчеркивает тот факт, что оно приобретает с этого момента свое самостоятельное место в записи вектора гетероклинических решений, поэтому везде далее гетероклинические угловые переменные будут иметь формальный вид без начальной фазы:

$$\begin{cases}\bar{w}_\delta\left(t\right)=\sigma_*\cdot t;\\ \bar{\delta}\left(t\right)=\bar{w}_\delta\left(t\right)-\bar{v}_\delta\left(t\right)=\sigma_*\cdot t-\bar{v}_\delta\left(t\right)\end{cases}\qquad(4.52)$$

Также важно отметить в рамках свойств формализма Мельникова-Виггинса эквивалентность [333] в использовании в виде аргументов функций Мельникова “начальных фаз” (w_0) и “начальных времен” (t_0), которые являются по своей сути одним и тем же “скользящим параметром”, параметризующим положение фазовой точки на гетероклинической фазовой траектории. Это обстоятельство [333] легко подтверждается самим видом зависимости угловой координаты $\bar{w}_\delta$, так как всегда легко найти соответствие этих параметров друг другу, выполнив простой пересчет и переобозначение $\left(w_0\leftrightarrow w_0'\right)$:

$$\begin{cases}\bar{w}_\delta\left(t\right)+w_0=\sigma_*t+w_0;\\ \bar{w}_\delta\left(t+t_0\right)=\sigma_*\left[t+t_0\right]=\sigma_*t+w_0';\end{cases}$$

т.е. исходный $\left(w_0\right)$ и пересчитанный/переобозначенный $\left(w_0'=w_0'\left(t_0\right)\right)$ «скользящие параметры» переходят друг в друга неким постоянным сдвигом [333]. По этой причине в рамках настоящего исследования в качестве аргумента функции Мельникова (он же «скользящий параметр») используется “начальная фаза” угловой координаты w_0.

Вариант 2. Если исследуемая система вместе со своими возмущениями имеет чистый гамильтоновый вид (т.е. $m_{\Delta}^{f} \equiv m_{\Delta}^{DC} \equiv 0$), тогда необходимо использовать второй тип системы "System III" (1.8) и (т.к. n=m=1) монокомпонентную функцию Мельникова $M_2^{\bar{I}}\left(w_0, \alpha; \mu\right)$, которая вычисляется по формуле (1.13) следующим конкретным образом, учитывая (2.70) и (2.71):

$$M_2^{\bar{I}}\left(w_0\right) = -\int_{-\infty}^{+\infty} D_{\delta}\mathcal{H}_1\Big|_{q_0^{\bar{I}}(t)} dt, \tag{4.53}$$

где вектор гетероклинических решений полностью совпадает с (4.51).

4.3.1. Хаос при наличии малой асимметрии и магнитных возмущений

Рассмотрим случай движения асимметричного гиростата с малыми угловыми $\left(\alpha_2 \neq 0,\ \beta_2 \neq 0\right)$ и линейными $\left(l_{2x} \neq 0,\ l_{2y} \neq 0\right)$ смещениями оси вращения соосных тел (P_1P_2) относительно главной центральной системы координат тела-платформы $C_2\bar{x}_2\bar{y}_2\bar{z}_2$ без аналогичных смещений относительно тела-ротора $\left(\alpha_1 = \beta_1 = l_{1x} = l_{1y} = 0\right)$ при действии магнитных (2.62) и бигармонических (2.69) возмущений, что определяется следующей группой параметров:

$$\begin{cases} e_B \neq 0; \quad e_l \neq 0; \quad e_{\rm I} \neq 0; \quad e_m \neq 0; \quad e_{\delta} \neq 0; \\ \alpha_2 \neq 0,\ \beta_2 \neq 0; \quad l_{2x} \neq 0,\ l_{2y} \neq 0; \\ \alpha_1 = \beta_1 = l_{1x} = l_{1y} = 0; \\ c_{\chi} = 1; \quad s_{\chi} = 0; \quad N = 2 \end{cases} \tag{4.54}$$

В этом случае функция Мельникова будет иметь вид, следующий из (4.53), (2.70), (2.71), принимая во внимание (2.45) и (2.37):

$$M_2^{\bar{I}}\left(w_0\right) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial T_1}{\partial \delta} + \frac{\partial P_1^m}{\partial \delta} + \frac{\partial P_1^{\delta}}{\partial \delta}\right]\Bigg|_{q_0^{\bar{I}}(t)} dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial T_B}{\partial \delta} + \frac{\partial P_1^m}{\partial \delta} + \frac{\partial P_1^{\delta}}{\partial \delta}\right]\Bigg|_{q_0^{\bar{I}}(t)} dt = \tag{4.55}$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \Bigg[e_B \frac{\bar{A}_1}{2}\Big[\left(\bar{p}^2(t) - \bar{q}^2(t)\right)\sin\left(2\left(\bar{\delta}(t) + w_0\right)\right) - \bar{p}(t)\bar{q}(t)\cos\left(2\left(\bar{\delta}(t) + w_0\right)\right)\Big] +$$

$$+ e_{\delta}\sum_{n=1}^{N} n\Big(a_n \cos\left(n\left(\bar{\delta}(t) + w_0\right)\right) - b_n \sin\left(n\left(\bar{\delta}(t) + w_0\right)\right)\Big) -$$

$$- e_m \frac{Q}{G}\Big(B\bar{q}(t)\cos\left(\bar{\delta}(t) + w_0\right) - A\bar{p}(t)\sin\left(\bar{\delta}(t) + w_0\right)\Big)\Bigg] dt.$$

Используя элементарные тригонометрические преобразования и свойства четных/нечетных функций, можно получить следующие результаты выполнения интегрирования в рамках записи итогового вида функции Мельникова в форме тригонометрического полинома:

$$
\begin{gathered}
M_2^{\bar{I}}\left(w_0\right)=e_B J_B \sin 2w_0+e_m J_m \sin w_0+ \\
+e_\delta\left[J_\delta^{\langle a_1\rangle}\cos w_0+J_\delta^{\langle b_1\rangle}\sin w_0+J_\delta^{\langle a_2\rangle}\cos 2w_0+J_\delta^{\langle b_2\rangle}\sin 2w_0\right],
\end{gathered}
\tag{4.56}
$$

где имеют место следующие ненулевые значения для сходящихся несобственных интегралов[1] (явный аналитический вид этих интегралов не имеет значения):

$$
\begin{cases}
J_B=-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\bar{A}_1}{2}\left[\left(\bar{p}^2(t)-\bar{q}^2(t)\right)\cos\bar{\delta}(t)+\bar{p}(t)\bar{q}(t)\sin\bar{\delta}(t)\right]dt=\text{const}\neq 0; \\
J_m=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{Q}{G}\left[A\bar{p}(t)\cos\bar{\delta}(t)-B\bar{q}(t)\sin\bar{\delta}(t)\right]dt=\text{const}\neq 0; \\
J_\delta^{\langle a_1\rangle}=-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}a_1\cos\bar{\delta}(t)\,dt=\text{const}\neq 0;\quad J_\delta^{\langle b_1\rangle}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}b_1\cos\bar{\delta}(t)\,dt=\text{const}\neq 0; \\
J_\delta^{\langle a_2\rangle}=-2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}a_2\cos 2\bar{\delta}(t)\,dt=\text{const}\neq 0;\quad J_\delta^{\langle b_2\rangle}=2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}b_2\cos 2\bar{\delta}(t)\,dt=\text{const}\neq 0.
\end{cases}
\tag{4.57}
$$

Структура функции Мельникова (4.56) представляет собой обычный тригонометрический полином с постоянными коэффициентами (4.57) и, следовательно, функция Мельникова неизбежно имеет бесчисленное множество простых корней, что доказывает наличие гетероклинических расщеплений и бесконечного числа пересечений расщепленных устойчивых и неустойчивых многообразий сепаратрисной траектории – это обстоятельство, как указал А. Пуанкаре, главной причиной чрезвычайного усложнения динамики, что определяется как детерминированный хаос. Таким образом, в рамках продемонстрированного примера показано принципиальное присутствие динамического хаоса в возмущенном движении асимметричного намагниченного спутника-гиростата, как гамильтоновой системы с гамильтоновыми возмущениями.

Важно отметить, что результаты обнаружения хаотической динамики в гамильтоновых случаях гиростатов и твердотельных систем были представлены в ряде известных работ. Во-первых, в известной работе [238] в рамках изучения движения твердых тел (твердых тел с присоединенными «ротаторами») проведено обнаружение гетероклинического хаоса, где использовался авторский подход Holms-Marsden и была построена моногармоническая функция Мельникова $\left(M\left(w_0\right)=C\sin\left(2w_0\right)\right)$. Во-вторых, подобный моногармонический результат был представлен в работе [301], посвященной исследованию гиростата с асимметричным ротором. Также хаос в движении асимметричного намагниченного гиростата на эллиптической орбите был изучен в работе [241], а в работе [242] рассмотрена хаотизация и получен моногармонический вид функции Мельникова для динамики космического аппарата с двойным вращением при переменности моментов инерции, описывающих упругие свойства конструкции. Можно также указать работу [178] с моногармоническим результатом для функции Мельникова в случае исследования динамики асимметричного гиростата в магнитном поле,

[1] Сходимость несобственных интегралов может быть проверена как численно, так и аналитически.

рассматривая последнее, как причину малых возмущений. Стоит, однако, отметить, что все перечисленные выше работы выполнялись для гиростата Кельвина, что, вообще говоря, делает полученные результаты неприменимыми для описания *нормального* типа спутника-гиростата при его реальных режимах движения, так как базовые гетероклинические решения будут другими.

Возвращаясь к исследованию хаотической динамики, необходимо привести некоторые результаты численного моделирования (рис. 4.12), демонстрирующие главные свойства хаотического движения. Численное моделирование (рис.4.12) проводилось при следующих параметрах:

$$\begin{cases} \varepsilon = 0.03; \quad e_B = e_\delta = 1; \quad e_l = e_{\mathrm{I}} = e_m = e_F = 0; \\ a_1 = b_1 = 0, \ a_2 = 0.25, \ b_2 = -0.9 \, [\mathrm{kg \cdot m^2/s^2}]. \end{cases}$$

$$\hat{A}_1 = 5; \ \bar{C}_1 = 4; \ \hat{A}_2 = 15; \ \hat{B}_2 = 10; \ \bar{C}_2 = 6 \quad [\mathrm{kg \cdot m^2}];$$

$$\hat{A}_2 = \bar{A}_2 + M_2 \cdot OP_2^2; \ \hat{B}_2 = \bar{B}_2 + M_2 \cdot OP_2^2.$$

$$p_0 = 1.5, \ q_0 = 0, \ r_0 = 1.33124; \quad \sigma_0 = -0.58124 \ [\mathrm{rad/s}];$$

$$\bar{\Delta} = 3, \ G = I_2 = 31.9487 \ [\mathrm{kg \cdot m^2/s}]; \quad Q = -20, \ \tilde{T} = 35.8198 \ [\mathrm{kg \cdot m^2/s^2}].$$

Как можно видеть из результатов интегрирования уравнений движения (рис. 4.12), для динамики характерны сложные зависимости от времени для компонент угловых скоростей (рис. 4.12-a, b) и сложные фазовые траектории в фазовом пространстве Андуайе-Деприи (рис. 4.12-d) с нерегулярным поведением. Важно также продемонстрировать сечение Пуанкаре (рис. 4.13), построенное на базе условия повторяемости угловой переменной с учетом периодичности:

$$\left[\bar{w}_\delta(t) \bmod 2\pi \right] = \bar{w}_\delta(0) = 0 \tag{4.58}$$

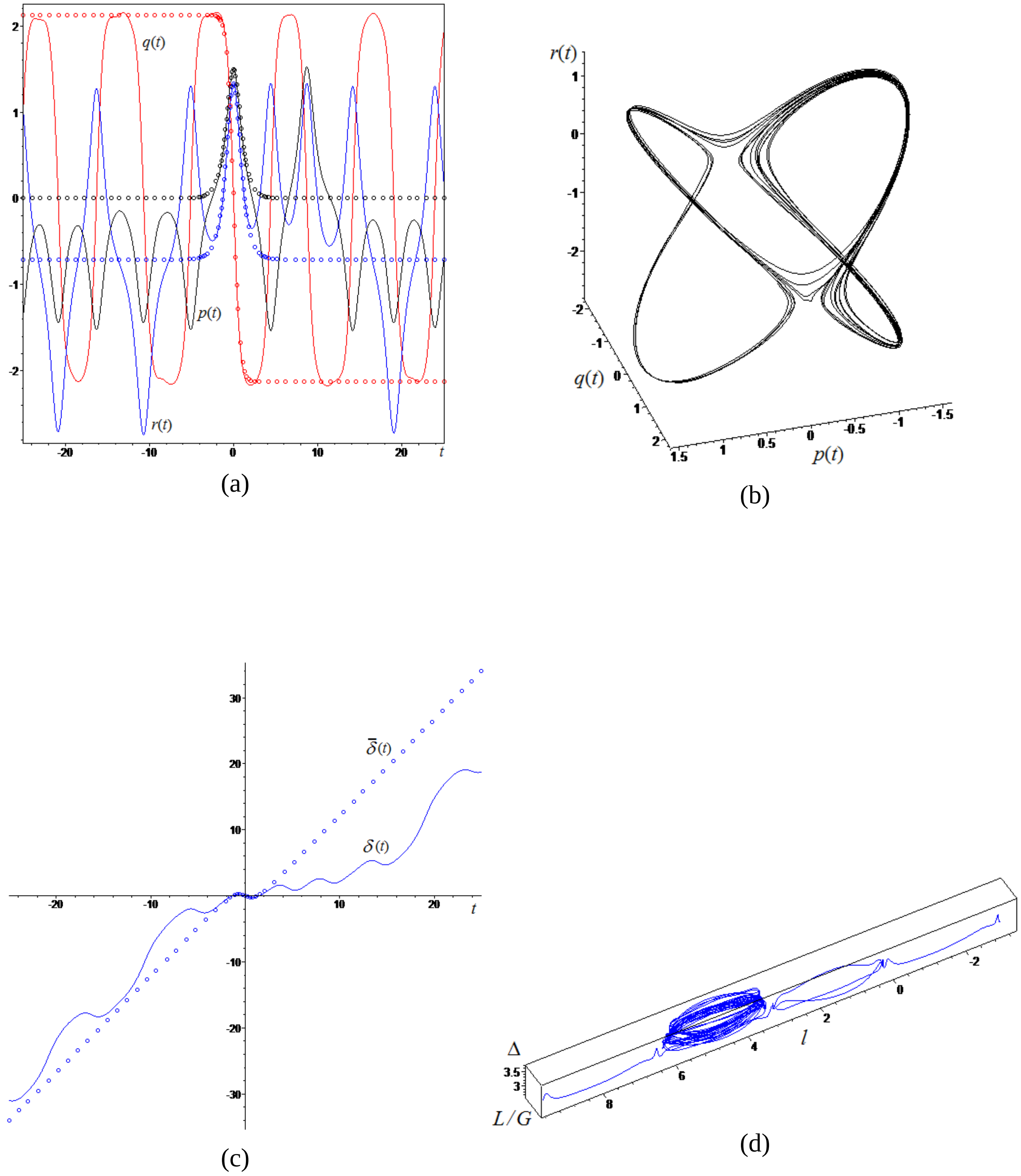


Рис. 4.12. *Численные результаты моделирования*:
компоненты угловой скорости и фазовые траектории
вблизи невозмущенной сепаратрисы

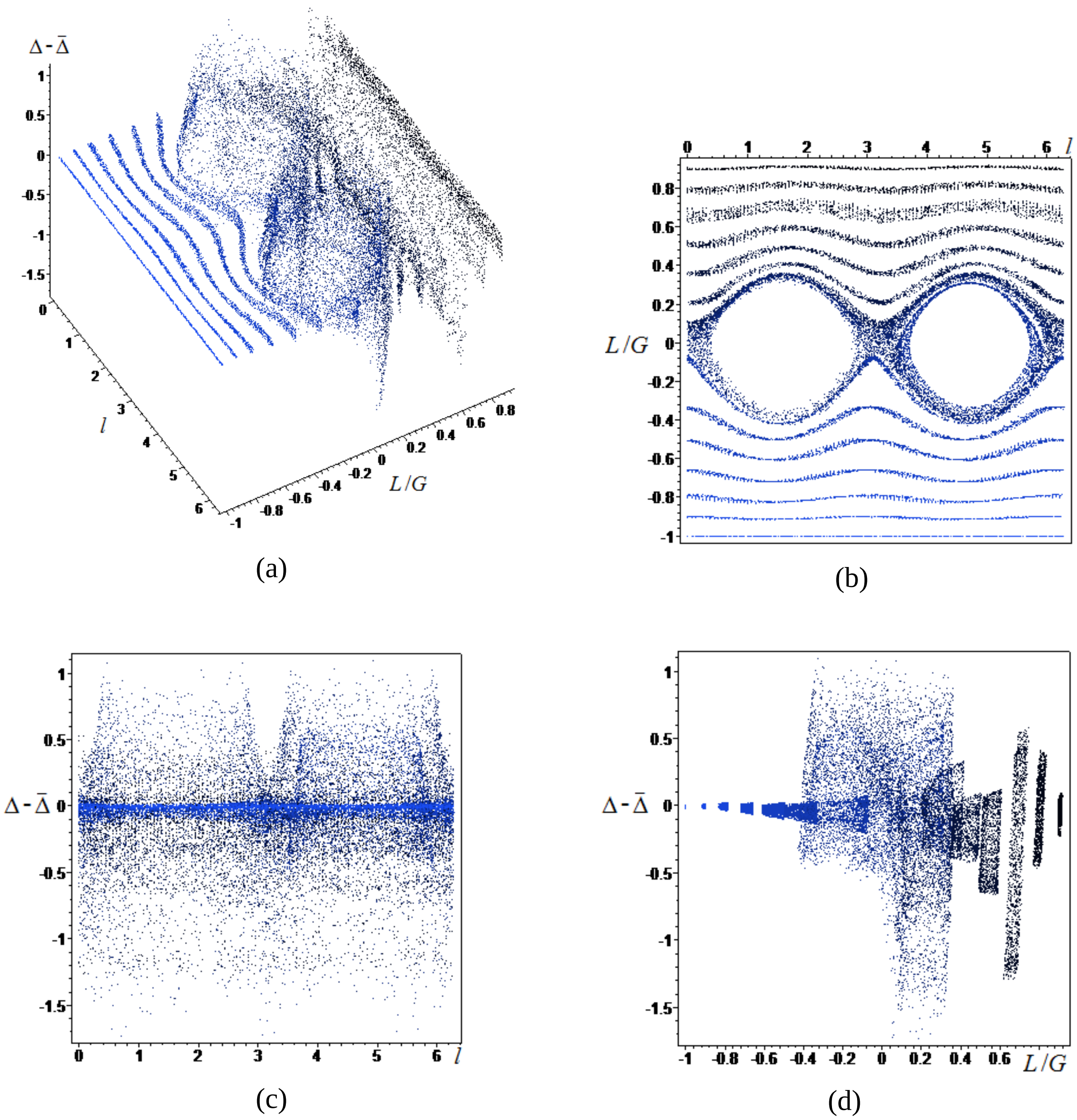


Рис. 4.13. *Трехмерное сечение Пуанкаре в фазовом пространстве* $\{l,\ L/I_2,\ \Delta-\bar{\Delta}\}$

Сечение Пуанкаре (рис. 4.13) демонстрирует признаки гетероклинического хаоса, что выражается в наличии так называемого хаотического слоя в окрестности сепаратрисс – данный слой представляет собой совокупность точек, не попадающих на регулярные инвариантные фазовые кривые и поэтому образующих размытые скопления и локализующихся в фазовой области, характерной (в невозмущенной ситуации) для иных фазовых инвариантных кривых. Среди причин возникновения хаотических слоев необходимо упомянуть следующее [302, 18, 63, 239]: гомо-/гетероклинические траектории могут образовывать гомо-/гетероклинические сети, являющиеся результатом бесконечного пересечения расщепленных устойчивых и неустойчивых многообразий седловых точек, ограничивающих сепаратрису и, как следствие, фазовая точка в возмущенном случае вынуждена двигаться не вдоль регулярных инвариантных кривых, а по гомо-/гетероклиническим-сетевым сложным сплетениям, демонстрируя режим детерминированного хаоса.

Для иллюстрации рождения гомо-/гетероклинических сетей целесообразно продемонстрировать начальные стадии их генерации в рамках возмущенной динамики. Так [192] вполне эффективным способом увидеть элементы гомо-/гетероклинической сети является построение образов и прообразов отображения Пуанкаре непосредственно для исходных невозмущенных сепаратрисс. При этом точки невозмущенной сепаратрисы при нахождении их образов отображения Пуанкаре «в прямом» направлении времени будут ложиться на расщепленную неустойчивую ветку возмущенной сепаратрисы ($t \to +\infty$), а прообразы отображения Пуанкаре (образы «в обратном» направлении времени ($t \to -\infty$)) будут ложиться на устойчивую расщепленную ветку возмущенной сепаратрисы. При построении таких образов и прообразов Пуанкаре для точек, изначально принадлежащих невозмущенной гомо-/гетероклинической траектории можно получить формы расщепления возмущенной сепаратрисы, увидев при этом формы возмущенных и расщепленных неустойчивой и устойчивой ее ветвей, причем эти формы будут усложняться по мере увеличения числа шагов (образов и прообразов) отображения Пуанкаре; даже на первом шаге отображения можно будет зарегистрировать сложную промежуточную форму взаимного расположения и наличия пересечений устойчивой и неустойчивой веток на совместно изображенных образе и прообразе отображения Пуанкаре. Итоговая форма расщепленных ветвей, их пересечений и, собственно, вид гомо-/гетероклинической сети будут соответствовать построению образов и прообразов с номерами шагов, стремящихся к бесконечности.

На рис. 4.14 представлены первые образ и прообраз отображения Пуанкаре, выполненного для точек невозмущенной сепаратрисы. На рис. 4.15 приведены первые три образа и три прообраза отображения Пуанкаре, что позволяет видеть с каждым шагом усложняющуюся динамику формирования гетероклинической сети.

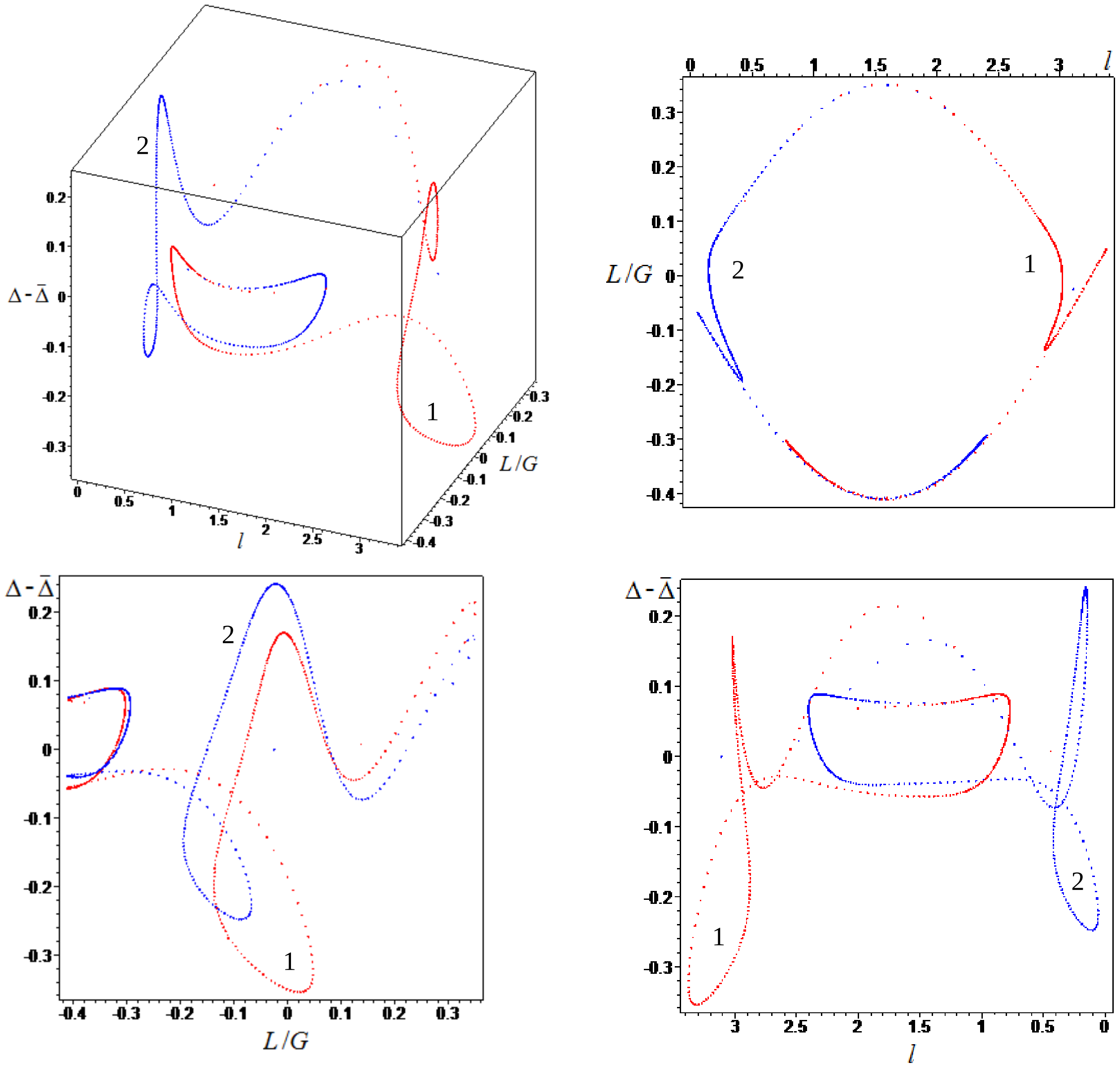


Рис. 4.14. *Фрагмент гетероклинической сети как совместное отображение первого образа (красный-1) и первого прообраза (синий-2) отображения Пуанкаре для точек невозмущенной сепаратрисы*

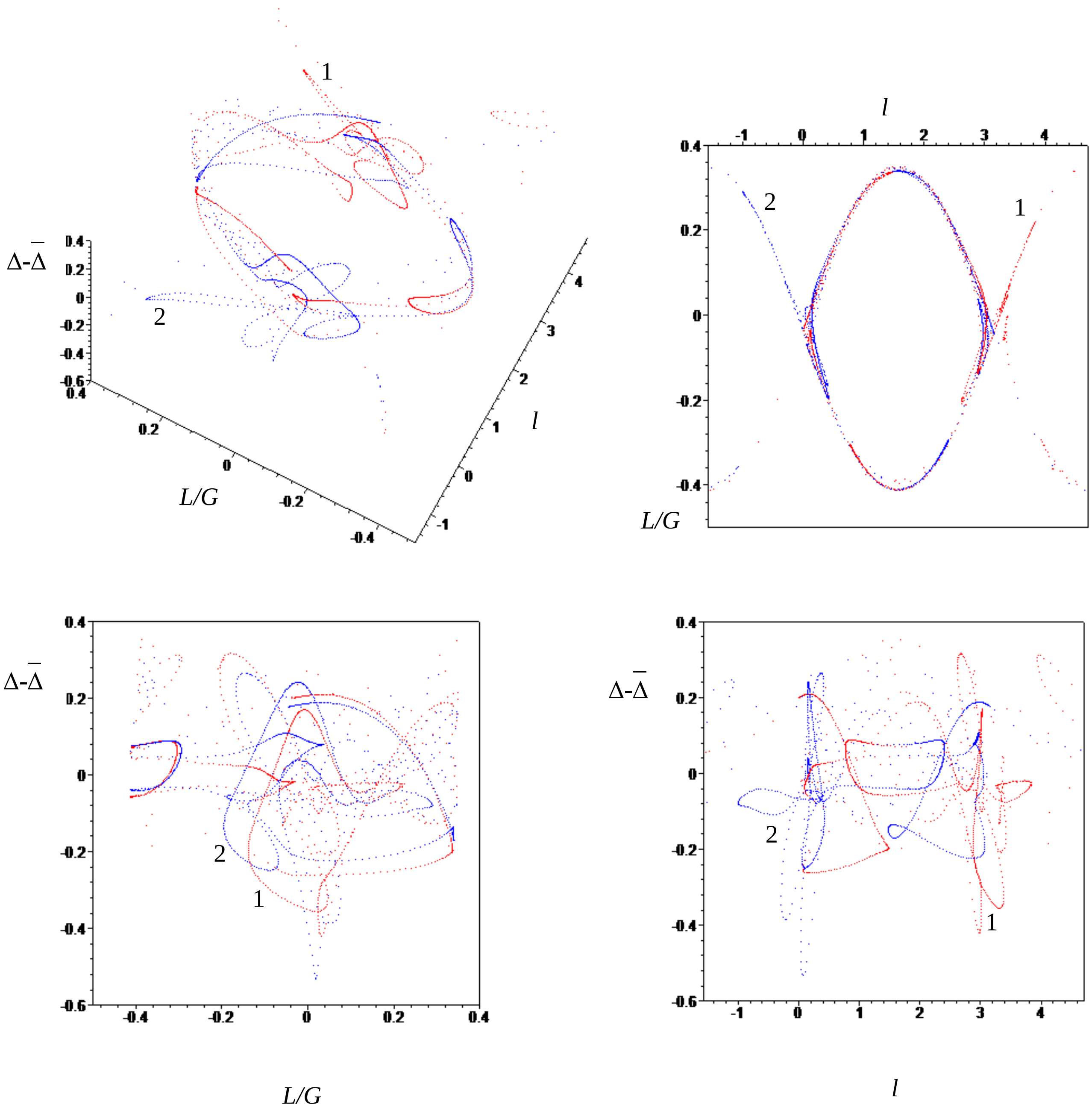


Рис. 4.15. *Фрагмент гетероклинической сети как совместное отображение первых трех образов (красный-1) и трех прообразов (синий-2) отображения Пуанкаре для точек невозмущенной сепаратрисы*

4.3.2. Хаос при диссипативных возмущениях

Рассмотрим случай движения асимметричного спутника-гиростата при действии негамильтоновых возмущений, включая (2.65) и (2.67). Как видно из выражений (2.65) и (2.67), можно рассмотреть следующую их совместную форму:

$$\begin{cases} m_\Delta = m_\Delta(\sigma,t) = m_\Delta^f + m_\Delta^{DC} = -e_\sigma \sigma(t) + e_F F(t); \\ F(t) = e_F \left[\tilde{e}_U U(t) - \tilde{e}_\kappa \operatorname{sign}(\sigma(t)) \right]; \\ e_\sigma = e_\nu + e_\mu; \quad e_F = \sup\{e_\kappa, e_U\}; \\ \tilde{e}_U = e_U / e_F; \quad \tilde{e}_\kappa = e_\kappa / e_F \end{cases} \tag{4.59}$$

Для рассматриваемого случая можно записать функцию Мельникова-Виггинса (4.49) в форме с разделением на две части:

$$M_1^{\bar{I}}(w_0) = M(w_0) + W(w_0), \tag{4.60}$$

где

$$M(w_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f_l \cdot g_L - f_L \cdot g_l \right]\Big|_{q_0^{\bar{I}}(t)} dt; \tag{4.61}$$

$$W(w_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f_\delta\big|_{q_0^{\bar{I}}(t)} - f_\delta\big|_{\gamma(\bar{\Delta})} \right) \cdot g_\Delta\big|_{q_0^{\bar{I}}(t)} dt \tag{4.62}$$

Функция $M(w_0)$ соответствует классической части (классической функции В.К. Мельникова), а функция $W(w_0)$ представляет собой дополненную часть С.Виггинса. Принимая во внимание структуру (2.73) возмущений g_Δ, их можно разделить на гамильтонову часть $\left(g_\Delta^{\mathcal{H}}\right)$ и на негамильтонову часть $\left(g_\Delta^{\mathcal{NH}}\right)$:

$$g_\Delta = g_\Delta^{\mathcal{H}} + g_\Delta^{\mathcal{NH}}; \qquad g_\Delta^{\mathcal{H}} = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \delta}; \qquad g_\Delta^{\mathcal{NH}} = m_\Delta^f + m_\Delta^{DC} = m_\Delta \tag{4.63}$$

Основываясь на выражениях (2.73), (2.71) и (2.37), следует форма правой части f_δ:

$$f_\delta = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \Delta} = \frac{\left(\bar{C}_1 + \bar{C}_2\right)\Delta - \bar{C}_1 L}{\bar{C}_1 \bar{C}_2} = \hat{\sigma}_0(t);$$

где $\hat{\sigma}_0(t)$ представляет невозмущенную зависимость от времени для относительной угловой скорости ротора; поэтому с помощью гетероклинических решений (3.37)-(3.40) члены в скобках в выражении (4.62) перепишутся в следующем упрощенном виде:

$$f_\delta\big|_{q_0^{\bar{I}}(t)} = \bar{\sigma}(t); \qquad f_\delta\big|_{\gamma(\bar{\Delta})} = f_\delta\big|_{q_0^{\bar{I}}(t\to\pm\infty)} = \bar{\sigma}(\pm\infty) = \Delta\big/\bar{C}_1 - (\Delta - EB)\big/\left(B - \bar{C}_2\right) = \sigma_* \tag{4.64}$$

Таким образом, Виггинсова часть функции Мельникова-Виггинса запишется:

$$W(w_0) = W_{\mathcal{H}}(w_0) + W_{\mathcal{NH}} \tag{4.65}$$

где

$$W_{\mathcal{H}}\left(w_0\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\bar{\sigma}\left(t\right)-\sigma_*\right)\cdot g_{\Delta}^{\mathcal{H}}\Big|_{q_0^{\bar{I}}(t)}dt; \tag{4.66}$$

$$W_{\mathcal{NH}}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\bar{\sigma}\left(t\right)-\sigma_*\right)\cdot m_{\Delta}\left(\bar{\sigma}\left(t\right),t\right)dt=J_{\mathcal{NH}}=\text{const} \tag{4.67}$$

Здесь очень важно отметить, что несобственные интегралы (4.66) и (4.67) гарантированно сходятся, так как блок $\left(\bar{\sigma}\left(t\right)-\sigma_*\right)$ есть четная функция, экспоненциально затухающая к нулю при $t\to\pm\infty$ (этот факт следует из аналитических выражений (3.37)-(3.40), и был ранее проиллюстрирован на рис. 3.5).

Функция Мельникова-Виггинса в итоге всегда представляется в форме:

$$M_1^{\bar{I}}\left(w_0\right)=M\left(w_0\right)+W_{\mathcal{H}}\left(w_0\right)+J_{\mathcal{NH}} \tag{4.68}$$

Для дальнейшего применения формализма Мельникова-Виггинса целесообразно получить некоторые вспомогательные соотношения для указанных выше частей функции Мельникова-Виггинса. Учитывая соотношения (2.73), (2.71), (2.37) и гетероклинические решения (3.37)-(3.40), можно представить функции $f_L\big|_{q_0^{\bar{I}}(t)}$, $f_l\big|_{q_0^{\bar{I}}(t)}$ в форме явных зависимостей от времени:

$$f_L\big|_{q_0^{\bar{I}}(t)}=\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)\left(G^2-\bar{L}^2\right)\sin\bar{l}\,\cos\bar{l}\,=AB\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)\bar{p}\left(t\right)\bar{q}\left(t\right); \tag{4.69}$$

$$f_l\big|_{q_0^{\bar{I}}(t)}=-\bar{L}\left(\frac{\sin^2\bar{l}}{A}+\frac{\cos^2\bar{l}}{B}\right)+\frac{1}{\bar{C}_2}\left(\bar{L}-\bar{\Delta}\right)=\bar{r}\left(t\right)-b\left(t\right)\left(A\bar{p}^2\left(t\right)+B\bar{q}^2\left(t\right)\right), \tag{4.70}$$

где

$$b\left(t\right)=\frac{\bar{C}_2\bar{r}\left(t\right)+\bar{\Delta}}{G^2-\left[\bar{C}_2\bar{r}\left(t\right)+\bar{\Delta}\right]^2}\,. \tag{4.71}$$

Из последних формул и формы гетероклинических решений (3.37)-(3.40) легко заключить что $f_L\big|_{q_0^{\bar{I}}(t)}$ есть нечетная функция, а $f_l\big|_{q_0^{\bar{I}}(t)}$ есть четная функция ($b(t)$ также есть четная функция). Обе функции при этом быстро стремятся к нулю при $t\to\pm\infty$ (рис. 4.9), что всегда гарантирует сходимость несобственных интегралов в классической части функции Мельникова-Виггинса (4.61).

В целях представления явных форм для функций $M\left(w_0\right)$ and $W_{\mathcal{H}}\left(w_0\right)$, которые зависят только лишь от аргумента w_0, необходимо перезаписать выражения для g_L, g_l, $g_{\Delta}^{\mathcal{H}}$ (определяемые посредством (2.73) и (4.63)) после подстановки в них $q_0^{\bar{I}}\left(t\right)$ (4.51) с явным выделением гармонических функций от аргумента w_0. Указанная процедура не требует подробного описания, т.к. является простой и предусматривает использование тригонометрических преобразований с приведением подобных членов. Поэтому возможно записать результат в общем виде[2], объединяющем все возможные случаи:

$$\begin{cases} g_L\big|_{q_0^{\bar{I}}(t)} = \sum\limits_{n=1}^{2}\Big(C_{L,n}(t)\cos(nw_0)+S_{L,n}(t)\sin(nw_0)\Big)+C_{L,0}(t); \\ g_l\big|_{q_0^{\bar{I}}(t)} = \sum\limits_{n=1}^{2}\Big(C_{l,n}(t)\cos(nw_0)+S_{l,n}(t)\sin(nw_0)\Big)+C_{l,0}(t); \\ g_\Delta^{\mathcal{H}}\big|_{q_0^{\bar{I}}(t)} = \sum\limits_{n=1}^{N}\Big(C_{\Delta,n}(t)\cos(nw_0)+S_{\Delta,n}(t)\sin(nw_0)\Big)+C_{\Delta,0}(t); \end{cases} \tag{4.72}$$

где

$$\begin{cases} C_{i,n}(t)=C_{i,n}\left(\bar{L}(t),\bar{l}(t),\bar{\delta}(t)\right)=C_{i,n}\left(\bar{p}(t),\bar{q}(t),\bar{r}(t),\bar{\delta}(t)\right); & n=0...N; \\ S_{i,n}(t)=S_{i,n}\left(\bar{L}(t),\bar{l}(t),\bar{\delta}(t)\right)=S_{i,n}\left(\bar{p}(t),\bar{q}(t),\bar{r}(t),\bar{\delta}(t)\right); & i=\{L,l,\Delta\} \end{cases} \tag{4.73}$$

Подстановка функций (4.69)-(4.72) в интегралы (4.61), (4.66) и несобственное интегрирование с учетом свойств симметрии четных и нечетных функций даст в итоге форму функции Мельникова-Виггинса в виде простого тригонометрического полинома:

$$M_1^{\bar{I}}(w_0)=P_{trig}(w_0)+J_{\mathcal{NH}}; \tag{4.74}$$

где

$$P_{trig}(w_0)=M(w_0)+W_{\mathcal{H}}(w_0)=\sum_{n=0}^{N}\Big(J_{c,n}\cos(nw_0)+J_{s,n}\sin(nw_0)\Big);\quad J_{c,n}=\text{const};\quad J_{s,n}=\text{const} \tag{4.75}$$

Константы $J_{s,n}$ и $J_{c,n}$ определяются конкретикой выражений (4.72) и соответствующими результатами несобственного интегрирования[3] (некоторые интегралы будут обращаться в нули).

Стоит отметить, что форма функции Мельникова-Виггинса (4.74) может быть охарактеризована, как общий вид, учитывающий все возможные случаи естественных возмущений, рассматриваемых в настоящей работе (в т.ч. возмущения, связанные с факторами асимметрии, внешними магнитными и внутренними электромагнитными возмущениями, внутренним трением, а также полигармоническими возмущениями различной природы), а также она будет актуальна и для других возможных случаев негамильтоновых возмущений. В этой связи, следует сказать, что форма (4.74) функции Мельникова-Виггинса обобщает собой все возможные случаи выявления гетероклинического хаоса в возмущенной динамики *нормального* спутника-гиростата.

Сравнительный анализ результата в форме (4.74) и результатов предшествующих исследований [238, 242, 243, 257, 260, 267, 158, 294, 295] будет представлен ниже.

Как локальное заключение по текущему вопросу можно подчеркнуть простую полигармоническую структуру функции Мельникова-Виггинса (4.74), которая очевидным образом подразумевает возможность бесконечного множества своих корней – этот факт, в

---

[2] Явный вид функций (4.72) будет представлен в одном из дальнейших примеров

[3] Сходимость интегралов может быть проверена численно, либо аналитически (явный пример будет приведен ниже).

свою очередь, во-первых, доказывает присутствие хаоса в возмущенной динамике спутника-гиростата, и, во-вторых, обобщенно определяет условия отсутствия корней в зависимости от значения аддитивной константы $J_{\mathcal{NH}}$.

Факт возможной хаотизации динамики ранее изучался в случае гиростат Кельвина, что не соответствует результатам, представленным выше и определяющим свойства хаотизации, ее проявления и подавления в динамике *нормальных* гиростатов.

Таким образом, главными отличительными особенностями проведенных исследований и полученных результатов необходимо считать следующие аспекты:

1. Исследования проведены для *нормального* типа гиростата, на основе полученных в работе гетероклинических решений для его динамики при наличии собственного продольного дипольного момента, а также в случае реализации омега-режимов.
2. Получено гетероклиническое решение для переменных типа действие-угол для вращающейся фазы (угла относительного вращения тела-ротора) нормального спутника-гиростата, что позволило полностью удовлетворить условия корректного применения формализма Мельникова-Виггинса.
3. В результате корректного удовлетворения всех требований формализма Мельникова-Виггинса получена общая форма функции Мельникова-Виггинса для нормального спутника-гиростата в простой полигармонической форме с аддитивной постоянной в случаях действия произвольных негамильтоновых возмущений, что позволяет проводить оценку возможности хаотизации динамики, а также осуществлять поиск условий реализации хаоса и его подавления.

4.4. Методы подавления хаоса

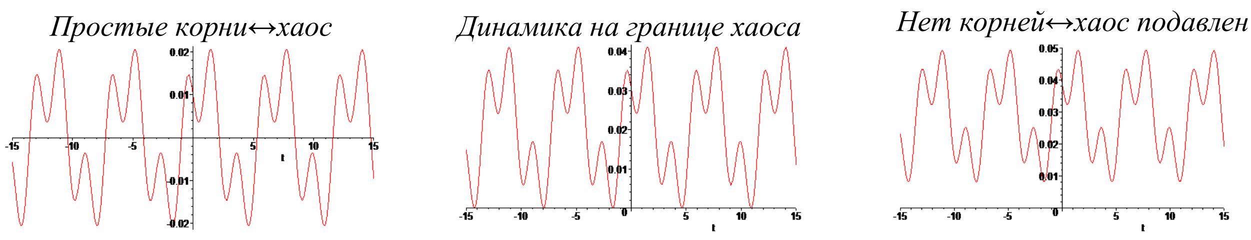
Рассмотрим возможность подавления обнаруженного хаоса в динамике спутника-гиростата. Прежде всего, необходимо определить принципиальную возможность подавления хаоса и его проявлений в системе. Как и ранее, рассмотрим два случая динамики спутника-гиростата: случай гамильтоновых возмущений и случай негамильтоновых возмущений.

В случае гамильтоновых возмущений функция Мельникова-Виггинса имеет вид (4.56), который представляет собой тригонометрический полином без каких-либо свободных постоянных членов, из чего следует, что подобный вид функции Мельникова-Виггинса будет иметь бесчисленное количество простых корней при любом случае сочетания параметров спутника-гиростата. Этот факт определяет невозможность устранения хаоса без устранения самих возмущений, его вызывающих (при снятии возмущений амплитуда функции Мельникова-Виггинса становится равной нулю и говорить о ее корнях не приходится). Таким образом, в рамках возмущенной динамики спутника-гиростата при действии гамильтоновых возмущений явление гетероклинического хаоса является неизбежным и неустранимым, а единственным способом устранения хаоса в системе будет являться недопущение (устранение или минимизация) самих возмущений.

В случае действия негамильтоновых возмущений имеет место функция Мельникова-Виггинса, представляющая собой гармонический полином со свободным аддитивным постоянным членом (4.74). Из вида функции (4.74) непосредственно следует условие отсутствия простых ее корней в виде следующего неравенства, смысл которого обеспечить за счет постоянного аддитивного члена смещение графика функции вдоль оси ординат так, чтобы избежать наличие его пересечений с осью абсцисс, что выражается простым ограничением на амплитудные значения тригонометрического полинома:

$$Am\left(P_{trig}\left(w_0\right)\right) \le \left|J_{\mathcal{NH}}\right| \tag{4.76}$$

где функция $Am(\bullet)$ означает установление максимальной амплитуды колебаний простого тригонометрического полинома, как установление его максимально большой положительной величины на периоде колебаний. Здесь уместно заметить, что смещение графика функции Мельникова может быть реализовано как вверх, так и вниз от оси абсцисс, поэтому знак постоянного аддитивного члена $J_{\mathcal{NH}}$ не имеет значения. Простой геометрический смысл условия (4.76) состоит в форме пересечения/касания/отсутствия конакта линии графика функции $f\left(w_0\right) = P_{trig}\left(w_0\right) \mp \left|J_{\mathcal{NH}}\right|$ и оси абсцисс:



Наличие/отсутствие простых корней $f\left(w_0\right)$ *как геометрическая интерпретация* (4.76)

Неравенство (4.76) представляет собой условие возможного подавления гетероклинического хаоса в динамике нормального асимметричного гиростата.

Подобные по смыслу условия для нормального спутника-гиростата ранее определялись в работах [152, 154], где также за основу синтеза условия подавления хаоса в возмущенной динамике был выбран формализм Мельникова-Виггинса, на основе которого получено следующее функциональное двупараметрическое (t_0, τ_0) условие подавления хаоса для случая действия на гиростат внешнего момента сил, направленного по продольной оси и пропорционального скорости изменения позиционной координаты $\left(g_\delta = k\dot{l}\right)$:

$$max|M_0(t_0)| \leqslant |\Delta M(\tau_0, g_\delta)|. \tag{4.77}$$

В случаях исследования динамики тела и гиростата Кельвина условия подавления хаоса в моногармонической форме определялись ранее в ряде работ. Так, в работе [257] на основе формализма Мельникова-Виггинса получено моногармоническое условие подавления хаоса в динамике асимметричного гиростата Кельвина при действии внешних диссипативных моментов сил и моногармонического возмущения. В работе [243] на основе формализма Мельникова-Виггинса исследовалась хаотизация асимметричного тела при наличии гармонических изменений в величинах моментов инерции и действии внешнего диссипативного момента сил, где было построено моногармоническое условие подавления хаоса на основе гетероклинических решений для свободного твердого тела. Подобное моногармоническое условие строилось в работах [259, 267, 268], где исследования проводились на основе аналогичного многомерного формализма Холмса-Марсдена [238]. Также стоит упомянуть полученные критерии реализации хаотического вращения, сформулированные в моногармоническом виде на основе классического формализма В.К. Мельникова [242, 158, 294, 295]. На основе условия (4.76) можно синтезировать разнообразные конкретные схемы подавления хаоса, что будет представлено далее.

Таким образом, можно локально заключить, что полученное выше полигармоническое условие подавления хаоса в динамике нормального спутника-гиростата при действии произвольных негамильтоновых возмущений (4.76) обобщает и развивает полученные ранее результаты, и, являясь универсальным условием, завершает и снимает проблему изучения хаотизации спутников-гиростатов и синтеза условий подавления хаоса в их динамике при действии произвольных возмущений.

4.4.1. Диссипативный принцип подавления гетероклинического хаоса

В целях разработки конкретных схем подавления хаоса и иллюстрации применимости условия (4.76) проведем аналитический синтез условий подавления хаоса для следующего модельного случая динамики асимметричного спутника-гиростата:

$$e_B \neq 0;\ \ e_m \neq 0;\ \ e_\sigma \neq 0;\ \ c_\chi = 1;\ \ e_l = e_{\mathbf{I}} = e_\delta = e_F = 0;\ \ s_\chi = 0. \tag{4.78}$$

Для указанного случая возмущений (4.78) на основе выражений (2.72), (2.37), (2.38) с помощью подстановки гетероклинических решений и выполнения тригонометрических преобразований можно записать следующие конкретизированные коэффициенты (4.73):

$$\begin{cases} C_{L,1}(t) = e_m \dfrac{Q}{G}\left[B\overline{q}(t)\cos\overline{\delta}(t) - A\overline{p}(t)\sin\overline{\delta}(t)\right]; \\ S_{L,1}(t) = -e_m \dfrac{Q}{G}\left(B\overline{q}(t)\sin\overline{\delta}(t) + A\overline{p}(t)\cos\overline{\delta}(t)\right); \\ C_{L,2}(t) = \dfrac{e_B\overline{A}_1}{2AB}\left[\left(B^2\overline{q}^2(t) - A^2\overline{p}^2(t)\right)\sin 2\overline{\delta}(t) + \left(A^2+B^2\right)\overline{p}(t)\overline{q}(t)\cos 2\overline{\delta}(t)\right]; \\ S_{L,2}(t) = -\dfrac{e_B\overline{A}_1}{2AB}\left(\left(A^2+B^2\right)\overline{p}(t)\overline{q}(t)\sin 2\overline{\delta}(t) + \left(A^2\overline{p}^2(t) - B^2\overline{q}^2(t)\right)\cos 2\overline{\delta}(t)\right); \end{cases} \tag{4.79}$$

$$\begin{cases} C_{l,1} = e_m \dfrac{Q}{G}b(t)\left[B\overline{q}(t)\sin\overline{\delta}(t) + A\overline{p}(t)\cos\overline{\delta}(t)\right]; \\ S_{l,1} = e_m \dfrac{Q}{G}b(t)\left(B\overline{q}(t)\cos\overline{\delta}(t) - A\overline{p}(t)\sin\overline{\delta}(t)\right); \\ C_{l,2}(t) = e_B\overline{A}_1\dfrac{b(t)}{2}\left[\left(\overline{p}^2(t) - \overline{q}^2(t)\right)\cos 2\overline{\delta}(t) + 2\overline{p}(t)\overline{q}(t)\sin 2\overline{\delta}(t)\right]; \\ S_{l,2}(t) = -e_B\overline{A}_1\dfrac{b(t)}{2}\left(\left(\overline{p}^2(t) - \overline{q}^2(t)\right)\sin 2\overline{\delta}(t) - 2\overline{p}(t)\overline{q}(t)\cos 2\overline{\delta}(t)\right); \end{cases} \tag{4.80}$$

$$\begin{cases} C_{\Delta,1} = e_m \dfrac{Q}{G}\left[B\overline{q}(t)\cos\overline{\delta}(t) - A\overline{p}(t)\sin\overline{\delta}(t)\right]; \\ S_{\Delta,1} = -e_m \dfrac{Q}{G}\left(B\overline{q}(t)\sin\overline{\delta}(t) + A\overline{p}(t)\cos\overline{\delta}(t)\right); \\ C_{\Delta,2}(t) = -e_B\overline{A}_1\dfrac{1}{2}\left[\left(\overline{p}^2(t) - \overline{q}^2(t)\right)\sin 2\overline{\delta}(t) - 2\overline{p}(t)\overline{q}(t)\cos 2\overline{\delta}(t)\right]; \\ S_{\Delta,2}(t) = -e_B\overline{A}_1\dfrac{1}{2}\left(\left(\overline{p}^2(t) - \overline{q}^2(t)\right)\cos 2\overline{\delta}(t) + 2\overline{p}(t)\overline{q}(t)\sin 2\overline{\delta}(t)\right); \end{cases} \tag{4.81}$$

$$\begin{cases} C_{L,0}(t) = \dfrac{e_B\overline{A}_1}{2AB}\left[\left(A^2-B^2\right)\overline{p}(t)\overline{q}(t)\right]; \\ C_{l,0}(t) = -e_B\overline{A}_1\dfrac{b(t)}{2}\left[\overline{p}^2(t) - \overline{q}^2(t)\right]; \\ C_{\Delta,0}(t) = 0; \end{cases} \tag{4.82}$$

Указанный набор явных коэффициентов (4.79)-(4.82) позволяет выполнить процедуры интегрирования и записать следующие амплитудные значения для гармоник тригонометрического полинома (4.75), который соответствует гамильтоновой части функции Мельникова-Виггинса (здесь используются свойства четных и нечетных функций, на основании чего члены в квадратных скобках в выражениях (4.79)-(4.82) дают нулевые результаты в рамках несобственного интегрирования):

$$\begin{cases} J_{c,i} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\big[f_l(t) \cdot C_{L,i}(t) \big] - \big[f_L(t) \cdot C_{l,i}(t) \big] + \big[\big(\bar{\sigma}(t) - \sigma_* \big) C_{\Delta,i}(t) \big] \Big) dt = 0; \\ J_{s,i} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(f_l(t) \cdot S_{L,i}(t) - f_L(t) \cdot S_{l,i}(t) + \big(\bar{\sigma}(t) - \sigma_* \big) S_{\Delta,i}(t) \Big) dt = \text{const} \neq 0 \end{cases} \tag{4.83}$$

В результате следует двугармоническая форма тригонометрического полинома (4.75), где явно выделены части, соответствующие факторам асимметрии и типам возмущения, что указано посредством множителей e_m и e_B:

$$P_{trig}(w_0) = e_m \bar{J}_{s,1} \sin(w_0) + e_B \bar{J}_{s,2} \sin(2w_0); \quad \left(\bar{J}_{s,1} = J_{s,1} / e_m; \ \bar{J}_{s,2} = J_{s,2} / e_B \right) \tag{4.84}$$

Негамильтонова часть функции Мельникова-Виггинса в рассматриваемом случае формируется за счет внутреннего диссипативного взаимодействия (жидкое трение, либо противо-ЭДС в моментах сил, характеризующих относительное вращение соосных тел спутника-гиростата):

$$m_\Delta = -e_\sigma \sigma(t) \tag{4.85}$$

Соответствующий интеграл (4.67) принимает форму:

$$J_{\mathcal{NH}} = e_\sigma \bar{J}_{\mathcal{NH}}; \qquad \bar{J}_{\mathcal{NH}} = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(\bar{\sigma}(t) - \sigma_* \big) \bar{\sigma}(t) dt = \text{const} \tag{4.86}$$

Таким образом, базируясь на общем условии (4.76), выражения (4.84) и (4.86) определяют собой все необходимые константы и, собственно, формируют собой итоговый критерий подавления хаоса. Также на основе условия (4.76) определяются “критические” значения для параметра диссипации e_σ, которые соответствуют предельной форме нестрогого неравенства (4.76):

$$\bar{e}_\sigma = \frac{Am\left(P_{trig}(w_0) \right)}{\left| \bar{J}_{\mathcal{NH}} \right|} \tag{4.87}$$

При критическом значении параметра диссипации (4.87) достигается подавление гетероклинического хаоса, что означает реализацию расщепления устойчивого и неустойчивого множеств сепаратрисы без их взаимного пересечения.

Приведем далее результаты численного моделирования динамики спутника-гиростата в рассматриваемом случае возмущений и вычислим конкретные значения для всех определяющих условия подавления хаоса величин.

Предварительно необходимо отметить, что фазовый портрет системы содержит пары гетероклинических сепаратрисс, связывающих последовательно идущие седловые особые точки – это “верхняя” и “нижняя” сепаратриссы в фазовом пространстве Андуайе-Деприи, определяющиеся значениями кинетического момента (I_2) и уровнем энергии ($\tilde{T}$) седловых точек. Обе эти сепаратисы полностью соответствуют гетероклиническим решениям (3.37)-(3.42) и двум своим известным наборам начальных условий реализации гетероклинических полодий на эллипсоиде кинетического момента [192, 204, 197].

Проведем численное моделирование при следующих значениях возмущений:

$$\varepsilon = 0.15; \quad e_B = 1; \quad e_\sigma \neq 0; \quad e_l = e_{\mathrm{I}} = e_\delta = e_m = e_F = 0.$$

Пусть для спутника-гиростата имеют место следующие моменты инерции:

$$\hat{A}_1 = 5;\ \ \bar{C}_1 = 4;\ \ \hat{A}_2 = 15;\ \ \hat{B}_2 = 10;\ \ \bar{C}_2 = 6 \quad [\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2];$$
$$\left(\hat{A}_2 = \bar{A}_2 + M_2 \cdot OP_2^2;\ \ \hat{B}_2 = \bar{B}_2 + M_2 \cdot OP_2^2\right) \tag{4.88}$$

Начальные условия для реализации движения по верхней сепаратрисе имеют следующие числовые значения:

$$\begin{cases} p_0 = 1.5;\ q_0 = 0;\ \ r_0 = 3.15597;\ \ \sigma_0 = 0.59403;\ \ \sigma_* = 2.63527\ \ [\mathrm{rad/\,s}]; \\ \bar{\Delta} = 15;\ G = I_2 = 45.29504\ \ [\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\,\mathrm{s}];\quad Q = -15,\ \ \tilde{T} = 91.74372\ \ [\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\,\mathrm{s}^2], \end{cases} \tag{4.89}$$

а также известны начальные условия реализации движения вдоль нижней сепаратирисы:

$$\begin{cases} p_0 = 2.25894;\ q_0 = 0;\ \ r_0 = \text{-}1.95929;\ \ \sigma_0 = 5.70929;\ \ \sigma_* = 2.63527\ \ [\mathrm{rad/\,s}]; \\ \bar{\Delta} = 15;\ \ G = I_2 = 45.29504\ [\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\,\mathrm{s}];\quad Q = -15,\ \ \tilde{T} = 91.74372\ \ [\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\,\mathrm{s}^2]. \end{cases} \tag{4.90}$$

Прежде всего, для начала целесообразно представить результаты моделирования динамики без диссипации в системе ($e_\sigma = 0$).

Как можно видеть из рисунков (рис. 4.16-4.17), система имеет сложное поведение, демонстрирующее апериодические осцилляции (рис. 4.16-a) и сложные фазовые траектории (рис. 4.16-b, d) которые «завязывают себя в узлы» (“tie themselves in knots” [239]); также представлен хаотический слой (рис. 4.17) и гетероклиническая сеть от пары сепартрисс– рис.4.18.

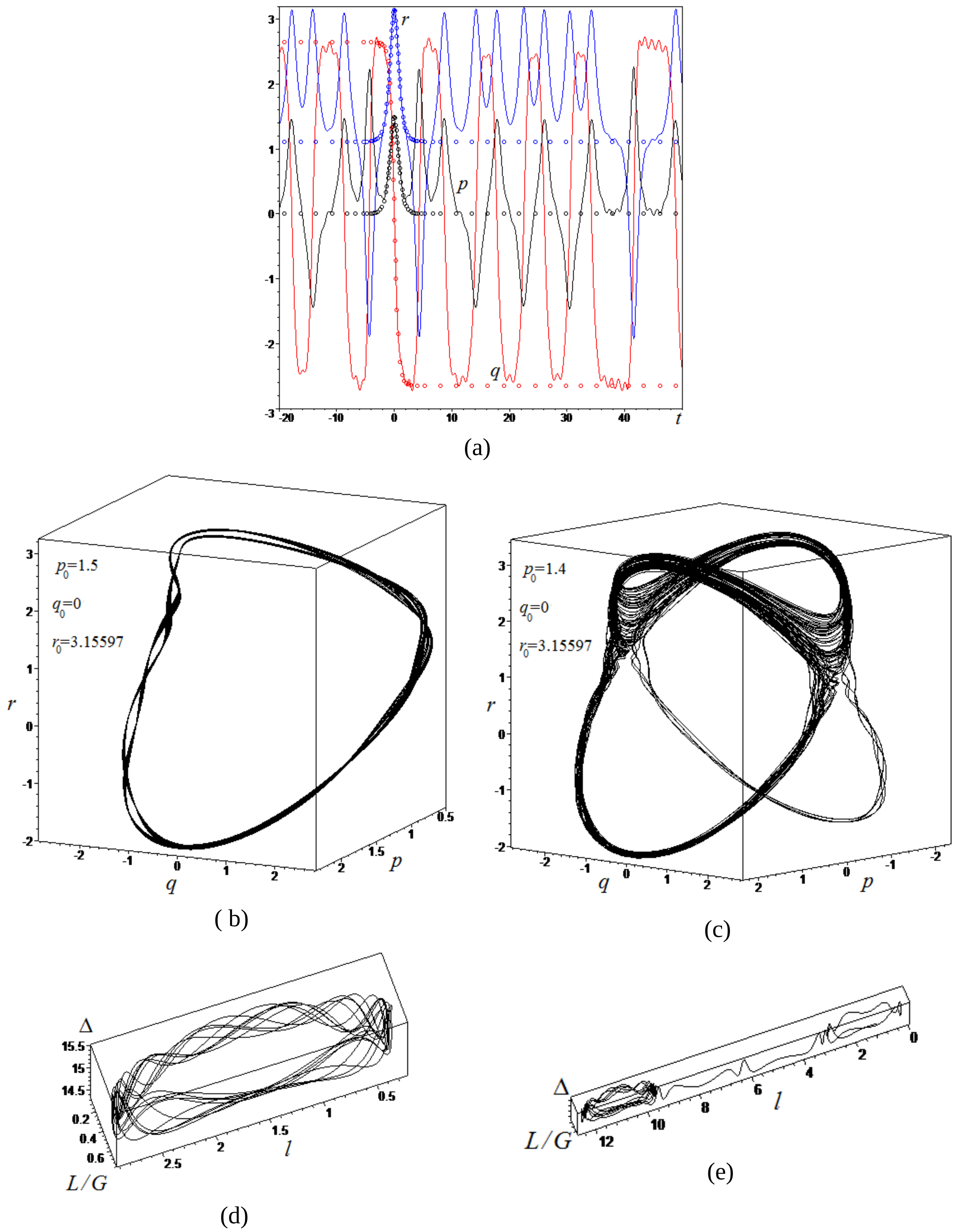


Рис. 4.16. *Компоненты угловой скорости и фазовые траектории системы вблизи невозмущенных сепаратрисс*:

(a) – компоненты угловой скорости (точки – аналитические гетероклинические решения, линии – численные возмущенные зависимости);

(b), (c) – полодии в *p*-*q*-*r* фазовом пространстве;

(d), (e) – соответствующие фазовые траектории в пространстве Андуайе-Деприи

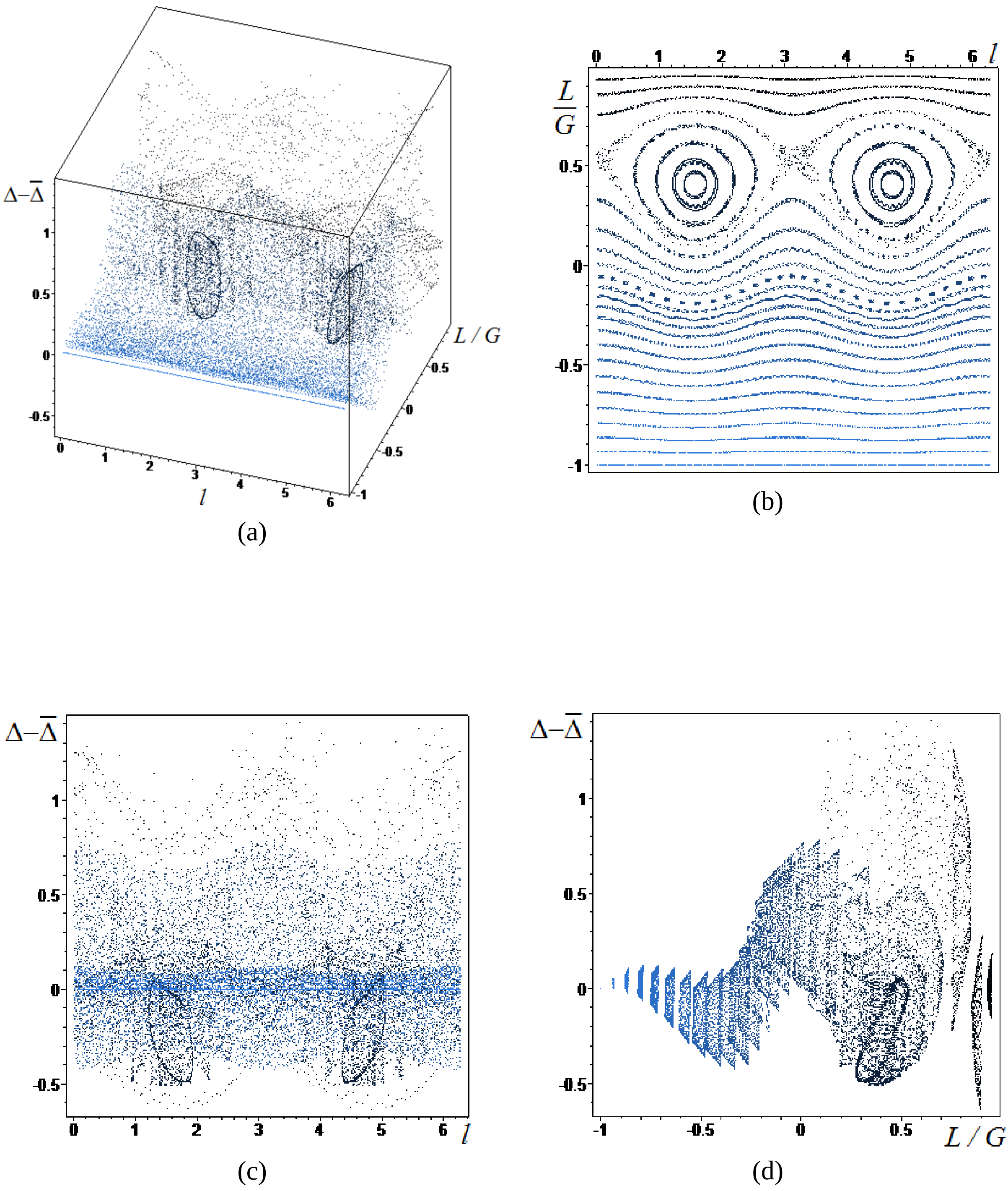


Рис. 4.17. *Трехмерное сечение Пуанкаре* $(m_\Delta = 0)$ *и его проекции*

$\{l,\ L/I_2,\ (\Delta-\bar{\Delta})\}$

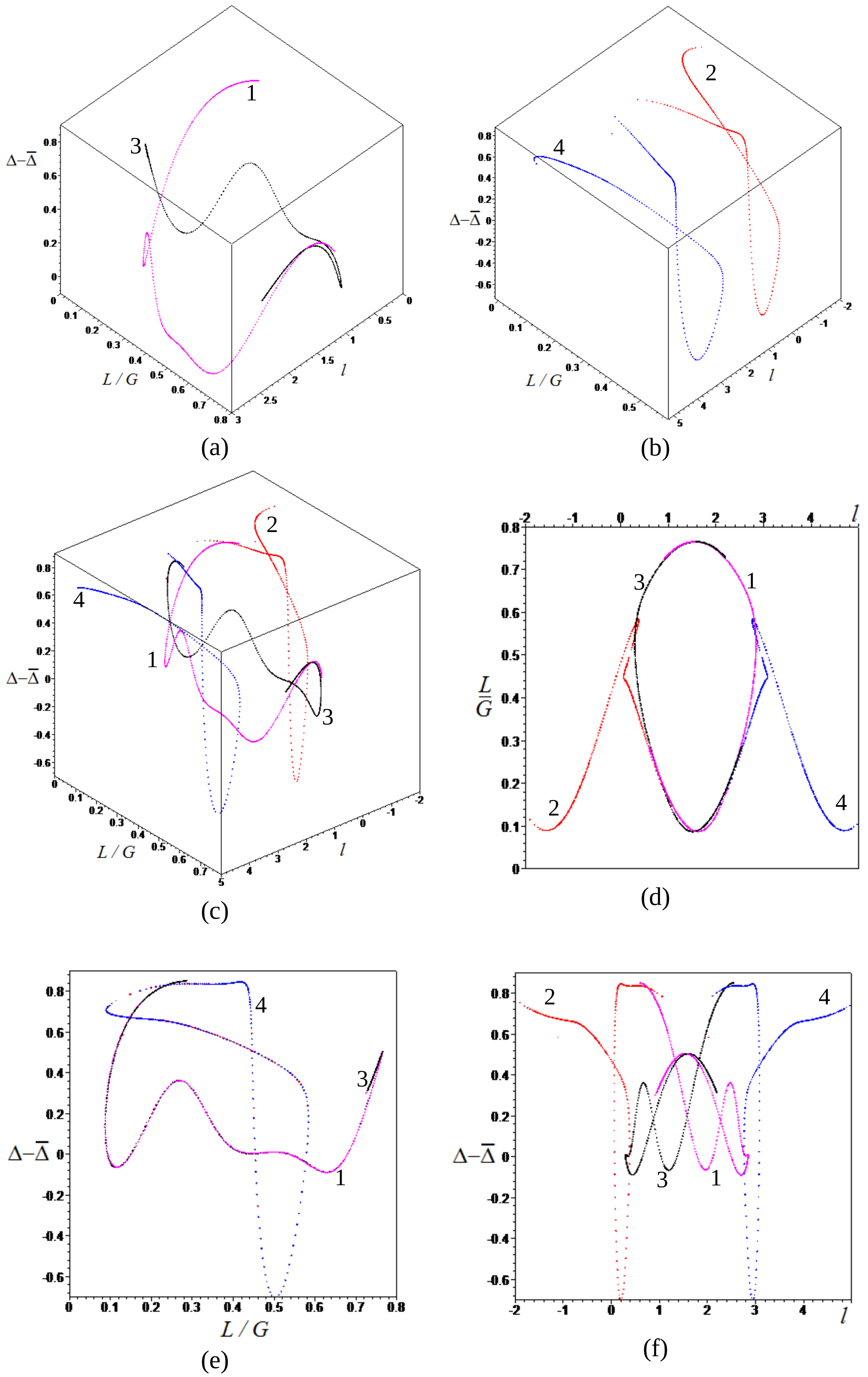


Рис.4.18. *Первые образы отображения Пуанкаре (пурпурный-1, красный-2) и первые прообразы (черный-3, синий-4) невозмущенных сепаратрисс (верхней, нижней)*

Теперь можно представить результаты моделирования динамики при дополнительном действии диссипативного возмущения (4.85) в случае критической величины диссипации. Очевидно, что присутствие на фазовом портрете двух гетероклинических сепаратрисс, соединяющих собой одни и те же две седловые точки, необходимо обеспечить демпфирование, которое будет не ниже критического для обеих сепаратрисс, т.е. необходимо вычислить супремальное значение $\overline{e}_{\sigma}$ (4.87) относительно критического значения $\left(\overline{e}_{\sigma}^{up}\right)$ на верхней сепаратрисе и критического значения на нижней сепаратрисе $\left(\overline{e}_{\sigma}^{low}\right)$:

$$\overline{e}_{\sigma} = \sup\left\{\overline{e}_{\sigma}^{up}, \overline{e}_{\sigma}^{low}\right\} \tag{4.91}$$

Вычисляя соответствующие величины, имеем:

$$\overline{e}_{\sigma}^{up} = 0.623313;\ \overline{e}_{\sigma}^{low} = 0.000219;\ \overline{e}_{\sigma} = 0.623313.$$

Как можно видеть из результатов численного моделирования (рис. 4.19-4.20), выполняется регуляризация динамики (без демпфирования динамика была хаотической (рис. 4.16-4.18)), что реализуется в виде общего диссипативного тренда: имеет место скручивающаяся полодия (рис. 4.19-a), затухающие колебания (рис. 4.19-b), и “концентрирующиеся” точки отображения Пуанкаре (рис. 4.20).

Наиболее интересный аспект регуляризации динамики представлен на рис. 4.21 и состоит в том, что можно видеть разделение множеств гетероклинической сепаратрисы без взаимного их пересечения (первых образа и прообраза): так на рис. 4.21-a видно разделение множеств верхней сепаратрисы без пересечений (цвета пурпурный и черный), и на рис. 4.21-b можно видеть аналогичное разделение множеств нижней сепаратрисы (цвета красный и синий). Это и есть главное подтверждение локального подавления хаоса с помощью диссипативных моментов сил естественного происхождения (трение соосных тел, противо-ЭДС), т.к. при этом не будет пересечений расщепленных многообразий сеператрисы.

Однако, необходимо отметить, что в то же самое время, непересекающиеся расщепленные многообразия одной сепаратрисы могут пересекаться с расщепленными многообразиями, принадлежащими другой сепаратрисе. Как можно видеть на рис. 4.21-c, f, имеются пересечения между возмущенными устойчивыми множествами верхней и нижней сепаратрисс (черный и синий цвета), а также пересечения между неустойчивыми множествами верхней и нижней сепаратрисс (пурпурный и красный цвета). Это обстоятельство, вообще говоря, означает присутствие в динамике гетероклинических сетей в глобальном масштабе при успешной реализации локального подавления хаоса в смысле Мельникова-Виггинса, как отсутствие взаимных пересечений расщепленных множеств одной сепаратрисы.

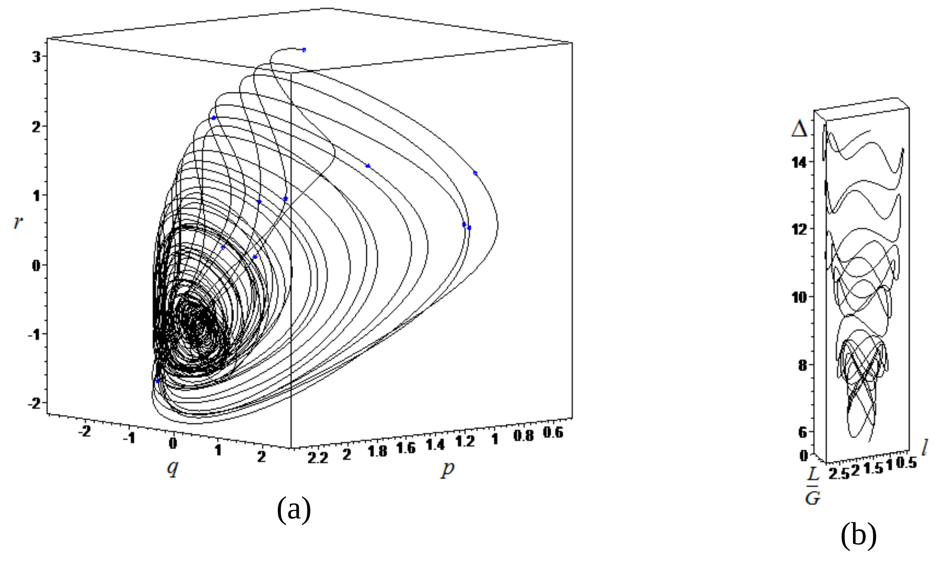


Рис. 4.19 *Фазовая траектория вблизи верхней спаратрисы при критическом демпфировании* $\overline{e}_{\sigma}$:

(a) – полодия в пространстве *p*-*q*-*r* компонент угловой скорости

(b) – фазовая траектория в пространстве Андуайе-Депри

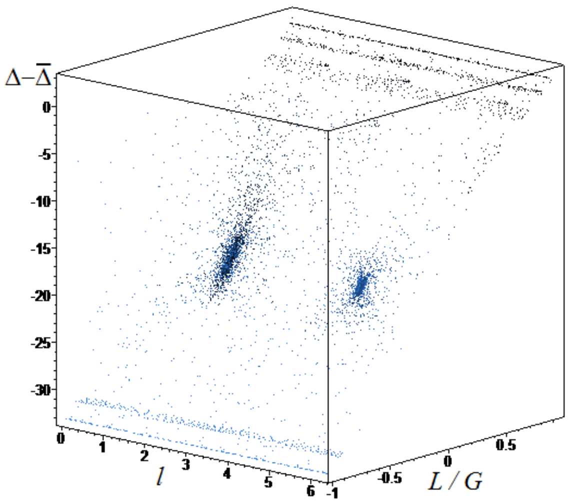


Рис. 4.20. *Сечение Пуанкаре при критическом демпфировании* $\overline{e}_{\sigma}$

$$\left\{l,\ L/I_2,\ \left(\Delta-\overline{\Delta}\right)\right\}$$

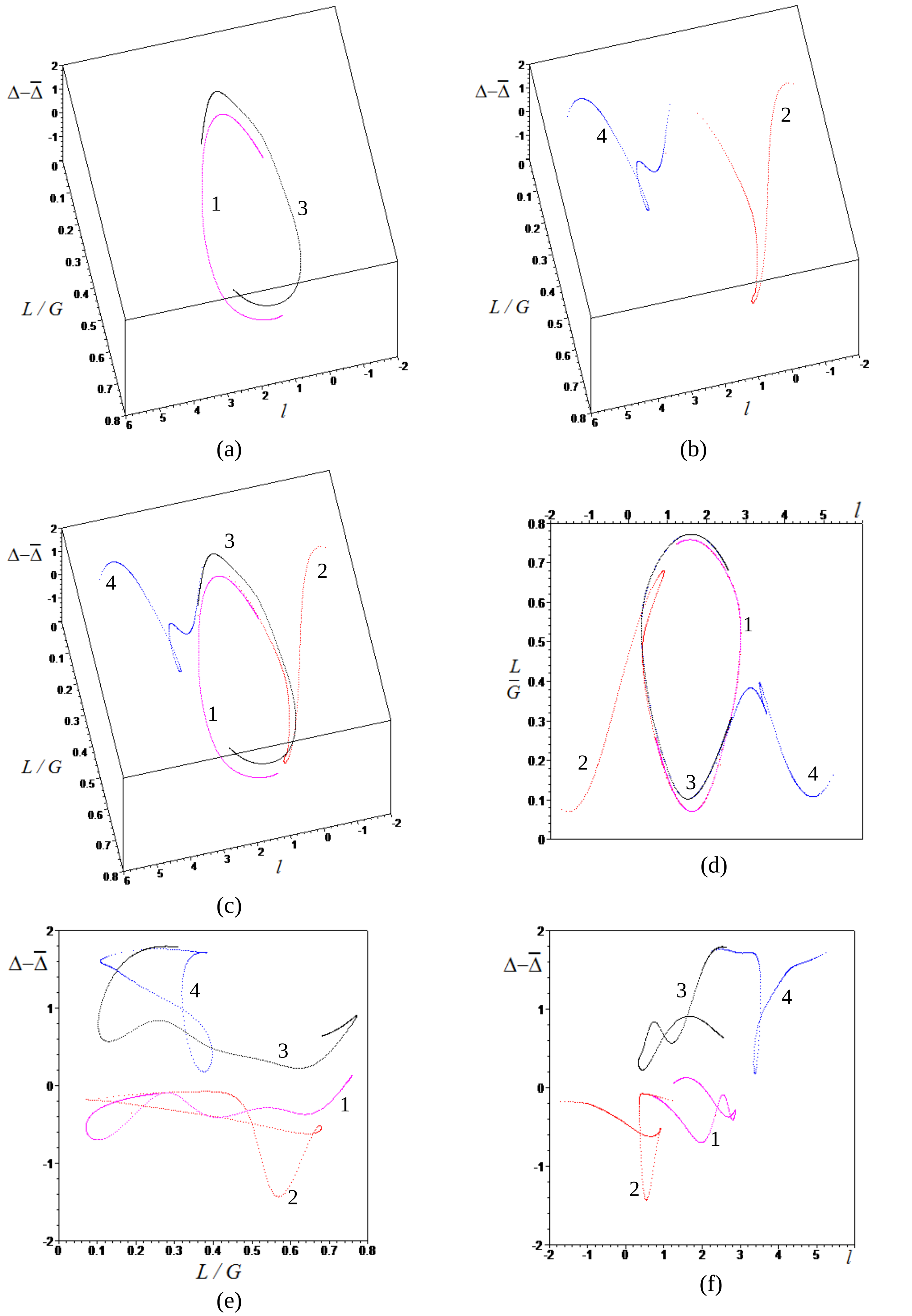


Рис. 4.21. Фрагмент гетероклинической сети, как совокупность первых образов отображения Пуанкаре (пурпурный-1, красный-2) и первых прообразов (черный-3, синий-4) от невозмущенных сепаратрисс (верхней и нижней) при критическом демпфировании $\overline{e}_{\sigma}$

Еще одна важная динамическая задача может быть сформулирована и рассмотрена в рамках изучения аспектов локального подавления хаоса в динамике спутника-гиростата за счет диссипативных моментов сил. Это будет задача определения таких динамических условий, которые можно назвать “нейтрализующими” предпринимаемые действия по локальному подавлению хаоса за счет диссипативных моментов сил. Это означает неработоспособность диссипативной техники подавления хаоса с точки зрения формализма Мельникова-Виггинса даже при вполне больших значениях диссипации.

Эти нейтрализующие схему подавления условия формально следуют из рассмотрения вида диссипативного момента сил (4.85) и его вклада в аддитивную постоянную величину в общую структуру функции Мельникова-Виггинса, а именно в величину несобственного интеграла (4.86). Указанный интеграл может принимать нулевое свое значение при некоторых параметрах системы независимо от формального наличия демпфирования. В таких случаях, базируясь на формализме Мельникова-Виггинса нельзя будет обеспечить отсутствие корней функции Мельникова-Виггинса в силу невозможности смещения ее графика по оси ординат за счет аддитивного постоянного члена (он окажется равным нулю), поэтому формализм Мельникова-Виггинса будет детектировать присутствие хаоса, т.е. с точки зрения формализма диссипативная схема окажется неработоспособной для таких особенных параметров системы.

Подобные особенные параметры, доставляющие нулевое значение несобственному интегралу (4.86) могут быть определены из самого вида этого интеграла. Так, учитывая (3.37) и (3.40), интеграл (4.86) может быть переписан в следующей форме:

$$\bar{J}_{\mathcal{NH}} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\bar{\sigma}(t) - \sigma_*\right)\bar{\sigma}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sigma_* - y(t)\right) y(t)\,dt$$

Тогда условие равенства его нулю $\left(\bar{J}_{\mathcal{NH}} = 0\right)$ запишется в виде выражения:

$$\sigma_* \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t)\,dt$$

и тогда с помощью (3.42) и (3.43) можно получить условие “нечувствительности” (в смысле формализма Мельникова-Виггинса) хаотической динамики к наличию подавляющего момента сил (4.85)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t)\,dt = 2\sigma_*\pi \left[\sqrt{\frac{AB}{\left(B - \bar{C}_2\right)\left(A - \bar{C}_2\right)}}\right] \tag{4.92}$$

Аналитическое выражение (4.92) определяет набор параметров системы (и начальных условий движения) которые формально сохраняют присутствие простых корней функции Мельникова-Виггинса независимо от величины коэффициента демпфирования, т.е. консервируют хаос с точки зрения используемого формализма.

Аналитическое изучение выражения (4.92) является довольно сложной задачей, поэтому для решения поставленной задачи были выполнены численные расчеты (рис. 4.22) величины интеграла $\bar{J}_{\mathcal{NH}}$ при параметрическом варьировании величины $\bar{\Delta}$ при фиксированных значениях параметров (4.88) и фиксированных начальных условиях и величинах собственного дипольного магнитного момента: $p_0 = 1.5$ [1/s], $Q = -15$ $[\mathrm{kg \cdot m^2/s^2}]$.

Как видно из численных расчетов (рис. 4.22), нулевая величина $\bar{J}_{\mathcal{NH}}$ достигается при значении $\tilde{\Delta}^{up} \cong 4\,[\mathrm{kg \cdot m^2/s}]$ для верхней сепаратрисы и при $\tilde{\Delta}^{low} \cong -17\,[\mathrm{kg \cdot m^2/s}]$ для нижней. Поэтому величины $\left\{\tilde{\Delta}^{up},\, \tilde{\Delta}^{low}\right\}$ определяют условия параметрической «нечувствительности» к подавлению хаоса за счет диссипативных сил (4.85).

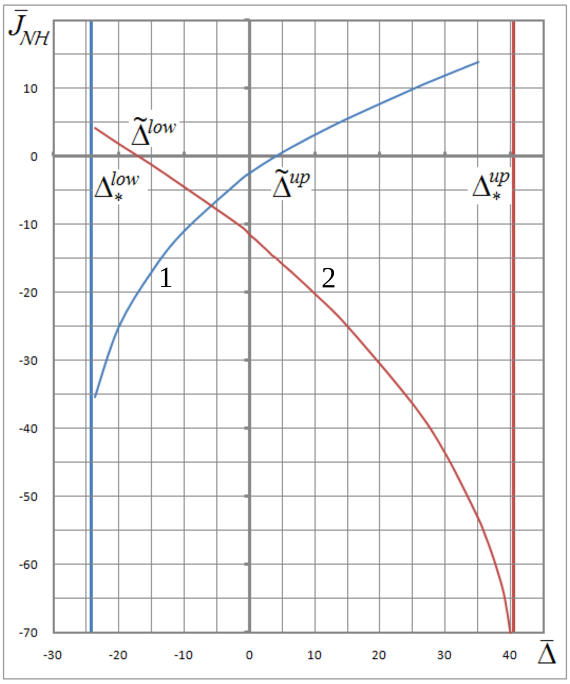


Рис. 4.22. *Величина $\bar{J}_{\mathcal{NH}}$ в зависимости от параметра $\bar{\Delta}$:*
для верхней сепаратрисы – синяя кривая (1)
для нижней сепаратрисы – красная кривая (2)

Здесь важно отметить, что «предельные» значения величины $\bar{\Delta}$, обозначенные на рис.17, как $\left\{\Delta_*^{up},\, \Delta_*^{low}\right\}$, соответствуют бифуркационным значениям изменения типа фазового портрета и, следовательно, типа гетероклинических решений [149, 192, 199]. Также видно, что на этих предельных значениях величина $\bar{J}_{\mathcal{NH}}$ растет по модулю экспоненциальным образом до бесконечных значений. Таким образом, величины $\left\{\Delta_*^{up},\, \Delta_*^{low}\right\}$ ограничивают диапазон возможных угловых скоростей ротора для возможного проведения анализа по нормальному виду фазового портрета системы без учета специфики бифуркационных изменений (этот аспект не исследуется в настоящей работе). По этим причинам полученные в работе результаты применимы для диапазона $\bar{\Delta} \in \left(\Delta_*^{low},\, \Delta_*^{up}\right)$.

В завершение описания диссипативной схемы подавления хаоса стоит подчеркнуть, что эта схема является вполне естественной и достаточно просто реализуемой. Весте с тем, у этой схемы есть довольно опасный для динамики спутника-гиростата недостаток, выражающийся в том, что внутренняя диссипация энергии при одновременном сохранении кинетического момента системы может привести к таким динамическим эффектам, как рост угла нутации и даже «опрокидывание» спутника (достижение углов нутации, близких к значению $\pi/2$) в случаях, когда стабилизируемая вращением ось не является осью наибольшего момента инерции – это известный динамический эффект [32, 236, 91], возможность реализации которого необходимо учитывать при проектировании спутников. В этой связи, целесообразно провести разработку альтернативных методов подавления хаоса, реализуемыми без риска ухудшения динамики.

4.4.2. Импульсное подавление гетероклинического хаоса

Рассмотрим теперь возможность использования для целей подавления хаоса импульсных негамильтоновых воздействий. Основным инструментом создания таких негамильтоновых воздействий будем считать создание кратковременных импульсных значений во внутреннем силовом моменте раскрутки тела-ротора, что например, может быть легко реализовано кратковременной подачей напряжения на электродвигатель, что математически выражается заданием импульсного вида для функции $F(t)$ в (4.59). Рассмотрим простейший вид такой импульсной функции, формируемой в виде единичного импульса, моделируемого с помощью функции Хевисайда. Пусть импульс стартует в момент времени T_s и финиширует в момент времени T_f:

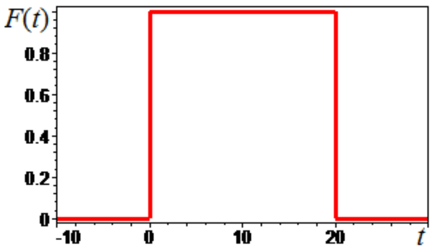


Рис. 4.23. *Форма простейшего импульса*

$$\begin{cases} m_\Delta = m_\Delta(t) = e_F F(t); \\ F(t) = e_F \left[\mathrm{H}(t - T_s) - \mathrm{H}(t - T_f) \right] \end{cases} \tag{4.93}$$

где $\mathrm{H}(t)$ - есть функция Хевисайда. Тогда можно аналитически вычислить несобственный интеграл (4.67):

$$J_{\mathcal{NH}} = e_F \bar{J}_{\mathcal{NH}}; \qquad \bar{J}_{\mathcal{NH}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\bar{\sigma}(t) - \sigma_* \right) F(t)\, dt = -\int\limits_{T_s}^{T_f} y(t)\, dt = \bar{\nu}_\delta(T_s) - \bar{\nu}_\delta(T_f) \tag{4.94}$$

Апеллируя к паре сепаратрисс, необходимо, как и в случае с диссипативной схемой, найти критическое значение коэффициента усиления e_F для подавления хаоса на обеих сепаратрисах:

$$\bar{e}_F = \sup\left\{ \bar{e}_F^{up}, \bar{e}_F^{low} \right\}; \quad \bar{e}_F^{sep} = Am\left(P_{trig}(w_0) \right) \Big/ \left| \bar{J}_{\mathcal{NH}}^{sep} \right|; \quad sep = \{up,\, low\} \tag{4.95}$$

Теоретическое обоснование импульсной схемы полностью проведено и теперь целесообразно провести численное моделирование динамики (рис. 4.24) для демонстрации работоспособности предложенной схемы. Пусть имеют место параметры спутника-гиростата, определяемые (4.88)-(4.90) при T_s=0 [с] и T_f=20 [с]. В этом случае велиины критических коэффициентов усиленя единичного импульса получают следующие значения:

$$\bar{e}_F^{up} = 1.64539; \;\; \bar{e}_F^{low} = 0.002; \;\; \bar{e}_F = 1.64539.$$

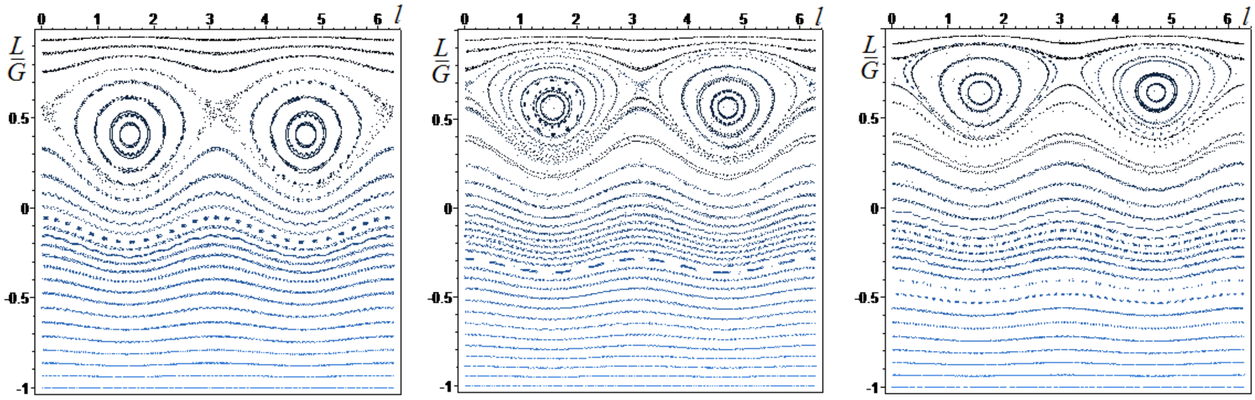
В рамках описания аспектов выполнения импульсной схемы стоит, прежде всего, отметить, что после кратковременного выполнения импульса раскрутки тела-ротора фазовый портрет системы изменяется некоторым подъемом вверх по направлению L/I_2, что хорошо заметно на сечениях Пуанкаре (рис. 4.24). На рис. 4.24 представлены три случая фазового портрета (сечения Пуанкаре): для хаотической динамики без импульсной регуляризации (рис. 4.24-a), для динамики после импульсной регуляризации с критической величиной импульса (рис. 4.24-b) и для динамики после регуляризации с величиной импульса большей критической (в 1,5 раза). Как видно из рис. 4.24, на первом портрете имеется хаотический слой в окрестности сепартрисс, на втором портрете (после критической импульсной регуляризации) этот слой истончаясь исчезает, а на третьем портрете хаотический слой уже отсутствует, т.е. с ростом коэффициента усиления импульса e_F, проходя от нуля через свое критическое значение и дальше, фазовая картина от хаотической меняется на регулярную. Такая регуляризационная смена фазового портрета с подавлением изначально имевшегося хаоса может быть проинтерпретирована тем, что в процессе выполнения импульса весь фазовый портрет перемещается вверх (в сторону более высоких энергий), уводя с собой сепаратрисный регион от условий реализации исходного хаотического режима (его энергетического уровня), тем самым устраняя хаос, уводя его причину. Можно констатировать, что при импульсной схеме осуществлено локальное подавление хаоса в окрестности сепаратрисс в полном соответствии с формализмом Мельникова-Виггинса. Полученный результат хорошо соответствует предыдущим исследованиям, например, подтверждая утверждение, что, если скорость ротора увеличивается, то хаотическое движение будет переходить в регулярное ("…if the rotor speed increases, then the chaotic motion will turn into the regular one…") [178, 327].

Также можно продемонстрировать регуляризацию процесса (рис. 4.25) после выполнения импульсного подавления хаоса путем наблюдения за динамикой компонент угловой скорости (рис. 4.25-a): как изображено на рисунке, до t=0 реализовывался хаотический процесс, а после инициации импульсного момента сил динамика меняется в сторону регулярных колебаний, которые приобретают свой окончательный регулярный характер после отключения импульса. На рисунках (рис. 4.26-a,b и рис. 4.27-a,b) представлены критический и посткритический случаи расщепления сепаратрисс, из которых видно, что достигается их расщепление без взаимных пересечений, что подтверждает, что локальное подавление хаоса достигнуто в смысле формализма Мельникова-Виггинса. Однако, как это было характерно и для диссипативной схемы разделенные множества одной сепаратрисы могут пересекаться с разделенными множествами другой (рис. 4.26-c,f и рис. 4.27-c,f), что сохраняет сложную гетероклиническую картину и, следовательно, хаос в глобальном – это означает, что некоторые режимы из окрестности сепаратрисс будут регуляризованы, а некоторые режимы все же останутся хаотическими, что требует дополнительных проверок и дополнительных мероприятий по подавлению хаоса.

Любопытно отметить предельный случай, когда продолжительность импульса бесконечна, т.е. момент его инициации и отключения разнесены на бесконечные моменты времени $\left(T_s = -\infty;\;\; T_f = +\infty\right)$. В этом случае интеграл (4.94) получает значение

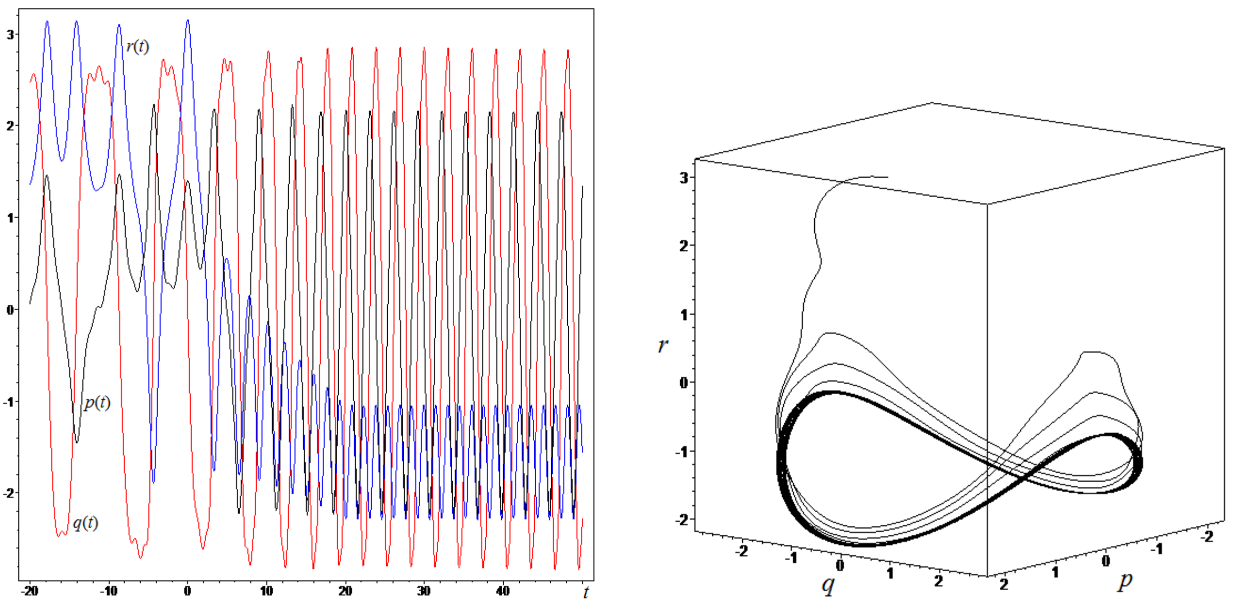
$$\bar{J}_{\mathcal{NH}} = -\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,dt = -2\pi\sqrt{\frac{AB}{\left(B-\bar{C}_2\right)\left(A-\bar{C}_2\right)}} \qquad (4.96)$$

Такой предельный случай также формально может быть рассмотрен в рамках задачи подавления хаоса. Этот случай по факту может быть охарактеризован, как случай динамики при действии постоянного момента сил раскрутки двигателя, что изучалось ранее [91, 153]. В работе [153] наличие постоянного момента раскрутки между соосными телами использовалось для контроля нутации спутника-гиростата с переменными моментами инерции.



(a) $e_F = 0$ (b) $e_F = \bar{e}_F = 1.64539$ (c) $e_F = 1.5 \cdot \bar{e}_F = 2.46809$

Рис. 4.24. *Фазовый портрет (сечения Пуанкаре) при нулевом (a), критическом (b), посткритическом (c) импульсном подавлении хаоса*



(a) (b)

Рис.4.25. *Процесс локальной регуляризации динамики при выполнении критического импульсного подавления хаоса* ($e_F = \bar{e}_F = 1.64539$)

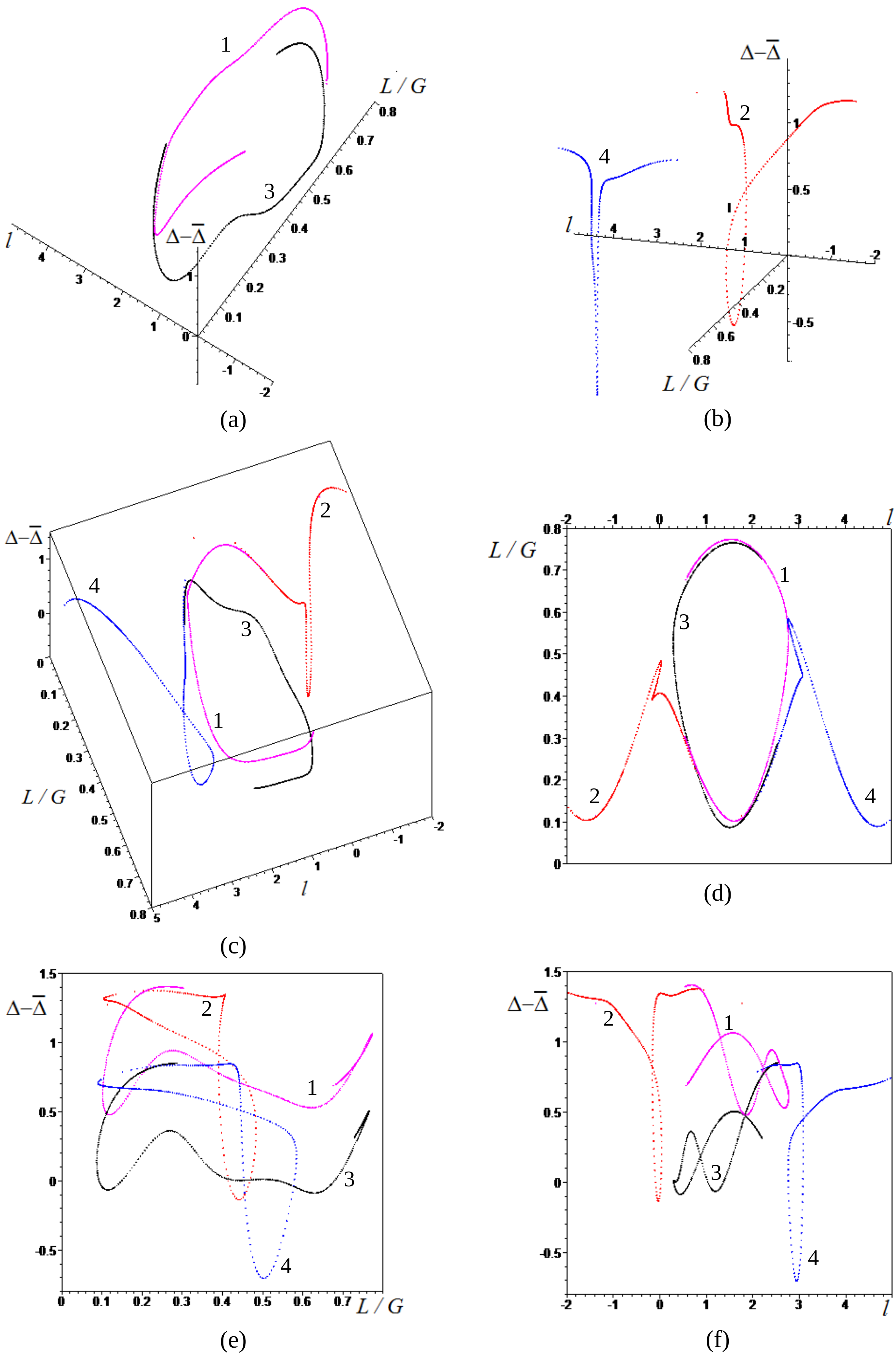


Рис.4.26. *Фрагменты гетероклинической сети как первые образы (пурпурный-1, красный-2) и прообразы (черный-3, синий-4) невозмущенных сепаратрисс (верхней, нижней) при критическом* $\bar{e}_F$

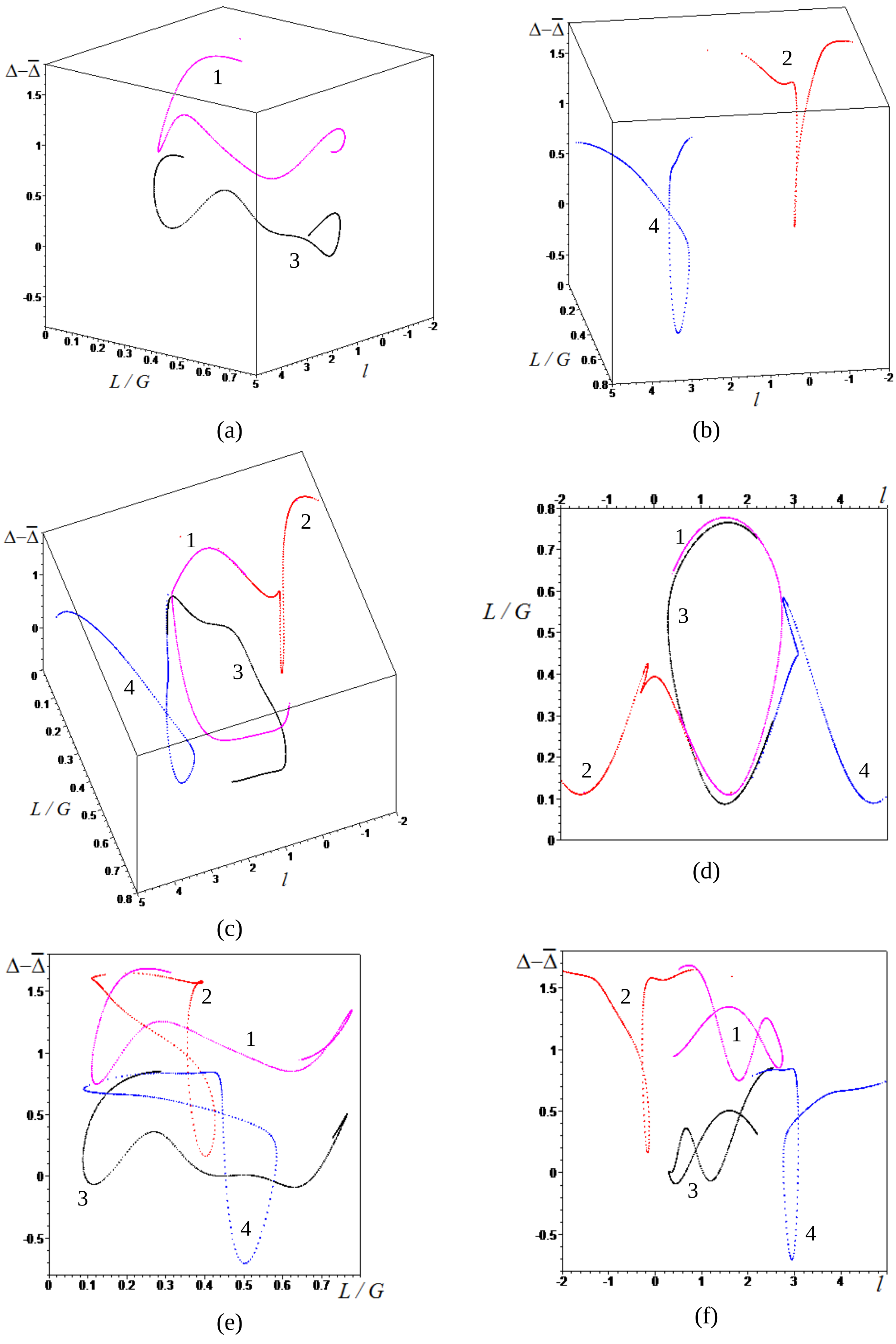


Рис. 4.27. *Фрагменты гетероклинической сети как первые образы (пурпурный-1, красный-2) и прообразы (черный-3, синий-4) невозмущенных сепаратрисс (верхней, нижней) при посткритическом* $e_F = 1.5\cdot\bar{e}_F$

В работе [91] действие малого постоянного момента было рассмотрено в негативном ракурсе, когда при его действии спутник-гиростат наоборот совершает опрокидывание и реализует большие нутационные колебания, что было проинтерпретировано, как вероятностный проход через сепаратрису в другую качественную зону движения. Однако, это не отвергает и обратного, когда движение с большими углами нутации (возможно нерегулярное движение) может тем же путем через сепаратрису проникнуть в регулярную область динамики с желаемым уровнем амплитуд нутационных колебаний, либо, как рассмотрено выше, «отодвинуть» саму сепаратрису.

По-видимому, импульсная схема подавления хаоса является более совершенной, нежели диссипативная схема. Во-первых, при выполнении импульсной регуляризации не происходит деградации фазового портрета (фазовый портрет не изменяет своего качественного вида при адекватных величинах и длительностях импульсов в отличии от диссипативной картины, где фазовые точки со временем концентрируются возле устойчивых центров, как на рис. 4.20). Во-вторых, импульсная схема свободна от ограничений на форму и длительность импульса, что выражается в том, что можно выбрать произвольную форму (кусочно-постоянную, кусочно-линейную, кусочно-полиномиальную, кусочно-тригонометрическую и т.п.) и/или продолжительность импульса, лишь бы при этом накапливалась требуемая величина интеграла (4.94). В третьих, возможна также реализация многоимпульсного подавления хаоса, что никак не изменяет метода вычисления критической величины такого множественного импульса, и, более того, эти импульсы могут выдаваться по необходимости (для последующих сеансов подавления хаоса).

4.4.3. Магнитное подавление гетероклинического хаоса

Рассмотрим теперь схему подавления хаоса отличающуюся от двух предыдущих и не использующую методологию Мельникова-Виггинса. Эта схема использует глобальное изменение самого типа фазового портрета, «перебрасывая» тем самым режим в другую качественную область динамики. Таким образом, начальный режим движения мог стартовать в окрестности сепаратрисс, подвергающихся возмущению, и выполнять сложную хаотическую эволюцию при движении по гетероклинической сети, и если теперь каким-либо образом осуществить подмену фазового пространства, то продолжающийся в своей реализации динамический режим, оказавшись в иных динамических условиях, далее будет развиваться по другому; особенно важно здесь выполнить такую подмену фазового пространства, чтобы была существенно смещена сама область сепаратрисс со всеми своими предпосылками к хаотизации. Т.е. предлагаемая схема подавления хаоса предполагает локальное устранение самих причин его существования.

Возможность изменения структуры фазового пространства может быть реализована, например, за счет включения/отключения продольного дипольного магнитного момента. Так в случае реализации режима цилиндрической прецессии на экваториальной орбите форму фазового портрета можно изменять за счет параметров Δ and E [204], перемещая зону сепаратрисс вверх или вниз в пространстве Андуайе-Деприи, причем конкретное положение сепаратрисного региона зависит от величины Λ:

$$\Lambda = \Delta\beta + E\alpha, \tag{4.97}$$

где

$$E = -\frac{\tilde{m}_z B_{orb}}{K}; \quad \beta = \frac{A-B}{(B-C_b)(A-C_b)}; \quad \alpha = \frac{(B-A)C_b}{(B-C_b)(A-C_b)}$$

При положительных растущих значениях динамического параметра Λ сепаратрисный регион на фазовом портрете в пространстве Андуайе-Деприи перемещается вверх, при Λ=0 занимает центральное место, а при убывающих отрицательных значениях – перемещается вниз.

Если бы была возможность переключить продольный дипольный момент на достаточно большую величину на какой-то интервал времени, то это сразу бы отразилось на всем фазовом портрете, при этом сепаратрисный регион мгновенно изменил бы свое расположение вместе с окружающим его хаотическим слоем. Т.е. если исходный динамический режим был хаотический (находился внутри хаотического слоя), то после включения большой величины собственного дипольного магнитного момента спутника сепаратрисная зона, изменив свое расположение на фазовом портрете, более не хаотизировала бы динамический режим. Однако, после отключения магнитного момента система может вернуть изначальную форму фазового портрета и динамический режим снова окажется в зоне хаотического слоя.

Можно привести результат моделирования гипотетической ситуации с включением/отключением большой величины магнитного момента (рис. 4.28):

$$Q = Q_0 + \hat{Q}\left[\mathrm{H}\left(t - T_s\right) - \mathrm{H}\left(t - T_f\right)\right] \tag{4.98}$$

где $\mathrm{H}(\bullet)$ - функция Хевисайда, T_s, T_f – моменты времени включения и выключения большого магнитного момента.

Результаты численного моделирования (рис. 4.28) демонстрируют следующее:

- компоненты угловой скорости (фрагмент a_1-d_1) до момента включения большого магнитного момента $t \in \left(-\infty, T_s\right)$ являются хаотическими зависимостями;

- режимы скачкообразно становятся регулярными на всем интервале работы большого магнитного момента $t \in \left[T_s, T_f\right)$;

- после отключения большого магнитного момента текущий регулярный режим может скачкообразно перейти к новому регулярному режиму (фрагменты a, d), либо скачкообразно перейти к новому хаотическому режиму (фрагменты b, c).

Полодии (фрагменты a_2-d_2) и сечения Пуанкаре по условию (4.58) (фрагменты a_3-d_3) построены для интервала времени $t \in \left[T_s, +\infty\right)$. Как видно, сечения Пуанкаре демонстрируют изменение формы всего фазового портрета, что особенно видно на фрагменте c_3. Моделирование (рис. 4.28) проводилось для гипотетических параметров из табл. 4.2.

Таблица 4.2.

фрагмент/ тип регуляризации	(a_i) “короткий интервал регуляризации”	(b_i) “короткий интервал регуляризации с возвратом в хаос”	(c_i) “длинный интервал регуляризации с возвратом в хаос”	(d_i) “итоговая постоянная регуляризация”
$\hat{Q}$, $\mathrm{kg \cdot m^2/s^2}$	-100	-200	-200	-200
T_s, s	0	0	0	0
T_f, s	10	40	450	$+\infty$
Общие параметры	Моменты инерции (4.99); $\varepsilon = 0.15$; $e_B = 1$; $e_m = e_\sigma = e_d = e_F = 0$; $p_0 = 1.4$, $q_0 = 0$, $r_0 = 3.15597$, $\sigma_0 = 0.59403$, $\sigma_* = 2.63527$ [rad/s]; $\bar{\Delta} = 15$, $G = I_2 = 45.29504$ [$\mathrm{kg \cdot m^2/s}$]; $Q_0 = -15$ [$\mathrm{kg \cdot m^2/s^2}$],			

Интересен случай, представленный на фрагменте c_3 (рис. 4.28), где можно видеть суперпозицию двух классических фазовых портретов, один из которых (нижняя часть) соответствует образам точек при $t \in \left[T_s, T_f\right]$, а вторая (верхняя) – образам точек при $t \in \left(T_f, +\infty\right)$. Эти два фазовых портрета в рамках единой динамики, разделенные во времени, иллюстрируют смысл работы предложенной схемы подавления хаоса посредством переключения видов фазовых портретов, как изменяемых динамических сред реализации единого сквозного динамического режима.

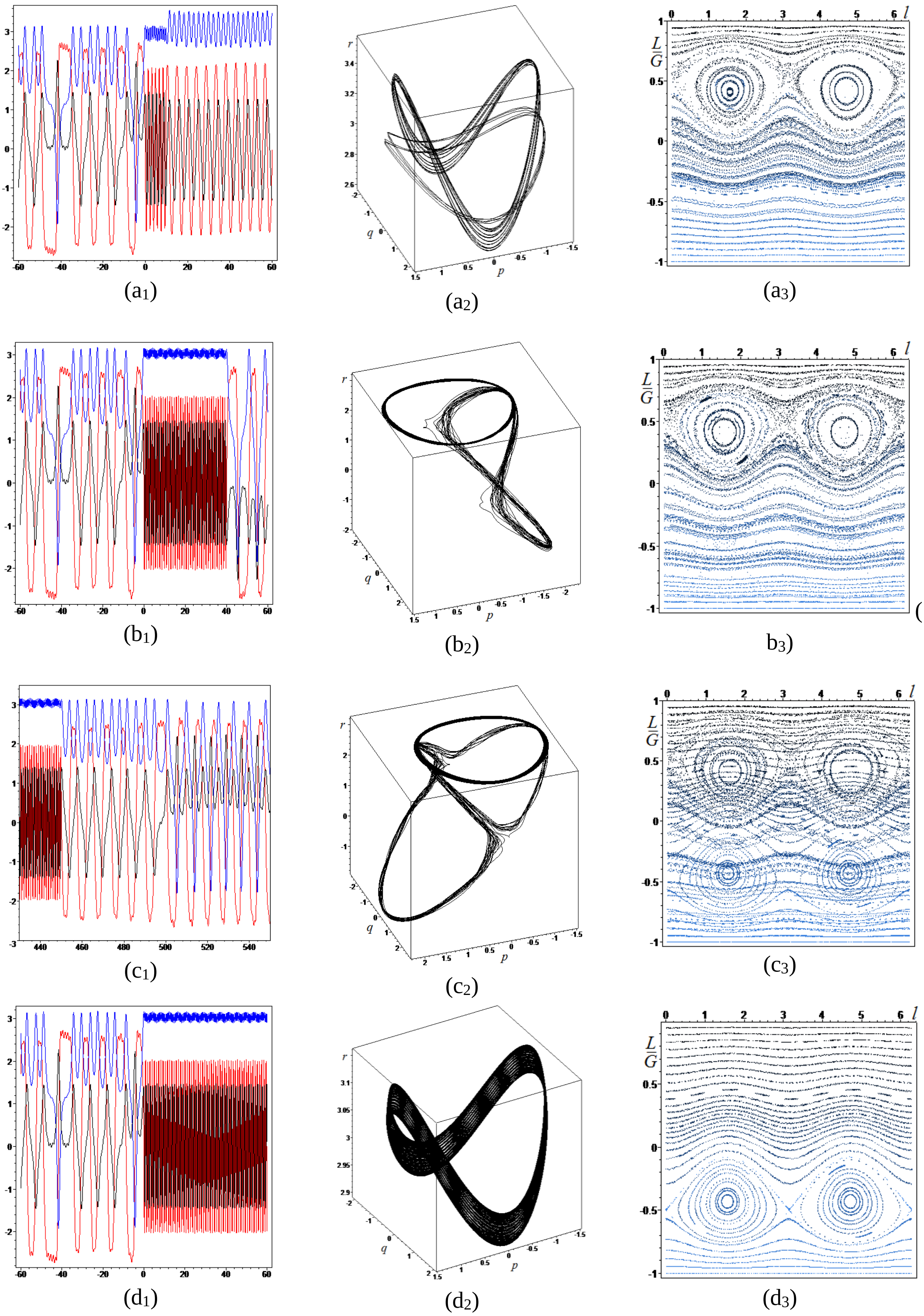


Рис. 4.28. *Подавление хаоса магнитным моментом*

Безусловно, в реальных спутниках-гиростатах удастся создать существенно меньшие величины магнитных моментов, однако смысл работы схемы регуляризации динамики от этого никак не меняется. Формы переключаемых фазовых портретов будут довольно близкие, но все же разные, что может обеспечить необходимое удаление сепартрисной зоны с хаотическим слоем на безопасную для регуляризации режима дистанцию.

4.5. Выводы по главе

В главе проведено исследование хаотизации возмущенной динамики движения спутников-гиростатов при действии внешних и внутренних возмущений различной природы, включая гамильтоновы и негамильтоновы типы возмущений. Изучена возможность хаотизации и регуляризации динамики спутника-гиростата в при выполнении им режимов движения, близких к цилиндрической прецессии, являющейся главным динамическим режимом функционирования спутников-гиростатов и космических аппаратов с двойным вращением. Проанализированы процессы расщепления многообразий сепаратрисс и рождения гомо-/гетероклинических сетей и хаоса на основе формализма Мельникова-Виггинса, а также разработаны различные схемы возможного подавления хаотической динамики.

Формализм Мельникова-Виггинса представляет собой эффективный инструмент обнаружения и анализа гомо-/гетероклинических сетей и хаоса. Однако, необходимо отметить ряд нюансов этого формализма, которые необходимо учитывать в исследованиях.

1). Во-первых, при исследовании процессов расщепления многообразий гетероклинических сепаратрисс и возможности их пересечения необходимо учитывать наличие всех гетероклинических траекторий, связывающих седловые точки. В этой связи, при поиске условий подавления хаоса необходимо искать супремальные значения параметров, которые будут обеспечивать подавление взаимопересечений на всех отдельных сепаратрисах. В рассмотренных выше исследованиях учитывались две главные сепаратрисы (верхняя и нижняя), которые определяли наличие гетероклнической сети, оставляя возможность ее присутствия даже при условиях подавления самопересечений расщепленных многообразий каждой сепаратрисы.

2). Как это видно из результатов исследований, даже при подавлении самопересечений многообразий каждой отдельной гетероклинической сепаратриссы, остаются, тем не менее, возможности пересечений различных многообразий от разных сепаратрисс. Это обстоятельство, вообще говоря, сохраняет возможность присутствия гетероклинических сетей и хаоса в глобальном окружении гетероклинического сепаратриссного региона. Поэтому весьма актуальны разработанные схемы подавления хаоса, использующие механизмы качественного изменения структуры самих фазовых портретов (импульсная схема, магнитная схема).

3). Следует также учитывать, что формализмы Мельникова и Виггинса строились для гомоклинических типов сепаратрисс, что обеспечивает идентичность в условиях существования, координат расположения и прочих характеристик возмущенной стартовой и замыкающей сепаратрису седловой точки, так как в гомоклиническом случае эта точка совпадает сама с собой. В гетероклиническом случае формализмы Мельникова и Виггинса применимы при дополнительном условии, накладываемом на симметрию свойств таких возмущенных замыкающих гетероклиническую сепаратрису седловых точек. Таким образом, исследования будут корректными при условии, что возмущения действуют на весь фазовый портрет «симметричным образом», обеспечивая равенство «расстояний» от возмущенных расщепленных множеств при $(t = \pm\infty)$ и смещенных возмущением седловых точек. Гарантировать *a priori* такую симметричную картину деформации фазового портрета в гетероклинических случаях нельзя, поэтому необходимо учитывать это дополнительное условие при проведении исследований, связанных с гетероклиническим типом сепаратрисс (в рассмотренных задачах подобная симметрия выполнялась, что, в частности, видно из построенных фазовых портретов систем с помощью отображения Пуанкаре).

Учитывая указанные выше аспекты использования формализма Мельникова-Виггинса, можно в заключение сказать, что этот формализм является мощным инструментом анализа гомо-/гетероклинических расщеплений/сетей, и должен быть использован, как минимум на начальных этапах исследований хаотической динамики, для оценки наличия хаоса и возможности его подавления.

5. Прикладные аспекты динамики спутников-гиростатов постоянного и переменного состава

В настоящей главе будут представлены методы пространственной переориентации спутников-гиростатов, разработанные на основе полученных аналитических решений и изученных свойств динамического хаоса. Указанные методы нашли свое опубликование в работах диссертанта [200, 198, 50, 190, 203, 205].

5.1. Переориентация спутников-гиростатов с помощью инициации гетероклинического хаоса

В противоположность рассмотрению хаотического поведения, как негативного феномена, в настоящем пункте динамический хаос рассматривается в своем позитивном аспекте, как возможный инструмент изменения качественных свойств движения спутников-гиростатов, включая возможную пространственную переориентацию.

Такую позитивную намеренную хаотизацию можно реализовать с помощью доступных динамических актуаторов спутника-гиростата: можно использовать электродвигатель ротора, либо магнитные силовые катушки. Ниже будет описана методика перевода динамики спутника-гиростата в хаотический режим («включение хаоса») и выхода из него («отключение хаоса») в любой момент времени по достижению требуемых параметров движения.

5.1.1. Общая характеристика и алгоритм метода хаотической переориентации

Метод переориентации спутника-гиростата за счет вовлечения его в хаотический режим включает следующе шаги:

1. Спутник-гиростат выполняет исходный динамический режим;
2. За счет включения внутреннего момента сил раскрутки ротора, обеспечивается изменение продольной угловой скорости тела-платформы до уровня вхождения в окрестность гетероклинического региона (приближения к сепаратрисе за счет изменения уровня энергии текущей фазовой траектории и деформации самого фазового портрета).
3. Включается хаотизация динамики путем инициации гармонических моментов сил в двигателе ротора, либо в дипольном магнитном моменте, что соответствует инициации возмущения, порождающего в окрестности гетероклинического региона гетероклиническую сеть и динамический хаос. В рамках выполнения хаотического движения осуществляется мониторинг параметров движения (текущих величин компонент угловой скорости) и текущий анализ выполнения критериев достижения необходимой качественной зоны фазового пространства (будут описаны ниже).
4. При достижении выполнения критериев происходит мгновенное отключение гармонического возмущения, что «выключает» хаос и спутник-гиростат переходит в динамический режим свободного движения в новой зоне и реализует новый динамический режим.

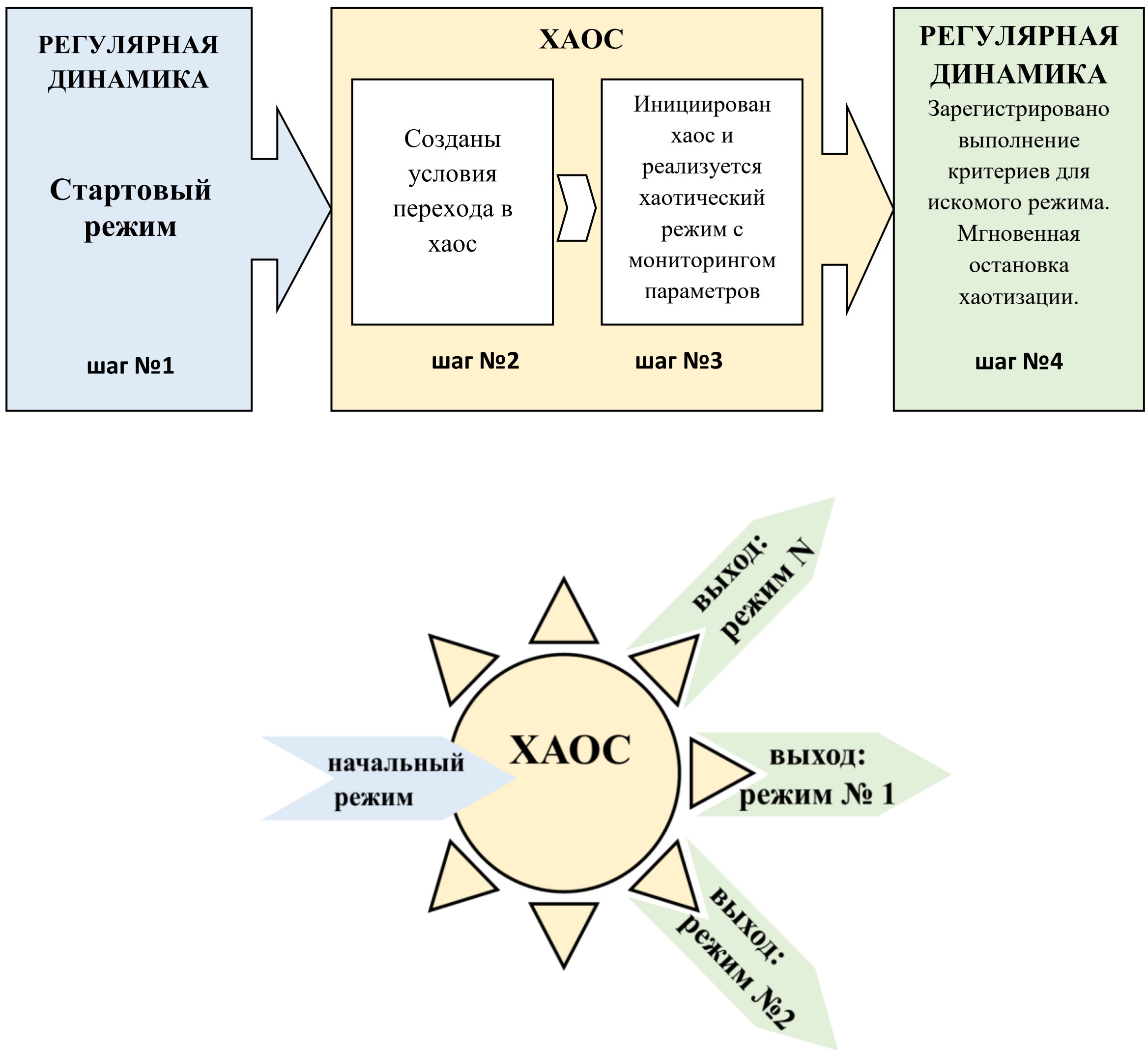
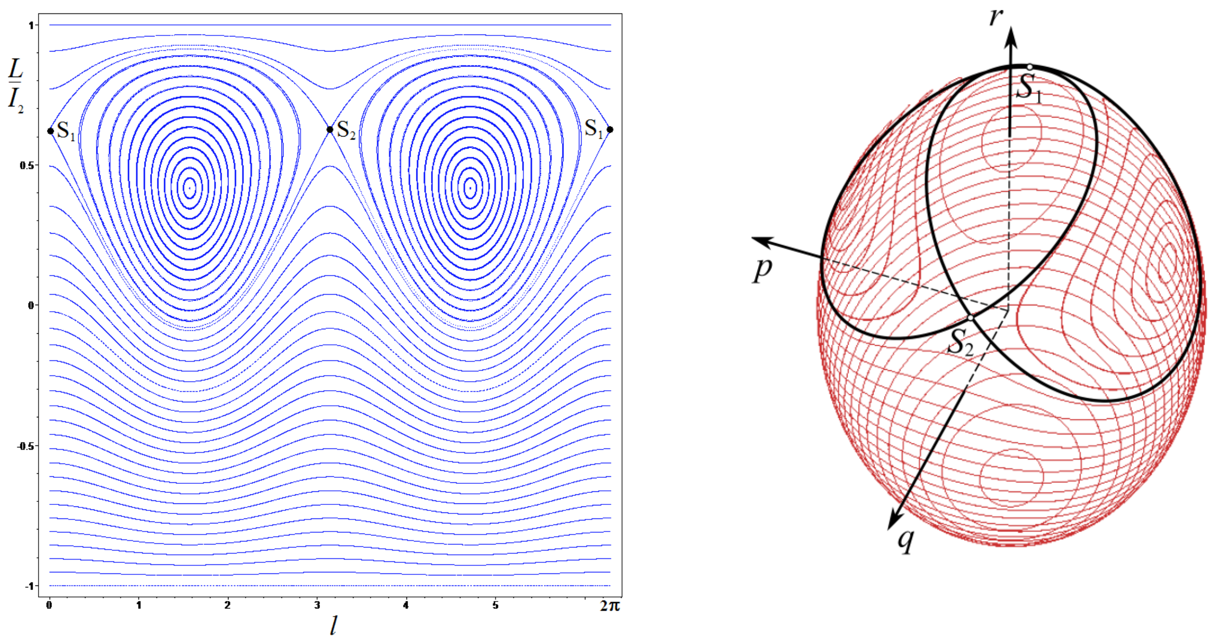


Рис. 5.1 – *Схематический алгоритм использования хаоса для изменения динамических режимов*

Таким образом, в рамках предлагаемого метода переориентация спутника-гиростата выполняется посредством ухода из стартового регулярного динамического режима в хаос и выхода из хаоса на новый нужный регулярный динамический режим, т.е. хаос может быть проинтерпретирован, как некий динамический «хаб», объединяющий выходы на доступные регулярные режимы движения спутника-гиростата.

Напомним, что в настоящей работе рассматривается гомо-/гетероклинический хаос, реализующийся в окрестности сепаратрисс, разделяющих главные регулярные зоны динамики спутника-гиростата. Это определяет не только способ реализации, но и логику использования метода. Невозмущенную динамику спутника-гиростата в его свободном пространственном движении определяет, как известно, четыре главные зоны (рис. 5.2), разделенные четырьмя гетероклиническими сепаратрисами (соединяющими седловые точки S_1 и S_2): две «колебательные» зоны, окружающие соответствующие две точки типа центр, и две «вращательные» зоны.



(a) (b)

Рис. 5.2. Фазовое пространство невозмущенной системы*:*
(a) в пространстве переменных Андуайе-Деприи
(b) в пространстве компонент угловой скорости

При «включении» возмущений реализуется переход к динамике, содержащей хаос в окрестности сепаратрисс (рис. 5.3.), выражающийся в генерации общего хаотического слоя вокруг всех сепаратрисс (зона $\mathfrak{H}$), граничащего со всеми четырьмя качественными зонами регулярной динамики, обозначенными готическими буквами: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.

Опишем динамику в соответствующих качественных зонах. В зоне $\mathfrak{A}$ спутник-гиростат выполняет такие движения, когда продольная ось (Cz) совершает прецессию с острыми углами нутации θ вокруг вектора кинетического момента $\mathbf{K}$ (рис. 5.3-d). В этом случае спутник вращается вокруг оси Cz в положительном направлении ($\dot{\varphi} > 0$) и имеет положительную скорость прецессии ($\dot{\psi} > 0$). Другими словами спутник предпочтительно вращается вокруг собственной продольной оси Cz.

Такие динамические режимы соответствуют наиболее важному режиму функционирования спутников-гиростатов, когда они выполняют гироскопически стабилизированное движение с малым нутационным отклонением продольной оси от направления вектора кинетического момента. В идеальном случае угол нутации вообще равен нулевому значению (в т.ч. L/I_2=1). Собственно, зона $\mathfrak{A}$ и все ее динамические режимы близки к цилиндрической прецессии (в случае, когда вектор кинетического момента создается ортогональным к плоскости орбиты).

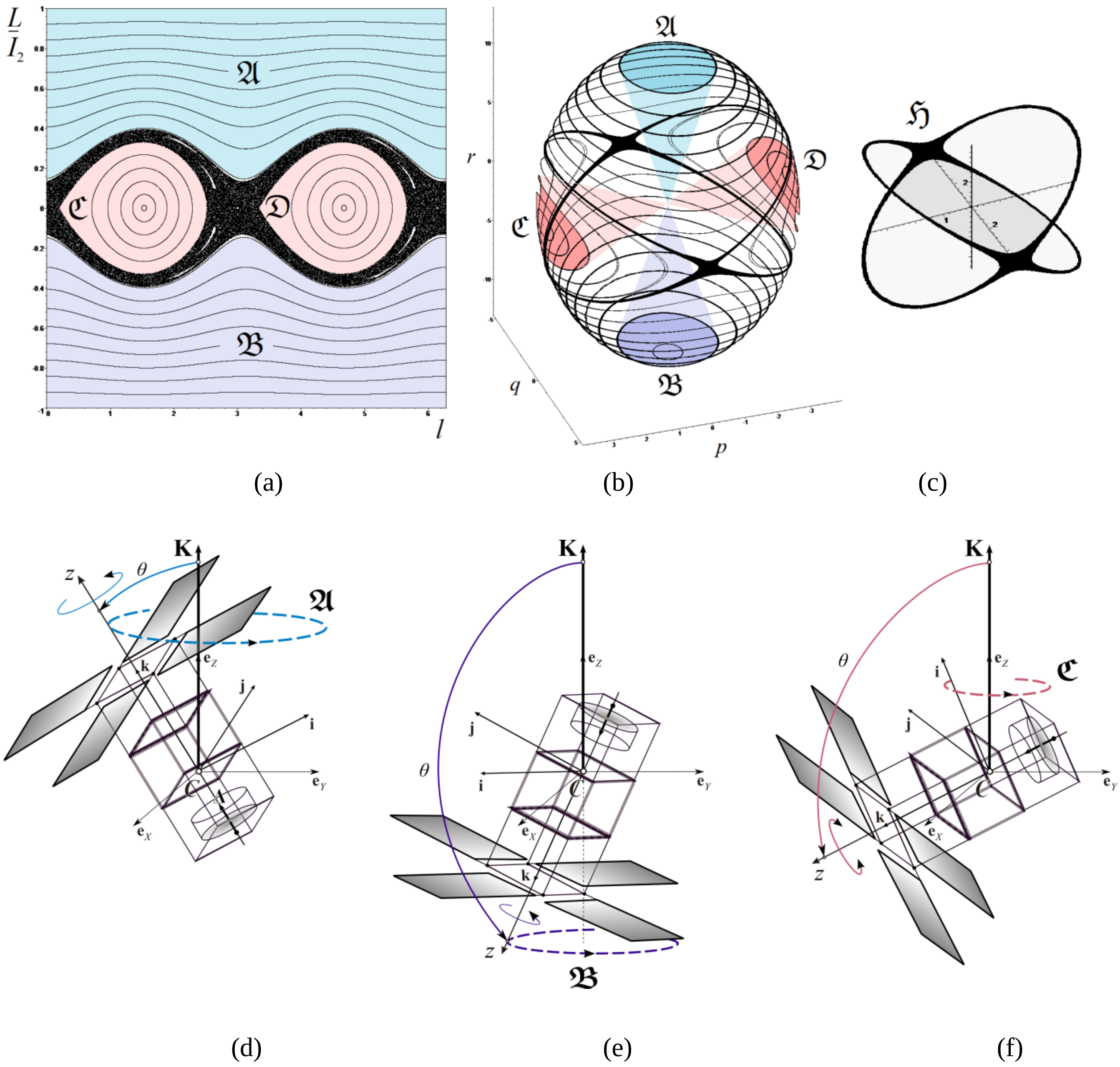


Рис. 5.3. *Главные зоны фазового пространства и режимы пространственного движения спутников-гиростатов*

Зона 𝔅 является динамическим «антиподом» зоны 𝔄, когда продольная ост *Cz* противонаправлена вектору кинетического момента (рис. 5.3-e), однако, как и прежде прецессирует вокруг этого вектора **K**, но уже с тупым углом нутации при положительных величинах скоростей прецессии и отрицательных скоростях собственного вращения.

Зона ℭ соответствует предпочтительному вращению спутника вокруг его поперечной оси *Ox*, которая выполняет положительную прецессию вокруг вектора кинетического момента **K** (рис. 5.3-f). Угол собственного вращения при движении в зоне ℭ колеблется относительно значения $\varphi^{*}=\pi/2$. Т.е. этот тип движения является наихудшим в динамическом смысле для спутника-гиростата.

Зона $\mathfrak{D}$ практически идентична в динамическом смысле зоне $\mathfrak{C}$, т.к. в этой зоне спутник также предпочтительно вращается вокруг поперечной оси *Ox*, но угол собственного вращения колеблется относительно значения $\varphi^*=3\pi/2$ (т.е. спутник выполняет противоположное движение по отношению к движению в зоне $\mathfrak{C}$). Качество динамики в зоне $\mathfrak{D}$, как и в зоне $\mathfrak{C}$, является наихудшим для применимости на практике.

Зона гетероклинического хаоса $\mathfrak{H}$ возникает на фазовом портрете в случае «включенного» возмущения и соединяет все главные зоны ($\mathfrak{A}$—$\mathfrak{D}$). Зона $\mathfrak{H}$ «покрывает» собой окрестности/части всех главных зон невозмущенного движения, поэтому при попадании фазовой траектории в эту зону динамика спутника будет чередовать качества всех главных зон, т.е. совершать непредсказуемые переходы от колебаний к вращениям с разными амплитудными значениями, что и соответствует хаосу.

Наиболее важной и выгодной для практики зоной для спутника-гиростата является зона $\mathfrak{A}$. Однако, спутник может быть выведен ракетой-носителем на орбиту без соблюдения дополнительных динамических условий и, следовательно, может начать свое угловое движение в любой зоне ($\mathfrak{A}$—$\mathfrak{D}$). Поэтому очень важно перевести его в зону $\mathfrak{A}$, т.е. выполнить соответствующую переориентацию. В настоящем пункте рассматривается метод переориентации, способный перевести спутник-гиростат в любую из заданных зон посредством инициации хаотической динамики (рождения зоны $\mathfrak{H}$) и своевременного выхода из него по достижению целевой зоны.

Описанный выше алгоритм данного метода включает ***четыре шага***, каждому из которых теперь целесообразно дать детализированное описание своей реализации:

№1 соответствует реализации движения в стартовом динамическом режиме и не требует детализации.

№2 подразумевает перевод динамики спутника на динамический режим в окрестности гетероклинических траекторий. Для выполнения такого перевода необходимо включить постоянный внутренний момент, раскручивающий ротор и увеличивающий скорость его вращения до соответствующей величины:

$$\dot{\Delta} = M_{spin} \cdot \left(H\left(t - t_{ini}\right) - H\left(t - t_{hetero}\right)\right) \tag{4.100}$$

где M_{spin} – постоянная величина момента сил, $H(t)$ – функция Хевисайда, t_{ini} – значение момента времени старта раскрутки ротора, t_{hetero} – момент времени достижения скорости ротора, соответствующей гетероклинической области. Таким образом, на интервале времени [t_{ini}, t_{hetero}] угловая скорость ротора и его кинетический момент изменяются линейно $\left(\Delta(t) = \Delta_{ini} + M_{spin} \cdot t\right)$, что, конечно, отражается на деформации фазового портрета [194] тем, что смещается область сепаратрисс. Важно отметить, что момент времени t_{hetero} не определен заранее в силу неопределенности стартовой зоны и параметров режима. Этот момент времени определяется системой управления спутника, которая осуществляет постоянный мониторинг динамических параметров. Т.е. после старта раскрутки система управления проверяет выполнение условия достижения (с некоторой погрешностью) гетероклинического региона, которое следует из аналитических решений [192]:

$$if\left\{\left\|r(t)-\frac{\Delta(t)}{B-C_b}\right|-\left|p(t)\cdot\sqrt{\frac{A(A-B)}{C_b(B-C_b)}}\right\|\le\xi\right\}\ then\ t\to t_{hetero} \tag{4.101}$$

где ξ – есть некоторая удовлетворительная неточность $(0<\xi<<1)$ приближения реальной фазовой траектории к гетероклинической сепаратрисе (определяется как конструкционный параметр при разработке системы управления).

№3 выполняется после достижения гетероклинического региона (после t_{hetero}) и подразумевает включение малого гармонического возмущающего момента сил, создаваемого тем или иным актуатором, в качестве которого можно, например, использовать тот же самый внутренний силовой момент раскрутки ротора, либо силовые катушки магнитной системы управления с изменяемым дипольным моментом:

$$\begin{cases} m_i(t)=\mu_i\left[\mathrm{H}(t-t_{start})-\mathrm{H}(t-t_{finish})\right]\sin(\Omega_i t); \\ M_{internal}(t)=\mu_\Delta\left[\mathrm{H}(t-t_{start})-\mathrm{H}(t-t_{finish})\right]\cos(\Omega_\Delta t), \end{cases} \tag{4.102}$$

где μ_i, μ_Δ есть малые амплитуды возмущающих факторов ($i=x, y, z$); Ω_Δ и Ω_i есть частоты гармонических возмущений; $\mathrm{H}(t)$ – функция Хевисайда; t_{start} и t_{finish} – есть значения моментов времени «включения» и «отключения» возмущающих силовых моментов. Стоит отметить, что для создания хаоса можно использовать отдельно тот или иной момент сил возмущений, либо все возможные хаотизирующие (поли)гармонические моменты сил (μ_i, μ_Δ). Тем самым в рамках шага алгоритма №3 на временном интервале [t_{start}, t_{finish}] выполняется хаотическая динамика спутника-гиростата в зоне гетероклинического хаоса (зона $\mathfrak{H}$). Момент остановки действия возмущающего момента сил t_{finish} заранее не определен. Он определяется системой управления при мониторинге параметров движения и проверке выполнения одного из критериев, определяющих достижение той или иной целевой зоны. При достижении целевой зоны выполняется соответствующий критерий и система управления прекращает действие возмущающего актуатора и спутник-гиростат выходит из хаоса. Соответствующие критерии достижения главных зон имеют смысл проверки условий реализации полодий выше/ниже сепаратрисс и имеют нижеследующий вид.

Для зоны $\mathfrak{A}$ критерий ее достижения имеет вид:

$$\begin{cases} \left|r(t)-\dfrac{\Delta(t)}{B-C_b}\right|>\left|p(t)\cdot\sqrt{\dfrac{A(A-B)}{C_b(B-C_b)}}\right|; \\ r(t)-\dfrac{\Delta(t)}{B-C_b}>0 \end{cases} \tag{4.103}$$

Для зоны $\mathfrak{B}$ соответствующий критерий ее достижения записывается:

$$\begin{cases} \left| r(t) - \dfrac{\Delta(t)}{B - C_b} \right| > \left| p(t) \cdot \sqrt{\dfrac{A(A-B)}{C_b(B-C_b)}} \right|; \\ r(t) - \dfrac{\Delta(t)}{B - C_b} < 0 \end{cases} \tag{4.104}$$

Для зоны $\mathfrak{C}$ критерий представляет собой неравенства :

$$\begin{cases} \left| r(t) - \dfrac{\Delta(t)}{B - C_b} \right| < \left| p(t) \cdot \sqrt{\dfrac{A(A-B)}{C_b(B-C_b)}} \right|; \\ p(t) > 0 \end{cases} \tag{4.105}$$

Для зоны $\mathfrak{D}$ в виде критерия можно указать:

$$\begin{cases} \left| r(t) - \dfrac{\Delta(t)}{B - C_b} \right| < \left| p(t) \cdot \sqrt{\dfrac{A(A-B)}{C_b(B-C_b)}} \right|; \\ p(t) < 0 \end{cases} \tag{4.106}$$

Выполнение критерия для целевой зоны означает ее достижение и отключение возмущающего актуатора, т.е. на основе указанных критериев системой управления определяется момент времени выхода из хаоса t_{finis}.

№4 соответствует непосредственно выполнению отключения хаотизатора – отключению возмущающего актуатора в момент времени t_{finish}. После этого спутник-гиростат переходит к реализации нового регулярного динамического режима в целевой зоне.

Возможно необязательное выполнение дополнительного пятого шага алгоритма, когда осуществляется некоторое торможение относительной угловой скорости ротора путем включения соответствующего постоянного внутреннего момента раскрутки ротора. В этом случае можно добиться выгодной деформации вида фазового портрета без изменения его качества (поднять или опустить сепаратрисную зону, удаляя от нее текущую фазовую траекторию).

5.1.2. Математическая модель действия актуаторов хаотизации динамики

В интересах расширения применимости и работоспособности метода хаотической переориентации целесообразно описать расширенную модель движения спутника-гиростата в магнитном поле, не зависящую от выполнения условий реализации режимов цилиндрической прецессии на экваториальных орбитах и демонстрирующую возможность проявления хаоса и намеренной хаотизации динамики без ограничений на расположение вектора внешней магнитной индукции геомагнитного поля (не требуя сонаправленности $\mathbf{K} \uparrow\uparrow \mathbf{B}_{orb}$).

Рассмотрим общий случай расположения вектора внешней магнитной индукции по отношению к вектору начального кинетического момента (рис. 5.4).

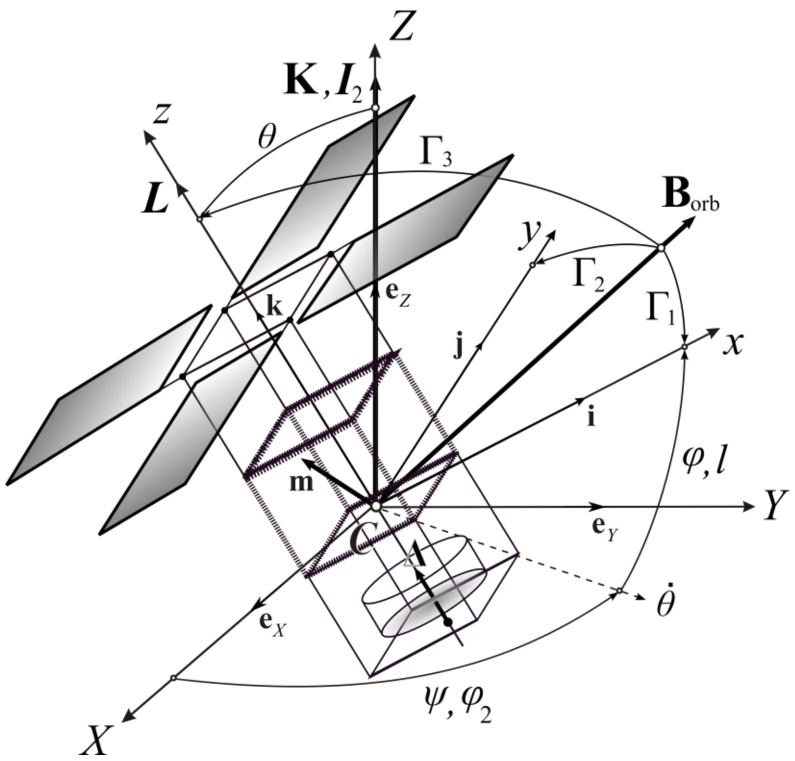


Рис. 5.4. *Схема и системы координат*

Вектор индукции геомагнитного поля $\mathbf{B}_{orb}$ будем считать, как и везде прежде, постоянным. Копоненты вектора в инерциальной системе $CXYZ$ обозначим, как $\mathbf{B}_{orb}=[B_X, B_Y, B_Z]^T$. Также расположение вектора можно описывать по отношению к подвижной системе координат $Cxyz$ соответствующими направляющими косинусами $\Gamma_1 = \cos(\mathbf{B}_{orb}, \mathbf{i})$, $\Gamma_2 = \cos(\mathbf{B}_{orb}, \mathbf{j})$, $\Gamma_3 = \cos(\mathbf{B}_{orb}, \mathbf{k})$. Тогда управляющий магнитный момент, создаваемый системой управления посредством формирования собственного вектора магнитной индукции спутника $\mathbf{m}$ в осях подвижной системы $Cxyz$, имеет вид:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{B}_{orb} = B_{orb}\left[\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\right]^T; \qquad \mathbf{m} = \left[m_x(t), m_y(t), m_z(t)\right]^T; \\
\mathbf{M}_{ctrl} = B_{orb}\left[m_y\Gamma_3 - m_z\Gamma_2;\;\; m_z\Gamma_1 - m_x\Gamma_3;\;\; m_x\Gamma_2 - m_y\Gamma_1\right]^T
\end{gathered}
\tag{4.107}
$$

Важно также описать динамику изменения направляющих косинусов $\{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\}$ единичных векторов $\{\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z\}$ инерциальной системы $CXYZ$ в подвижной системе $Cxyz$, а также динамику направляющих косинусов $\{\Gamma_i\}$ вектора $\mathbf{B}_{orb}$:

$$
\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}; & \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}; \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}; & \dot{\boldsymbol{\Gamma}} = \boldsymbol{\Gamma} \times \boldsymbol{\omega} \end{cases} \tag{4.108}
$$

Для использования переменных Андуайе-Деприи инерциальную ось CZ, как и прежде, направим вдоль вектора начального кинетического момента свободного (до включения хаотизирующих актуаторов) спутника-гиростата (рис. 5.4). Так как хаотизирующие моменты приняты нами малыми по своей величине, включая малость внутреннего момента сил раскрутки и внешнего магнитного момента (3.3), то на всем интервале времени $[t_{start},\ t_{finish}]$ можно считать, что вектор кинетического момента $\mathbf{K}$ является неизменным и поэтому динамическая система спутника-гиростата будет включать две пары канонических переменных ($\{\varphi_2,\ I_2\}$, $\{l,\ L\}$), причем с учетом сонаправленности $CZ \uparrow\uparrow \mathbf{K}$ будут справедливы соотношения:

$$
\begin{cases} l = \varphi; \quad \varphi_2 = \psi; \quad \varphi_3 \equiv 0; \\ I_2 = K; \quad \cos\theta = L/I_2 = L/K; \\ \sin\theta = \sqrt{I_2^2 - L^2}\Big/ I_2 = \sqrt{K^2 - L^2}\Big/ K \end{cases} \tag{4.109}
$$

Гамильтониан системы будет определяться невозмущенной частью, повторяющей (4.3), а возмущенная часть будет представлять собой малые добавки к кинетической и потенциальной энергии (пропорциональные малому параметру ε):

$$
\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon \mathcal{H}_1; \qquad \mathcal{H}_1 = T_1 + P_1 \tag{4.110}
$$

Для записи возмущенной части гамильтониана сначала рассмотрим малую добавку к потенциальной энергии, возникающей вследствие действия магнитного момента сил (3.3). Если ввести позиционный угол $\vartheta = \angle(\mathbf{m}, \mathbf{B}_{orb})$, то можно записать величину управляющего магнитного момента сил в скалярном виде, выполняя скалярное произведение векторов:

$$
\begin{gathered} |\mathbf{M}_{ctrl}| = |\mathbf{m} \times \mathbf{B}_{orb}| = |\mathbf{m}||\mathbf{B}_{orb}| \sin\vartheta; \\ \varepsilon P_1 = -\int |\mathbf{M}_{ctrl}| \, d\vartheta = -|\mathbf{m}||\mathbf{B}_{orb}| \cos\vartheta = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_{orb} = \\ = -\left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} B_X \\ B_Y \\ B_Z \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{4.111}
$$

С учетом сонаправленности оси CZ с невозмущенным вектором кинетического момента, используя (4.109) и хорошо известные соотношения для углов Эйлера, получим следующие выражения для направляющих косинусов, зависящих от переменных Андуайе-Деприи:

$$\begin{cases} \begin{cases} \alpha_1 = \cos\varphi\cos\psi - \cos\theta\sin\psi\sin\varphi = \cos l\cos\varphi_2 - \left(L/I_2\right)\sin\varphi_2\sin l; \\ \alpha_2 = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\theta\sin\psi\cos\varphi = -\sin l\cos\varphi_2 - \left(L/I_2\right)\sin\varphi_2\cos l; \\ \alpha_3 = \sin\theta\sin\psi = \left(\sqrt{I_2^2 - L^2}\Big/I_2\right)\sin\varphi_2; \end{cases} \\ \begin{cases} \beta_1 = \cos\varphi\sin\psi + \cos\theta\cos\psi\sin\varphi = \cos l\sin\varphi_2 + \left(L/I_2\right)\cos\varphi_2\sin l; \\ \beta_2 = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\theta\cos\psi\cos\varphi = -\sin l\sin\varphi_2 + \left(L/I_2\right)\cos\varphi_2\cos l; \\ \beta_3 = -\sin\theta\cos\psi = -\left(\sqrt{I_2^2 - L^2}\Big/I_2\right)\cos\varphi_2; \end{cases} \\ \begin{cases} \gamma_1 = \sin\theta\sin\varphi = \left(\sqrt{I_2^2 - L^2}\Big/I_2\right)\sin l; \\ \gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi = \left(\sqrt{I_2^2 - L^2}\Big/I_2\right)\cos l; \\ \gamma_3 = \cos\theta = L/I_2 \end{cases} \end{cases} \qquad (4.112)$$

Тогда возмущенная часть потенциальной энергии (4.111) будет выражаться через переменные Андуайе-Деприс учетом соотношений (4.112):

$$\varepsilon P_1\left(l, L, \varphi_2, I_2\right) = -m_x\left\{\alpha_1 B_X + \beta_1 B_Y + \gamma_1 B_Z\right\} - m_y\left\{\alpha_2 B_X + \beta_2 B_Y + \gamma_2 B_Z\right\} - m_z\left\{\alpha_3 B_X + \beta_3 B_Y + \gamma_3 B_Z\right\} \qquad (4.113)$$

Если несколько упростить задачу, то без ограничения функциональности хаотизирующего актуатора, можно считать, что собственный дипольный момент **m** формируется только вдоль продольной оси спутника-гиростата, т.е. имеет только компоненту m_z. В этом случае соотношение (4.113) с помощью (4.112) позволит записать следующее явное выражение для возмущенной потенциальной энергии:

$$\varepsilon P_1 = -\frac{m_z}{I_2}\left[\sqrt{I_2^2 - L^2}\left(B_X\sin\varphi_2 - B_Y\cos\varphi_2\right) + B_Z L\right] \qquad (4.114)$$

Для записи возмущенной части кинетической энергии, актуальной на интервале времени [t_{start}, t_{finish}] действия возмущения от гармонического внутреннего момента сил раскрутки ротора, можно предварительно проинтегрировать последнее динамическое уравнение (3.16) для кинетического момента ротора:

$$\tilde{\Delta}(t) = \Delta + \frac{\mu_\Delta}{\Omega_\Delta}\sin\left(\Omega_\Delta t\right) \qquad (4.115)$$

Подстановка решения (4.115) в выражение для кинетической энергии и отбрасывание членов порядка $O\left(\mu_\Delta^2\right)$ позволяет записать возмущенную часть кинетической энергии:

$$\varepsilon T_1 = \frac{\mu_\Delta}{\Omega_\Delta}\sin\Omega_\Delta t\left[\frac{\Delta}{C_r} - \frac{L - \Delta}{C_b}\right] \qquad (4.116)$$

Выражения (4.116) и (4.114) определяют собой возмущенную часть гамильтониана в случае реализации динамики с двумя работающими актуаторами (двигатель раскрутки ротора и магнитная силовая катушка), хаотизирующими движение на временном интервале [t_{start}, t_{finish}], что, в свою очередь, позволяет записать уравнения возмущенного движения в переменных Андуайе-Деприт:

$$\begin{cases} \dot{L} = f_L + \varepsilon g_L; \\ \dot{l} = f_l + \varepsilon g_l; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{I}_2 = f_{I_2} + \varepsilon g_{I_2}; \\ \dot{\varphi}_2 = f_{\varphi_2} + \varepsilon g_{\varphi_2}; \end{cases} \tag{4.117}$$

где

$$\begin{cases} \begin{cases} f_L = -\frac{1}{2}\left[I_2^2 - L^2\right]\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\sin(2l); \quad f_l = L\left[\frac{1}{C_b} - \frac{\sin^2 l}{A} - \frac{\cos^2 l}{B}\right] - \frac{\Delta}{C_b}; \\ \varepsilon g_L = 0; \ \varepsilon g_l = -\frac{\mu_\Delta}{\Omega_\Delta C_b}\sin\Omega_\Delta t - \frac{m_z}{I_2}\left[B_Z - \frac{L}{\sqrt{I_2^2 - L^2}}\left(B_X \sin\varphi_2 - B_Y\cos\varphi_2\right)\right]; \end{cases} \\ \begin{cases} f_{I_2} = 0; \quad \varepsilon g_{I_2} = \frac{m_z}{I_2}\left[\sqrt{I_2^2 - L^2}\left(B_X\cos\varphi_2 + B_Y\sin\varphi_2\right)\right]; \\ f_{\varphi_2} = I_2\left[\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B}\right]; \quad \varepsilon g_{\varphi_2} = \frac{m_z L}{I_2^2}\left[B_Z - \frac{L}{\sqrt{I_2^2 - L^2}}\left(B_X\sin\varphi_2 - B_Y\cos\varphi_2\right)\right] \end{cases} \end{cases} \tag{4.118}$$

и с учетом (4.102)

$$\begin{cases} \begin{cases} f_L = -\frac{1}{2}\left[I_2^2 - L^2\right]\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\sin(2l); \quad f_l = L\left[\frac{1}{C_b} - \frac{\sin^2 l}{A} - \frac{\cos^2 l}{B}\right] - \frac{\Delta}{C_b}; \\ \varepsilon g_L = 0; \ \varepsilon g_l = -\varepsilon\left\{e_\Delta\Omega_\Delta\sin\Omega_\Delta t + e_z\Omega_z\left[1 - \frac{L}{\sqrt{I_2^2 - L^2}}\left(b_X\sin\varphi_2 - b_Y\cos\varphi_2\right)\right]\sin(\Omega_z t)\right\}; \end{cases} \\ \begin{cases} f_{I_2} = 0; \quad \varepsilon g_{I_2} = \varepsilon e_z\Omega_z\left[\sqrt{I_2^2 - L^2}\left(b_X\cos\varphi_2 + b_Y\sin\varphi_2\right)\right]\sin(\Omega_z t); \\ f_{\varphi_2} = I_2\left[\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B}\right]; \quad \varepsilon g_{\varphi_2} = \varepsilon e_z\Omega_z\frac{L}{I_2}\left[1 - \frac{L}{\sqrt{I_2^2 - L^2}}\left(b_X\sin\varphi_2 - b_Y\cos\varphi_2\right)\right]\sin(\Omega_z t) \end{cases} \end{cases}$$

(4.119)

где $b_X = B_X / B_Z$; $b_Y = B_Y / B_Z$ и введен малый безразмерный параметр ε, масштабирующий малые амплитуды гармонических возмущающих моментов сил:

$$\varepsilon = \sup(\varepsilon_\Delta, \varepsilon_z); \quad \varepsilon_\Delta = \frac{\mu_\Delta}{\Omega_\Delta^2 C_b}; \quad \varepsilon_z = \frac{\mu_z B_Z}{\Omega_z I_2}; \tag{4.120}$$
$$\varepsilon_\Delta = e_\Delta\varepsilon; \quad \varepsilon_z = e_z\varepsilon$$

5.1.3. Иллюстрация хаотизации при действии хаотизирующих актуаторов

На основе уравнений возмущенного движения (4.117) с правыми частями (4.119) целесообразно провести моделирование динамики в процессе действия хаотизирующих актуаторов (4.102). Прежде всего, стоит сказать, что система уравнений возмущенного движения на интервале времени [t_{start}, t_{finish}] формально соответствует системе с двумя степенями свободы ({φ_2, I_2}, {l, L}) при наличии пятого измерения, соответствующего оси времени в силу неавтономности системы. Поэтому иллюстрацию хаотизации целесообразно проводить на основе сечений Пуанкаре, редуцирующих размерность динамической системы, приводя ее к трехмерному геометрическому образу, описывающему главные динамические величины $\left\{l,\, L/I_2(0),\, I_2\right\} \in \mathbb{R}^3$. Указанное отображение Пуанкаре строится на основе «стробоскопического» условия:

$$\operatorname{mod}\left(t, 2\pi/\Omega\right) = 0; \qquad \Omega = \sup\left(\Omega_\Delta, \Omega_z\right) \tag{4.121}$$

В итоге можно построить трехмерные фазовые портреты и их главные проекции (рис. 5.5), хорошо иллюстрирующие возникновение хаотических слоев в гетероклиническом регионе фазового пространства.

Для сравнительной оценки работы каждого из хаотизирующих актуаторов можно привести ряд результатов моделирования возмущенной динамики с раздельным их действием. Так на рис. 5.6 и 5.7 приведены проекции отображений Пуанкаре {l, $L/I_2(0)$}, полученные при раздельном действии актуаторов: левый столбец портретов (рис. 5.6) соответствует действию только внутреннего гармонического момента, а правый – только магнитного возмущающего момента. Параметры для численных расчетов, приведенные в таблице (табл. 5.1) соответствуют неким гипотетическим спутникам-гиростатам и их актуаторам, которые все же вполне адекватны с точки зрения инерционно-массовых параметров реальных микро- и наноспутников, а также возможностей электродвигателей и магнитных силовых катушек (рассматривая орбитальное движение по низким орбитам, где B_{orb}~50 [мкТесла], с мощными магнитными силовыми катушками, создающими дипольные моменты с величинами m~40 [Ам·м^2]).

Таблица 5.1. *Параметры для численных расчетов*

<table>
<tr><th>Рис.</th><th>A, kg*m^2</th><th>B, kg*m^2</th><th>C_b, kg*m^2</th><th>$I_2(0)$, kg*m^2/s</th><th>Δ, kg*m^2/s</th><th>b_X</th><th>b_Y</th><th>$\mu_z B_Z$, N*m</th><th>μ_Δ, N*m</th><th>Ω_Δ, 1/s</th><th>Ω_z, 1/s</th></tr>
<tr><td>5.5</td><td rowspan="10">20</td><td rowspan="10">15</td><td rowspan="10">6</td><td rowspan="10">76</td><td>76/3</td><td>1/4</td><td>3/4</td><td>8</td><td>0</td><td>-</td><td>2π</td></tr>
<tr><td>5.6-a</td><td>0</td><td>-</td><td>-</td><td>0</td><td>10</td><td>2π</td><td>-</td></tr>
<tr><td>5.6-b</td><td>0</td><td>1/4</td><td>3/4</td><td>8</td><td>0</td><td>-</td><td>2π</td></tr>
<tr><td>5.6-c</td><td>76/3</td><td>-</td><td>-</td><td>0</td><td>10</td><td>2π</td><td>-</td></tr>
<tr><td>5.6-d</td><td>76/3</td><td>1/4</td><td>3/4</td><td>8</td><td>0</td><td>-</td><td>2π</td></tr>
<tr><td>5.6-e</td><td>45</td><td>-</td><td>-</td><td>0</td><td>10</td><td>2π</td><td>-</td></tr>
<tr><td>5.6-f</td><td>45</td><td>1/4</td><td>3/4</td><td>8</td><td>0</td><td>-</td><td>2π</td></tr>
<tr><td>5.6-g</td><td>-45</td><td>-</td><td>-</td><td>0</td><td>10</td><td>2π</td><td>-</td></tr>
<tr><td>5.6-h</td><td>-45</td><td>1/4</td><td>3/4</td><td>8</td><td>0</td><td>-</td><td>2π</td></tr>
<tr><td>5.6-i,j</td><td>0</td><td>-</td><td>-</td><td>0</td><td>150</td><td>2π</td><td>-</td></tr>
<tr><td>5.7-a</td><td rowspan="3">0.2</td><td rowspan="3">0.15</td><td rowspan="3">0.06</td><td rowspan="3">0.76</td><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">1/3</td><td rowspan="3">1/3</td><td rowspan="3">0.002</td><td>0.0</td><td>-</td><td>π/10</td></tr>
<tr><td>5.7-b</td><td>0.1</td><td>π</td><td>π/10</td></tr>
<tr><td>5.7-c,d</td><td>0.5</td><td>π</td><td>π/10</td></tr>
</table>

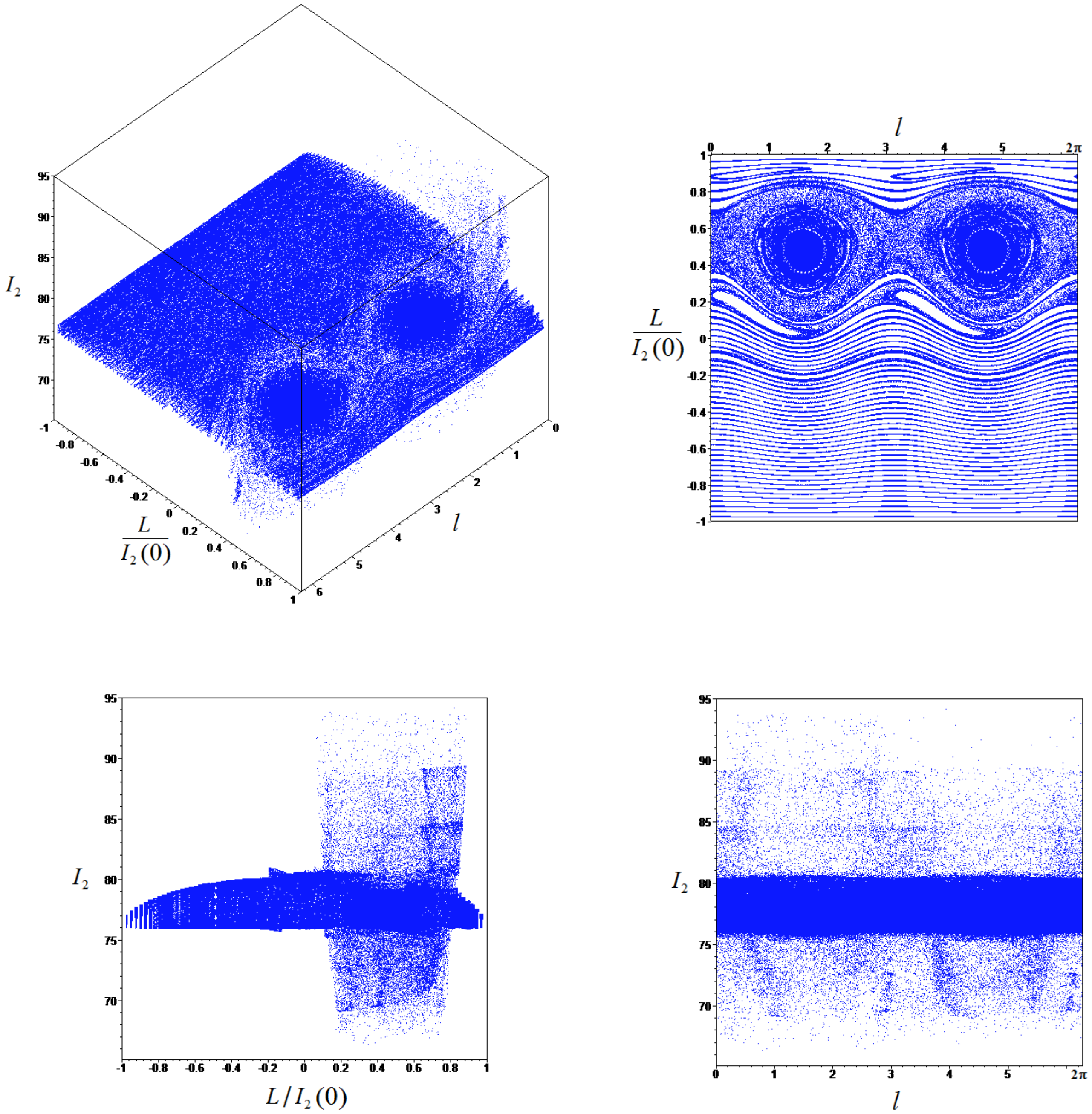


Рис. 5.5. *Трехмерное сечение Пуанкаре и его проекции*

Отдельно стоит отметить два сечения Пуанкаре (рис. 5.6-i и -j) – эти сечения получены для случая действия вполне больших величин амплитуд внутреннего момента сил раскрутки ротора. Фрагмент (рис. 5.6-j) содержит точки только одной фазовой траектории, стартовавшей в гетероклиническом регионе. Как видно, эта единственная фазовая траектория порождает практически такой же хаотический слой, что и целая совокупность траекторий, попадающих в этот слой (рис. 5.6-i), что вполне хорошо характеризует динамические возможности внутреннего хаотизатора, показывая высокую эффективность и масштабность созданного им хаотического слоя (более 2/3 от всего фазового объема).

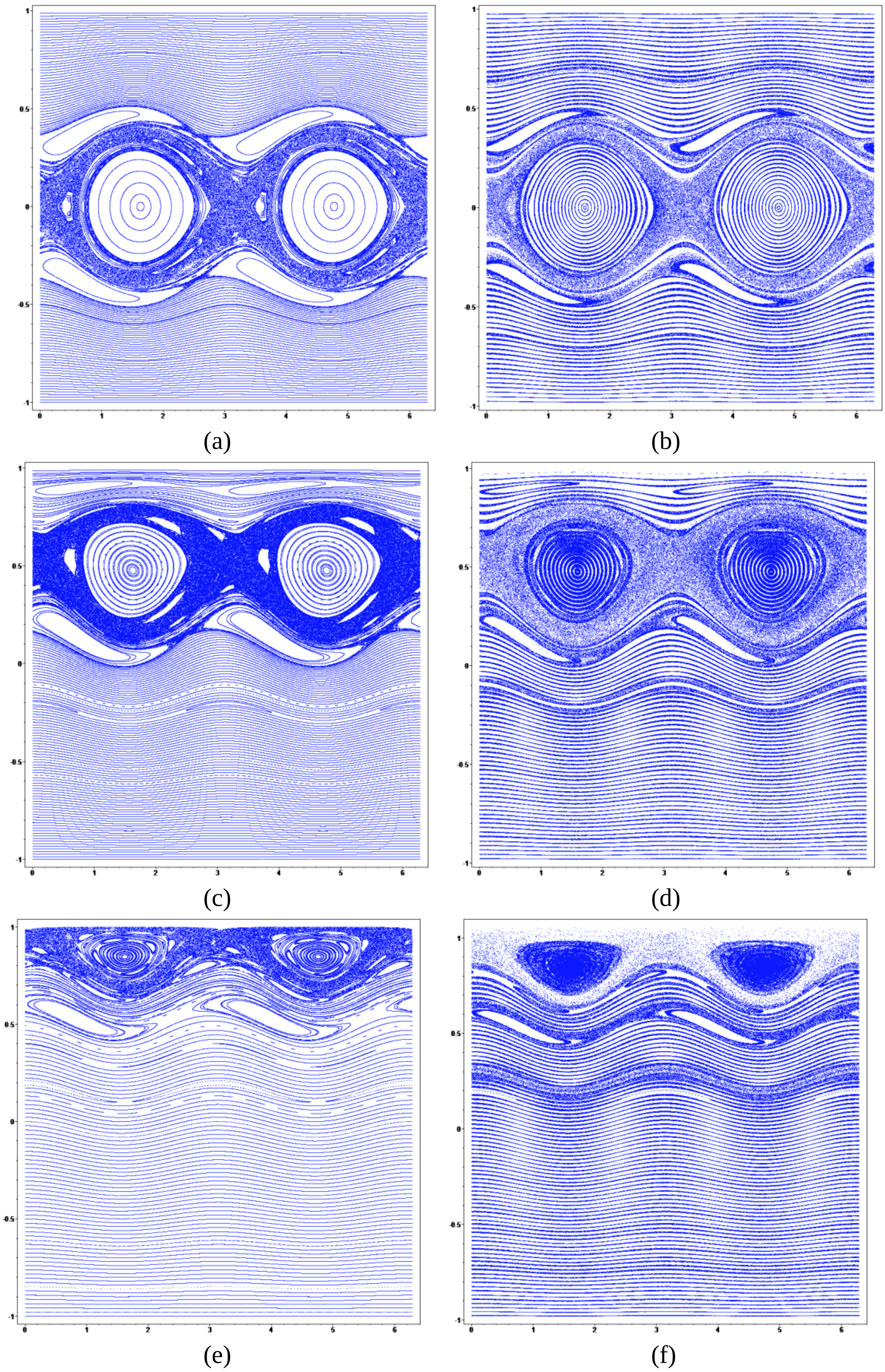


Рис. 5.6. *Сечения Пуанкаре возмущенной системы*

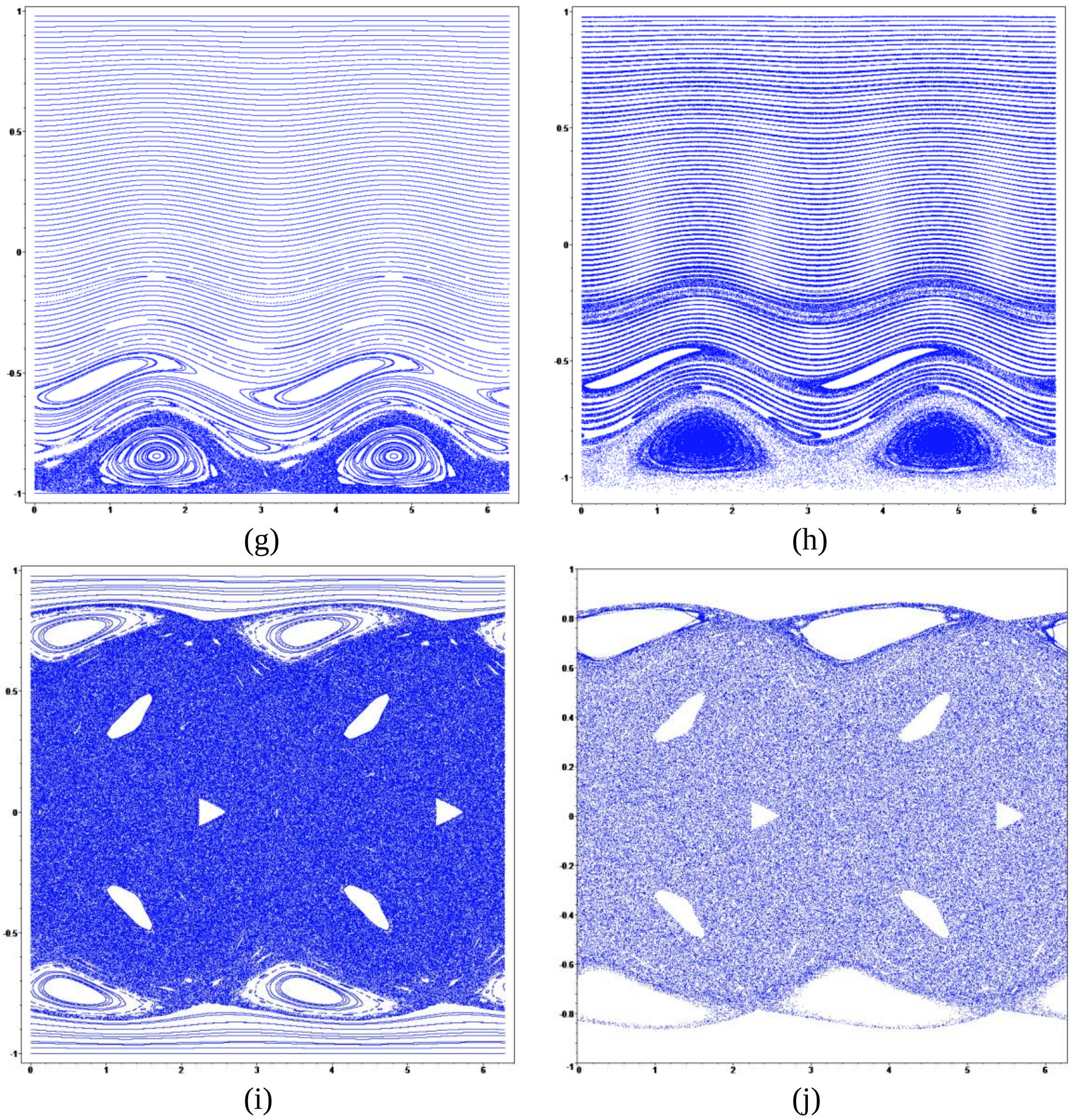


Рис. 5.6. *Сечения Пуанкаре возмущенной системы (продолжение)*

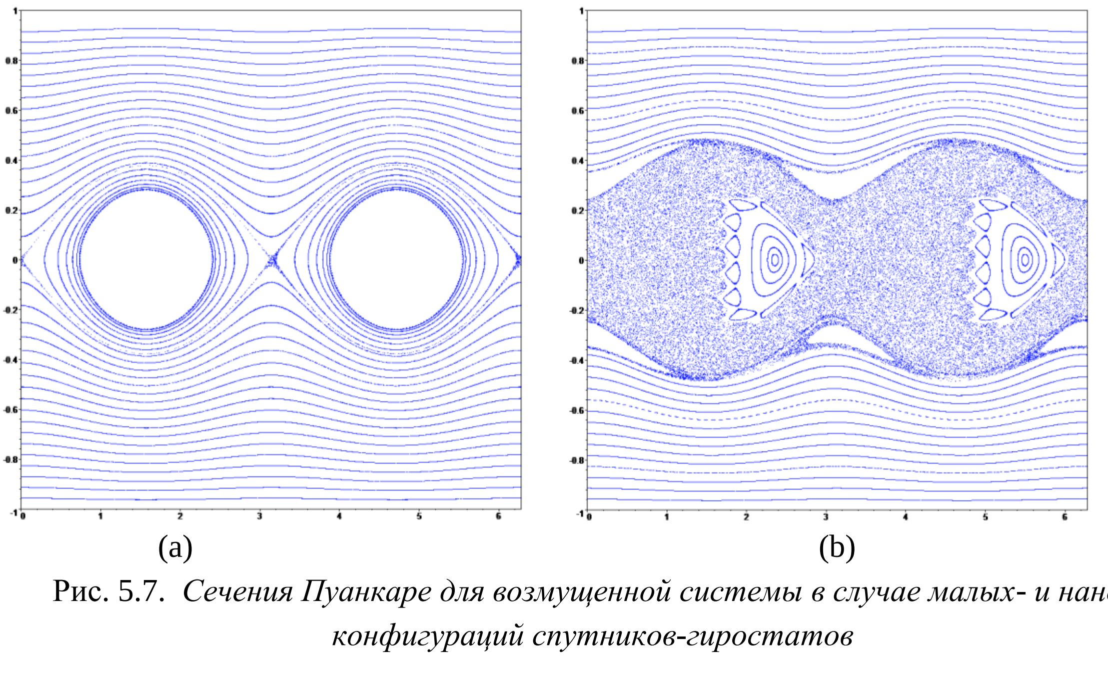
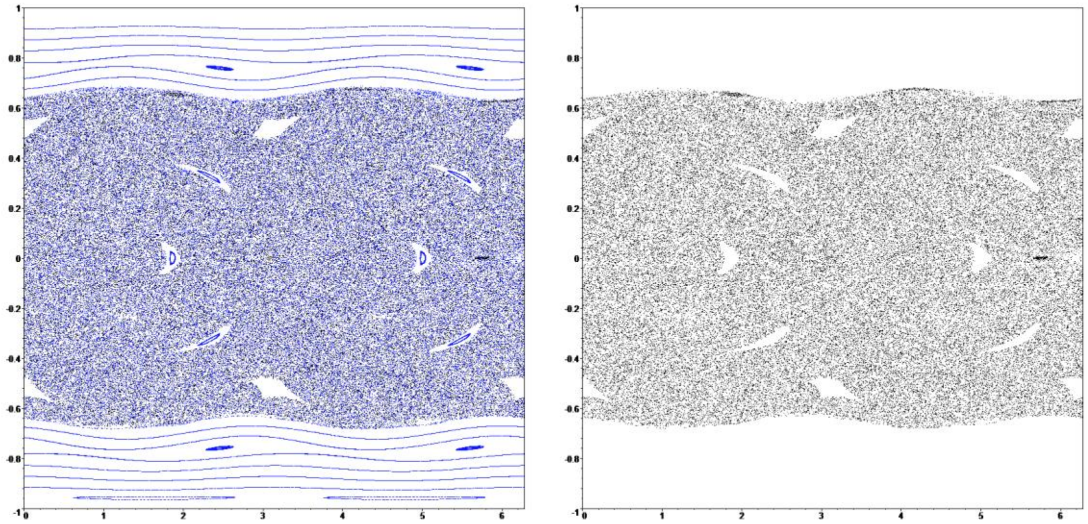


Рис. 5.7. *Сечения Пуанкаре для возмущенной системы в случае малых- и нано-конфигураций спутников-гиростатов*



(c) (d)

Рис. 5.7. *Сечения Пуанкаре для возмущенной системы в случае малых- и нано-конфигураций спутников-гиростатов (продолжение)*

Такую же ситуацию можно видеть на рис. (рис. 5.7-c и d) для случая динамики наноспутника. Эти динамические факты подтверждают практическую реализуемость и эффективность создания больших слоев хаоса для реализации метода хаотической переориентации. Более того, можно отметить хорошую способность хаотизировать динамику спутника-гиростата у обоих рассмотренных актуаторов (внутренний электродвигатель раскрутки ротора и силовая магнитная катушка). Однако, необходимо сказать, что эффективность работы в качестве хаотизатора у внутреннего электродвигателя раскрутки ротора заметно выше, нежели у магнитных катушек – это видно, например, из сравнения рисунков (рис. 5.7-a) и (рис. 5.7-b), где показано отдельное хаотизирующее действие магнитной катушки (только M_{ctrl}) и совместное действие обоих актуаторов (M_{ctrl} и $M_{internal}$), соответственно. Тем не менее, можно реализовать систему управления с тем хаотизирующим актуатором, который окажется наиболее выгодным в смысле агрегатной компоновки спутника-гиростата.

5.1.4. Моделирование процессов хаотической переориентации

Проведем численное моделирование, демонстрирующее использование метода хаотической переориентации спутника-гиростата. Приведем три варианта моделирования хаотической переориентации. Первым вариантом будет являться переориентация по типу “$\mathfrak{CHA}$”, осуществляющая переход из стартового режима области $\mathfrak{C}$ в финишный режим в зоне $\mathfrak{A}$ через гетероклинический хаос зоны $\mathfrak{H}$. Результаты моделирования этого типа переориентации приводится на рисунках (рис. 5.8). Второй тип переориентации “$\mathfrak{BHA}$”, выполняемый из стартовой зоны $\mathfrak{B}$ в финишный режим зоны $\mathfrak{A}$ характеризуется результатами на рис. 5.9, а третий тип переориентации “$\mathfrak{AHC}$” иллюстрируется на рис. 5.10. Соответствующие числовые параметры расчетов приедены в таблице (табл. 5.2). Для всех расчетных случаев были взяты следующие общие значения:

$$b_x = b_y = 0;\ \mu_\Delta, = 0\ [\text{Н*м}];\ A = 20,\ B = 15,\ C_b,\ = 6\ [\text{кг*м}^2].$$

Для момента старта работы хаотизатора везде выбрано значение $t_{start}=0$ [с].

На рис. 5.8-a, соответствующем переориентации по типу “$\mathfrak{CHA}$”, изображена временнáя история выполнения всего процесса переориентации для угла нутации:

1. Серая область соответствует выполнению гиростатом начального динамического режима в зоне $\mathfrak{C}$, стартовавшего в момент времени t_0.
2. Голубая область соответствует интервалу времени [t_{ini}, t_{hetero}], на котором реализуется перевод динамического режима в гетероклиническую область.
3. Розовая область представляет собой реализацию переходного регулярного режима в гетероклинической зоне на интервале времени [t_{hetero}, t_{start}].
4. В момент времени t_{start} выполняется включение хаотизирующего актуатора и динамика становится хаотической (желтая область), при этом фазовая траектория выполняет свое движение внутри хаотического слоя $\mathfrak{H}$ до тех пор, пока не наступит момент времени t_{finish}, когда будет зарегистрировано выполнение критерия (4.103) достижения целевой зоны $\mathfrak{A}$. Также хаотическая фаза динамики продемонстрирована отдельно на рис. 5.8-c.
5. В момент времени t_{finish} мгновенно выполняется отключение работы хаотизирующего актуатора и спутник-гиростат продолжает с этого момента времени свое регулярное движение в зоне $\mathfrak{A}$, что соответствует зеленой области.

Рисунок (рис. 5.8-d) представляет собой «карту» возможных моментов/интервалов времени (зеленые интервалы), в которые при мониторинге и проверке со стороны системы управления регистрируется выполнение критерия достижения целевой зоны (4.103). Внутри таких интервалов можно выбрать любую точку t_{finish} отключения хаотизатора и «выпрыгнуть» в целевую зону (выбранный момент времени отмаркирован тёмно-зелёной полосой). Рисунок (рис. 5.8-b) демонстрирует зависимость компонент угловой скорости от времени на примере компоненты $p(t)$.

Аналогичные результаты для переориентаций “$\mathfrak{BHA}$” и “$\mathfrak{AHC}$” представлены на рисунках рис. 5.9 и рис.5.10, где также для информативности приведены зависимости от времени для углов Эйлера $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ (фрагменты “e”).

Таблица 5.2. *Числовые параметры для хаотических переориентаций*

	θ_0, rad	φ_0, rad	ψ_0, rad	p_0, 1/s	q_0, 1/s	r_0, 1/s	Δ_{ini}, kg*m^2/s	M_{spin} N*m	t_0, s	t_{ini}, s	t_{hetero}, s	t_{start}, s	t_{finish}, s	$\mu_z B_Z$, N*m	Ω_z, 1/s
$\mathfrak{CHA}$	1.59	-0.98	-0.64	0.48	5.01	-0.46	1	-0.15	-50	-30	-25	0	66	2	3
$\mathfrak{BHA}$	1.86	0.18	-0.07	3.33	1.93	-5.72	12.75	-0.5	-70	-50	-25	0	60	1	0.75
$\mathfrak{AHC}$	1.33	-0.12	-0.80	-2.52	3.58	7.12	-24.75	1	-70	-50	-25	0	40	1	0.75

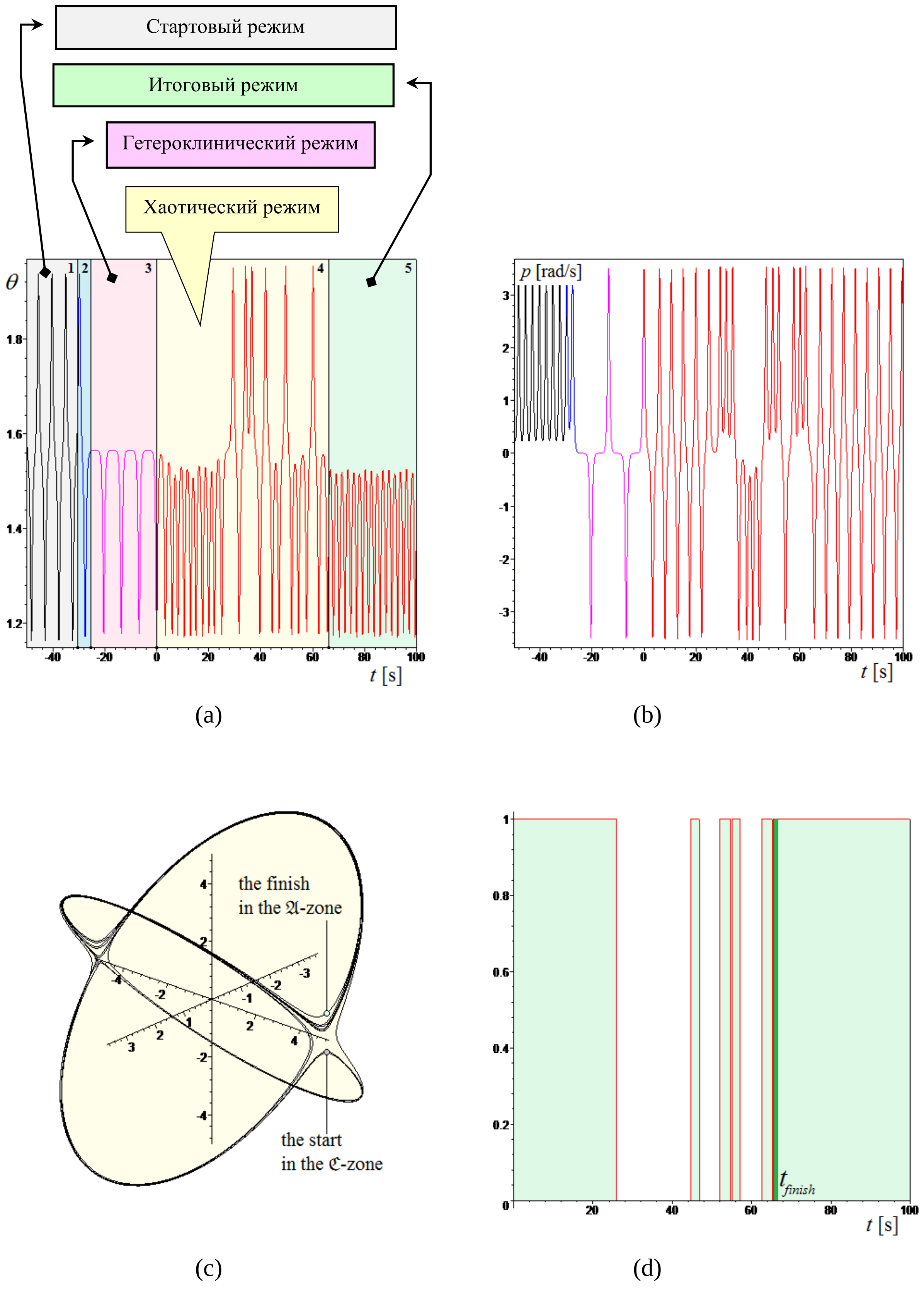


Рис. 5.8. *Случай хаотической переориентации по типу* ℭℌ𝔄

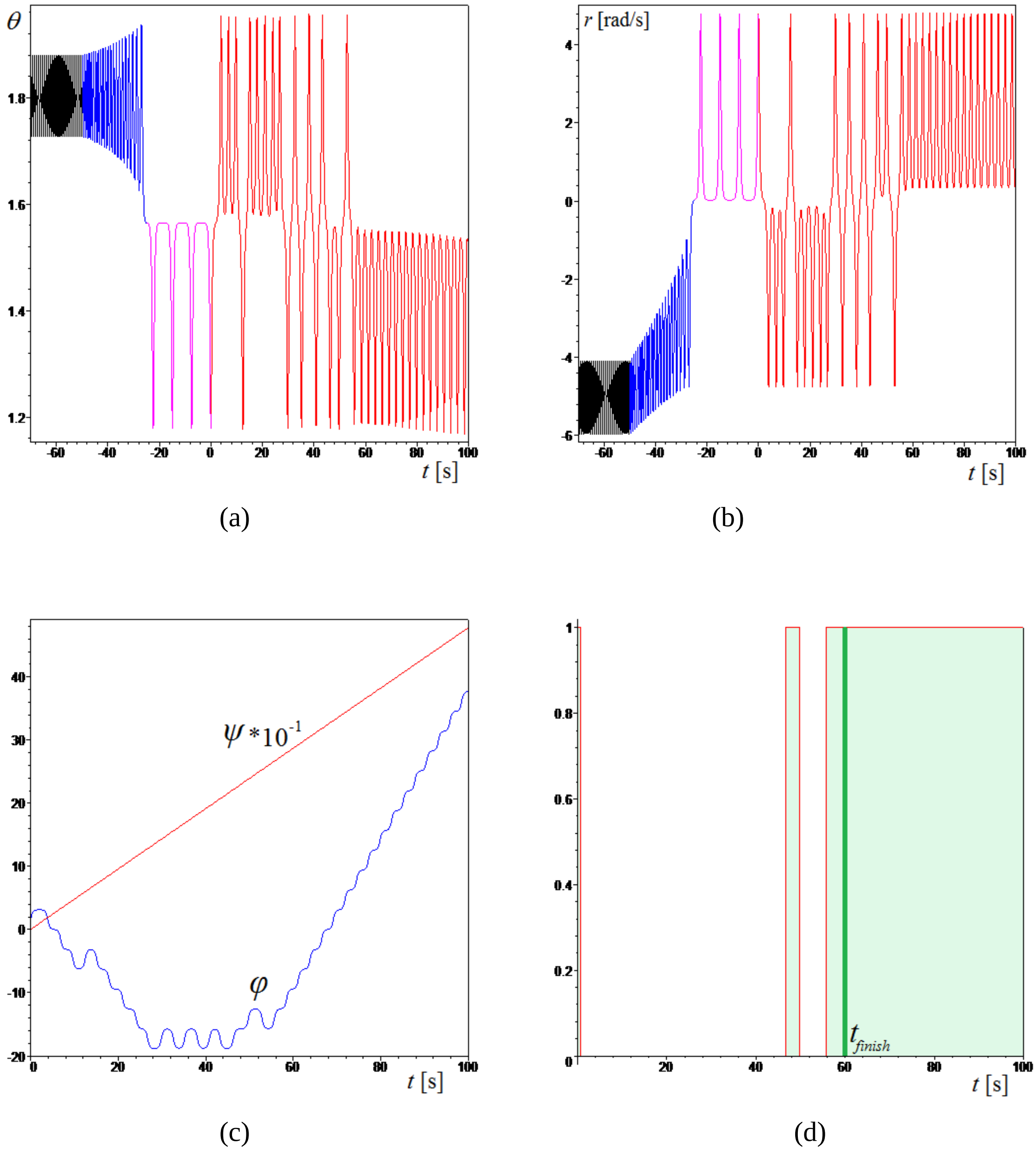


Рис. 5.9. *Случай хаотической переориентации по типу* $\mathfrak{BHA}$

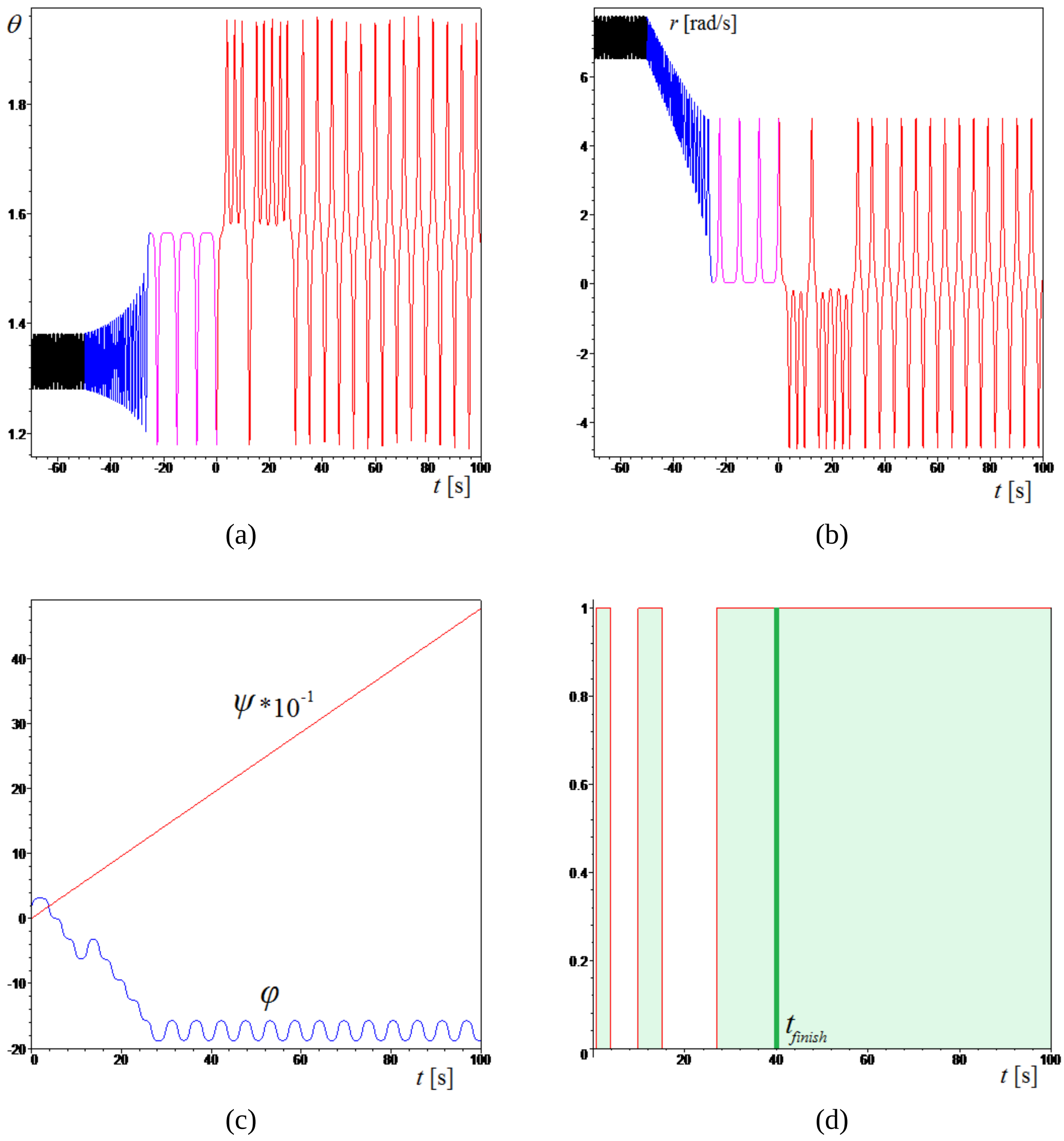


Рис. 5.10. *Случай хаотической переориентации по типу* $\mathfrak{AHC}$

Таким образом, продемонстрирована возможность и реализация хаотической переориентации спутника-гиростата из любой стартовой динамической зоны в любую целевую динамическую зону посредством преднамеренного создания зоны гетероклинического хаоса и прохода через нее. Это позволяет рассматривать динамический хаос не только в негативном смысле, но и использовать его как позитивный динамический инструмент для решения прикладных задач по управлению движением и переориентации спутников.

5.2. Переориентация спутников-гиростатов с использованием магнитных моментов

Полученные в 3-ей главе аналитические решения могут быть использованы для разработки метода пространственной переориентации путем выполнения серии омега-режимов. В рамках выполнения серии омега-режимов, как это будет видно ниже, происходит последовательное приближение продольной оси СГ к вектору кинетического момента и финальное совпадение с ним, что означает переход к реализации финального режима движения, соответствующего цилиндрической прецессии – одного из наиболее важных и распространенных режимов динамики СГ с двойным вращением (спутника-гиростата).

5.2.1. Принцип и алгоритм метода переориентации

Для построения метода переориентации СГ в стабилизируемое положение с совпадением продольной оси и вектора кинетического момента целесообразно сначала упомянуть главные свойства свободного движения спутника-гиростата.

Как это известно, в свободном движении динамически симметричного спутника-гиростата продольная компонента угловой скорости $r(t)$ сохраняет свое постоянное значение, а угол нутации (угол между продольной осью и вектором кинетического момента) также постоянен и равен отношению продольной компоненты кинетического момента к его полной величине:

$$r\left(t\right)=\overline{r}=\text{const};\qquad \cos\overline{\theta}\left(t\right)=\overline{\gamma}_3\left(t\right)=\frac{C_b\overline{r}+\Delta}{K}=\text{const} \tag{4.122}$$

Основная идея пространственной переориентации, использующей динамические свойства омега-режима, состоит в чередовании интервалов свободного движения и интервалов движения с включенными магнитными актуаторами в случае омега-режима с соответствующими параметрами. В рамках чередования отмеченных режимов необходимо включать магнитный момент, реализующий омега-режим, на время соответствующее полупериоду роста продольной компоненты угловой скорости $r(t)$, что определяется решением (3.110). Такие интервалы прироста $r(t)$ будем соответственно именовать как «интервалы роста» (отмаркированы красными столбцами на рис.5.11).

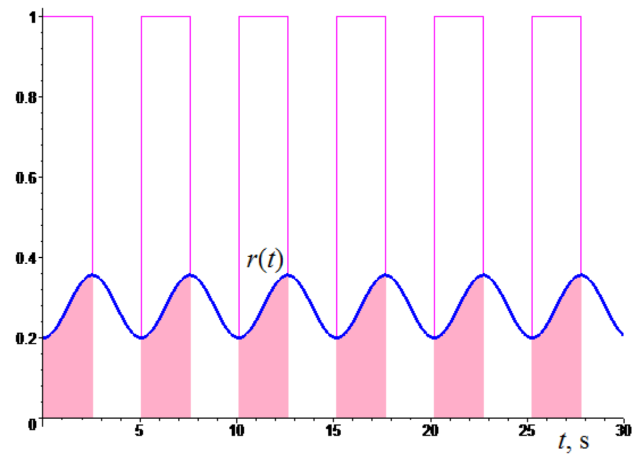


Рис. 5.11. *Интервалы роста компоненты* $r(t)$ *в соответствии с решением* (3.110)

Если осуществлять интервальное включение омега-режима по единожды вычисленным на начальном этапе его параметрам (величине периода и фазе роста), то будет иметь место динамика, описываемая графиками на рис. 5.12, полученными путем численного интегрирования при импульсном характере включения дипольного момента (3.4). Между интервалами роста (где имеет место свободное движение с выключенным магнитным диполем) компонента скорости $r(t)$ является кусочно-постоянной, причем такое же динамическое поведение имеет направляющий косинус $\bar{\gamma}_3(t)$, что хорошо видно на рис. 5.12.

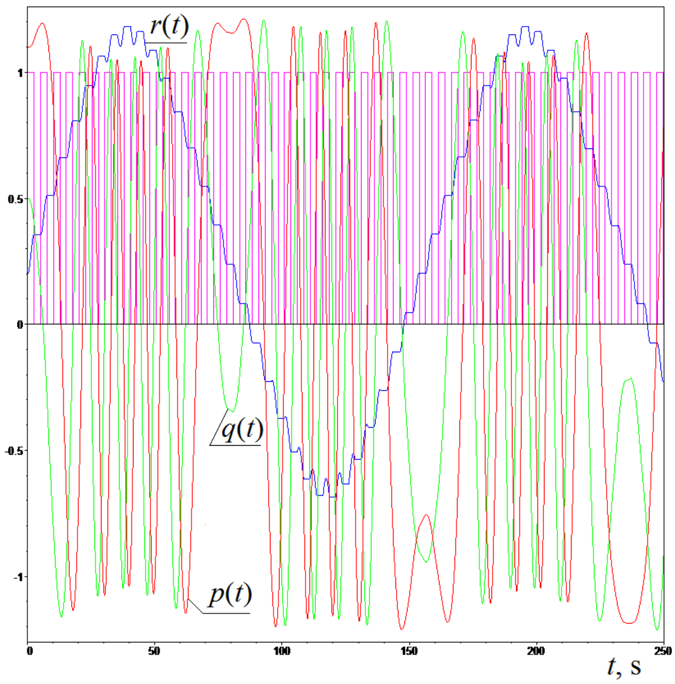


Рис. 5.12. *Динамика на интервалах роста исходного омега-режима*

Как видно из моделирования (рис. 5.12), на интервалах роста происходит последовательное кусочное изменение величин $r(t)$ и $\bar{\gamma}_3(t)$. Это изменение динамических параметров можно использовать для выполнения переориентации.

Первый интервал роста неизбежно приводит к увеличению величины $r(t)$, так как именно он является начальным интервалом омега-маневра, который соответствует именно этим начальным условиям, и именно этим условиям соответствует аналитическое решение (3.110). Далее после завершения первого интервала роста магнитный момент отключается и СГ выходит в режим свободного движения с измененными (по отношению с стартовому свободного режиму) параметрами. Если снова включить магнитный момент на втором (и последующих) интервалах роста, определенных по параметрам первоначального омега-режима, то последует динамика (рис. 5.12) с затухающим кусочным возрастанием и последующим выходом на уменьшение величины $r(t)$, что объясняется накоплением разницы в имеющихся параметрах движения и реализации для них омега-режима, который соответствует параметрам начального этапа.

Чтобы обеспечить максимизированный кусочный рост нужно каждый раз заново вычислять параметры очередного омега-режима для своих текущих (измененных на первом проходе) параметров, что делается снова на базе решения (3.110), т.е. находятся обновленные значения для амплитуды, эллиптического модуля, периода и сдвига фазы для скорости $r(t)$. Для повышения и максимизации величины $\bar{\gamma}_3(t)$ необходимо поинтервально выполнять омега-режимы с обновляемыми параметрами, что в итоге приведет к последовательному приближению и финальному совпадению продольной оси с вектором кинетического момента, т.е. к нулевой величине угла нутации. Стоит, однако, отметить, что в рамках интервального выполнения серии омега-режимов сам вектор кинетического момента несколько изменяет свое положение в инерциальном пространстве вследствие кусочного действия внешних моментов сил – это смещение описывается углом $\Theta = \angle(CZ, \mathbf{K})$, динамика изменения которого менее выражена, но также должна быть учтена при реализации конкретных целей переориентации. В любом случае, финальный режим с максимизированной величиной $r(t)$ и с нулевыми (пренебрежимо малыми) величинами компонент экваториальной угловой скорости $p(t)$ и $q(t)$ будет соответствовать режиму цилиндрической прецессии – вращению вокруг вектора кинетического момента с нулевой прецессией.

Итак, свойства углового движения в течении серии омега-режимов меняются вместе с параметрами самих омега-режимов, которые каждый раз пересчитываются по аналитическому решению после каждого предыдущего интервала свободного (но измененного) движения. Прежде всего, мы должны определить первый период роста и выполнить на нем первый омега-режим по решениям (3.110) и (3.108), отталкиваясь от свойств эллиптических функций, включая периоды и полюсы [138]:

Таблица 5.3. *Свойства эллиптических функций* [138]

	полюс $i\mathrm{T}'$	полюс $\mathrm{T}+i\mathrm{T}'$,	полюс T	полюс 0
полупериод $i\mathrm{T}'$	sn s	cd s	dc s	ns s
полупериод $\mathrm{T}+i\mathrm{T}'$	cn s	sd s	nc s	ds s
полупериод T	dn s	nd s	sc s	cs s

Вещественные и мнимые части T и T′ [138] соответствуют следующему полному эллиптическому интегралу первого рода:

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}(m) = \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-mw^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-m\sin^2\xi)}}; \quad \mathrm{T}' = \mathrm{T}(1-m) \tag{4.123}$$

Так как в силу описания действительных движений нас интересует вещественная часть эллиптических функций, поэтому из решения (3.107) при определенных значениях эллиптического модуля m период изменения функции $s(t)$ будет равен 2T. Именно это значение T позволяет корректно выполнить полупериод роста для текущего омега-режима, а также сделать это и для остальных последующих интервалов роста последующих омега-режимов с соответствующими величинами m и фазами J_0 (3.106).

В целях практической реализации рассмотренной схемы-метода переориентации на основе кусочно-интервального выполнения серии омега-режимов можно предложить следующую универсальную схему-алгоритм (рис. 5.13).

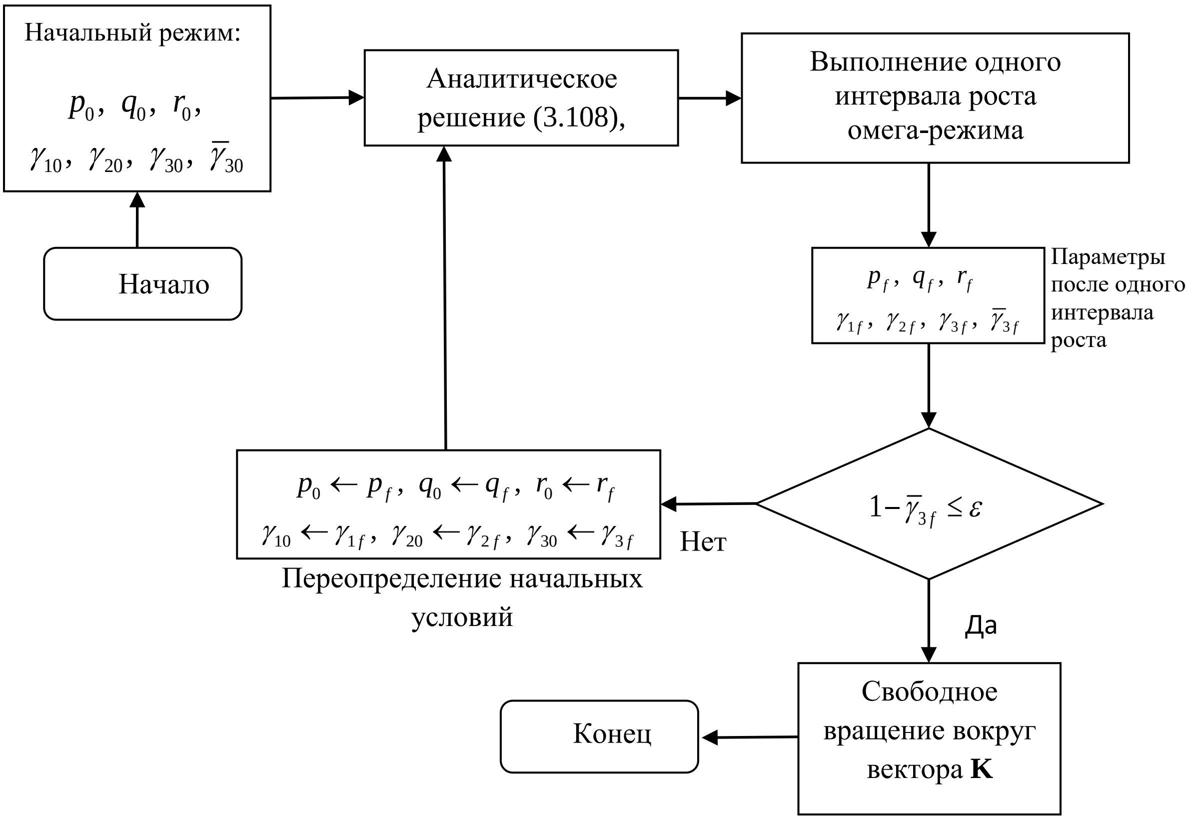


Рис. 5.13. *Алгоритм выполнения серии омега-режимов для переориентации и перехода в режим цилиндрической прецессии*

Основным условием выхода из итерационного алгоритма является проверка достижения совпадения продольной оси с вектором кинетического момента $(\bar{\gamma}_3 = 1)$ с заданной точностью ε<<1. Реализация этого метода переориентации будет рассмотрена в следующем пункте с приведением соответствующих подтверждающих расчетов.

5.2.2. Моделирование реализации алгоритма переориентации

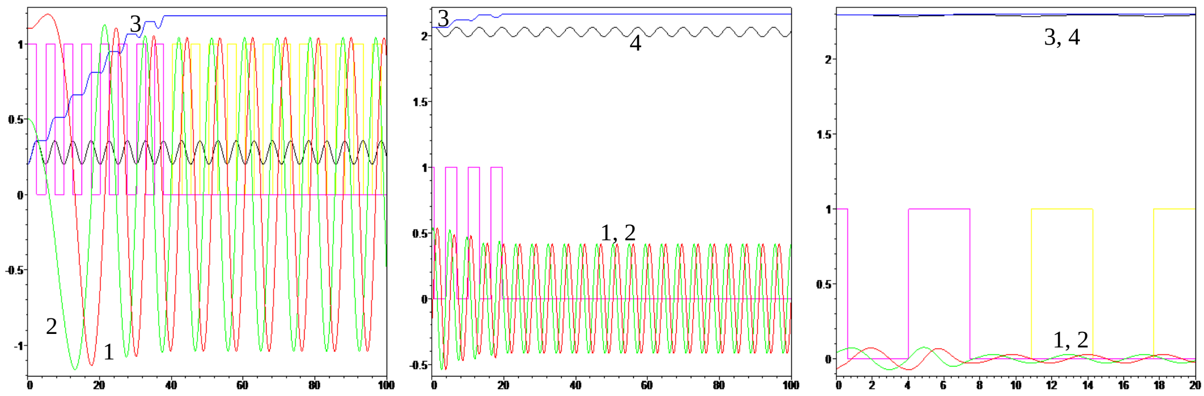
Как отмечено выше, идея метод переориентации базируется на выполнении серии омега-режимов на интервалах роста. В рамках предложенного универсального алгоритма (рис. 5.13) каждый раз на отдельном шаге выполняется только один (первый) интервал роста омега-режима, для которого мы имеем полное точное соответствие начальных условий (условий входа в омега-режим) и параметров этого омега-режима. Вместе с тем, для численной демонстрации указанного алгоритма будет вполне уместно и действенно выполнить не один, а несколько интервалов роста для текущего инициированного омега-режима, что, конечно, несколько ухудшит эффективность интервальной максимизации продольной угловой скорости, но не нарушит идеологию метода, ускорив его расчет.

В рамках моделирования было выполнено девять последовательных серий интервалов роста для девяти омега-режимов. На рисунках (рис. 5.14, 5.15) представлены три серии интервалов роста (стартовая (1), средняя (2) и конечная (3)). Каждый фрагмент рисунка содержит временной интервал длительностью в 100 секунд, где активными (реально выполняемыми) являются несколько интервалов роста (выделенные цветовыми столбцами), а остальное время соответствует измененному свободному движению СГ. Как можно видеть, компонента $r(t)$ и направляющий косинус $\overline{\gamma}_3(t)$ увеличиваются на каждой активной серии интервалов роста.

Для численного моделирования использовались следующие численные параметры (рис. 5.12-5.16): A_b=0.13, B_b=0.13, C_b=0.05, A_r=0.05, C_r=0.02 [kg·m^2]; Δ=0.03 [kg·m^2/s]; kB_{orb}=0.005 [N·m·s]. Эти параметры вполне приемлемы для изучения динамики гипотетического СГ микро-класса в геомагнитном поле на низких LEO-орбитах (B_{orb}~50 [μT]) с мощными магнитными актуаторами ($|\mathbf{m}| = k|\boldsymbol{\omega}| \sim 50 \div 150$ [A·m^2]). Начальные условия входа в омега-режимы и их параметры приведены в таблице (табл.5.4).

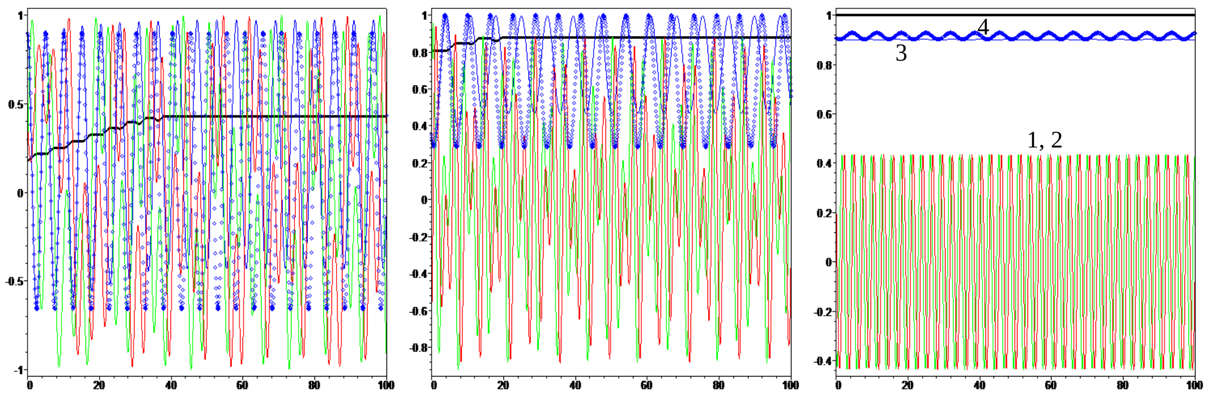
Таблица 5.4. *Параметры численного моделирования*

Рис.5.14, 5.15	p_0 [1/s]	q_0 [1/s]	r_0 [1/s]	γ_{10}	γ_{20}	γ_{30}	m	J_0	T [s]
(1)	1.1	0.5	0.2	0.387	0.2	0.9	0.861	-0.018	2.141
(2)	-0.221	0.498	2.056	-0.695	0.626	0.353	0.826	-1.636	2.051
(3)	-0.069	0.039	2.296	-0.498	-0.080	0.864	0.608	-1.434	1.757



(1) (2) (3)

Рис. 5.14. *Результаты моделирования для компонент угловой скорости*:
p(t) – красный (1); q(t) – зеленый (2); r(t) – синий (3);
черные линии (4) – аналитическое решение (3.110)



(1) (2) (3)

Рис. 5.15. – *Результаты моделирования для направляющих косинусов*:
$\gamma_1(t)-$ *красный (1)*; $\gamma_2(t)-$ *зеленый (2)*; $\gamma_3(t)-$ *синий (3)*; $\overline{\gamma}_3(t)-$ *черный (жирный)*;
синие точки (4) – аналитическое решение (3.108)

Целесообразно более подробно показать первую и последнюю серии интервалов роста (рис. 5.16). Как видно из графиков, имеет место пошаговое насыщаемое увеличение величины $r(t)$, начиная с малых начальных значений (рис. 5.16-a) и заканчивая максимизированными насыщенными величинами (рис. 5.16-b) с выходящими на нулевые значения $p(t)$- и $q(t)$-компонентами экваториальной угловой скорости.

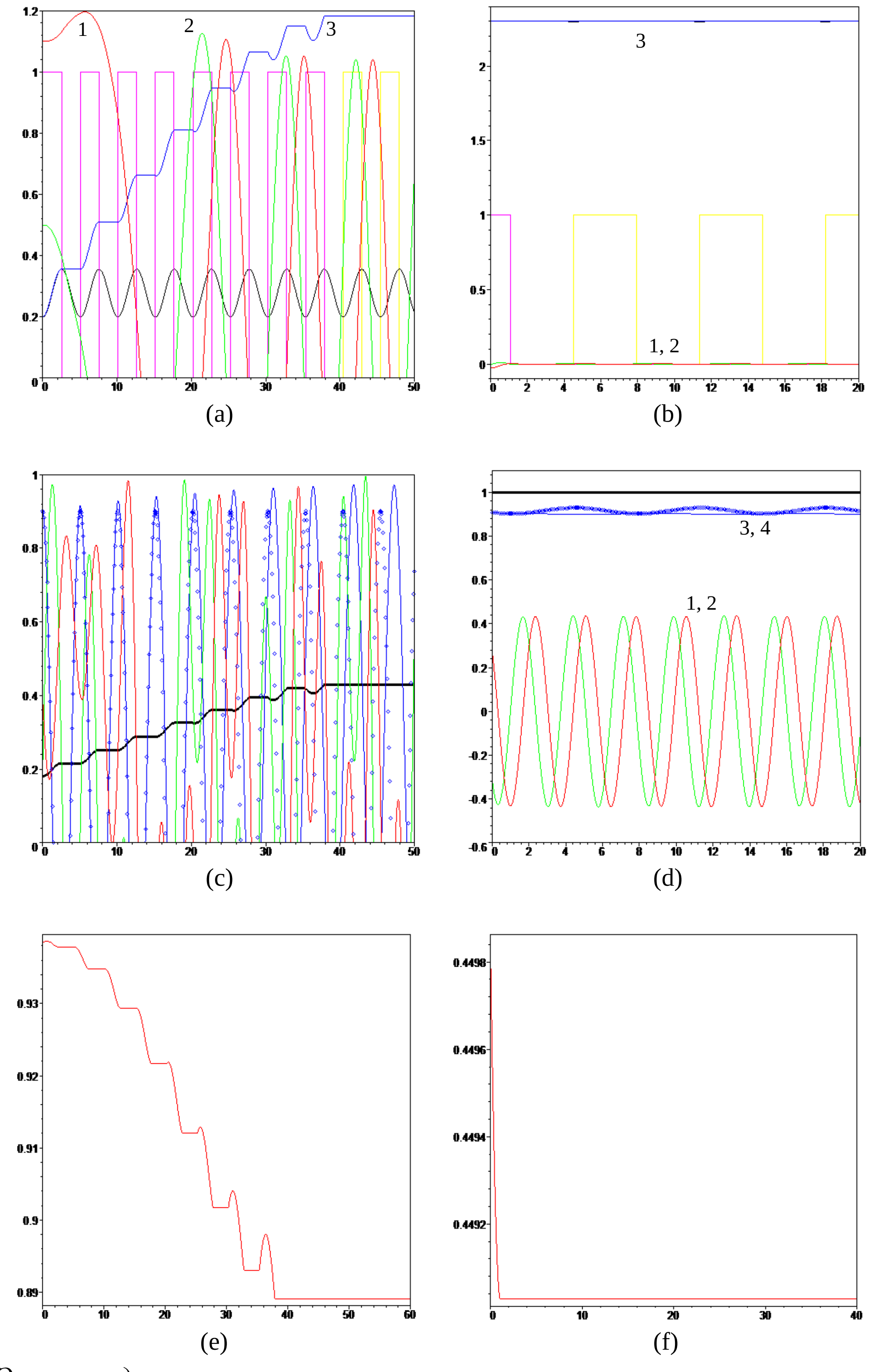


Рис. 5.16. *Эволюции динамических параметров на начальных и конечных* ω*-режимах*: (a), (b) – компоненты угловой скорости; (c), (d)- направляющие косинусы; (e), (f) – угол Θ

Также видна максимизация величин $\bar{\gamma}_3(t)$, стартующих с малых значений (рис. 5.16-c) и финиширующих на уровне $\bar{\gamma}_3(t) = 0.99999$. Такие эволюции динамических параметров иллюстрируют и полностью подтверждают выполнимость алгоритма по переориентации

СГ из произвольного режима в целевой режим цилиндрической прецессии с точностью $\varepsilon=10^{-5}$ отклонения продольной оси Cz от вектора кинетического момента. Стоит, однако, отметить некоторый уход самого вектора кинетического момента от инерциальной оси OZ, выражающегося в приближении вектора кинетического момента к направлению вектора внешней магнитной индукции $\mathbf{B}_{orb}$, что видно на рис.5.16-e и рис.5.16-f.

Как видно и результатов, численное моделирование подтвердило корректность и применимость алгоритма переориентации СГ в положение, соответствующее вращению вокруг вектора кинетического момента с нулевой нутацией путем использования серии омега-режимов с аналитически вычисляемыми для каждой серии параметрами интервалов роста. Проход через чередуемые интервалы роста и интервалы свободного движения приводит к максимизации продольной компоненты угловой скорости $r(t)$ и нулевым величинам экваториальных компонент $p(t)$ и $q(t)$, что и определяет совпадение продольной оси СГ с вектором кинетического момента $\left(\bar{\gamma}_3(t)=1\right)$. Описанный алгоритм перекачивает энергию вращения вокруг экваториальных осей в энергию продольного вращения, обеспечивая в итоге реализацию режима цилиндрической прецессии.

Таким образом, на основе аналитических решений пункта 3.3.2 разработан метод пространственной переориентации СГ из произвольного положения в положение, соответствующее реализации цилиндрической прецессии, которая является наиболее предпочтительным динамическим режимом функционирования СГ.

5.3. Синтез углового движения спутников-гиростатов переменного состава

В настоящем параграфе рассматривается динамика динамически симметричного спутника-гиростата, одно из соосных тел которого обладает переменностью состава (массы). Подобная конфигурация актуальна для следующих ракетно-космических систем:

- связки разгонных блоков с выводимыми космическими аппаратами, соединенные посредством «столов закрутки», для реализации гироскопической стабилизации аппарата после его отделения от разгонного блока;

- спускаемые аппараты с частичной закруткой, когда в качестве гироскопического стабилизатора (ротора) используется твердотопливная тормозная установка для схода с орбиты, отделяемая после входа в атмосферу;

- космические аппарата с двойным вращением, имеющие в своем составе ракетные двигатели для изменения/коррекции орбит.

Уравнения движения тел переменного состава и анализ их динамики представлен ранее в работах [67, 73], а спутники-гиростаты переменного состава изучались в работах [25, 29, 50, 190], в которых уравнения движения были получены на основе теории близкодействия Космодемьянского [67].

Целью исследований является построение метода синтеза динамики спутника-гиростата переменного состава, обеспечивающей естественное повышение эффективности гироскопической стабилизации пространственного положения в процессе изменения массы (означающее монотонное уменьшение величины нутации прецессионного движения в процессе изменения массы).

5.3.1. Структура, уравнения и эволюции движения спутника-гиростата переменного состава

Рассмотрим пространственное движение динамически симметричного осевого спутника-гиростата, одно из соосных тел которого обладает переменностью массы (ракетный двигатель). Очевидно, что в процессе изменения массы одного из тел будет геометрически изменяться положение центра масс системы C по отношению к его собственной конструкции. В этой связи для введения связанной системы координат удобно выбрать в качестве начала координат точку O, совпадающую с центром масс спутника-гиростата в начальный момент времени $\left(t = t_0 : C \equiv O\right)$. Схема спутника-гиростата и системы координат представлены на рис. 5.17. Будем считать, что переменным составом обладает верхнее тело (условно будем считать, что это тело-ротор), а также будем считать, в процессе изменения массы динамическая симметрия тела всегда сохраняется.

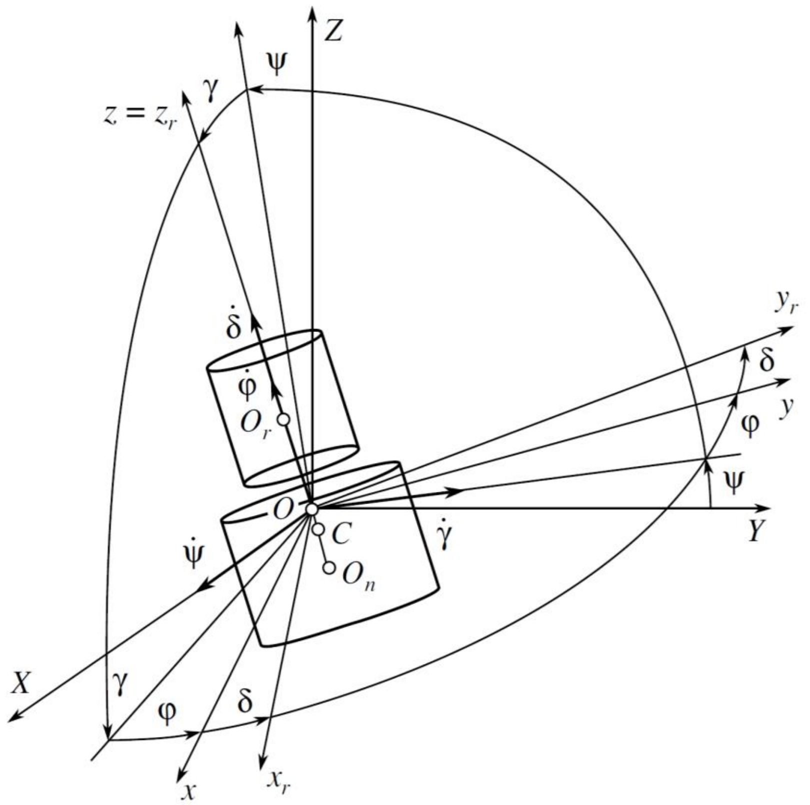


Рис. 5.17. *Спутник-гиростат переменного состава и используемые системы координат*

Системы координат *Oxyz* и $Ox_ry_rz_r$ являются связанными с основным телом-носителем и телом-ротором, соответственно. Точки O_n и O_r соответствуют центрам масс тела-носителя и тела-ротора. Оси системы координат *OXYZ* соответствуют неизменным направлениям в абсолютном пространстве.

Не повторяя вывода уравнений, запишем их окончательный вид [25, 50, 190], соответствующий движению спутника-гиростата переменного состава:

$$\begin{cases} A(t)\,\dot p + \big(C(t) - A(t)\big)\,qr + C_r(t)\,q\sigma = M^e_{C,x} + M^R_x; \\ A(t)\,\dot q - \big(C(t) - A(t)\big)\,pr - C_r(t)\,p\sigma = M^e_{C,y} + M^R_y; \\ C(t)\,\dot r + C_r(t)\,\dot\sigma = M^e_{C,z} + M^R_z; \\ C_r(t)\big(\dot r + \dot\sigma\big) = M_\Delta + M^R_z + M^e_{r,Oz} \end{cases} \tag{4.124}$$

где $A(t) = A_r(t) + A_b - m(t)\rho^2_C(t)$, $C(t) = C_r(t) + C_b$; $A_r(t)$, A_b, $C_r(t)$, C_b – экваториальные и продольные моменты инерции тел, вычисленные относительно осей, проходящих через полюс O; $m(t)$ – масса спутника-гиростата; ρ_C – изменяющееся в процессе изменения массы расстояние от неподвижного полюса O до текущего положения центра масс C; $M^e_{C,\{x,y,z\}}$ – компоненты момента внешних сил относительно центра масс системы; $M^R_{\{x,y,z\}}$ – компоненты момента реактивных сил относительно центра масс. Кинематические уравнения, описывающие угловое положение главного тела-носителя имеют вид:

$$
\begin{cases}
\dot{\delta} = \sigma; \qquad \dot{\gamma} = p\sin\varphi + q\cos\varphi; \\
\dot{\psi} = \dfrac{1}{\cos\gamma}\left(p\cos\varphi - q\sin\varphi\right); \\
\dot{\varphi} = r - \dfrac{\sin\gamma}{\cos\gamma}\left(p\cos\varphi - q\sin\varphi\right)
\end{cases}
\tag{4.125}
$$

где $\{\psi,\gamma,\varphi\}$ – углы Крылова, δ – угол относительной закрутки ротора.

Пусть момент реактивных сил действует только вокруг продольной оси Oz $\left(M_x^R = M_y^R = 0\right)$. Введем переменные типа амплитуда-фаза:

$$
\begin{aligned}
p &= G(t)\sin F(t), \\
q &= G(t)\cos F(t).
\end{aligned}
\tag{4.126}
$$

Уравнения (4.124) в новых переменных запишутся:

$$
\begin{cases}
\dot{F} = -\dfrac{1}{A(t)}\Big[\big(C(t) - A(t)\big)r_2 + C_r(t)\sigma + f_F\left(G,F\right)\Big], \\
\dot{G} = \dfrac{f_G\left(G,F\right)}{A(t)}, \qquad \dot{r} = \dfrac{M_{b,Oz}^e - M_\Delta}{C_2}, \\
\dot{\sigma} = \dfrac{C(t)M_\Delta}{C_r(t)C_b} + \dfrac{M_z^R + M_{r,Oz}^e}{C_r(t)} - \dfrac{M_{b,Oz}^e}{C_b}.
\end{cases}
\tag{4.127}
$$

где

$$
\begin{aligned}
f_G\left(G,F\right) &= \left(M_{C,x}^e \sin F + M_{C,y}^e \cos F\right), \\
f_F\left(G,F\right) &= \frac{1}{G}\left(M_{C,x}^e \cos F - M_{C,y}^e \sin F\right).
\end{aligned}
$$

Рассмотрим движение в режиме реализации гироскопической стабилизации, когда скорость относительного вращения ротора существенно выше экваториальной угловой скорости спутника:

$$
\varepsilon = \sqrt{p^2 + q^2} \Big/ \left|\sigma\right| << 1. \tag{4.128}
$$

Из отношений сферической геометрии можно выразить угол нутации θ (угол между OZ и Oz_2) следующим образом:

$$
\cos\theta = \cos\psi\cos\gamma.
$$

В случае малых углов γ и ψ $\left(\gamma = O\left(\varepsilon\right),\ \psi = O\left(\varepsilon\right)\right)$ последнее выражение дает следующее приближение для угла нутации:

$$\theta^2 \cong \gamma^2 + \psi^2. \tag{4.129}$$

Используя (4.126) кинематические уравнения в первом приближении запишутся:

$$\begin{aligned} &\dot{\gamma} \cong G\cos\Phi(t), \quad \dot{\psi} \cong G\sin\Phi(t), \\ &\dot{\varphi} \cong r, \quad \dot{\delta} = \sigma, \quad \Phi(t) = F(t) - \varphi(t). \end{aligned} \tag{4.130}$$

где $\Phi(t)$ есть функция фазы пространственных колебаний.

Прецессионное движение в рассматриваемом случае малых углов нутации будет описываться движением фазовой точки на плоскости $\{\gamma,\psi\}$, что характеризует движение апекса продольной оси *Oz*. Поэтому анализ нутационно-прецессионного движения можно осуществлять, изучая двумерное фазовое пространство $\{\gamma,\psi\}$ и его фазовые траектории. Далее можно перейти к разработке метода соответствующего изучения движения кривых на указанной плоскости. Главной идеей здесь будет являться формальное вычисление кривизны фазовой траектории на плоскости $\{\gamma,\psi\}$. Скорость и ускорение фазовой точки на «декартовой» плоскости $\{\gamma,\psi\}$ можно представить, как:

$$V_\gamma = \dot{\gamma},\ V_\psi = \dot{\psi},\ W_\gamma = \ddot{\gamma},\ W_\psi = \ddot{\psi}.$$

Тогда кривизну фазовой траектории (k) формально с помощью (4.130) можно вычислить в следующем виде:

$$k^2 = \left(\ddot{\gamma}\dot{\psi} - \ddot{\psi}\dot{\gamma}\right)^2 \Big/ \left(\dot{\gamma}^2 + \dot{\psi}^2\right)^3 = \dot{\Phi}^2 \big/ G^2. \tag{4.131}$$

Далее можно руководствоваться следующей идеей. Если кривизна фазовой траектории есть монотонно увеличивающаяся величина, то фазовая траектория представляет собой скручивающуюся спираль (рис. 5.18-а), а если убывающая – то раскручивающуюся спираль. Таким образом, если следить за трендом величины кривизны, то можно определить тренд развития фазовой траектории. Для скручивающихся спиралей, например, будет справедливо условие:

$$|k| \uparrow \Rightarrow k\dot{k} > 0 \ \Rightarrow\ \dot{\Phi}\ddot{\Phi}G - \dot{G}\dot{\Phi}^2 > 0. \tag{4.132}$$

Поэтому для отслеживания эволюций фазовых траекторий можно осуществлять анализ следующей функции:

$$P(t) = \dot{\Phi}\ddot{\Phi}G - \dot{G}\dot{\Phi}^2. \tag{4.133}$$

Функцию (4.133) по этим причинам можно именовать, как «функцию эволюции». Знаки и корни функции эволюции $P(t)$ будут отвечать изменению трендов развития фазовых траекторий, т.е. будут описывать чередование скручивающихся и раскручивающихся фаз (рис. 5.18). Так, например, всегда положительной не имеющей простых корней на изучаемом интервале времени движения $t \in [0,T]$ функции эволюции будет соответствовать спирально скручивающаяся фазовая траектория (рис. 5.18-а). Если на рассматриваемом временном интервале функция эволюции имеет один корень (т.е.

произошло изменение тренда кривизны), то фазовая траектория также изменит тренд. Например, на рис. 5.18-b показан случай, когда функция эволюция была отрицательной, проходила свое нулевое значение (простой корень) и становилась положительной, при этом фазовая траектория сначала раскручивалась, а затем скручивалась к другой точке, образуя так называемую кривую Корню или клотоиду (рис. 5.18-b). Если же функция эволюция имеет множество корней, то и соответствующая ей фазовая траектория будет иметь сложный вид, чередующий участки скручивания и раскручивания, допуская при этом точки самопересечения (рис. 5.18-c).

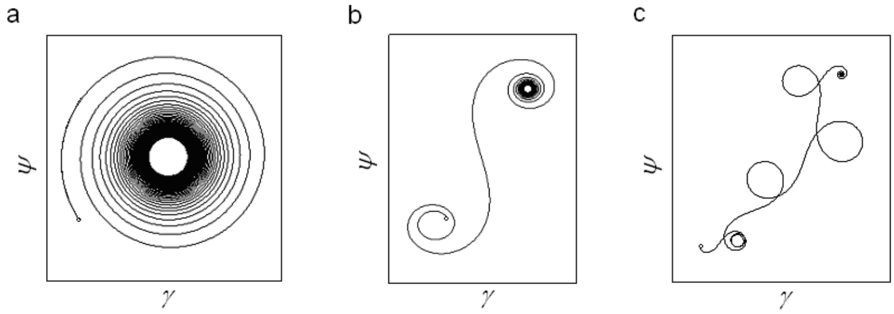


Рис. 5.18. *Случаи поведения фазовых траекторий*

С точки зрения выполнения целей гироскопической стабилизации космических аппаратов и спутников необходимо обеспечивать как можно более точную ориентацию осей вращения вдоль вектора кинетического момента, т.е. обеспечивать наименьшие величины углов нутации. Если при этом спутник обладает переменностью состава, то в динамическом смысле эффективность гироскопической стабилизации будет повышаться, если в процессе изменения массы угол нутации будет естественным образом уменьшать свои значения. Подобное повышение эффективности гироскопической стабилизации будет выполняться в случае, когда реализуется движение апекса продольной оси внутрь конуса нутации, а следовательно необходимо обеспечивать такие моменты сил и законы изменения инерционно-массовых параметров во времени, чтобы функция эволюции была положительна и не имела корней, что будет соответствовать скручивающейся внутрь спиральной фазовой траектории (рис. 5.18-a).

5.3.2. Синтез движения при линейных законах изменения инерционно-массовых параметров

В качестве примера синтеза условий эффективной гироскопической стабилизации рассмотрим движение спутника-гиростата при действии внутреннего постоянного момента сил ($M_\Delta = \mathrm{const}$) и постоянного реактивного момента ($M_z^R = \mathrm{const}$) в случае линейных законов изменения массы и моментов инерции тела-ротора:

$$\begin{aligned} &m_r(t) = m_r - kt, \\ &A_r(t) = \alpha m_r(t), \quad A_b = const, \\ &C_r(t) = \beta m_r(t), \quad C_b = const, \end{aligned} \tag{4.134}$$

где m_r - есть начальная масса ротора, k_m - есть скорость изменения массы, α, β - есть постоянные.

Зависимости (4.134) характерны для твердотопливных ракетных двигателей с пакетно-шашечными и рулонными типами зарядов, выгорающих равномерно во всем объеме камеры сгорания, а линейный расход массы обеспечивает постоянство тяги двигателя. При равномерном выгорании всего объема твердого топлива центр масс твёрдотопливной двигательной установки не будет изменять своего геометрического положения, следовательно положение центра масс тела переменного состава также будет постоянным по отношению к связанным координатам: $\rho_{C_r} = l_r = \mathrm{const}$. Центр масс тела постоянной массы m_b, очевидно, не изменяет своего положения: $\rho_{C_n} = l_b = \mathrm{const}$. Коэффициенты α и β связывают массу зарядов с геометрической их формой, например, для цилиндрической формы будут характерны значения $\alpha = H^2/12 + R^2/4 + l_r^2$, $\beta = R^2/2$, где H – высота и R – радиус цилиндрической камеры сгорания. Зависимость величины $\rho_C(t)$ будет вычисляться в виде:

$$\rho_C(t) = \frac{l_b m_b + l_r m_r(t)}{m_b + m_r(t)}. \tag{4.135}$$

При t=0 центр масс системы C совпадает с точкой O, поэтому

$$\rho_C(0) = 0, \quad l_r m_r(0) = -l_b m_b, \quad l_b < 0, \quad l_r > 0.$$

На основе (4.135) и (4.134) для $A(t)$ и $C(t)$ получим:

$$A(t) = A - at - \frac{k_m^2 l_r^2 t^2}{m - k_m t}, \qquad C(t) = C - ct, \tag{4.136}$$

где $A = A_r + A_b, \quad A_r = A_r(0), \quad a = \alpha m_r(0), \quad C = C_r + C_b, \quad C_r = C_r(0), \quad c = \beta m_r(0).$

Уравнения (4.127) запишутся:

$$\begin{aligned}
&\dot{G} = 0,\\
&\dot{F} = -\frac{1}{A(t)}\left[\left(C(t) - A(t)\right) r + (C_r - ct)\sigma\right],\\
&\dot{r} = -\frac{M_\Delta}{C_b}, \qquad \dot{\sigma} = \frac{C(t) M_\Delta}{(C_r - ct) C_b} + \frac{M_z^R}{C_r - ct}.
\end{aligned} \tag{4.137}$$

Аналитически решения для $r(t)$ и $\sigma(t)$ следуют непосредственно из (4.137):

$$r = r_0 - \frac{M_\Delta}{C_b} t, \quad \sigma = \sigma_0 + s_1 t + s_2 \ln\left(1 - c_1 t\right),$$
$$s_1 = M_\Delta / C_b, \quad s_2 = -\frac{1}{c}\left(M_\Delta + M_z^R\right), \; c_1 = c / C_r. \tag{4.138}$$

Из (4.130) следует решение для φ:

$$\varphi = \varphi_0 + r_0 t - \frac{M_\Delta}{2C_b} t^2.$$

Выражение для $\dot{\Phi}$ может быть записано, используя (4.130), (4.138) и (4.137):

$$\dot{\Phi} = \frac{1}{A(t)}\Big[\big(C(t) - A(t)\big)\big(s_1 t - r_0\big) - (C_r - ct)\big(\sigma_0 + s_1 t + s_2 \ln\left(1 - c_1 t\right)\big)\Big] + s_1 t - r_0. \tag{4.139}$$

Формула (4.139) позволяет записать явную форму функции эволюции (4.133), однако, в целях упрощения анализа целесообразнее будет получить степенное разложение для этого выражения:

$$P(t) = \dot{\Phi}\ddot{\Phi} = \sum_{i=0}^{\infty} f_i t^i. \tag{4.140}$$

При записи (4.140) на базе (4.133) можно не брать во внимание постоянный множитель G_0. Далее целесообразно рассмотреть простейший случай разложения $P(t)$, учитывая только линейную часть:

$$P(t) \cong f_0 + f_1 t, \tag{4.141}$$

где

$$f_0 = \frac{C_r}{A^3}\Big[\big(aC_r - cA\big)\sigma_0^2 + AM_z^R \sigma_0\Big],$$

$$f_1 = \frac{3a^2 C_r^2 \sigma_0^2}{A^4} + \frac{C_r \sigma_0}{A^3}\left[4aM_z^R + 2\sigma_0\left(\frac{C_r k_m^2 l_r^2}{m} - 2ca\right)\right] + \frac{1}{A^2}\left[c^2\sigma_0^2 - c\sigma_0\left(M_\Delta + 3M_z^R\right) + \left(M_z^R\right)^2\right].$$

В этом случае функция $P(t)$ имеет единственный корень: $t_1 = -f_0 / f_1$. Для выполнения условия (4.132) спирального скручивания на всем актуальном интервале времени необходимо обеспечить устойчивость полинома в смысле расположения его корней ($t_1 < 0$), что будет возможно, если:

$$f_0 > 0, \;\; f_1 > 0. \tag{4.142}$$

Рассмотрим случай, когда:

$$r_0 = 0, \quad \sigma_0 > 0, \; M_z^R > 0,$$

тогда

$$\sigma_0 \left(cA - aC_r \right) < AM_z^R, \qquad c/C_r > a/A. \tag{4.143}$$

Для положительности f_1 должно выполняться:

$$\begin{aligned} &\sigma_0 \left(c - \frac{C_r k_m^2 l_r^2}{2am} \right) < M_z^R, \\ &3M_z^R - \frac{\left(M_z^R \right)^2}{c\sigma_0} < c\sigma_0 - M_\Delta. \end{aligned} \tag{4.144}$$

или, альтернативно:

$$C_r k^2 l_r^2 > 2acm, \quad M_\delta + 3M_z^R < 0. \tag{4.145}$$

Рис. 5.19 иллюстрирует полученные результаты для эволюции фазовой траектории. На фрагментах рис. 5.19-а и 5.19-b продемонстрировано выполнение (4.143) и (4.144), а на рис. 5.19-с показан противоположный случай. Точка на рисунках указывает стартовое положение фазовой траектории. Следует отметить, что условия (4.143) и (4.144) получены путем разложения в степенной ряд, поэтому являются работоспособными на начальном участке движения, а для более точных условий требуется учет большего числа членов разложения, либо прямой анализ исходного выражения для функции эволюции. Так в случае “а” полная функция эволюции имеет два корня, поэтому фазовая траектория выполняет три последовательные эволюции: скручивающаяся-раскручивающаяся-скручивающаяся. В случае “b” функция вообще не имеет корней и фазовая траектория является спирально скручивающейся. Случай “с” соответствует нарушению условий и поэтому стартовая эволюция траектории является раскручивающейся.

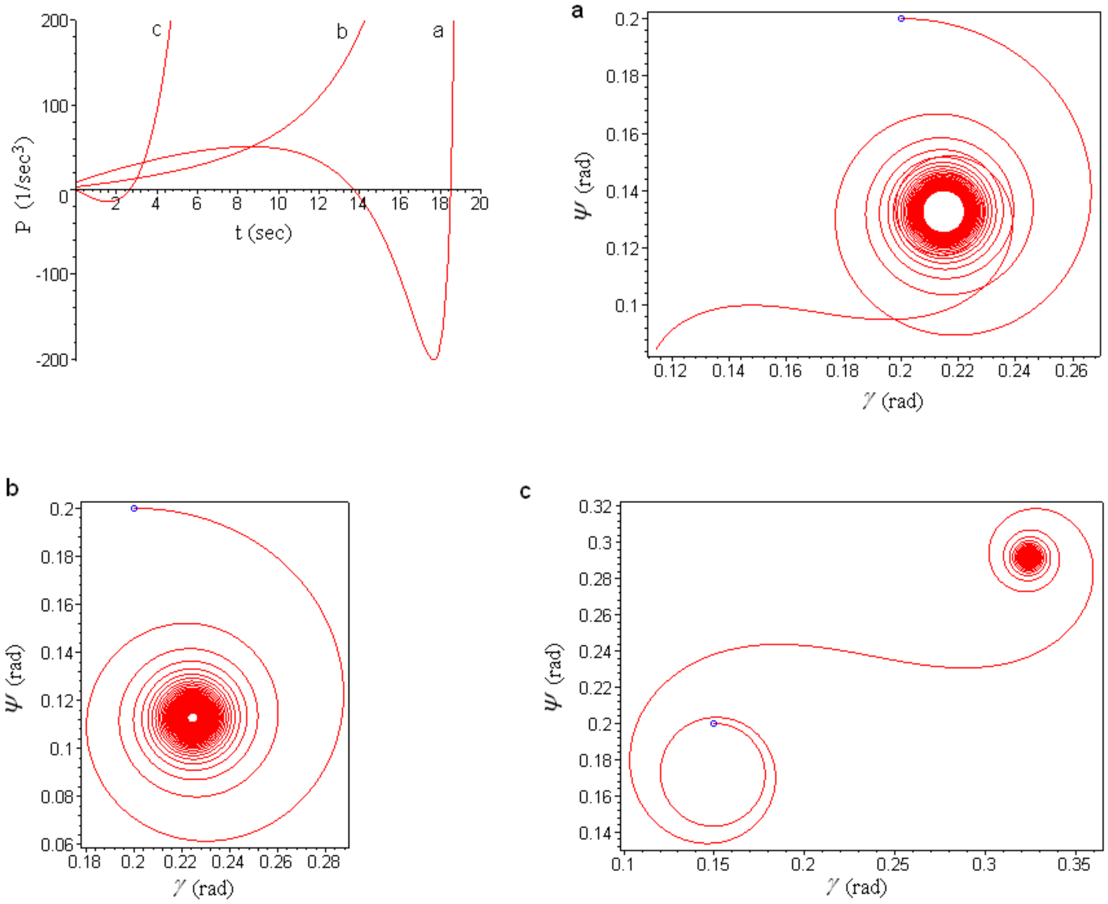


Рис. 5.19. *Функция эволюции и соответствующие фазовые траектории: в случаях “a” и “b” условия* (4.143) *и* (4.144) *выполняются и первые эволюции траекторий являются спирально скручивающимися; в случае “c” – не выполняются и траектория раскручивается*

Таблица 5.5. *Параметры расчетов для рис.5.19*

Случай	a	b	c
M_Δ, Н·м	1	-10	200
M^R_z, Н·м	15	10	0.35
σ_0, 1/с	10	1	16
G_0, 1/с	0.2	0.2	0.2
A_m, кг·м^2	2.5	2.5	2.5
A_r, кг·м^2	2.5	1.5	2
C_m, кг·м^2	1	1	1
C_r, кг·м^2	1.5	1.5	2
a, кг·м^2/с	0.08	0.05	0.1
c, кг·м^2/с	0.08	0.08	0.08
l_r, м	0.5	0.4	0.6
k_m, кг/с	1	1	1.2
$m_r(0)$, kg	35	25	45
m_n, kg	35	35	35

В случае отсутствия внутреннего и реактивного моментов сил $\left(M_\Delta = M_z^R = 0\right)$ условие спиральной скручиваемости имеет простейший вид:

$$\frac{c}{C_r} < \frac{a}{A}, \tag{4.146}$$

что соответствует такой геометрии выгорания топлива, когда в инерционно-массовом смысле обеспечивается переход «от цилиндра к шайбе», когда относительный поперечный момент инерции уменьшается быстрее, чем продольный.

Условия, подобные (4.146), или для более сложных случаев (например, (4.143) и (4.144)) позволяют осуществлять синтез инерционно-массовых параметров и параметров выгорания топлива при проектировании спутников-гиростатов переменного состава с естественным увеличением эффективности гироскопической стабилизации.

Например, в работе [205] на основе условия, подобного (4.146), проанализирована и в результате предложена схема вытеснения топлива в баках разгонного блока, обеспечивающая пассивное повышение эффективности гироскопической стабилизации положения вектора тяги в процессе выполнения активного маневра изменения орбиты.

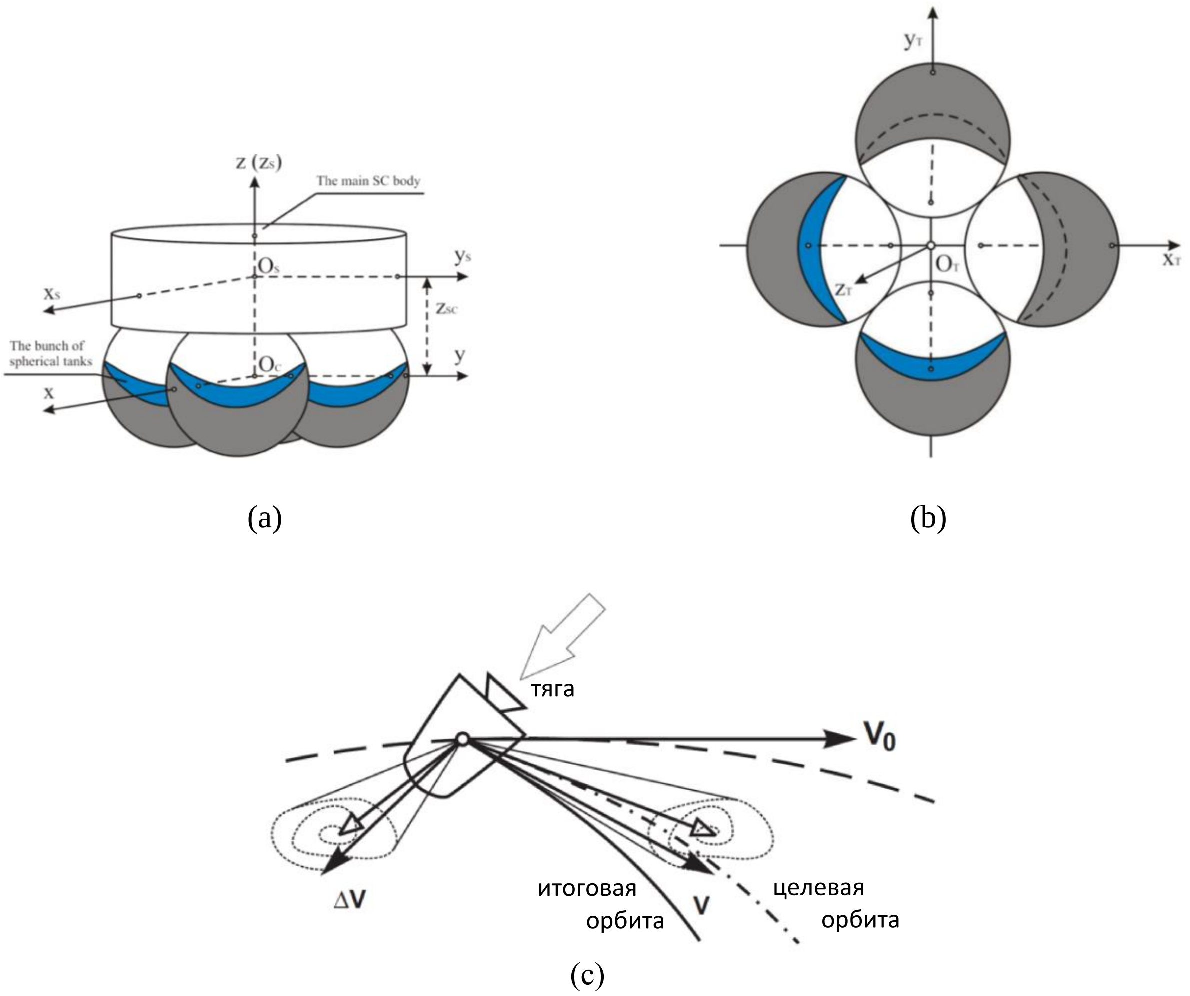


Рис. 5.20. *Схемы вытеснения топлива и возможное распыление переходного импульса*

Показано [205], что с точки зрения повышения эффективности гироскопической стабилизации вектора тяги в соответствии с условием (4.146) целесообразно изменить направление вытеснения топлива в баках ракетного двигателя, которое обычно осуществляется с помощью наддува и гибких мембран в направлении «вниз» (рис. 5.20-a), на «радиальное» направление (рис. 5.20-b). В типовом случае условие (4.146) не выполняется, и при реализации межорбитальных маневров в рамках естественной динамики импульс тяги переходного маневра конически «распыляется» в процессе прецессионного движения с увеличивающейся величиной угла нутации (рис. 5.20-c), что отражается на точности параметров итоговой орбиты.

5.3.3. Синтез движения при нелинейных законах изменения инерционно-массовых параметров и действии диссипативных моментов

Рассмотрим гипотетический пример движения гиростата с переменным составом в присутствии следующих внешних диссипативных моментов сил:

$$\begin{aligned} &M^{e}_{C,x} = -\nu p, \quad M^{e}_{C,y} = -\nu q, \\ &M^{e}_{b,Oz} = -\lambda r, \quad M^{e}_{r,Oz} = -\mu\left(r+\sigma\right). \end{aligned} \tag{4.147}$$

Константы ν, μ, λ можно рассматривать как параметры влияния внешней среды и диссипации энергии. Для инерционно-массовых параметров примем их следующие полиномиальные разложения по переменной времени:

$$\begin{aligned} &A(t) = A_m + A_r(t) - m(t)\rho_C^2(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i, \\ &C_r\left(t\right) = \sum_{i=0}^{s} c_i t^i, \end{aligned} \tag{4.148}$$

Динамические уравнения следуют из (4.124):

$$\begin{aligned} &A\left(t\right)\dot{p} + \left(C(t) - A(t)\right)qr + C_r(t)q\sigma = -\nu p, \\ &A\left(t\right)\dot{q} - \left(C(t) - A(t)\right)pr - C_r(t)p\sigma = -\nu q, \\ &C(t)\dot{r} + C_1(t)\dot{\sigma} = M_z^R - \lambda r - \mu\left(r+\sigma\right), \\ &C_r(t)\left(\dot{r}+\dot{\sigma}\right) = M_\delta + M_z^R - \mu\left(r+\sigma\right), \end{aligned} \tag{4.149}$$

где $C(t) = C_b + C_r(t)$, а M_δ, M_z^R - постоянные внутренний и реактивный моменты сил.

Последнее уравнение (4.149) дает общее решение для абсолютной угловой скорости тела-ротора Ω:

$$\begin{aligned} &\dot{\Omega} = \frac{1}{C_r(t)}\left(M_\delta + M_z^R - \mu\Omega\right), \\ &\Omega\left(t\right) = \frac{1}{\mu}\left(M_\delta + M_z^R\right) - \frac{1}{\mu}\left(M_\delta + M_z^R - \mu\Omega_0\right)\exp\left[-\mu J_C(t)\right], \end{aligned} \tag{4.150}$$

где

$$\Omega = r + \sigma, \quad J_C(t) = \int_0^t \frac{dt}{C_r(t)}. \tag{4.151}$$

С учетом (4.150) из третьего уравнения (4.149) следует:

$$\begin{gathered} C_b \dot{r} = -M_\delta - \lambda r, \\ r(t) = \left(r_0 + \frac{M_\delta}{\lambda} \right) \exp\left[\frac{-\lambda t}{C_b} \right] - \frac{M_\delta}{\lambda}. \end{gathered} \tag{4.152}$$

В рассматриваемом случае будут иметь место следующие функции правых частей:

$$f_G(G,F) = -\nu G, \quad f_F(G,F) = 0, \tag{4.153}$$

что позволят записать уравнения для амплитуды и фазы:

$$\begin{gathered} \dot{G} = -\frac{\nu G}{A(t)}, \\ \dot{F} = -\frac{1}{A(t)} \left[C_b r + C_r(t)\Omega - A(t) r \right]. \end{gathered} \tag{4.154}$$

Решение для амплитуды следует из (4.154) в следующей форме:

$$G(t) = G_0 \exp\left[-\nu J_A(t) \right], \tag{4.155}$$

где

$$J_A(t) = \int_0^t \frac{1}{A(t)}, \quad G_0 > 0. \tag{4.156}$$

Можно вычислить аналитически интегралы, входящие в (4.150) и (4.155):

$$\begin{gathered} J_A(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln|t - \alpha_i|}{\dot{A}(\alpha_i)} \Bigg|_0^t, \\ J_C(t) = \int_0^t \frac{dt}{C_r(t)} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\ln|t - \beta_i|}{\dot{C}_r(\beta_i)} \Bigg|_0^t, \end{gathered} \tag{4.157}$$

где $\alpha_i,\ \beta_i -$ корни полиномов $A(t),\ C_r(t)$, лежащие за пределами интервала реального движения $t \in [0,\ T]$, т.к. моменты инерции есть принципиально положительные величины. Используя первое уравнение (4.154) можно записать следующую функцию эволюции:

$$P(t) = G\left(\frac{1}{2} \frac{d\dot{\Phi}^2}{dt} + \frac{\nu \dot{\Phi}^2}{A(t)} \right). \tag{4.158}$$

Рассмотрим далее случай, когда у главного тела нет начальной продольной угловой скорости и отсутствуют внутренний и реактивный моменты сил:

$$M_\delta = M_z^R = 0, \quad r_0 = 0. \tag{4.159}$$

Заменяя $\dot{\Omega},\ \dot{\Phi}$ на основе (4.154), (4.150) с учетом $r(t) \equiv 0$, можно записать:

$$\dot{\Phi}^2 = \frac{C_r^2(t)}{A^2(t)}\Omega^2,$$
$$\frac{d\dot{\Phi}^2}{dt} = \frac{2\Omega^2}{A^3}\left(\dot{C}_r C_r A - \dot{A}C_r^2 - \mu C_r A\right). \tag{4.160}$$

Для функции эволюции (4.158) получим:

$$P(t) = \frac{G\Omega^2 C_r}{A^3}\left(\dot{C}_r A - \dot{A}C_r - \mu A + \nu C_r\right). \tag{4.161}$$

Решения (4.155) и (4.150) свидетельствуют, что $G > 0,\ \Omega \neq 0$, поэтому множитель перед скобками в (4.161) положителен на интервале $t \in [0, T]$ и не повлияет на логику оценки эволюций фазовых траекторий. Учитывая это, в качестве функции эволюции можно принять выражение:

$$P(t) = \dot{C}_r A - \dot{A}C_r - \mu A + \nu C_r. \tag{4.162}$$

Выражения (4.162) и (4.148) определяют функцию $P(t)$ как полином степени N=s+n-1, поэтому теоретически число эволюций фазовой траектории не может превысить N+1. Используя (4.162), можно получить следующие условия спирального скручивания фазовой траектории, обеспечивающее динамику прецессионного движение с уменьшением величины угла нутации:

$$C(t)/A(t) > \dot{C}(t)/\dot{A}(t), \quad C(t)/A(t) > \mu/\nu. \tag{4.163}$$

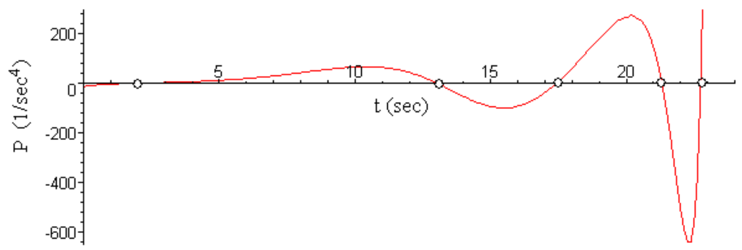
Из (4.163), в частности следует, что при отсутствии диссипативных моментов сил (ν=μ=0) следует актуальность условия (4.146) [25, 29]:

$$a/A > c/C_r.$$

В общем случае, когда ограничения (4.159) не накладываются, условия, аналогичные простым неравенствам (4.163), получить не удалось, поэтому проведено численное моделирование эволюций фазовых траекторий (рис. 5.21). Для моделирования были взяты следующие зависимости от времени для моментов инерции и числовые значения параметров:

$$A(t) = -0.0001t^4 + 0.0064t^3 - 0.1053t^2 + 0.4491t + 3,$$
$$C(t) = 0.0001t^4 - 0.0027t^3 + 0.0344t^2 - 0.1997t + 1.92,$$
$$C_b = 1.5\ (\text{kg}\times\text{m}^2);\quad T = 24\ (\text{sec});\quad \nu = 0.02,\ \mu = 0.01,\ \lambda = 0.03\ (\text{kg}\times\text{m}^2/\text{sec});$$
$$M_\delta = -11,\ M_z^R = -21\ (\text{kg}\times\text{m}^2/\text{sec}^2);\ G_0 = 0.1,\ r_0 = 15,\quad \Omega_0 = 10\ (\text{rad/sec}).$$

Как видно (рис. 5.21), функция $P(t)$ имеет пять корней и, следовательно, фазовая траектория будет иметь шесть эволюций.



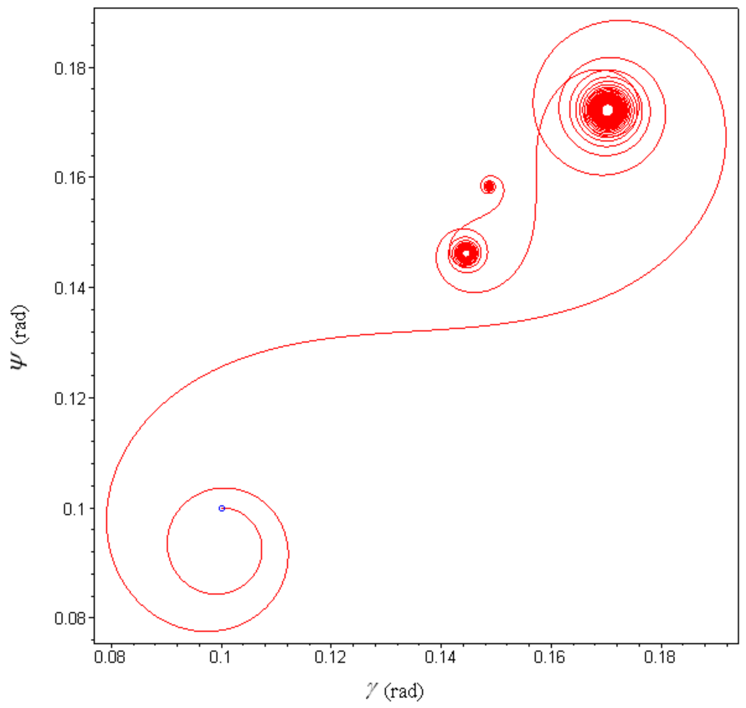


Рис. 5.21. *Численное моделирование функции эволюции и фазовой траектории*

5.3.4. Синтез движения при гармонических законах изменения инерционно-массовых параметров

Рассмотрим, опуская детали, численное моделирование предыдущего случая при следующих гармонических законах изменения во времени моментов инерции, что физически может быть проинтерпретировано, как наличие упругих колебаний в конструкции системы [244]:

$$
\begin{aligned}
A(t) &= a_1 \sin \chi t + a_0, \quad a_0 > a_1 > 0,\\
C_r(t) &= c_1 \cos \chi t + c_0, \quad c_0 > c_1 > 0.
\end{aligned}
\tag{4.164}
$$

В этом случае решения (4.150) и (4.155) остаются справедливыми, но выражения для интегралов (4.151) и (4.156) примут вид:

$$
\begin{aligned}
J_C(t) &= \frac{2}{\chi\sqrt{c_0^2 - c_1^2}}\left[\arctan\left(\frac{(c_0 - c_1)\tan[\chi t/2]}{\sqrt{c_0^2 - c_1^2}}\right) + \pi\left(\left(\frac{\chi t}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{div} \pi\right)\right],\\
J_A(t) &= \frac{2}{\chi\sqrt{a_0^2 - a_1^2}}\left[\arctan\left(\frac{a_0 \tan[\chi t/2] + a_1}{\sqrt{a_0^2 - a_1^2}}\right) + \pi\left(\left(\frac{\chi t}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{div} \pi\right)\right]
\end{aligned}
\tag{4.165}
$$

где операция (x div y) соответствует целой части деления x/y. Функция эволюции будет иметь форму:

$$P(t)=G(t)\left[\frac{K_z^2(t)}{A^3(t)}\left(\nu-\dot{A}\right)+\frac{K_z(t)}{A^2(t)}\left(\left[\dot{C}-\mu\right]\Omega(t)+M_z^R-\lambda r(t)\right)\right], \tag{4.166}$$

Где $K_z(t)=C_b r+C_r(t)\Omega$.

Несмотря на довольно просто вид функции эволюции (4.166), поведение фазовой траектории будет весьма сложным. Фазовая траектория может быть регулярной (рис. 5.22-a), а может демонстрировать непредсказуемые формы, типичные для хаотической динамики (рис. 5.22-b, c). Результаты вычислений, представленные на рис. 5.22 получены при значениях параметров из таблицы (табл. 5.6); также для всех расчетов были приняты общие значения a_0=c_0=2, a_1=c_1=1 (kg×m^2), χ = 3 (1/sec).

Случай “a” соответствует отсутствию внутреннего и реактивного момента сил $\left(M_\delta=M_z^R=0\right)$, при этом фазовая траектория будет регулярной и почти-периодической. В случаях наличия внутреннего и реактивного моментов сил (случаи “b” и “c”) эволюции фазовой траектории будут непериодическими и со сложным изменением амплитуды, что характерно для хаотического поведения Случаи “b” и “c” соответствуют диссипативному $\left(\nu,\mu,\lambda>0\right)$ и экситативному $\left(\nu,\mu,\lambda<0\right)$ типам внешних возмущений.

Таким образом, проведенные аналитические и численные исследования показывают возможность синтеза прецессионного движения спутников-гиростатов переменного состава, в рамках которого достигается естественное повышение эффективности гироскопической стабилизации в процессе изменения массы, что позволяет реализовывать более точные импульсы тяги при межорбитальных маневрах.

Таблица 5.6. *Числовые параметры для расчетов рис. 5.22*

Случай	a	b	c
M_Δ, Н·м	0	0.1	0.5
M^R_z, Н·м	0	0.1	0.03
r_0, рад/с	15	-1	1
Ω_0, рад/с	-18	-10	-10
G_0, рад/с	0.01	0.01	0.01
C_b, кг·м^2	2.5	2.5	2.5
ν, кг·м^2/с	0.00001	0.001	-0.001
μ, кг·м^2/с	0.00001	0.001	-0.002
λ, кг·м^2/с	0.00001	0.001	-0.003
T, с	50	470	500

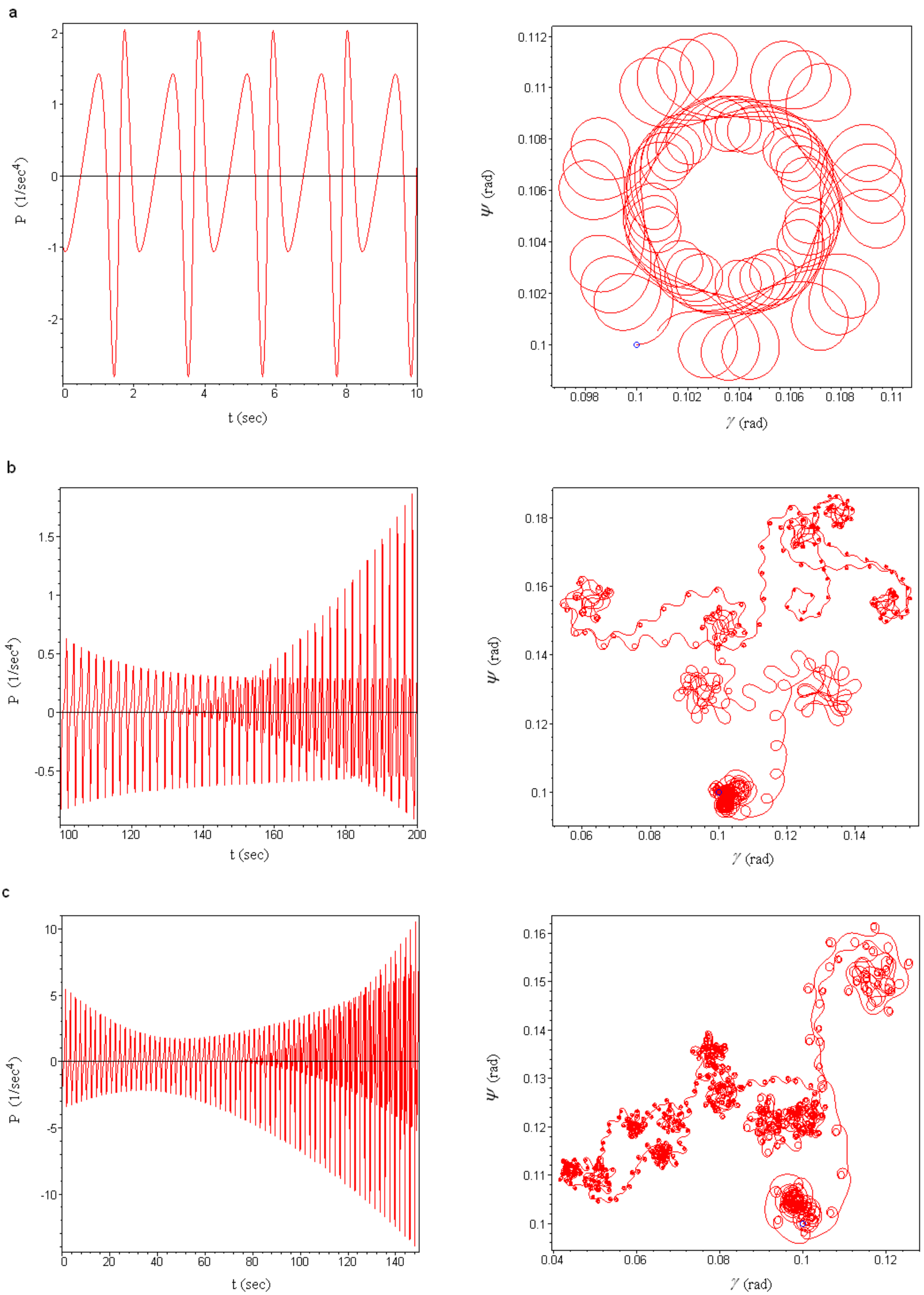


Рис. 5.22. *Функции эволюции и фазовые траектории*

5.4. Выводы по главе

В пятой главе представлены методы пространственной переориентации спутников-гиростатов, разработанные на основе полученных аналитических решений и изученных свойств динамического хаоса. Указанные методы опубликованы в работах [200, 198, 50, 190, 203, 205].

В итоге были представлены три метода пространственной переориентации спутников-гиростатов:

- метод хаотической переориентации;

- метод магнитной переориентации путем выполнения серий омега-режимов;

- метод переориентации – синтеза прецессионного движения с уменьшающимся конусом нутации для спутника-гиростата переменного состава.

Заключение

В диссертационной работе проведено комплексное изучение регулярной и хаотической динамики пространственного движения спутников-гиростатов.

Получены необходимые аналитические решения для нормальных типов гиростатов в случаях действия внешних и внутренних возмущений. На основе полученных аналитических решений проведен анализ регулярного и хаотического движения, а также выполнена разработка новых схем и методов управления угловым положением спутников-гиростатов постоянного и переменного состава, основанных на использовании естественных свойств регулярной динамики и детерминированного хаоса.

В частности, в работе выполнено следующее.

1. ***Получены шесть видов аналитических решений*** для динамики одноосных спутников-гиростатов. Полученные решения обобщают решения для свободного гиростата, а также являются гиростатическим обобщением решений динамики твердого тела, движущегося под действием восстанавливающих моментов:

1.1. Общее решение для намагниченного одноосного спутника-гиростата с малым переменным дипольным моментом (в ω-режиме) при реализации цилиндрических прецессий [199];

1.2. Гетероклиническое решение для намагниченного одноосного спутника-гиростата с малым переменным дипольным моментом (в ω-режиме) при реализации цилиндрических прецессий [199];

1.3. Гетероклиническое решение типа «действие-угол» для вращающейся фазы угла относительного вращения ротора одноосного гиростата с малым дипольным моментом (в ω-режиме) при реализации цилиндрических прецессий [196];

1.4. Приведение решения для тяжелого осевого гиростата с произвольным внутренним моментом сил к случаю Лагранжа [26];

1.5. Общее решение в случае намагниченного одноосного динамически симметричного спутника-гиростата с переменным дипольным моментом (в ω-режиме) без ограничений на его величину [198];

1.6. Общее решение для конической прецессии спутника-гиростата в слабом центральном гравитационном поле [201].

2. ***Изучен феномен гетероклинического хаоса*** в динамике движения спутника-гиростата при действии внутренних и внешних возмущений, в т.ч. определены условия возникновения и способы подавления хаоса [192, 194, 195, 196, 197, 200, 201, 202, 216]. Проведено исследование хаотизации возмущенной динамики движения спутников-гиростатов при действии внешних и внутренних возмущений различной природы, включая гамильтоновы и негамильтоновы типы возмущений. Изучена возможность хаотизации и регуляризации динамики спутника-гиростата при выполнении им режимов движения, близких к цилиндрической прецессии, являющейся главным динамическим

режимом функционирования спутников-гиростатов и космических аппаратов с двойным вращением. Проанализированы процессы расщепления многообразий сепаратрисс и рождения гомо-/гетероклинических сетей и хаоса на основе формализма Мельникова-Виггинса, а также ***разработаны схемы возможного подавления хаотической динамики***, в том числе [197]:

2.1. Диссипативная схема подавления гетероклинического хаоса на основе аналитического условия (4.76);

2.2. Импульсная схема подавления гетероклинического хаоса;

2.3. Магнитная схема подавления гетероклинического хаоса.

3. На основе аналитических решений и результатов анализа динамического хаоса ***разработаны новые методы пространственной переориентации*** спутников-гиростатов, использующие естественные свойства регулярной динамики и хаоса:

3.1. Метод хаотической переориентации спутника-гиростата [200];

3.2. Метод магнитной переориентации спутника-гиростата путем выполнения серий омега-режимов [198];

3.3. Метод переориентации – синтеза прецессионного движения с уменьшающимся конусом нутации для спутника-гиростата переменного состава [50, 190].

Полученные в работе результаты исследований обладают фундаментальной научной новизной в области теоретической механики, а также являются актуальными с точки зрения их использования для решения прикладных задач динамики космического полета.

Список литературы

1. Акуленко Л.Д. (1987), Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 368 с.
2. Акуленко Л.Д. Лещенко Д.Д. Щетинина Ю.С. (2017), Квазиоптимальное торможение вращений твердого тела с подвижной массой в среде с сопротивлением // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. № 2. 2017. С. 16 – 21.
3. Акуленко Л.Д., Зинкевич Я.С., Козаченко Т.А., Лещенко Д.Д. (2017), Эволюция движений твердого тела, близких к случаю Лагранжа, под действием нестационарного момента сил // Прикладная математика и механика, 81(2). 2017. С. 115–122.
4. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. (1982), Быстрое вращение вокруг неподвижной точки тяжелого гиростата в сопротивляющейся среде // Прикладная механика. 1982. Т. 18, №7. 1982. С. 102–107.
5. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. (2006), Эволюция быстрого вращения динамически симметричного спутника под действием гравитационного момента в сопротивляющейся среде // Механика твердого тела. Вып. 36. 2006. С. 58–63.
6. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. (2008), Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением // Известия РАН. Механика твердого тела. №2. 2008. С. 13–26.
7. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. (2014), Квазиоптимальное торможение вращений несимметричного тела в сопротивляющейся среде. Известия Российской академии наук // Теория и системы управления. № 3. 2014. С.38 – 45
8. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л., Щетинина Ю.С. (2016), Эволюция возмущенных вращений несимметричного гиростата в гравитационном поле и среде с сопротивлением // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, №4. 2016. С. 43–52.
9. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. (1979), Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа // Прикладная математика и механика. Т. 43. Вып. 5. 1979. С. 771–778.
10. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. (1982), Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Известия АН СССР. Механика твердого тела. №3. 1982. С. 5–13.
11. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. (1986), Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Известия АН СССР. Механика

твердого тела. №5. 1986. С. 3–10

12. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. (1982), Быстрое вращение вокруг неподвижной точки тяжелого гиростата в сопротивляющейся среде // Прикладная механика. Т.18, № 7. 1982. С. 102-107
13. Амелькин Н.И. (2011), О свойствах стационарных движений тела, несущего систему двухстепенных силовых гиростатов // Прикладная математика и механика. 2011. 75, вып. 3. 2011. С. 355-369.
14. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. (1981), Теория колебаний, Наука, М., 1981.
15. Анчев А. (1967), О перманентных вращениях тяжелого гиростата, имеющего неподвижную точку // Прикладная математика и механика. 1967. 31, вып. 1. 1967. С. 49 58.
16. Анчев А., Румянцев В.В. (1979), О динамике и устойчивости гиростатов // Успехи механики, 2(3), 1979. С. 3-45.
17. Арнольд В.И. (1963), Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Успехи математических наук, 1963, том 18, выпуск 5(113), 1963. С. 13–40.
18. Арнольд В.И. (1964). О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы // Доклады Академии наук СССР. Vol. 156, No. 1, 1964. С. 9-12.
19. Арнольд В.И. (1968). Проблема устойчивости и эргодические свойства классических динамических систем. Тр. Межд. конгресса математиков. Москва-1966. М.: Мир, 1968. 387с.
20. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. (1985), “Математические аспекты классической и небесной механики”, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, 3, ВИНИТИ, М., 1985. С. 5–290
21. Архангельский Ю.А. (1977), Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
22. Асланов В.С. (2004), Пространственное движение тела при спуске в атмосфере. М.: Физматлит. 2004. 160 с.
23. Асланов В.С. (2009), Движение несимметричного твёрдого тела под действием бигармонического момента // Проблемы аналитической механики и теории устойчивости: сб. науч. ст., посвящ. памяти акад. В.В.Румянцева/ Ин-т пробл. управления РАН. М.: Физматлит, 2009. 420с.
24. Асланов В.С., Дорошин А.В. (2002), Стабилизация спускаемого аппарата частичной закруткой при осуществлении неуправляемого спуска в атмосфере // Космические исследования. Т. 40. № 2, 2002. С. 193-200.
25. Асланов В.С., Дорошин А.В. (2004), Движение системы соосных тел переменной массы // Прикладная математика и механика. Т.68, вып.6, 2004. С. 999-1009.

26. Асланов В.С., Дорошин А.В. (2006), О двух случаях движения неуравновешенного гиростата // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, №4. 2006. С. 42-55.

27. Асланов В.С., Дорошин А.В. (2008), Влияние возмущений на угловое движение СГ на активном участке спуска // Космические исследования.Т. 46, № 2, 2008. С. 168-173.

28. Асланов В.С., Дорошин А.В. (2010), Хаотическая динамика неуравновешенного гиростата // Прикладная математика и механика, т.74, вып.5, 2010. С. 734-750.

29. Асланов В.С., Дорошин А.В., Круглов Г.Е. (2005), Движение соосных тел переменного состава на активном участке спуска // Космические исследования. Т.43, № 3, 2005. С. 224-232.

30. Баничук Н.В., Карпов И.И., Климов Д.М., Маркеев А.П., Соколов Б.Н., Шаранюк А.В. (1997), Механика больших космических конструкций. М.: Факториал, 1997.

31. Банщиков А.В. (2016), Параметрический анализ условий гироскопической стабилизации относительных равновесий сплюснутого осесимметричного гиростата // Математическое моделирование, т.28, №4, 2016. С. 33-42.

32. Белецкий В.В. (1965), Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.

33. Белецкий В.В. (1975), Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.

34. Белецкий, В.В., Хентов, А.А. (1985), Вращательное движение намагниченного спутника. М.:Наука. 288 с.

35. Бозюков А.Ю., Сазонов В.В. (2006). Об одном способе гравитационной ориентации вращающегося спутника // Космические исследования. Т.44, №6. 2006. С. 541-552.

36. Борисов А.В., Мамаев И.С. (1997). Адиабатический хаос в динамике твердого тела // Регулярная и хаотическая динамика, 2(2), 1997. С. 30-36.

37. Борисов А.В., Мамаев И.С. (2001), Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 384 с.

38. Буров А.А. (2013). О консервативных методах управления вращением гиростата // Прикладная математика и механика, 77(2), 2013. С. 270-282.

39. Буров А.А., Герман А.Д., Суликашвили Р.С. (2011). Об установившихся движениях гиростатов с равными моментами инерции в центральном поле сил // Прикладная математика и механика, 75(5), 2011. С. 738-744.

40. Виттенбург Й. (1980) Динамика систем твердых тел. М: Мир, 1980.

41. Воротников В.И., Вохмянина А.В. (2018). К нелинейной задаче «прохождения» трехроторным гиростатом заданного углового положения в пространстве при неконтролируемых внешних помехах // Космические исследования. 2018. Т. 56.

Вып. 5. С. 382−387.

42. Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г. (2016). К задаче переориентации трехроторного гиростата при неконтролируемых внешних помехах // Мехатроника, автоматизация, управление, 17(6), 2016. С. 414-419.

43. Гантмахер Ф. Р. (1960), Лекции по аналитической механике, Наука, М., 1960.

44. Глуховский А.Б. (1982), Нелинейные системы, являющиеся суперпозициями гиростатов // ДАН СССР 266(4), 1982. С. 816-820.

45. Голубев В.В., (1953), Лекции по интегрированию уравнений движения тяжёлого твёрдого тела около неподвижной точки, Гостехиздат, М.–Л., 1953.

46. Горр Г.В., Илюхин А.А., Ковалев А.М., Савченко А.Я. (1984), Нелинейный анализ поведения механических систем. Киев: Наукова думка. 1984.

47. Горр Г.В., Ковалев А.М. (2013), Движение гиростата. Киев: Наук. думка. 2013.

48. Гуляев М.П. (1973), О регулярных прецессиях тяжелого гиростата // Прикладная математика и механика. Т.7, вып. 4. 1973. С.746–753.

49. Гутник С.А., Сарычев В.А. (2014). Динамика осесимметричного спутника-гиростата. Положения равновесия и их устойчивость. Прикладная математика и механика, 78(3), 2014. С. 356-368.

50. Дорошин А.В. (2008). Эволюции прецессионного движения неуравновешенных гиростатов переменного состава // Прикладная математика и механика, 72(3), 2008. С. 385-598.

51. Дорошин А.В. (2010), Хаотизация движения космического аппарата с двойным вращением в окрестности положения, стабилизированного частичной закруткой // В сборнике: Управление в технических системах. (УТС-2010). ГНЦ РФ ОАО "Концерн "Центральный научно-исследовательский институт "Электроприбор" (Санкт-Петербург). 2010. С. 341-344.

52. Дорошин А.В. (2012), Динамика пространственного движения спутника-гиростата при наличии малых полигармонических возмущений // В сборнике: Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах. ГНЦ РФ ОАО "Концерн "Центральный научно-исследовательский институт "Электроприбор" (Санкт-Петербург), 2012. С. 119-122.

53. Дорошин А.В. (2014), Реализация режимов мультискрольных хаотических аттракторов в динамике пространственного движения космического аппарата с системой спаренных маховиков // В сборнике: Управление в морских и аэрокосмических системах (УМАС-2014). ГНЦ РФ ОАО "Концерн "Центральный научно-исследовательский институт "Электроприбор" (Санкт-Петербург), 2014. С. 378-387.

54. Дорошин А.В. (2016), Пространственная переориентация космического аппарата с помощью инициации хаотических режимов // В сборнике: Управление в морских и аэрокосмических системах (УМАС-2016). ГНЦ РФ ОАО "Концерн "Центральный

научно-исследовательский институт "Электроприбор" (Санкт-Петербург), 2016. С. 394-400.

55. Жуковский Н.Е. (1885), О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Сочинения. т.II, вып.1. Госуд. научно-техн. издательство, Москва-Ленинград, 1931 (оригинал: С.-Петербургъ. Тип. В. Демакова, Новый пер. 7, 1885. 137с.).
56. Журавлёв В.Ф. (2009). Спектральные свойства линейных гироскопических систем // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, №2. 2009. С.3–6.
57. Журавлёв В.Ф., Климов Д.М. (2011). О некоторых задачах динамики твёрдого тела с сухим трением // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, №4 (2), 2011. С. 133–134.
58. Журавлёв В.Ф., Климов Д.М. (1988). Прикладные методы в теории колебаний. Наука. 328 с.
59. Журавлёв В.Ф., Плотников П.К. (2018). Теоретические предпосылки к обоснованию возможности использования гироскопа Ковалевской в качестве трёхкомпонентного измерителя угловой скорости // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, №4. 2018. С. 6–15.
60. Зиглин С.Л. (1980), Расщепление сепаратрис, ветвление решение и несуществование интеграла в динамике твердого тела // Труды Московского математического общества, Т.41, 1980. С. 287-303.
61. Ивин Е.А. (1985), Разделение переменных в задаче о движении гиростата // Вестник МГУ. Сер.1. Математика. Механика. №3, 1985. С.69-72.
62. Ишлинский А.Ю. (1976), Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация, Наука, М., 1976.
63. Козлов В.В. (1980), Методы качественного анализа в динамике твердого тела, Изд-во Моск. ун-та. 1980.
64. Козлов В.В. (1983), Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи математических наук, 1983, том 38, выпуск 1(229), 1983. С. 3–67.
65. Козлов В.В. (1985) К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // Изв. РАН. Механика твердого тела. № 6. 1985. С. 28 33.
66. Колмогоров А.Н. (1954). О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Доклады АН СССР, 98(4), 1954. С. 527-530.
67. Космодемьянский А.А. (1966), Курс теоретической механики. Ч. 2. М.: Просвещение, 1966. 398 с.
68. Кошляков В.Н. (1985), Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. М.: Наука. 286с.

69. Кузнецова Е.Ю., Сазонов В.В., Чебуков С.Ю. (2000), Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов // Изв. РАН. Механика твердого тела, №2, 2000. С. 3-14.

70. Лещенко Д.Д. (1975), О движении тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Прикладная механика. Т. 11, №3. 1975. С. 89–94.

71. Лоскутов А.Ю. (2007), Динамический хаос. Системы классической механики // Успехи физических наук, 177(9), 2007. С. 989-1015.

72. Макеев Н.Н. (1976). Малые колебания и сферическое движение гиростата в псевдоевклидовом пространстве // Прикладная математика и механика, 40(3), 1976. С. 417-423.

73. Маркеев А.П. (1990), Теоретическая механика. М. Наука, 1990. 416 с.

74. Маркеев А.П. (2006), Об устойчивости плоских вращений спутника на круговой орбите // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, №4, 2006. С. 63-85.

75. Маркеев А.П. (2007), О колебаниях спутника, относительно направления, фиксированного в абсолютном пространстве // Прикладная математика и механика, 71(1), 2007. С. 3-11.

76. Маркеев А.П. (2007), Об устойчивости колебаний спутника в плоскости эллиптической орбиты // Доклады Академии наук. Т. 413. № 3. 2007. С. 340-344.

77. Маркеев А.П. (2008), К задаче об устойчивости цилиндрической прецессии спутника на эллиптической орбите // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела, №2, 2008. С. 3-12.

78. Маркеев А.П. (2009), Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. Москва - Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 396 с.

79. Маркеев А.П. (2018), Об устойчивости регулярной прецессии Гриоли в одном частном случае // Прикладная математика и механика. Т. 82. № 5. 2018. С. 531-546.

80. Маркеев А.П. (2018), Об устойчивости регулярной прецессии несимметричного гироскопа в критическом случае резонанса четвертого порядка // Доклады Академии наук. Т. 481. № 2. 2018. С. 151-155.

81. Маркеев А.П., Бардин Б.С. (1994), Об одном плоском вращательном движении спутника на эллиптической орбите // Космические исследования. Т. 32. № 6. 1994. С. 43.

82. Маркеев А.П., Сокольский А.Г. (1977), Исследование устойчивости плоских периодических движений спутника на круговой орбите // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. № 4. 1977. С. 46-57.

83. Маркеев А.П., Чеховская Т.Н. (1976), Об устойчивости цилиндрической прецессии спутника на эллиптической орбите // Прикладная математика и механика, 40(6),

1976. С. 1040-1047.

84. Мартыненко Ю.Г. (1988), Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988. 368 с.

85. Мельников В.К. (1963), Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Труды Московского математического общества, № 12. 1963. С. 1–56.

86. Морозов В.М. (1967), Об устойчивости движения гиростата под действием гравитационных магнитных и аэродинамических моментов // Космические исследования, 5(5). 1967. С. 727–732.

87. Морозов В.М. (1968), Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного и аэродинамического моментов // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, №6. 1968. С. 109–11.

88. Морозов В.М. (1969), Устойчивость движения космических аппаратов. Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1971. С. 5–83.

89. Морозов В.М., Михайлов Д. Д., Каленова В.И. (2016), Об устойчивости стационарных движений системы соосных тел // Космические исследования, 54(2), 2016. С. 173-178.

90. Морозов В.М., Рубановский В.Н., Румянцев В.В., Самсонов В.А. (1973), О бифукации и устойчивости установившихся движений сложных механических систем // Прикладная математика и механика. Т. 37. Вып. 3. 1973. С. 387–399.

91. Нейштадт А.И., Пивоваров М.Л. (2000), Переход через сепаратрису в динамике спутника с двойным вращением // Прикладная математика и механика. Т.64, вып. 5. 2000. С.741-746.

92. Охоцимский Д.Е., Сарычев В.А. (1963), Система гравитационной стабилизации искусственных спутников. Искусственные спутники Земли.-М.: Изд. АН СССР, (16), 1963, 5-9.

93. Охоцимский Д.Е., Энеев Т. М., Аким Э.Л., Сарычев В.А. (2010) Прикладная небесная механика и управление движением // Прикладная небесная механика и управление движением. К 90-летию со дня рождения Д. Е. Охоцимского / Составители: Т. М. Энеев, М.Ю.Овчинников, А. Р. Голиков. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2010. С. 328–367.

94. Пивоваров М.Л. (1986), Вращение спутника с большим магнитным моментом // Космические исследования, 24, 1986. С. 816-820.

95. Понтрягин Л.С. (1988). Избранные научные труды. В 3-х т. М.: Наука, 1988.

96. Пуанкаре А. (1971), “Новые методы в небесной механике”, Избранные труды, Т. 1, Наука, М., 1971; Т. 2, 1972.

97. Рубановский В.Н. (1991), О ветвлении и устойчивости относительных равновесий спутника-гиростата // Прикладная математика и механика. Т. 55. № 4. 1991. С. 565-

571.

98. Румянцев В.В. (1961), Об устойчивости движения гиростатов // Прикладная математика и механика. 25, вып. 1. 1961. С. 9-16.

99. Румянцев В.В. (1970), Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика, механика. № 2. 1970. С. 83-96.

100. Румянцев В.В. (1980), Об устойчивости вращения тяжелого гиростата на горизонтальной плоскости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. №4. 1980. С. 11-21.

101. Садов Ю.А. (1970), Переменные действие угол в задаче Эйлера Пуансо // Прикладная математика и механика. 34, вып. 5. 1970. С. 962 964.

102. Сазонов В.В., Сидоренко В.В. (1990), Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярным прецессиям Лагранжа // Прикладная математика и механика, 54(6), 1990. С. 951-957.

103. Сазонов В.В. (2013), Периодические движения спутника-гиростата относительно центра масс под действием гравитационного момента // Космические исследования, 51(2), 2013. С. 145-145.

104. Сазонов В.В., Троицкая А.В. (2017). О периодических движениях спутника-гиростата с большим гиростатическим моментом // Прикладная математика и механика, 81(4), 2017. С. 432-444.

105. Самсонов В.А. (1984), О вращении тела в магнитном поле // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела, №6, 1984. С. 32–34.

106. Сарычев В.А., Мирер С.А., Дегтярев А.А. (2005). Динамика спутника-гиростата с одной ненулевой компонентой вектора гиростатического момента // Космические исследования, 43(4), 2005. С.283-294.

107. Сарычев В.А. (2010). Динамика осесимметричного спутника-гиростата под действием гравитационного момента // Космические исследования, 48(2). 2010. С. 192-197.

108. Сарычев В.А., Гутник С.А. (1984), К вопросу о положениях относительного равновесия спутника-гиростата // Космические исследования. Т.22, №3, 1984. С. 323-326.

109. Сарычев В.А., Мирер С.А., Дегтярев А.А. (2008). Динамика спутника-гиростата с вектором гиростатического момента в главной плоскости инерции // Космические исследования, 46(1), 2008. С. 61-74.

110. Сидоренко В.В. (2002), Об одном классе движений спутника, несущего сильный магнит // Космические исследования, 40(2), 2002. С. 147-155.

111. Соколов С.В. (2017). Новые инвариантные соотношения одной критической подсистемы обобщенного двухполевого гиростата // Доклады Академии наук. 477 (6), 2017. С. 660-663.

112. Стеклов В.А. (1893), О движении твердого тела в жидкости. Харьков, 234 с.

113. Стеклов В.А. (1895), О некоторых возможных движениях твердого тела в жидкости // Тр. отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания. 7, вып. 2. 1895. С. 10-21.

114. Стрыгин В.В., Соболев В.А. (1976), Влияние геометрических и кинетических параметров и диссипации энергии на устойчивость ориентации спутников с двойным вращением // Космические исследования. Т.14, №3. 1976. С. 366-371.

115. Стрыгин В.В., Соболев В.А. (1988), Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука. 1988.

116. Тихонов А.А. (2009), Интегрируемый случай вращательного движения гиростата в гравитационном и магнитном полях Земли // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, №2, 2009. С. 89-96.

117. Тихонов А.А., Тхай В.Н. (2015). Симметричные колебания в задаче о вращательном движении гиростата на слабоэллиптической орбите в гравитационном и магнитном полях // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия, №2, 2015. С. 279–287.

118. Узбек Е.К. (2004), О новом решении уравнений Г. Кирхгофа задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопичеких сил // Прикладная математика и механика. 68, вып. 6. 2004. С. 964-970.

119. Узбек Е.К. (2006), Полурегулярные прецессии второго типа гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил // Изв. РАН. Механика твердого тела. №4. 2006. С. 31 41.

120. Харламов П.В. (1963). О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью. Журнал прикл. механики и техн. физики., №4, 1963. С. 17-29.

121. Харламов П.В. (1965), Лекции по динамике твердого тела. Новосибирск: Изд. Новосиб. ун-та. Ч.1. 1965.

122. Харламов П.В. (1965), Полиномиальные решения уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикладная математика и механика. 29, вып. 1. 1965. С. 26-34.

123. Харламов П.В. (1988), Гиростаты // Докл. АН УССР. Сер. А. № 9. 1988. С. 38-41.

124. Харламова Е.И. (1959), О движении твердого тела вокруг неподвижной точки в центральном ньютоновском поле сил // Изв. Сиб. отд. АН СССР. № 6. 1959. С. 7-17.

125. Харламова Е.И. (1965), Некоторые решения задачи о движении тела, имеющего закрепленную точку // Прикладная математика и механика. 29, вып. 4. 1965. С. 733-737.

126. Чайкин С.В. (2013). Бифуркации относительных равновесий спутника-гиростата в частном случае расположения его гиростатического момента // Прикладная математика и механика, 77(5), 2013. С. 667-678.

127. Чайкин С.В. (2017). Одноосные равновесные ориентации на притягивающий центр симметричного вытянутого орбитального гиростата с упругим стержнем // Сибирский журнал индустриальной математики, 20(3), 2017. С. 92-100.

128. Черноусько Ф.Л. (1963), О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // Прикладная математика и механика. 27 (3), 1963. С. 474-483.

129. Черноусько Ф.Л. (1964). Об устойчивости регулярной прецессии спутника // Прикладная математика и механика, 28(1), 1964. С. 155-157.

130. Черноусько Ф.Л. (1965), Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса // Ж. вычисл. математики и мат. физики. Т. 5. № 6. 1965. С. 1049-1070.

131. Черноусько Ф.Л. (1968). Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, (7). 1968.

132. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. (2006). Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.

133. Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. (1973). Вариационные задачи механики и управления. Наука. 1973.

134. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. (1980), Управление колебаниями, М. Наука. 1980.

135. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. (2015), Эволюция движений твердого тела относительно центра масс. Институт компьютерных исследований Москва-Ижевск. 2015. 308 с.

136. Щетинина Е.К. (2016). О движении симметричного гиростата, несущего два ротора // Прикладная математика и механика, 80(2), 2016. С. 168-175.

137. Яхья Х.М. (1987), Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. № 4. 1987. С. 88-90.

138. Abramowitz M., Stegun I.A. (1964), Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables. Vol. 55. Courier Corporation. 1964.

139. Aghababa M.P., Aghababa H.P. (2012). Synchronization of nonlinear chaotic electromechanical gyrostat systems with uncertainties. Nonlinear Dynamics, 67(4), 2012, pp. 2689-2701.

140. Akulenko L., Leshchenko D., Kushpil T., Timoshenko I. (2001), Problems of evolution of rotations of a rigid body under the action of perturbing moments. Multibody System Dynamics, 6(1), 2001, pp. 3-16.

141. Aleksandrov A.Yu., Tikhonov A.A. (2018), Attitude stabilization of a rigid body

under the action of a vanishing control torque Nonlinear Dynamics, 93(2), 2018, pp 285–293.

142. Andoyer H. (1923), Cours de Mecanique Celeste, Paris: Gauthier-Villars. 1923.

143. Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Neiman A.B., Vadivasova T.E., Schimansky-Geier L. (2007), Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Development. Springer-Verlag, Berlin. 2007.

144. Arneodo A., Coullet P. H., Spiegel E. A., Tresser C. (1985) Asymptotic chaos, Physica D14, 1985, pp. 327-347.

145. Aslanov V.S. (2011), Dynamics of Free Dual-spin Spacecraft. Engineering Letters, 19(4). 2011.

146. Aslanov V.S. (2012), Integrable cases in the dynamics of axial gyrostats and adiabatic invariants, Nonlinear Dynamics, Volume 68, Issue 1, 2012, pp. 259-273.

147. Aslanov V.S. (2014), A note on the "Exact solutions for angular motion of coaxial bodies and attitude dynamics of gyrostat-satellites". International Journal of Non-Linear Mechanics, 58, 2014, pp. 305-306.

148. Aslanov V.S. (2014), Integrable cases of the problem of the free motion of a gyrostat. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, vol. 78, Issue 5, 2014, Pages 445-453.

149. Aslanov V.S. (2015), Behavior of a free dual-spin gyrostat with different ratios of inertia moments. Advances in Mathematical Physics, Article ID 323714, 2015, 10 p.

150. Aslanov V.S. (2015), Chaotic behavior of a body in a resistant medium. International Journal of Non-Linear Mechanics, 73, 2015, 85-93.

151. Aslanov V.S. (2017), Rigid Body Dynamics for Space Applications. Butterworth-Heinemann. 2017.

152. Aslanov V.S., Yudintsev V.V. (2012), Dynamics and chaos control of gyrostat satellite, Chaos, Solitons & Fractals, Volume 45, Issues 9-10, 2012, pp. 1100-1107.

153. Aslanov V.S., Yudintsev V.V. (2013), Dynamics and control of dual-spin gyrostat spacecraft with changing structure. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, Volume 115, Issue 1, 2013, pp. 91-105.

154. Aslanov V.S., Yudintsev V.V. (2014) Dynamics and Chaos Control of Asymmetric Gyrostat Satellites. Cosmic Research, Vol. 52, No. 3, 2014, pp. 216-228.

155. Avanzini G., Giulietti F. (2012), Magnetic Detumbling of a Rigid Spacecraft, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 35, No. 4, 2012, pp. 1326-1334.

156. Bainum P.M., Fuechsel P.G., Mackison D.L. (1970), Motion and Stability of a Dual-Spin Satellite With Nutation Damping, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 7, No. 6, 1970, pp. 690-696.

157. Bao-Zeng Y. (2011), Study on the Chaotic Dynamics in Attitude Maneuver of Liquid-Filled Flexible Spacecraft, AIAA Journal, Vol. 49, No. 10, 2011, pp. 2090-2099.

158. Bao-Zeng Yue (2008), Heteroclinic bifurcations in completely liquid-filled spacecraft with flexible appendage, Nonlinear Dyn. 51, 2008, pp. 317–327.

159. Basak I. (2009), Explicit solution of the Zhukovski-Volterra gyrostat, Regular and chaotic dynamics, Vol.14, N.2, 2009, pp. 223-236.

160. Bayat F., Bolandi H., Jalali A.A. (2009), A heuristic design method for attitude stabilization of magnetic actuated satellites, Acta Astronautica 65, 2009, pp. 1813 –1825.

161. Beletskiĭ V.V., Pivovarov M.L., Starostin E.L. (1996), Regular and chaotic motions in applied dynamics of a rigid body. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 6(2), 1996, pp. 155-166.

162. Beletsky V.V. (1995), Reguläre und chaotische Bewegung starrer Körper. Teubner. 1995.

163. Blackwell W., Pereira J. (2015), New Small Satellite Capabilities for Microwave Atmospheric Remote Sensing: The Earth Observing Nanosatellite-Microwave (EON-MW), Proceedings of the 29th Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites, Logan, Utah, USA, August 8-13, 2015.

164. Boccaletti S., Grebogi, C., Lai, Y. C., Mancini, H., & Maza, D. (2000), The control of chaos: theory and applications. Physics reports, 329(3), 2000, pp. 103-197.

165. Boccaletti S., Kurths, J., Osipov, G., Valladares, D.L., Zhou, C.S. (2002), The synchronization of chaotic systems. Physics Reports 366, 2002, pp. 1-101.

166. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. (2008). Chaos in a restricted problem of rotation of a rigid body with a fixed point. Regular and Chaotic Dynamics, 13(3), 2008, 221-233.

167. Brun F. (1893), Rotation kring fix punkt. Ofversigt at Kongl. Svenska Vetenskaps Akad. Vorhandlingar, Stokholm. 1893.

168. Bushenkov V.A., Ovchinnikov M.Yu., Smirnov G.V. (2002), Attitude stabilization of a satellite by magnetic coils, Acta Astronautica, Volume 50, Issue 12, 2002, pp. 721-728

169. Cavas J.A., Vigueras A. (1994), An integrable case of a rotational motion analogous to that of Lagrange and Poisson for a gyrostat in a Newtonian force field. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 60(3), 1994, pp. 317-330.

170. Celikovsky S. Chen G. (2002) On a generalized Lorenz canonical form of chaotic systems, Int. J. Bifurcation and Chaos 12, 2002, pp. 1789-1812.

171. Celletti A., Lhotka C. (2014), Transient times, resonances and drifts of attractors in dissipative rotational dynamics, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 19, 2014, pp. 3399-3411.

172. Chebanov D., Mosina N., Salas J. (2016). On Stabilization of an Unbalanced Lagrange Gyrostat. Mathematical and Computational Approaches in Advancing Modern Science and Engineering (pp. 59-69). Springer, Cham. 2016.

173. Chen G. Lai D. (1998), Anticontrol of chaos via feedback, Int. J. Bifurcation and Chaos 8, 1998, pp. 1585-1590.

174. Chen H.-K. (2002), Chaos and chaos synchronization of a symmetric gyro with linear-plus-cubic damping, Journal of Sound and Vibration, 255(4), 2002, pp. 719-740.

175. Chen H.K., Lee C.I. (2004), Anti-control of chaos in rigid body motion. Chaos, Solitons & Fractals, 21(4), 2004, pp. 957-965.

176. Chen Li-Qun, Liu Yan-Zhu (2002), Chaotic attitude motion of a magnetic rigid spacecraft and its control, International Journal of Non-Linear Mechanics 37, 2002, pp. 493–504.

177. Chen Li-Qun, Liu Yan-Zhu, Cheng Gong (2002), Chaotic attitude motion of a magnetic rigid spacecraft in a circular orbit near the equatorial plane, Journal of the Franklin Institute 339, 2002, pp. 121–128.

178. Cheng G., Liu Y. Z. (2000), Chaotic motion of an asymmetric gyrostat in the magnetic field of the earth, Acta Mechanica 141, 2000, pp.125-134.

179. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. (2017), Evolution of motions of a rigid body about its center of mass. Springer. 2017.

180. Chinnery A.E., C.D. Hall (1995), Motion of a Rigid Body with an Attached Spring-Mass Damper, J. Guidance Control Dyn. Vol. 18, No. 6, 1995, 1404-1409.

181. Chobotov V.A. (1991), Spacecraft attitude dynamics and control. NASA STI/Recon Technical Report A, 92. 1991.

182. Cloutier G.J. (1968), Stable Rotation States of Dual-Spin Spacecraft, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 5, No. 4, 1968, pp. 490-492.

183. Cochran J.E. (1972), Effects of gravity-gradient torque on the rotational motion of a triaxial satellite in a precessing elliptic orbit. Celestial mechanics, 6(2), 1972, pp. 127-150.

184. Cochran J.E., Shu P.H., Rew S.D. (1982), Attitude motion of asymmetric dual-spin spacecraft. Journal of Guidance, Control, and Dynamics 5 (1), 1982, pp. 37-42.

185. Cochran J.E., Shu P.H. (1983). Effects of energy addition and dissipation on dual-spin spacecraft attitude motion. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 6(5), 1983, pp. 368-373.

186. Crespo da Silva M. R. M. (1970), Attitude stability of a gravity-stabilized gyrostat satellite. Celestial mechanics, 2(2), 1970, pp. 147-165.

187. Deng S., Meng T., Wang H., Du C., & Jin Z. (2017), Flexible attitude control design and on-orbit performance of the ZDPS-2 satellite. Acta Astronautica, 130, 2017, pp. 147-161.

188. Deprit A. (1967), A free rotation of a rigid body studied in the phase plane, American Journal of Physics 35, 1967, pp.424-428.

189. Deprit A., Elipe A. (1993), Complete reduction of the Euler–Poinsot problem //

J. Astronaut. Sci. 41, n.4. 1993, pp. 603–628.

190. Doroshin A.V. (2010), Analysis of attitude motion evolutions of variable mass gyrostats and coaxial rigid bodies system. International Journal of Non-Linear Mechanics, 45 (2), 2010, pp. 193-205.

191. Doroshin A.V. (2011), Modeling of chaotic motion of gyrostats in resistant environment on the base of dynamical systems with strange attractors. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 16 (8), 2011, pp. 3188-3202.

192. Doroshin A.V. (2012), Heteroclinic dynamics and attitude motion chaotization of coaxial bodies and dual-spin spacecraft. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 17 (3), 2012, pp. 1460-1474.

193. Doroshin A.V. (2013), Exact solutions for angular motion of coaxial bodies and attitude dynamics of gyrostat-satellites. International Journal of Non-Linear Mechanics, 50, 2013, pp. 68-74.

194. Doroshin A.V. (2014), Chaos and its avoidance in spinup dynamics of an axial dual-spin spacecraft. Acta Astronautica, 94 (2), 2014, pp. 563-576.

195. Doroshin A.V. (2014), Homoclinic solutions and motion chaotization in attitude dynamics of a multi-spin spacecraft. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 19 (7), 2014, pp. 2528-2552.

196. Doroshin A.V. (2016), Heteroclinic chaos and its local suppression in attitude dynamics of an asymmetrical dual-spin spacecraft and gyrostat-satellites. The Part I-Main models and solutions. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 31 (1-3), 2016, pp. 151-170.

197. Doroshin A.V. (2016), Heteroclinic chaos and its local suppression in attitude dynamics of an asymmetrical dual-spin spacecraft and gyrostat-satellites. The Part II-The heteroclinic chaos investigation. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 31 (1-3), 2016, pp. 171-196.

198. Doroshin A.V. (2017), Analytical solutions for dynamics of dual-spin spacecraft and gyrostat-satellites under magnetic attitude control in omega-regimes. International Journal of Non-Linear Mechanics, 96, 2017, pp. 64-74.

199. Doroshin A.V. (2017), Attitude dynamics of gyrostat–satellites under control by magnetic actuators at small perturbations. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 49, 2017, pp. 159-175.

200. Doroshin A.V. (2018), Chaos as the hub of systems dynamics. The part I—The attitude control of spacecraft by involving in the heteroclinic chaos. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 59, 2018, pp. 47-66.

201. Doroshin A.V. (2019), Regimes of regular and chaotic motion of gyrostats in the central gravity field. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 69, 2019, pp. 416-431.

202. Doroshin A.V., Krikunov M.M. (2014), Attitude dynamics of a spacecraft with

variable structure at presence of harmonic perturbations. Applied Mathematical Modelling, 38 (7-8), 2014, pp. 2073-2089.

203. Doroshin, A.V. (2008), Synthesis of attitude motion of variable mass coaxial bodies. WSEAS Transactions on Systems and Control, 3 (1), 2008, pp. 50-61.

204. Doroshin, A.V. (2013), Exact solutions in attitude dynamics of a magnetic dual-spin spacecraft and a generalization of the lagrange top. WSEAS Transactions on Systems, 12 (10), 2013, pp. 471-482.

205. Doroshin, A.V., Krikunov, M.M. (2014), Dynamical analysis and synthesis of inertia-mass configurations of a spacecraft with variable volumes of liquids in jet engine tanks. WSEAS Transactions on Systems, 13, 2014, pp. 690-698.

206. Doroshin, A.V. (2018), Some properties of gyrostats dynamical regimes close to new strange attractors of the Newton-Leipnik type. Studies in Computational Intelligence, 751, 2018, pp. 156-176.

207. Doroshin A.V. (2007), Phase Space Research of One Non-autonomous Dynamic System, Proceedings of the 3rd WSEAS/IASME International Conference on DYMAMICAL SYSTEM and CONTROL. Arcachon, France 161-165.

208. Doroshin A.V. (2009), Attitude Control of Spider-type Multiple-rotor Rigid Bodies Systems Proceedings of the World Congress on Engineering 2009, Vol. II, WCE 2009, London, U.K., pp.1544-1549.

209. Doroshin A.V. (2010), Hamiltonian dynamics of spider-type multirotor rigid bodies systems. AIP Conference Proceedings, 1220, pp. 27-42.

210. Doroshin A.V. (2013), Spinup-capture dynamics of multi-rotor nanosatellites and somersaulting robots. Proceedings of 2013 Science and Information Conference, SAI 2013, art. no. 6661802, pp. 613-617.

211. Doroshin A.V. (2014), Multi-spin spacecraft and gyrostats as dynamical systems with multiscroll chaotic attractors. Proceedings of 2014 Science and Information Conference, SAI 2014, art. no. 6918290, pp. 882-887.

212. Doroshin A.V. (2015), Attitude control and angular reorientations of dual-spin spacecraft and gyrostat-satellites using chaotic regimes initiations. Lecture Notes in Engineering and Computer Science, 2217, pp. 100-104.

213. Doroshin A.V. (2015), Initiations of chaotic regimes of attitude dynamics of multi-spin spacecraft and gyrostat-satellites basing on multiscroll strange chaotic attractors. IntelliSys 2015 - Proceedings of 2015 SAI Intelligent Systems Conference, art. no. 7361217, pp. 698-704.

214. Doroshin A.V. (2017), Attitude Dynamics of Spacecraft with Control by Relocatable Internal Position of Mass Center. Lecture Notes in Engineering and Computer Science, 2227, pp. 231-235.

215. Doroshin A.V. (2018), Computing the heteroclinic orbits splitting in systems phase spaces via the matricant method. Lecture Notes in Engineering and Computer

Science, 1, pp. 428-433.

216. Doroshin A.V. (2015), Images of chaos in attitude dynamics of multi-spin spacecraft and gyrostat-satellites. Journal of Dynamics and Vibroacoustics. Vol. 2. № 2. P.17-27.

217. El-Gohary Awad (2005), Optimal control of damping rotation of a rigid body using fly wheels with friction, Chaos, Solitons and Fractals 24, 2005, pp. 207–221.

218. El-Gohary Awad (2006), New control laws for stabilization of a rigid body motion using rotors system, Mechanics Research Communications, Volume 33, Issue 6, 2006, pp. 818-829.

219. El-Gohary Awad (2009), Chaos and optimal control of steady-state rotation of a satellite-gyrostat on a circular orbit, Chaos, Solitons & Fractals, Volume 42, 2009, pp. 2842-2851.

220. Elhadj Z., Sprott J.C. (2013), Simplest 3D continuous-time quadratic systems as candidates for generating multiscroll chaotic attractors, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 23, No. 7, 2013, 1350120 (6 pages).

221. Elipe A., Lanchares V. (2008), Exact solution of a triaxial gyrostat with one rotor, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, Issue 1-2, Volume 101, 2008, pp 49-68.

222. Elmandouh A.A. (2017). On the stability of the permanent rotations of a charged rigid body-gyrostat. Acta Mechanica, 228(11), 2017, pp. 3947-3959.

223. Flatley T. et al. (1997), A B-dot acquisition controller for the RADARSAT spacecraft //NASA Conference Publication. – NASA, 1997, pp. 79-90.

224. Galiullin I.A. (2011), Solution to the problem of stability of regular precessions of a symmetrical gyrostat in Newtonian field. Cosmic Research, 49(2), 2011, pp. 175-178

225. Ge Z.-M., Lin T.-N. (2002), Chaos, Chaos Control And Synchronization Of A Gyrostat System, Journal of Sound and Vibration, Volume 251, Issue 3, 2002, pp. 519-542.

226. Ge Z.-M., Lin T.-N. (2003), Chaos, Chaos Control And Synchronization Of Electro-Mechanical Gyrostat System, Journal of Sound and Vibration 259(3), 2003, pp. 585–603.

227. Gluhovsky A.B. (2006), Energy-conserving and Hamiltonian low-order models in geophysical fluid dynamics. Nonlin. Processes Geophys., 13, 2006, pp. 125–133.

228. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. (1980), Table of Integrals, Series and Products, Academic Press, San Diego. 1980.

229. Gray A. (1959), Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion: Theory and Applications Dover, New York. 1959.

230. Guckenheimer J., Holmes P.J. (1983), Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. Vol. 42. Springer Science & Business Media. 1983.

231. Guirao J.L.G., Llibre J., Vera J. A. (2013). Periodic solutions induced by an

upright position of small oscillations of a sleeping symmetrical gyrostat. Nonlinear Dynamics, 73(1-2), 2013, pp. 417-425.

232. Guirao J.L.G., Vera J.A. (2010), Dynamics of a gyrostat on cylindrical and inclined Eulerian equilibria in the three-body problem, Acta Astronautica 66, 2010, pp. 595 - 604.

233. Guran A. (1993), Chaotic motion of a Kelvin type gyrostat in a circular orbit, Acta Mech. 98, 1993, pp. 51–61.

234. Gutnik S.A., Santos L., Sarychev V.A., Silva A. (2015), Dynamics of a gyrostat satellite subjected to the action of gravity moment. Equilibrium attitudes and their stability. Journal of Computer and Systems Sciences International, 54(3), 2015, pp. 469-482.

235. Hall C.D. (1997), Momentum Transfer Dynamics of a Gyrostat with a Discrete Damper, J. Guidance Control Dyn., Vol. 20, No. 6, 1997, pp. 1072-1075.

236. Hall C.D. (1998), Escape from gyrostat trap states, J. Guidance Control Dyn. 21, 1998, pp. 421-426.

237. Hall C.D., Rand R.H. (1994), Spinup Dynamics of Axial Dual-Spin Spacecraft, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 17, No. 1, 1994, pp. 30–37.

238. Holmes P.J., Marsden J.E. (1983), Horseshoes and Arnold diffusion for Hamiltonian systems on Lie groups, Indiana Univ. Math. J. 32, 1983, pp. 273-309.

239. Holmes P.J. (1990), Poincaré, celestial mechanics, dynamical-systems theory and chaos – Physics Reports (Review Section of Physics Letters) 193, No. 3, 1990, pp. 137—163 (North-Holland).

240. Hughes Peter C. (1986), Spacecraft attitude dynamics. John Wiley & Sons. New York, 1986.

241. Iñarrea M. (2009), Chaos and its control in the pitch motion of an asymmetric magnetic spacecraft in polar elliptic orbit, Chaos, Solitons & Fractals,Volume 40, Issue 4, 2009, pp.1637-1652.

242. Iñarrea M., Lanchares V. (2000), Chaos in the reorientation process of a dual-spin spacecraft with time-dependent moments of inertia, Int. J. Bifurcation and Chaos. 10, No. 5, 2000, pp. 997-1018.

243. Iñarrea M., Lanchares V., Rothos V. M., Salas J. P. (2003), Chaotic rotations of an asymmetric body with time-dependent moment of inertia and viscous drag, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 13, No. 2, 2003, pp. 393-409.

244. Inarrea M., V. Lanchares (2006), Chaotic pitch motion of an asymmetric non-rigid spacecraft with viscous drag in circular orbit, Int. J. Non-Linear Mech. 41, 2006, pp. 86–100.

245. Iñarrea M., Lanchares V., Pascual A.I., Elipe A. (2017), Stability of the permanent rotations of an asymmetric gyrostat in a uniform Newtonian field. Applied Mathematics

and Computation, 293, 2017, pp. 404-415.

246. Iñarrea M., Lanchares V., Pascual A.I., Elipe A. (2017), On the Stability of a Class of Permanent Rotations of a Heavy Asymmetric Gyrostat. Regular and Chaotic Dynamics, 22(7), 2017, pp. 824-839.

247. Jan Y.W., Chiou J.C. (2005), Attitude control system for ROCSAT-3 microsatellite: a conceptual design, Acta Astronautica 56, 2005, pp. 439 – 452.

248. Junkins John L., Turner J.D. (1986), Optimal spacecraft rotational maneuvers (Studies in astronautics; v.3), Elsevier Science Publishers B.V. 1986.

249. Kane T.R., Fowler R.C. (1970), Equivalence of two gyrostatic stability problems. Journal of Applied Mechanics, 37(4), 1970, pp. 1146-1147.

250. Kane T.R., Mingori D.L. (1965), Effect of a rotor on the attitude stability of a satellite in circular orbit, AIAA Journal, 3(5), 1965, pp. 936-940.

251. Kharlamov M.P., Ryabov P.E., Kharlamova I.I. (2017). Topological Atlas of the Kovalevskaya–Yehia Gyrostat. Journal of Mathematical Sciences, 227(3), 2017, pp. 241-386.

252. Kharlamov M.P., Yehia H.M. (2015). Separation of variables in one case of motion of a gyrostat acted upon by gravity and magnetic fields. Egyptian Journal of Basic and Applied Sciences, 2(3), 2015, pp. 236-242.

253. Kinsey K.J., Mingori D.L., Rand R.H. (1996), Non-linear control of dual-spin spacecraft during despin through precession phase lock, J. Guidance Control Dyn. 19, 1996, pp. 60-67.

254. Kirby K., Haggerty D., Dantzler A., et al. (2008), Solar Sentinels: Mission Study Report. NASA. APL, 2008. 117p. (http://eui.sidc.be/public/documentation/sntnls.pdf)

255. Kirchhoff G.R. (1858), “Über das gleichgewicht und die bewegung eines unendlich dünnen elastischen stabes,” J. Reine Angew. Math. Crelle’s 56, 1858, pp. 285–313.

256. Kuang J., Tan S., T. Leung A.Y. (2002), Chaotic attitude tumbling of an asymmetric gyrostat in a gravitational field. Journal of guidance, control, and dynamics, 25(4), 2002, pp. 804-814.

257. Kuang J., Tan S., Arichandran K., Leung A.Y.T. (2001), Chaotic dynamics of an asymmetrical gyrostat, Int. J. Non-Linear Mech. 36, 2001, pp. 1213-1233

258. Kuang J., Tan, S., Leung A.Y.T. (2002), Chaotic attitude tumbling of an asymmetric gyrostat in a gravitational field. Journal of guidance, control, and dynamics, 25(4), 2002, pp. 804-814.

259. Kuang J.L., Meehan P.A., Leung A.Y.T. (2006), On the chaotic rotation of a liquid-filled gyrostat via the Melnikov–Holmes–Marsden integral, International Journal of Non-Linear Mechanics 41, 2006, pp. 475 – 490.

260. Kuang J.L., Meehan P.A., Leung A.Y.T. (2006), Suppressing chaos via

Lyapunov–Krasovskii’s method, Chaos, Solitons and Fractals 27, 2006, pp. 1408–1414.

261. Kuznetsov N.V., Leonov G.A. (2016), Strange Attractors and Classical Stability Theory: Stability, Instability, Lyapunov Exponents and Chaos. Handbook of Applications of Chaos Theory. Chapman and Hall/CRC, 2016, pp. 105-134.

262. Kuznetsov S.P. (2012), Hyperbolic Chaos: A Physicist's View. Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg. 2012.

263. Lanchares V., Inarrea M., Salas J.P. (1998), Spin rotor stabilization of a dual-spin spacecraft with time dependent moments of inertia, Int. J. Bifurcation Chaos 8, 1998, pp. 609–617.

264. Leimanis E. (1965), The general problem of the motion of coupled rigid bodies about a fixed point. Berlin: Springer-Verlag. 1965.

265. Leipnik R.B., Newton T.A. (1981), Double strange attractors in rigid body motion with linear feedback control, Phys. Lett. 86A, 1981, pp. 63–67.

266. Leonov G.A., Kuznetsov N.V. (2013), Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert–Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits. International Journal of Bifurcation and Chaos, 23(01), 2013, 1330002.

267. Leung A.Y.T., Kuang J.L. (2004), Spatial chaos of 3-D elastica with the Kirchhoff gyrostat analogy using Melnikov integrals, Int. J. Numer. Meth. Eng. 61, 2004, pp.1674–1709.

268. Leung A.Y.T., Kuang J.L. (2007), Chaotic rotations of a liquid-filled solid, Journal of Sound and Vibration 302, 2007, pp. 540–563.

269. Li D.Q. (2008), A three-scroll chaotic attractor, Phys. Lett. A 372, 2008, pp. 387–393.

270. Lichtenberg A.J., Lieberman, M.A. (1983), Regular and stochastic motion. Vol. 38. Springer Science & Business Media. 1983.

271. Likins P.W. (1986), Spacecraft Attitude Dynamics and Control - A Personal Perspective on Early Developments, J. Guidance Control Dyn. Vol. 9, No. 2, 1986, pp. 129-134.

272. Likins P.W. (1967), Attitude Stability Criteria for Dual Spin Spacecraft, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 4, No. 12, 1967, pp. 1638-1643.

273. Lin Yiing-Yuh, Wang Chin-Tzuo (2014), Detumbling of a rigid spacecraft via torque wheel assisted gyroscopic motion, Acta Astronautica 93, 2014, pp. 1–12.

274. Linz S.J., Sprott J.C. (1999) Elementary chaotic flow, Phys. Lett. A 259, 1999, pp. 240-245.

275. Li-Qun Chen, Yan-Zhu Liu (2002), Chaotic attitude motion of a magnetic rigid spacecraft and its control, International Journal of Non-Linear Mechanics 37, 2002, pp. 493–504.

276. Liu W.B., Chen G.R. (2003) A new chaotic system and its generation, Int. J. Bifurcation and Chaos 12, 2003, pp. 261-267.

277. Liu W.B., Chen G.R. (2004), "Can a threedimensional smooth autonomous quadratic chaotic system generate a single four scroll attractor?" Int.J. Bifurcation and Chaos 14, 2004, pp.1395–1403.

278. Liu Y.Z., Yu H.J., Chen L.Q. (2004), Chaotic attitude motion and its control of spacecraft in elliptic orbit and geomagnetic field. Acta Astronautica, 55(3-9), 2004, pp. 487-494.

279. Lofaro T. (1997) A model of the dynamics of the Newton-Leipnik attractor, Int. J. Bifurcation and Chaos 7, 1997, pp. 2723-2733.

280. Longman R.W. (1971), Gravity-gradient stabilization of gyrostat satellites with rotor axes in principal planes. Celestial mechanics, 3(2), 1971, pp. 169-188.

281. Longman R.W. (1973), Stable tumbling motions of a dual-spin satellite subject to gravitational torques. AIAA Journal, 11(7), 1973, pp. 916-921.

282. Lorenz E.N. (1963), Deterministic nonperiodic flow, J. Atmos. Sci. 20, 1963, pp.130–141.

283. Lovera M., Astolfi A. (2004), Spacecraft attitude control using magnetic actuators, Automatica 40, 2004, pp. 1405 – 1414.

284. Lü J., G. Chen (2004), A new chaotic system and beyond: the generalized Lorenz-like system, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 14, No. 5, 2004, pp. 1507-1537.

285. Markeev A.P., Bardin B.S. (2003), On the stability of planar oscillations and rotations of a satellite in a circular orbit // Celest. Mech. and Dynam. Astronomy. V.85 (1), 2003, pp. 51-66.

286. Mazzini L. (2016), Sensors and Actuators Technologies. In Flexible Spacecraft Dynamics, Control and Guidance (pp. 289-324), Springer International Publishing. 2016.

287. Meechan P.A., Asokanthan S.F. (2002), Control of chaotic instabilities in a spinning spacecraft with dissipation using Lyapunov's method, Chaos, Solitons and Fractals 13, 2002, pp. 1857-1869.

288. Meng Y., Hao R., Chen Q. (2014), Attitude stability analysis of a dual-spin spacecraft in halo orbits, Acta Astronautica 99, 2014, pp. 318–329.

289. Mingori D.L. (1969), Effects of Energy Dissipation on the Attitude Stability of Dual-Spin Satellites, AIAA Journal, Vol. 7, No. 1, 1969, pp. 20-27.

290. Moiseev N.N., Rumjancev V.V. (1968), Dynamic Stability of Bodies Containing Fluid. Berlin-Heidelberg-New York. 1968.

291. Moser J. (1973), Stable and Random Motions in Dynamical Systems, Princeton Univ. Press, Princeton. 1973.

292. NASA/TM-2006-214137 (2006). Solar Sentinels: Report of the Science and

Technology Definition Team, 2006, 176p. (https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20090024212.pdf).

293. Nazari M., Butcher E.A. (2014), On the stability and bifurcation analysis of dual-spin spacecraft, Acta Astronautica 93, 2014, pp.162–175.

294. Or A.C. (1998), Chaotic Motions of a Dual-Spin Body, Transactions of the ASME, Vol.65, 1998, pp. 150-156.

295. Or A.C. (1998), Dynamics of an Asymmetric Gyrostat, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.21, No.3, 1998, pp. 416-420.

296. Oshemkov A.A., Ryabov P.E., Sokolov S.V. (2017). Explicit determination of certain periodic motions of a generalized two-field gyrostat. Russian Journal of Mathematical Physics, 24(4), 2017, pp. 517-525.

297. Ovchinnikov M.Yu., Roldugin D.S. (2015), Dual-spin satellite motion in magnetic and gravitational fields. Keldysh Institute Preprints, (22), 20. 2015.

298. Ovchinnikov M.Yu., Roldugin D.S., Penkov V.I. (2015), Three-axis active magnetic attitude control asymptotical study. Acta Astronautica, 110, 2015, pp.279-286.

299. Parker T.S., Chua L.O. (1989), Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems, Springer, Berlin. 1989.

300. Pecora L.M., Carroll T.L., Johnson G.A., Mar D.J. (1997), Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications. Chaos 7 (4), 1997, pp. 520-543.

301. Peng J., Liu Y. (2000), Chaotic motion of a gyrostat with asymmetric rotor, International Journal of Non-Linear Mechanics, Volume 35, Issue 3, 2000, pp. 431-437.

302. Poincaré H. (1899), Les Methodes Nouvelles de La Mécanique Celeste, Vols. 1-3 (Gauthier Villars, Paris), 1899.

303. Rauschenbach B.V., Ovchinnikov M.Yu., McKenna Lawlor S. (2003), Essential Spaceflight Dynamics and Magnetospherics. Kluwer & Microcosm Publ, 2003. 416 p.

304. Roberson R.E. (1971), The equivalence of two classical problems of free spinning gyrostats. Journal of Applied Mechanics, 38(3), 1971, pp.707-708.

305. Rogers A.Q., R.A. Summers (2010), Creating Capable Nanosatellites for Critical Space Missions //JOHNS HOPKINS APL TECHNICAL DIGEST, VOLUME 29, NUMBER 3, 2010, pp. 283-288.

306. Roldugin D.S., Testani P. (2014), Spin-stabilized satellite magnetic attitude control scheme without initial detumbling. Acta Astronautica, 94(1), 2014, pp. 446-454.

307. Sandfry R.A., Hall C.D. (2007), Bifurcations of relative equilibria of an oblate gyrostat with a discrete damper, Nonlinear Dyn 48, 2007, pp. 319–329.

308. Santos L.F., Melicio R., Silva A. (2018). Gyrostat Dynamics on a Circular Orbit: General Case of Equilibria Bifurcation and Analytical Expressions. In 2018 International Symposium on Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion

(SPEEDAM) (pp. 1084-1088). IEEE. 2018.

309. Sarychev V.A., Mirer S.A. (2001), Relative equilibria of a gyrostat satellite with internal angular momentum along a principal axis, Acta Astronautica, Vol. 49, No. 11, 2001, pp. 641– 644.

310. Sarychev V.A., Mirer S.A., Isakov A.V. (1981), Dual-spin satellites with gyro-damping, Acta Astronautica, Volume 9, Issue 5, 1981, pp. 285–289.

311. Seo In-Ho, Leeghim Henzeh, Bang Hyochoong (2008), Nonlinear momentum transfer control of a gyrostat with a discrete damper using neural networks, Acta Astronautica 62, 2008, pp. 357 – 373.

312. Serret J.A. (1866), Mémoire sur l’emploi de la méthode de la variation des arbitraires dans la théorie des mouvements de rotation. Mémoires de l’Academie des Sciences de Paris, Vol. 55, 1866, pp. 585-616.

313. Shigehara M. (1972), Geomagnetic attitude control of an axisymmetric spinning satellite, J. Spacecr. Rockets 9(6), 1972, pp. 391–398.

314. Shirazi K.H., Ghaffari-Saadat M.H. (2004), Chaotic motion in a class of asymmetrical Kelvin type gyrostat satellite, International Journal of Non-Linear Mechanics, Volume 39, Issue 5, 2004, pp. 785-793.

315. Shrivastava S. K., Modi V. J. (1983), Satellite attitude dynamics and control in the presence of environmental torques-a brief survey. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 6(6), 1983, pp. 461-471.

316. Silani E., Lovera M. (2005), Magnetic spacecraft attitude control: a survey and some new results, Control Engineering Practice 13, 2005, pp. 357–371.

317. Slavinskis A., Kvell U., Kulu E., Sünter I., Kuuste H., Lätt S., Voormansik K., Noorma M. (2014), High spin rate magnetic controller for nanosatellites, Acta Astronautica 95, 2014, pp. 218–226.

318. Sprott J.C. (2003), Chaos and time-series analysis. Vol. 69. Oxford: Oxford University Press. 2003.

319. Stekloff V.A. (1902), Remarque sur un problem de Clebsch sur le movement d’un corps solide dans un liquid en sur le probleme de M. de Brun. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, v. 135, 1902, pp.526-528.

320. Stickler A. Craig, Alfriend K.T. (1976), Elementary Magnetic Attitude Control System, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 13, No. 5 , 1976, pp. 282-287.

321. Strogatz S.H. (2014), Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. Westview press. 2014.

322. Tabor M. (1989), Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics: An Introduction. Wiley, John & Sons, New York. 1989.

323. Thompson J.M.T., Stewart H.B. (2002), Nonlinear dynamics and chaos. John Wiley & Sons. 2002.

324. Thomson W. (1877), “On the precessional motion of a liquid,” Nature London 15, 1877, pp. 297–298.

325. Tikhonov A.A., Tkhai V.N. (2016), Symmetric oscillations of charged gyrostat in weakly elliptical orbit with small inclination. Nonlinear Dynamics, 85(3), 2016, pp. 1919-1927.

326. Tong X., Rimrott F.P.J. (1993), Chaotic attitude motion of gyrostat satellites in a central force field. Nonlinear Dynamics, 4(3), 1993, pp. 269-278.

327. Tong X., Tabarrok B., Rimrott F.P.J. (1995), Chaotic motion of an asymmetric gyrostat in the gravitational field, International Journal of Non-Linear Mechanics, Volume 30, Issue 3, 1995, pp.191–203.

328. Vera J.A. (2013), The gyrostat with a fixed point in a Newtonian force field: Relative equilibria and stability. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 401(2), 2013, pp. 836-849.

329. Volterra V. (1899), Sur la théorie des variations des latitudes. Acta Math. 22. 1899.

330. Wang Z., Sun Y., van Wyk B. J., Qi G. & van Wyk M. A. (2009), A 3-D four-wing attractor and its analysis, Brazilian J. Phys. 39, 2009, pp. 547– 553.

331. Wang Z., Wu H. (2018). Stabilization in finite time for fractional-order hyperchaotic electromechanical gyrostat systems. Mechanical Systems and Signal Processing, 111, 2018, pp. 628-642.

332. Wangerin A. (1889), Über die bewegung miteinander verbundener körper, Universitäts-Schrift Halle. 1889.

333. Wiggins S. (1988), Global Bifurcations and Chaos : Analytical Methods (Applied mathematical sciences : vol. 73), Springer-Verlag. 1988.

334. Wiggins S. (1990), Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. Springer-Verlag. 1990.

335. Wiggins S. (1992), Chaotic Transport in Dynamical Systems. Springer-Verlag. 1992.

336. Wiggins S. (2003), Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. Vol. 2. Springer Science & Business Media. 2003.

337. Wiggins S., Shaw S.W. (1988), Chaos and Three-Dimentional Horseshoes in Slowly Varying Oscillators, Journal of Applied Mechanics, Vol.55, 1988, pp. 959-968.

338. Wittenburg J. (1975), Beitrage zur Dynamik von Gyrostaten.. *Accademia* Nazionale dei Lincei, Quadern N., 217: 1–187. 1975.

339. Wittenburg J. (1977), Dynamics of Systems of Rigid Bodies. Stuttgart: Teubner. 1977.

340. Xie J., He S. H., Liu Z. H., Chen Y. (2017), On Application Melnikov Method to Detecting the Edge of Chaos for a Micro-Cantilever. In “New Advances in Mechanisms,

Mechanical Transmissions and Robotics", pp. 155-163. Springer International Publishing. 2017.

341. Yan-Zhu Liua, Hong-Jie Yu, Li-Qun Chen (2004), Chaotic attitude motion and its control of spacecraft in elliptic orbit and geomagnetic field. Acta Astronautica, 55, 2004, pp. 487-494.

342. Yehia H.M. (1983), On the reduction of the order of equations of motion of gyrostat in an axisymmetric field. Journal de Mecanique Theorique et Appliquee, 2, 1983, pp. 451-462.

343. Yehia H.M. (2017). Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields. Journal of the Egyptian Mathematical Society, 25(2), 2017, pp. 216-219.

344. Zavoli A., Giulietti F., Avanzini G., Matteis G.D. (2016), Spacecraft dynamics under the action of Y-dot magnetic control law. Acta Astronautica 122, 2016, pp. 146-158.

345. Zhou L., Chen Y., Chen F. (2009), Stability and chaos of a damped satellite partially filled with liquid, Acta Astronautica 65, 2009, pp. 1628-1638.

346. Zhou Kaixing, et al. (2017), Magnetic attitude control for Earth-pointing satellites in the presence of gravity gradient. Aerospace Science and Technology 60, 2017, pp. 115-123.

347. Zimmermann K., Zeidis I., Bolotnik N., Pivovarov M. (2009). Dynamics of a two-module vibration-driven system moving along a rough horizontal plane. Multibody System Dynamics, 22(2), 2009, pp. 199-219.

348. Zwölfer A., Bischof G. (2018). Modelling and analysis of a gyrostat elastically attached to a vehicle. Vehicle System Dynamics, 2018, pp. 1-26.