

На правах рукописи

Мещерякова Альмира Рифовна

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ И НАКОПЛЕНИЕ УСТАЛОСТНЫХ
ПОВРЕЖДЕНИЙ ПРИ КАЧЕНИИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Специальность 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН)

Научный руководитель: **Горячева Ирина Георгиевна**,
академик РАН, д.ф.-м.н., профессор,
заведующий лабораторией трибологии
ИПМех РАН

Официальные оппоненты: **Суворова Татьяна Виссарионовна**,
доцент, д.ф.-м.н., профессор кафедры высшей
математики ФГБОУ ВО «Ростовский
государственный университет путей
сообщения»

Федотенков Григорий Валерьевич,
к.ф.-м.н., доцент кафедры сопротивления
материалов, динамики и прочности машин
ФГБОУ ВО «Московский авиационный
институт (национальный исследовательский
университет)»;

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Тверской государственный
технический университет»

Защита состоится 23 сентября 2021 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 002.240.01 на базе ИПМех РАН по адресу: просп. Вернадского 101, корп. 1, Москва.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИПМех РАН
<http://www.ipmnet.ru/diss/diss/>

Автореферат разослан « ____ » _____ 2021 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 002.240.01

к.ф.-м.н.

Е.Я. Сысоева

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Проблема изучения механизмов возникновения сопротивления при качении деформируемых тел является приоритетным направлением исследований в области механики контактных взаимодействий, ее актуальность связана с широким распространением в технике трибосопряжений, работающих в условиях контакта качения, например, система «колесо-рельс», подшипники качения, различные транспортные механизмы.

На основании многочисленных теоретических и экспериментальных исследований установлено, что основными причинами возникновения силы сопротивления при качении являются частичное проскальзывание поверхностей катящегося тела и основания в области контактного взаимодействия, несовершенная упругость контактирующих тел, а также силы молекулярного взаимодействия.

Теория существования подобластей сцепления и проскальзывания в области контакта катящихся деформируемых тел впервые была построена Рейнольдсом О. (Reynolds O., 1875) и Хизкоутом Г. (Heathcote H.L., 1920). Моделирование этого явления привело к постановке контактных задач с неоднородными граничными условиями в области контактного взаимодействия (равенство скоростей перемещений в подобластях сцепления и соотношение нормальных и касательных контактных напряжений в соответствии с законом трения в подобластях проскальзывания) и необходимости разработки методов их решения, в том числе определения границ подобластей сцепления и проскальзывания в зависимости от свойств материалов, приложенной нагрузки, величины относительного проскальзывания и коэффициента трения скольжения.

Задача качения упругих тел решена в плоской постановке для одинаковых материалов ролика и основания (Carter F.W., 1926; Fromm H., 1927), а также без ограничения на упругие свойства катящихся тел (Моссаковский В.И., 1959). Решение Картера Ф. было расширено на пространственный случай с помощью

метода полос (Haines D.J., Ollerton E., 1963). Результаты моделирования были подтверждены экспериментами Джонсона К. (Johnson K.L., 1958). Ишлинский А.Ю. (1938) построил модели качения жёсткого цилиндра по основанию, представленному в виде системы упругих стержней, которые отклонялись в сторону и изменяли свою высоту пропорционально действующим на них силам. Численное решение задачи качения упругих тел в пространственной постановке с учётом проскальзывания и верчения, в основе которого лежит вариационный метод, получено в работах Калкера Й. (Kalker J.J., 1990), Гольдштейна Р.В. (1982).

Обоснование межмолекулярного взаимодействия как одного из источников силы сопротивления качению приведено в работе Томлинсона Дж. (Tomlinson G.A., 1929). Контактные задачи качения с учётом адгезии изучались в работах Кендалла К. (Kendall K., 1975), Горячевой И.Г. и Маховской Ю.Ю. (2007), Попова В.Л. (2020).

Эксперименты по качению вязкоупругих тел (Tabor D., 1952; Greenwood J.A., 1981; Flom D.G., 1960) показали, что несовершенная упругость реальных материалов также является одним из источников сопротивления качению. Моделирование совместного эффекта несовершенной упругости материалов и относительного проскальзывания при качении жёсткого ролика по вязкоупругому основанию проводилось в работах Ишлинского А.Ю. (1938), Хантера С. (Hunter S.C., 1961), Морланда Л. (Morland L.W., 1962), Персона Б. (Persson B.N.J., 2001). Горячевой И.Г. (1973) разработан метод решения контактных задач в плоской постановке о качении вязкоупругих тел из одинаковых материалов. Большое количество работ (Oden J.T., Lin T.L., 1986; Padovan J., 1987; Nackenhurst U., 1993; Nasdala L., 1998; Carbone G., 2013; Koumi K.E., 2015) посвящено развитию численных методов решения задачи качения вязкоупругих тел на основе методов граничных и конечных элементов.

Среди исследований, посвящённых трению качения, можно отдельно выделить задачи о качении тел с учётом тонкого промежуточного слоя на поверхности катания. Результаты подобных исследований применяются на

практике при моделировании контактного взаимодействия и изнашивания подшипников качения и других трибосопряжений с контактом качения. Задача о качении упругого цилиндра по упругому основанию, покрытому вязкоупругим слоем, решена аналитически Горячевой И.Г. (1995). Широкое распространение получили алгоритмы численного расчёта контактных характеристик в задачах качения упругих тел при наличии и отсутствии промежуточного слоя: FASTSIM и CONTACT, построенные Калкером Й. (Kalker J.J., 1990). Для расчёта силы сопротивления качению при наличии вязкоупругих покрытий применяются и другие численные методы, среди которых метод граничных элементов (Zéhil G-P, Gavin H.P., 2013), быстрое преобразование Фурье (Wallace E., Chaise T., Nelias D., 2020). Результаты теоретических и экспериментальных исследований трения качения при наличии третьего тела используются для управления процессом фрикционного взаимодействия, в частности, в системе «колесо-рельс» в условиях применения модификаторов трения. Основной задачей модификаторов трения является уменьшение износа контактирующих поверхностей (Eadie D.T., Kalousek J., Chiddick K., 2002), снижение шума и вибраций (Matsumoto A., 2002; Fries R., Urban C., 2011; Meehan P.A., 2019), оптимизация силы тяги при разных условиях взаимодействия (Meierhofer A., 2014; Galas R., 2017). Существующие модели контакта «колесо-рельс» при наличии третьего тела постоянно совершенствуются с целью воспроизведения наблюдаемых в эксперименте контактных характеристик для более широкого диапазона параметров (Vollebregt E.A.H., 2014).

Актуальность данного исследования обусловлена необходимостью развития методов решения контактных задач качения упругих тел с проскальзыванием при наличии тонкого промежуточного слоя и анализа влияния свойств промежуточной среды на контактные характеристики и скорость накопления усталостных повреждений в подповерхностных слоях материалов в условиях трения качения.

Целью диссертационного исследования является разработка методов решения контактных задач о качении жестких и деформируемых тел при

наличии промежуточного слоя с учётом основных механизмов трения (относительное проскальзывание, несовершенная упругость, межмолекулярное взаимодействие), а также анализ влияния свойств промежуточной среды на контактные характеристики, силу трения, распределение внутренних напряжений и скорость накопления усталостных повреждений в поверхностных слоях упругих тел.

Для достижения поставленной цели были сформулированы и решены следующие **задачи**:

- контактная задача в плоской и пространственной постановках о качении жёсткого ролика по вязкоупругому слою, сцепленному с жестким основанием, с учётом относительного продольного проскальзывания и межмолекулярного взаимодействия контактирующих поверхностей;
- контактная задача о качении упругой сферы по упругому полупространству, покрытому тонким вязкоупругим слоем, механические свойства которого в нормальном направлении описываются моделью Винклера, а в касательном направлении – моделью Кельвина;
- контактная задача о качении упругой сферы по вязкоупругому слою, сцепленному с упругим полупространством с учётом трёх составляющих относительного проскальзывания: продольного, бокового и проскальзывания из-за верчения катящегося тела;
- расчет внутренних напряжений в упругом полупространстве в условиях качения с проскальзыванием при наличии вязкоупругого промежуточного слоя и анализ влияния свойств промежуточного слоя на скорость накопления контактно-усталостных повреждений в упругом полупространстве.

Научная новизна работы состоит в следующем:

- разработка метода решения и анализ контактных характеристик в задаче о качении с проскальзыванием жёсткой сферы по жёсткому полупространству, покрытому вязкоупругим слоем, с учётом

- межмолекулярного взаимодействия поверхностей (совместный учёт всех трёх составляющих сопротивления при качении);
- разработка алгоритма и программы расчёта контактных характеристик (распределение контактных напряжений, расположение зон сцепления и проскальзывания) и силы сопротивления при взаимодействии упругих тел в условиях трения качения с учётом свойств промежуточного вязкоупругого слоя;
 - анализ влияния толщины и механических характеристик промежуточного слоя, описываемого моделями Винклера, Максвелла и Кельвина, а также относительного проскальзывания, скорости качения и радиуса ролика на характеристики контактного взаимодействия (размер и положение области контакта, распределение контактных напряжений) и силу трения;
 - алгоритм и программа расчёта скорости накопления контактно-усталостных повреждений в упругом основании при циклическом качении упругой сферы по вязкоупругому слою, сцепленному с упругим полупространством.

Достоверность результатов исследования обеспечена:

- сравнением решения контактных задач о качении с проскальзыванием в отсутствие и при наличии промежуточного слоя с полученными ранее решениями другими методами (аналитические методы, CONTACT, метод конечных элементов);
- использованием при решении задач апробированных численных методов: метод полос, методы численного интегрирования, метод проекции градиента.

Практическая значимость работы

Результаты работы могут использоваться при оценке влияния свойств тонких вязкоупругих промежуточных слоёв на характеристики фрикционного взаимодействия в условиях трения качения и выборе смазочных материалов

(консистентной смазки в подшипниках качения, модификаторов трения, способствующих снижению энергетических потерь в системе «колесо-рельс»).

Методы исследования:

- метод разбиения области контакта на полосы, в каждой из которых решается контактная задача в плоской постановке;
- вариационный метод решения контактной задачи в пространственной постановке;
- методы численного интегрирования.

Положения, выносимые на защиту:

- 1) методы решения контактных задач качения жёстких и упругих тел при наличии промежуточного вязкоупругого слоя;
- 2) методика анализа влияния геометрических параметров модели (толщина слоя, радиус ролика), свойств материала слоя (времена последействия и релаксации, модуль упругости), скорости относительного проскальзывания в продольном и поперечном направлениях и скорости качения ролика на расположение подобластей сцепления и проскальзывания в области контакта, распределение контактных напряжений и силу трения;
- 3) алгоритм расчёта компонент напряжений в упругом полупространстве и скорости накопления контактно-усталостных повреждений в условиях трения качения при наличии промежуточного слоя.

Апробация работы

Основные результаты работы были представлены на 9 международных и 10 всероссийских конференциях:

- 1) 57-я всероссийская научная конференция МФТИ с международным участием, посвященная 120-летию со дня рождения П.Л. Капицы, Москва, 24-29 ноября 2014;

- 2) XXVII международная инновационно-ориентированная конференция молодых учёных и студентов (МИКМУС-2015), Москва, 2-4 декабря 2015;
- 3) 58-я всероссийская научная конференция МФТИ с международным участием, Москва, 23-28 ноября 2015;
- 4) 59-я всероссийская научная конференция МФТИ с международным участием, 21-26 ноября 2016;
- 5) XLIII международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения», Москва, 5-20 апреля 2017;
- 6) научная конференция «Ломоносовские чтения – 2018», секция «Механика деформируемого твёрдого тела», Москва, 16-25 апреля 2018;
- 7) XLIV международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения», Москва, 17-20 апреля 2018;
- 8) 11th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems, Дельфт, Нидерланды, 24-27 сентября 2018;
- 9) International Conference on Engineering Tribology and Applied Technology (ICETAT) 2018, Тайбэй, Тайвань, 16-18 ноября 2018;
- 10) XLV международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения – 2019», Москва, 16-19 апреля 2019;
- 11) XII всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, 19-24 августа 2019;
- 12) 62-я всероссийская научная конференция МФТИ, 18-23 ноября 2019;
- 13) XXXI Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС - 2019), Москва, 4-6 декабря 2019;
- 14) научная конференция «Ломоносовские чтения – 2019», секция «Механика деформируемого твёрдого тела», Москва, 15-25 апреля 2019;
- 15) XLVI международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения», онлайн, 13-17 апреля 2020;
- 16) The International Summer School-Conference “Advanced Problems in Mechanics - 2020”, онлайн, 21-26 июня 2020;

- 17) научная конференция «Ломоносовские чтения – 2020», секция «Механика деформируемого твердого тела», онлайн, 30 октября 2020;
- 18) 63-я всероссийская научная конференция МФТИ, онлайн, 23-29 ноября 2020;
- 19) V всероссийский форум «Наука Будущего – Наука Молодых», онлайн, 30 ноября – 3 декабря 2020.

Научные исследования, проведенные в диссертационной работе, осуществлялись в рамках грантов РФФИ: 17-20-01147, 17-58-52030, 18-31-00441, 19-31-90015, 20-01-00400; гранта РНФ 14-29-00198 и программы Президиума РАН I.16 «Экспериментально-теоретическое изучение влияния геометрических и механических свойств поверхности и тонких поверхностных слоев на фрикционные характеристики и изнашивание элементов пар трения».

Публикации

Основные результаты диссертации изложены в работах [1-19], изданных в периодических научных изданиях, сборниках материалов и тезисах докладов международных и всероссийских конференций. Список публикаций приведен в конце автореферата, среди которых 5 статей [1-5] напечатаны в журналах, входящих в перечень ВАК РФ и/или индексируемых в Web of Science, Scopus, в том числе статьи [3, 5] опубликованы в высокорейтинговых международных журналах. Получено одно свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Программа расчёта контактных характеристик в условиях качения упругих тел с учётом свойств промежуточного вязкоупругого слоя» [21].

Личный вклад автора

В работах [1-3, 5] автором разработан алгоритм решения контактных задач в условиях трения качения, математические постановки которых были предложены научным руководителем Горячевой И.Г. Все необходимые расчёты были проведены автором самостоятельно, полученные результаты обсуждались совместно с Горячевой И.Г. В работе [4] постановка задачи и обсуждение

результатов было выполнено совместно с соавторами, расчёт проводился автором самостоятельно.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Полный объём работы составляет 101 страницу, включая 33 рисунка. Список литературы содержит 144 наименования.

Содержание работы

Во введении сформулированы основные цели и задачи диссертационной работы, обоснованы актуальность и научная новизна исследования. Также представлен обзор современного состояния исследований в области, касающейся темы диссертации.

В **разделе 1.1** рассматривается контактная задача об установившемся качении жёсткой сферы по вязкоупругому слою, сцепленному с жёстким полупространством. Сфера катится по основанию с постоянной линейной скоростью V и угловой скоростью ω (см. рис. 1). Контактная поверхность сферы описывается функцией $f(x, y) = -\frac{x^2 + y^2}{2R}$, где R – радиус сферы.

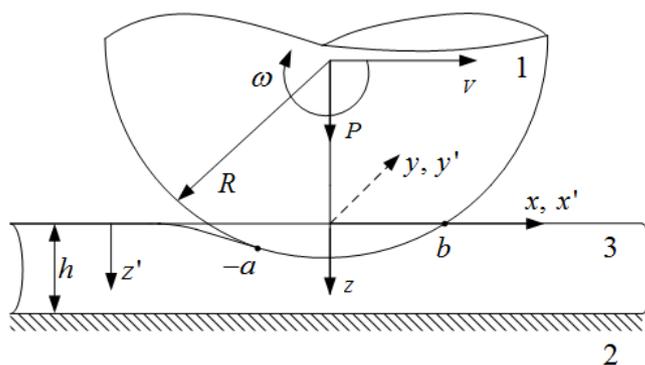


Рисунок 1. Схема качения сферы (1) по полупространству (2), сцепленному с вязкоупругим слоем (3)

Для описания механических характеристик слоя в нормальном и касательном направлениях используется модель Кельвина, которая представляет

собой последовательное соединение пружины и элемента Фойгта и обладает ограниченной ползучестью:

$$w(x', y', t) + T_\varepsilon^{(p)} \frac{\partial w(x', y', t)}{\partial t} = \frac{h}{E_L^{(p)}} \left(p(x', y', t) + T_\sigma^{(p)} \frac{\partial p(x', y', t)}{\partial t} \right), \quad (1)$$

$$u(x', y', t) + T_\varepsilon^{(\tau)} \frac{\partial u(x', y', t)}{\partial t} = \frac{h}{E_L^{(\tau)}} \left(\tau(x', y', t) + T_\sigma^{(\tau)} \frac{\partial \tau(x', y', t)}{\partial t} \right), \quad (2)$$

где $w(x', y', t)$ и $u(x', y', t)$ – нормальное и касательное перемещения вязкоупругого слоя, $T_\varepsilon^{(p)}$, $T_\sigma^{(p)}$ и $T_\varepsilon^{(\tau)}$, $T_\sigma^{(\tau)}$ – времена последствия и релаксации в нормальном и касательном направлениях, $E_L^{(p)}$ и $E_L^{(\tau)}$ – длительные модули упругости в нормальном и касательном направлениях, $p(x', y', t)$ – нормальное напряжение, $\tau(x', y', t)$ – касательное напряжение в области контакта.

Для упрощения постановки задачи предполагается, что длительные модули упругости материала вязкоупругого слоя в касательном и нормальном направлениях одинаковыми: $E_L^{(p)} = E_L^{(\tau)} = E_L$.

В подвижной системе координат соотношения (4) и (5) принимают следующий вид:

$$w(x, y) - T_\varepsilon^{(p)} V \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = \frac{h}{E_L} \left(p(x, y) - T_\sigma^{(p)} V \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} \right), \quad (3)$$

$$u(x, y) - T_\varepsilon^{(\tau)} V \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{h}{E_L} \left(\tau(x, y) - T_\sigma^{(\tau)} V \frac{\partial \tau(x, y)}{\partial x} \right). \quad (4)$$

В условиях качения сферы по основанию, которое включает в себя вязкоупругий слой, область контакта разбивается на подобласти сцепления Ω_A и проскальзывания Ω_S . В подобласти проскальзывания абсолютное значение касательного напряжения связано с нормальным давлением по закону Кулона – Амонтона, и его направление противоположно скорости проскальзывания:

$$|\tau(x, y)| = \mu p(x, y), \quad (5)$$

где μ – коэффициент трения скольжения. В случае полного скольжения равенство (5) выполняется на всей области контакта сферы и основания.

В подобласти сцепления Ω_A имеет место следующее неравенство:

$$|\tau(x, y)| \leq \mu p(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_A. \quad (6)$$

Также в данной подобласти равны скорости контактирующих точек сферы и вязкоупругого слоя. В системе координат (x', y', z') для касательных смещений точек сферы и основания выполняется соотношение:

$$\frac{du(x', y', t)}{dt} = V - \omega R + \frac{du_1(x', y', t)}{dt}, \quad z = 0, \quad (x', y') \in \Omega'_A. \quad (7)$$

После перехода в подвижную систему координат уравнение (7) принимает следующий вид:

$$-\frac{du_1(x, y)}{dx} + \frac{du(x, y)}{dx} = \Delta, \quad z = 0, \quad (x, y) \in \Omega_A. \quad (8)$$

Сфера и полупространство в данной постановке считаются жёсткими, поэтому условие для производных касательных перемещений точек вязкоупругого слоя имеет вид:

$$\frac{du(x, y)}{dx} = \Delta, \quad z = 0, \quad (x, y) \in \Omega_A, \quad (9)$$

$$\Delta = \frac{\omega R - V}{V}. \quad (10)$$

где Δ – величина продольного относительного проскальзывания.

Для всех точек из области контакта выполняется соотношение:

$$w(x, y) = D - \frac{x^2 + y^2}{2R}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (11)$$

где R – радиус сферы, D – максимальная глубина внедрения точек сферы в основание.

Вязкоупругий слой считается сцепленным с полуплоскостью, поэтому на границе раздела $y = h$ должны быть выполнены следующие условия:

$$u(x, y, h^-) = u(x, y, h^+), \quad w(x, y, h^-) = w(x, y, h^+), \quad (12)$$

$$p(x, y, h^-) = p(x, y, h^+), \quad \tau(x, y, h^-) = \tau(x, y, h^+), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (13)$$

Для расчёта нормального давления и касательного напряжения на площадке контакта применяется метод полос. Благодаря разбиению области контакта на полосы, ориентированные вдоль движения катящегося тела, вместо исходной пространственной задачи решается система плоских задач.

В безразмерном виде характеристики промежуточного слоя описываются следующими параметрами:

$$\alpha_T^{(p)} = \frac{T_\varepsilon^{(p)}}{T_\sigma^{(p)}}, \quad \zeta^{(p)} = \frac{T_\sigma^{(p)}V}{R}, \quad \alpha_T^{(\tau)} = \frac{T_\varepsilon^{(\tau)}}{T_\sigma^{(\tau)}}, \quad \zeta^{(\tau)} = \frac{T_\sigma^{(\tau)}V}{R}. \quad (14)$$

Разработанный алгоритм решения был использован для расчёта распределения нормальных и касательных контактных напряжений при качении сферы по вязкоупругому слою с различными значениями отношения времён последействия и релаксации. В силу симметрии задачи относительно оси абсцисс решение определялось только для половины области контакта. Проведён анализ влияния коэффициента трения, механических характеристик слоя и величины относительного проскальзывания на распределения касательного напряжения и расположение зон сцепления и проскальзывания в области контакта.

На рис. 2 показаны распределения безразмерного касательного напряжения в области контакта при различных значениях относительного проскальзывания, а также случай полного проскальзывания, отмеченный на рисунке синим цветом. Рассматривается частный случай равенства модулей упругости материала вязкоупругого слоя в нормальном и касательном направлениях. Полученные результаты показывают, что при уменьшении величины относительного проскальзывания увеличивается зона сцепления на области контакта и растёт максимальное значение касательного напряжения.

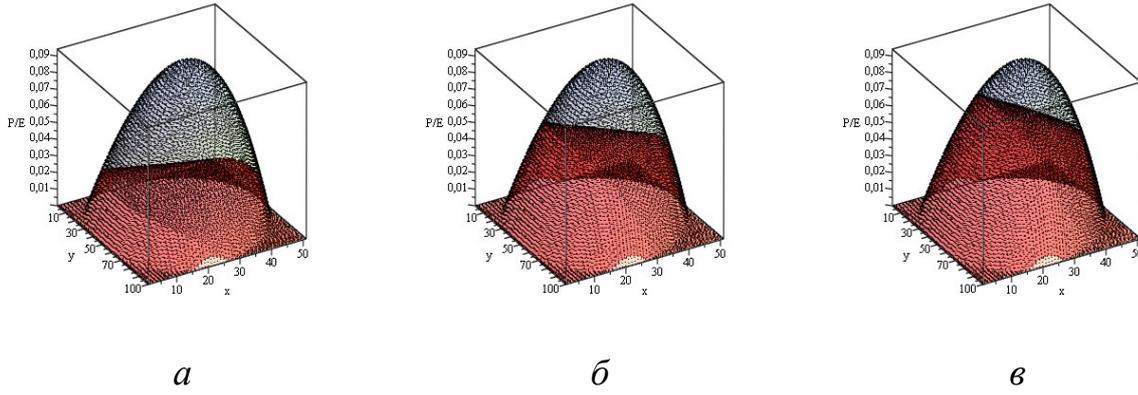


Рисунок 2. Распределение касательного напряжения в области контакта при $D/h = 0,1$, $h/R = 0,02$, $\zeta^{(p)} = \zeta^{(\tau)} = 0,05$, $\mu = 0,3$, $\alpha_T^{(p)} = \alpha_T^{(\tau)} = 5$ и $\Delta = 0,002$ (а), $\Delta = 0,005$ (б), $\Delta = 0,007$ (в)

На рис. 3 приведена зависимость отношения касательной силы к нагрузке от абсолютной величины относительного проскальзывания при разных значениях параметров $\alpha_T^{(p)}$, $\alpha_T^{(\tau)}$ и μ .

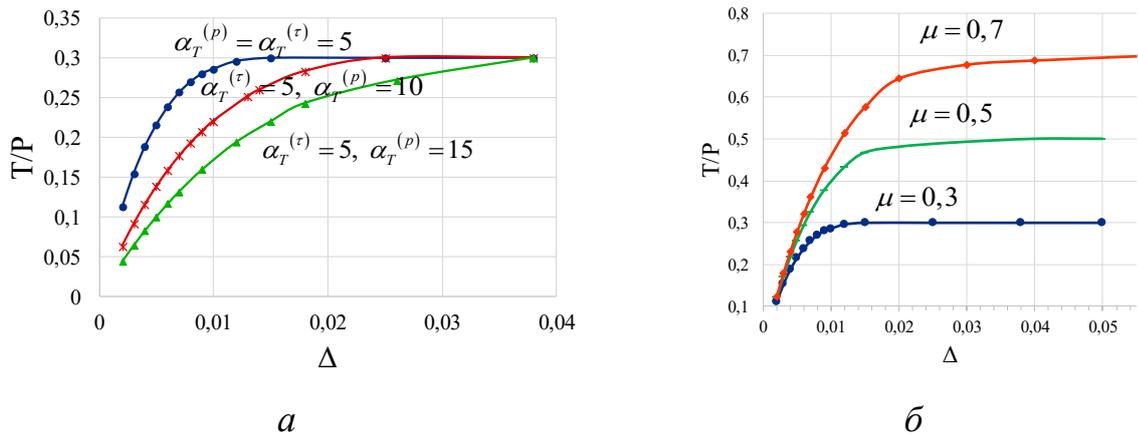


Рисунок 3. Зависимость отношения касательной силы к нагрузке от величины относительного проскальзывания при $D/h = 0,1$, $h/R = 0,02$, $\zeta^{(p)} = \zeta^{(\tau)} = 0,05$, $\mu = 0,3$ (а) и $\alpha_T^{(p)} = \alpha_T^{(\tau)} = 5$ (б)

В разделе 1.2 рассматривается задача о качении жёсткой сферы радиуса R с постоянной скоростью V по жёсткому полупространству, покрытому вязкоупругим слоем, с учётом межмолекулярного взаимодействия. Механические характеристики слоя описываются моделью Кельвина (3, 4), причём параметры вязкоупругого слоя в касательном и нормальном

направлениях считаются одинаковыми: $E_L^{(p)} = E_L^{(\tau)} = E_L$, $\zeta^{(p)} = \zeta^{(\tau)} = \zeta$, $\alpha_T^{(p)} = \alpha_T^{(\tau)} = \alpha_T$. Схема качения сферы показана на рис. 4.

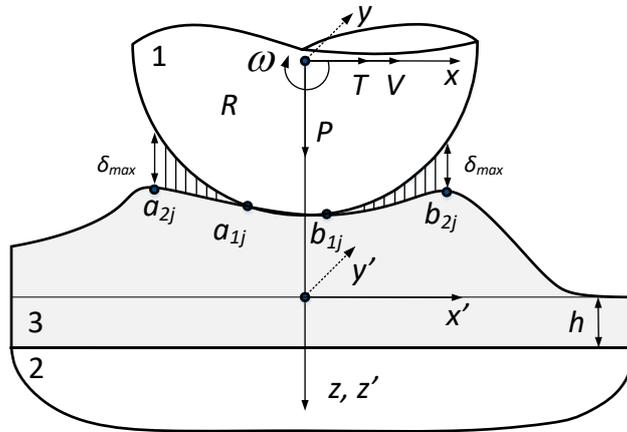


Рисунок 4. Схема качения сферы с учётом адгезионного взаимодействия

Вне области контакта и адгезионного взаимодействия нормальное напряжение на поверхности вязкоупругого слоя считается равным 0. В зонах на входе и выходе из области контакта между поверхностями действуют силы адгезионного притяжения. Для описания межмолекулярного взаимодействия между сферой и вязкоупругим слоем используется потенциал Леннарда-Джонса. Зависимость адгезионного давления на поверхности слоя от величины зазора имеет вид:

$$p_a(\delta) = -\frac{8w_a}{3\delta_0} \left(\left(\frac{\delta_0}{\delta} \right)^3 - \left(\frac{\delta_0}{\delta} \right)^9 \right), \quad (15)$$

где δ_0 – равновесное расстояние между поверхностями, при котором сила взаимодействия равна 0, w_a – удельная работа адгезии:

$$w_a = \int_{\delta_0}^{+\infty} p_a(\delta) d\delta. \quad (16)$$

Расстояние между поверхностью сферы и вязкоупругим слоем $\delta(x, y)$ определяется соотношением:

$$\delta(x, y) = f(x, y) + D + w(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \cup \Omega_{Adh}, \quad (17)$$

где D – максимальная глубина внедрения сферы. В области контакта зазор между поверхностями сферы и слоя считается равным 0.

Задача о качении сферы по вязкоупругому слою с учётом межмолекулярного взаимодействия решается методом полос (см. **первую главу**), где в каждой полосе ищется распределение нормального напряжения в области контакта и адгезионного взаимодействия.

Таким образом, в **первой главе** предложен алгоритм, основанный на методе полос, для определения нормальных и касательных напряжений при качении с проскальзыванием сферы по вязкоупругому слою, механическое поведение которого описывается моделью Кельвина. Определена конфигурация подобластей сцепления и проскальзывания при разных значениях отношения времён последействия и релаксации материала вязкоупругого слоя, числа Деборы, относительного продольного проскальзывания и коэффициента трения скольжения. Установлено, что увеличение коэффициента трения скольжения и величины относительного проскальзывания приводят к росту отношения касательной силы к нагрузке. Получено решение задачи качения сферы по вязкоупругому слою, сцепленному с полупространством, при наличии межмолекулярного взаимодействия. Проведён анализ влияния свойств промежуточного слоя, скорости относительного проскальзывания, параметров потенциала межмолекулярного взаимодействия на конфигурацию области контакта и адгезионного взаимодействия и расположение подобластей сцепления при заданной нагрузке на сферу.

Вторая глава посвящена исследованию качения с проскальзыванием упругой сферы по упругому полупространству, покрытому тонким вязкоупругим слоем. Предполагается, что упругие свойства тела качения и полупространства одинаковы. При качении область контакта считается неизменной, а движение установившимся. Задача рассматривается в подвижной системе координат (O, x, y, z) , связанной с областью контакта. Схема контакта показана на рис. 5.

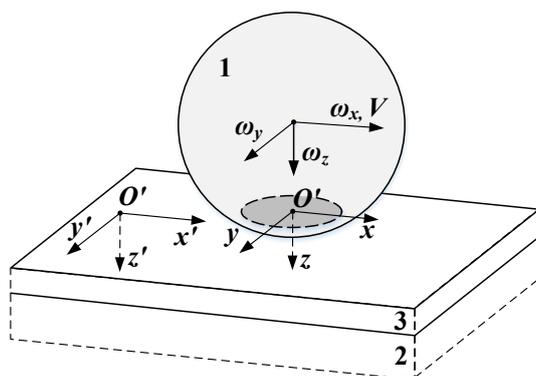


Рисунок 5. Схема качения сферы (1) по упругому полупространству (2), покрытому вязкоупругим слоем (3)

Для описания механического поведения промежуточного слоя используется несколько одномерных моделей вязкоупругости.

В разделе 2.1 податливость слоя в нормальном направлении описывается степенной функцией, а для моделирования механического поведения слоя в касательном направлении используется тело Кельвина. В подвижной системе координат, связь между перемещениями и напряжениями в вязкоупругом слое имеет вид:

$$w^{(3)}(x, y) = h \left[\frac{p(x, y)}{E_3^{(p)}} \right]^{m_w}, \quad (18)$$

$$u(x, y) - T_\varepsilon V \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{h}{E_3^{(\tau)}} \left(\tau(x, y) - T_\sigma V \frac{\partial \tau(x, y)}{\partial x} \right), \quad (19)$$

где $w^{(3)}(x, y)$ – нормальное перемещение вязкоупругого слоя, $p(x, y)$ – нормальное напряжение, $u(x, y)$ – перемещение слоя в касательном направлении, $\tau(x, y)$ – касательное напряжение, h – толщина слоя, m_w – параметр модели слоя ($0,1 \leq m_w \leq 1$, для модели Винклера параметр $m_w = 1$), T_ε, T_σ – времена последействия и релаксации материала вязкоупругого слоя ($T_\varepsilon > T_\sigma$), $E_3^{(p)}$ – модуль упругости материала слоя в нормальном направлении, $E_3^{(\tau)}$ – длительный модуль упругости материала слоя в касательном направлении. В данном разделе для нахождения распределения нормального напряжения используется метод последовательных приближений. Задача

определения касательного напряжения в области контакта решается с помощью метода полос, подробное описание которого приводится в **первой главе**.

В постановке задачи в **разделе 2.2** предполагается, что промежуточный вязкоупругий слой не сопротивляется смятию в нормальном направлении, а его механическое поведение в касательном направлении моделируется с помощью тела Максвелла. В подвижной системе координат соотношение между вектором перемещений $\vec{u}_3(x, y)$ слоя в касательном направлении и вектором касательных напряжений для используемой модели Максвелла имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \vec{u}_3(x, y)}{\partial x} = \frac{h}{E^{(\tau)}} \left(-\frac{\vec{\tau}(x, y)}{VT^{(\tau)}} + \frac{\partial \vec{\tau}(x, y)}{\partial x} \right), \quad (20)$$

где h – толщина вязкоупругого слоя, $E^{(\tau)}$ и $T^{(\tau)}$ – модуль упругости и время релаксации материала слоя.

Предполагается, что в подобласти проскальзывания Ω_s выполняется закон трения Кулона-Амонтона и направление вектора касательного напряжения $\vec{\tau}(x, y)$ противоположно направлению вектора скорости проскальзывания верхнего тела относительно основания $\vec{s}(x, y)$:

$$\vec{\tau}(x, y) = -\mu p(x, y) \frac{\vec{s}(x, y)}{|\vec{s}(x, y)|}, \quad (x, y) \in \Omega_s. \quad (21)$$

Здесь $p(x, y)$ – нормальное напряжение, μ – коэффициент трения скольжения.

В общем случае относительное проскальзывание имеет три составляющие: продольное, боковое и проскальзывание из-за верчения катящегося тела. При стационарном качении компоненты вектора скорости проскальзывания $\vec{s}(x, y)$ катящегося тела относительно основания определяются следующими выражениями:

$$\vec{s}(x, y) = \vec{v} - V \left(\frac{\partial \vec{u}_1(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial \vec{u}_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial \vec{u}_3(x, y)}{\partial x} \right). \quad (22)$$

где

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} V\Delta_x - \omega_z y + \frac{\omega_y x^2}{2R} + \frac{\omega_y y^2}{2R} \\ V\Delta_y + \omega_z x - \frac{\omega_x x^2}{2R} - \frac{\omega_x y^2}{2R} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где $\vec{u}_i(u_{ix}, u_{iy})$, $i = 1, 2, 3$ – касательные перемещения точек сферы, полупространства и слоя соответственно, $\vec{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ – угловая скорость вращения, Δ_x и Δ_y – величины относительного продольного и бокового проскальзывания:

$$\Delta_x = \frac{V - \omega_y R}{V}, \quad \Delta_y = \frac{\omega_x R}{V}. \quad (24)$$

Здесь R – радиус кривизны поверхности катящейся сферы в точке O , V – скорость качения сферы.

В силу сделанных предположений расчёт распределения контактных давлений $p(x, y)$ проводится на основании решения Герца.

Для нахождения касательных контактных напряжений в **разделе 2.2** используется вариационный метод, в котором минимизируется функционал, построенный с учётом граничных условий для напряжений и перемещений в области контактного взаимодействия:

$$F[\vec{\tau}, \vec{s}(\vec{\tau})] = \int_{\Omega} (\mu p(x, y) |\vec{s}(x, y)| - (\vec{\tau}(x, y), \vec{s}(x, y))) dx dy. \quad (25)$$

Введём безразмерные функции и параметры:

$$x_1 = \frac{x}{a}, \quad y_1 = \frac{y}{a}, \quad A = \frac{a}{2R}, \quad p_G = \frac{p_0}{G}, \quad (26)$$

$$p_1(x_1, y_1) = \frac{p(x, y)}{p_0}, \quad \vec{\tau}_1(x_1, y_1) = \frac{\vec{\tau}(x, y)}{\mu p_0}, \quad \vec{s}_1(x_1, y_1) = \frac{\vec{s}(x, y)}{V}, \quad (27)$$

$$\Delta_x = \frac{V - \omega_y R}{V}, \quad \Delta_y = \frac{\omega_x R}{V}, \quad W_z = \frac{\omega_z a}{V}, \quad W_y = \frac{\omega_y a}{V}, \quad (28)$$

где a – радиус области контакта, Δ_x и Δ_y – продольное и боковое относительное проскальзывание.

Для описания характеристик промежуточного слоя используются следующие безразмерные параметры:

$$G_\tau = \frac{G}{E_\tau}, H = \frac{h}{a}, \zeta_\tau = \frac{VT_\tau}{a}. \quad (29)$$

Результаты расчёта контактного касательного напряжения и векторного поля скоростей проскальзывания при качении сферы по полупространству, покрытому вязкоупругим слоем, при различных значениях продольного и бокового проскальзывания и угловой скорости вращения представлены на рис. 6.

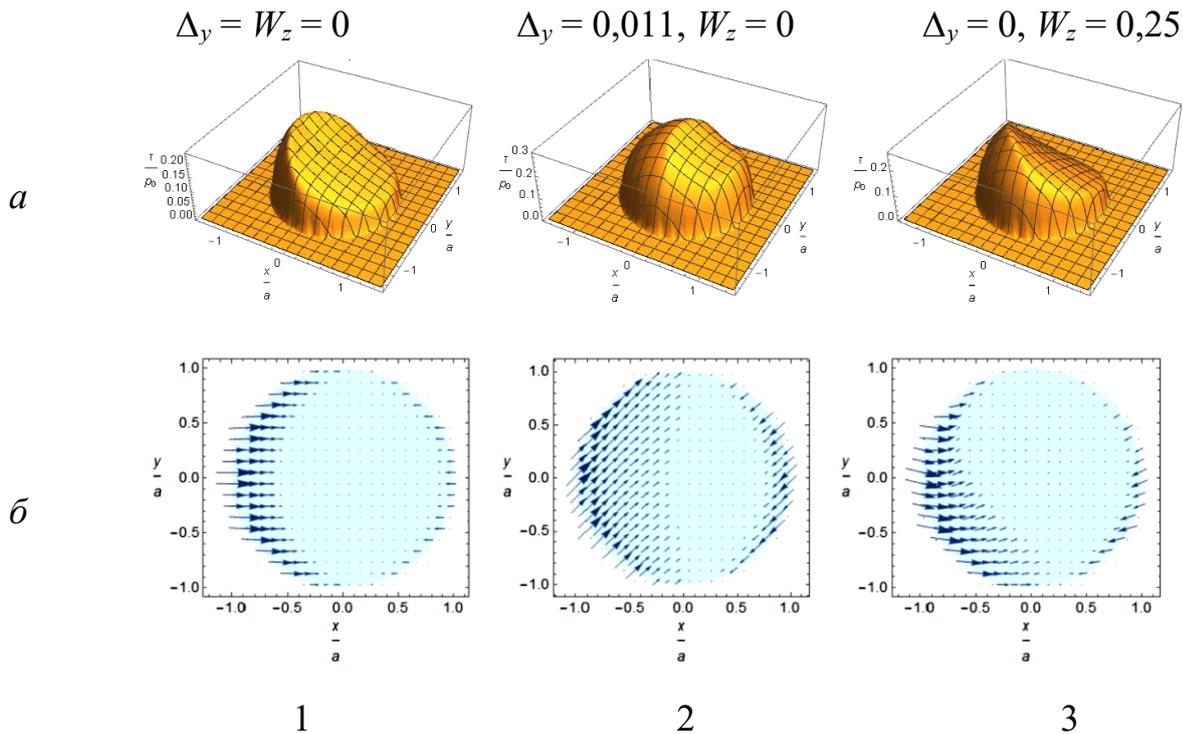


Рисунок 6. Контактное касательное напряжение (а) и векторное поле скоростей проскальзывания (б) при качении сферы по полупространству, покрытому вязкоупругим слоем, при $\Delta_x = 0,011$, $\beta = 5,75$, $\zeta_\tau = 16$

Из проведенных расчетов следует, что на величину и положение областей сцепления и проскальзывания существенным образом влияют значения относительных проскальзываний в продольном и боковом направлении, а также наличие или отсутствие вращения. Сравнение результатов, представленных на рис. 6, а и б показывает, что при наличии бокового относительного проскальзывания меняется направление скоростей проскальзывания, причём расположение подобластей сцепления и проскальзывания остаётся симметричным относительно оси $y = 0$, при этом возрастают максимальные значения касательных контактных напряжений и уменьшается подобласть

сцепления (рис. 6, графики 2). При качении с продольным проскальзыванием и верчением распределение контактного касательного напряжения и расположение подобласти сцепления несимметричны относительно оси $y = 0$ (рис. 6, графики 3).

Зависимость распределения контактного касательного напряжения в сечении $y = 0$ от относительного продольного проскальзывания иллюстрируют графики на рис. 7, где пунктирные линии соответствуют случаю контакта двух упругих тел без промежуточного слоя, а сплошные – качению упругих тел при наличии слоя, характеризуемого заданными значениями параметров α и ζ_τ .

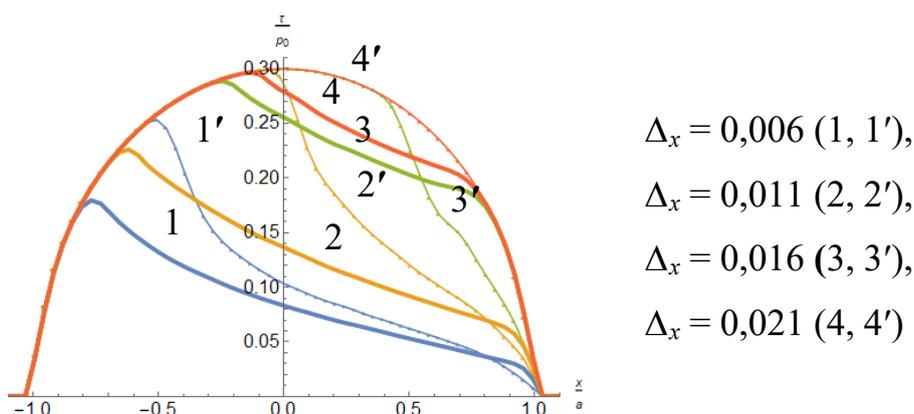


Рисунок 7. Распределение контактного касательного напряжения в сечении $y = 0$ при качении сферы по полупространству, покрытому вязкоупругим слоем, при $\mu = 0,3$, $\Delta_y = W_z = 0$ и $\beta = 5,75$, $\zeta_\tau = 1$; кривые 1'-4' соответствуют качению сферы по полупространству без промежуточного слоя ($\beta = 0$)

Результаты расчетов показывают, что при наличии промежуточного слоя с ростом относительного продольного проскальзывания площадь подобласти сцепления уменьшается, и она смещается к центру области контакта, а к передней границе области контакта по направлению качения ролика примыкает подобласть проскальзывания. При одинаковых значениях относительного продольного проскальзывания наличие слоя приводит к увеличению области сцепления.

Третья глава посвящена расчёту скорости накопления контактно-усталостных повреждений в условиях трения качения при наличии

вязкоупругого поверхностного слоя. Рассматривается циклическое качение упругой сферы по вязкоупругому слою, сцепленному с упругим полупространством. Для расчёта внутренних напряжений в приповерхностных слоях упругого полупространства используются полученные в **разделе 2.2** контактные нормальные и касательные напряжения с учетом сдвиговой податливости промежуточного слоя. Затем в упругом полупространстве определяются места концентрации максимальных касательных напряжений в зависимости от условий взаимодействия и свойств промежуточной среды.

Наибольшие значения максимальных касательных напряжений на фиксированной глубине z_0 определяются их амплитудными значениями в сечении плоскостью $z = z_0$, параллельной поверхности полупространства (22):

$$\tau_{\max}(z_0) = \max_{x,y} \left[\frac{1}{2} (\sigma_1(x, y, z_0) - \sigma_3(x, y, z_0)) \right], \quad (30)$$

где $\sigma_1(x, y, z)$, $\sigma_2(x, y, z)$, $\sigma_3(x, y, z)$ – главные напряжения.

В результате анализа напряжённого состояния упругого полупространства в условиях трения качения упругих тел с одинаковыми упругими постоянными при наличии промежуточного слоя исследовано влияние относительных проскальзываний в продольном и поперечном направлениях, свойств промежуточного слоя и коэффициента трения скольжения на расположение областей концентрации максимальных касательных напряжений в подповерхностных слоях полупространства.

На рис. 8 показаны изолинии максимальных касательных напряжений в сечении $y = 0$ упругого полупространства под катящейся сферой, построенные при наличии промежуточного слоя и разных значениях коэффициента трения скольжения и относительного продольного проскальзывания.

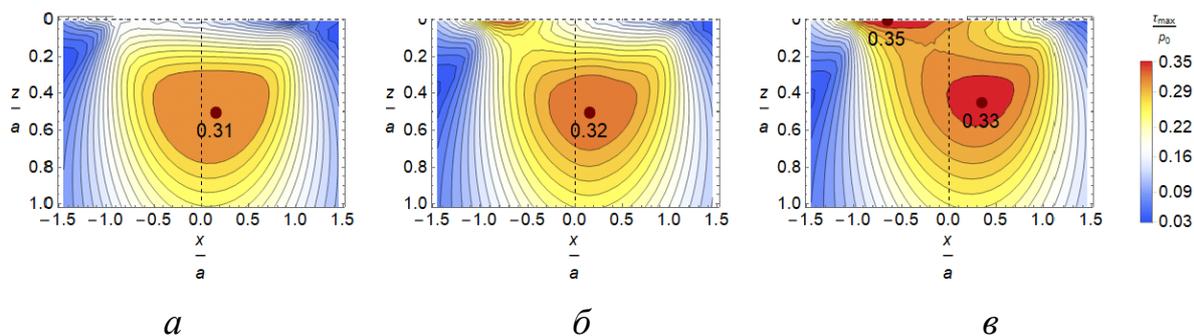


Рисунок 8. Изолинии максимальных касательных напряжений в сечении $y = 0$ полупространства при $\Delta_y = W_z = 0$, $\beta = 5,75$, $\zeta_\tau = 16$ и $\mu = 0,1$, $\Delta_x = 0,011$ (а), $\mu = 0,3$, $\Delta_x = 0,011$ (б), $\mu = 0,3$, $\Delta_x = 0,036$ (в)

В сечении полупространства плоскостью $y = 0$ область контакта находится в промежутке $-1 \leq x \leq 1$. Результаты иллюстрируют наличие локального максимума функции максимальных касательных напряжений в сечении $y = 0$ на некоторой глубине под поверхностью и появление дополнительно поверхностного локального максимума исследуемой функции при увеличении коэффициента трения скольжения (соответственно, графики а и б на рис. 8). Сравнение изолиний напряжений, представленных на рис. 7, б и рис. 7, в показывает, что с ростом относительного продольного проскальзывания имеет место увеличение значений локальных максимумов максимальных касательных напряжений как под поверхностью, так и вблизи поверхности. Увеличение относительного продольного проскальзывания приводит также к смещению места концентрации максимальных касательных напряжений под поверхностью в направлении качения ролика. Изолинии максимального касательного напряжения при $\mu = 0,3$, $\Delta_x = 0,036$, показанные на рис. 8, в, соответствуют случаю полного проскальзывания, когда максимум функции максимальных касательных напряжений на поверхности превышает значение подповерхностного максимума. Результаты вычислений при выбранных значениях остальных параметров задачи показывают, что величина относительного продольного проскальзывания слабо влияет на значение подповерхностного максимума функции максимальных касательных напряжений.

На рис. 9 приведены зависимости максимальных значений максимальных касательных напряжений от безразмерного расстояния до поверхности (z/a) при отсутствии (рис. 9, а) и наличии (рис. 9, б) промежуточного вязкоупругого слоя, рассчитанные для разных значений относительного продольного проскальзывания и параметров вязкоупругого слоя.

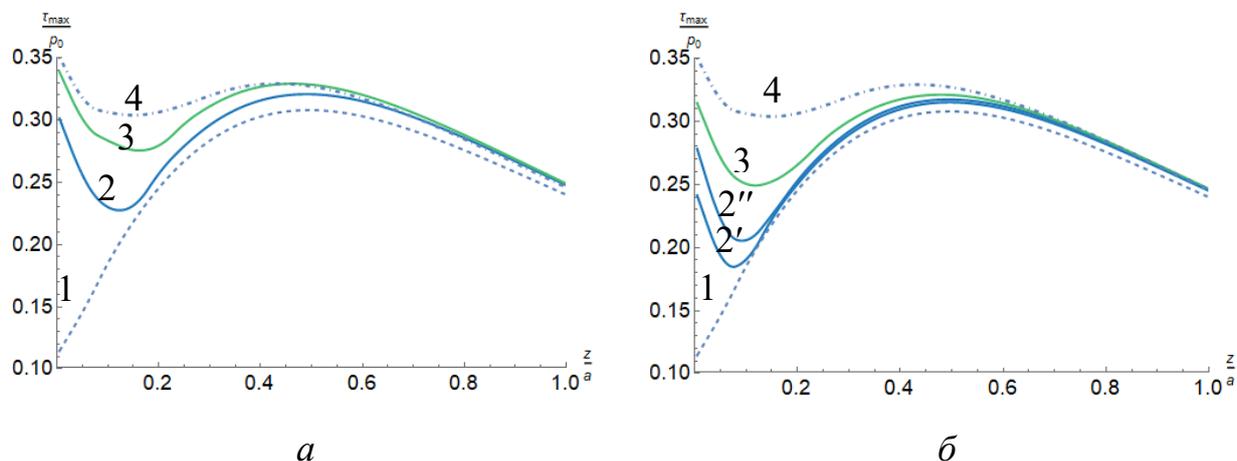


Рисунок 9. Зависимость максимальных значений максимальных касательных напряжений от координаты z/a при качении сферы по полупространству без слоя (а) и при наличии вязкоупругого слоя (б) при $\Delta_y = W_z = 0$, $\mu = 0,3$ и $\Delta_x = 0,006$ (2, 2', 2''), $\Delta_x = 0,011$ (3, 3'), $\Delta_x = 0,036$ (4) и параметрах слоя: $\zeta_\tau = 16$, $\beta = 5,75$ (2', 3'), $\beta = 2,86$ (2''); пунктирная кривая 1 соответствует теории Герца ($\mu = 0$)

Установлено, что при больших значениях коэффициента трения скольжения $\mu = 0,2 - 0,3$ функция зависимости максимальных значений максимального касательного напряжения на фиксированной глубине от расстояния до поверхности контакта имеет два максимума: на поверхности и под поверхностью на глубине около половины радиуса области контакта. Добавление промежуточного слоя при заданных характеристиках продольного и поперечного проскальзываний в условиях качения ролика по упругому полупространству приводит к уменьшению максимальных касательных напряжений на поверхности полупространства. Установлено также, что с ростом относительного продольного проскальзывания увеличиваются абсолютные значения растягивающих и сжимающих напряжений на поверхности

полупространства, при этом наличие слоя приводит к снижению пиковых значений растягивающих напряжений.

В рамках модели линейного суммирования повреждений можно рассчитать функцию поврежденности в различные моменты времени. Поврежденность материала в точке (x, y, z) характеризуется функцией $Q(x, y, z, t)$, которая зависит от амплитудных значений напряжений в данной точке. Материал разрушается, когда значение функции становится равным пороговому значению. В случае нормированной функции, пороговое значение равно 1. В соответствии с моделью линейного суммирования повреждений для расчёта скорости накопления усталостных повреждений используется следующая формула:

$$q(x, y, z, t) = \frac{\partial Q(x, y, z, t)}{\partial t} = c \left(\frac{\tau_{\max}(x, y, z, t)}{E} \right)^m, \quad (31)$$

где E – модуль упругости материала полупространства, $\tau_{\max}(x, y, z)$ – максимальное касательное напряжение в точке (x, y, z) , c и m некоторые постоянные, которые определяются из экспериментальных данных. Из соотношения (31) поврежденность в произвольной точке полупространства, которая накопилась за N циклов (при нулевой начальной поврежденности), рассчитывается следующим образом:

$$Q(x, y, z, N) = \int_0^N q(x, y, z, n) dn. \quad (32)$$

Данная модель может быть использована для нахождения областей зарождения усталостных трещин во взаимодействующих телах в условиях трения качения при наличии промежуточного вязкоупругого слоя.

В заключении представлены **основные результаты** диссертационной работы.

Основные результаты

Цель проведённого исследования заключалась в разработке методов решения контактных задач для деформируемых тел в условиях трения качения с учётом основных механизмов трения и наличия тонкого промежуточного слоя и анализе влияния свойств промежуточной среды на контактные характеристики,

силу трения, распределение внутренних напряжений и скорость накопления усталостных повреждений в поверхностных слоях упругих тел. В работе получены следующие основные результаты:

- 1) построено решение контактной задачи о качении жёсткого цилиндра и сферы по тонкому вязкоупругому слою, сцепленному с жёстким основанием, с учётом относительного продольного проскальзывания и межмолекулярного взаимодействия контактирующих поверхностей (при описании механических свойств слоя в нормальном и касательном направлении моделью Кельвина);
- 2) решена контактная задача о качении упругой сферы по упругому полупространству, покрытому тонким промежуточным слоем (податливость слоя в нормальном направлении описывается степенной функцией, а связь между касательными напряжениями и перемещениями – моделью Кельвина);
- 3) разработан алгоритм решения задачи о качении упругой сферы по вязкоупругому слою, сцепленному с упругим полупространством, основанный на вариационном методе с учётом продольного и бокового относительного проскальзывания, а также составляющих проскальзывания из-за верчения катящегося тела;
- 4) установлена зависимость контактных характеристик при качении жёстких и упругих тел по основанию, покрытому вязкоупругим слоем (распределение нормального и касательного напряжений на площадке контакта, расположение зон сцепления и проскальзывания), а также силы сопротивления качению от величины относительного проскальзывания и свойств промежуточной среды;
- 5) проведен расчет распределения максимальных касательных напряжений внутри упругого полупространства в условиях качения упругой сферы по упругому полупространству при наличии вязкоупругого промежуточного слоя и дан анализ влияния свойств промежуточного

слоя на скорость накопления контактно-усталостных повреждений в упругом полупространстве.

Публикации автора по теме диссертации:

1. Горячева И.Г., Мифтахова А.Р. Моделирование трения качения с учётом свойств промежуточной среды и относительного проскальзывания в области контактного взаимодействия // *Машиностроение и инженерное образование*. 2016. № 3. С. 38-44.
2. Мифтахова А.Р. Контактные задачи о качении с проскальзыванием для вязкоупругих тел // *Трение и износ*. 2018.Т. 39, № 1. С. 71-79. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=34928478>
3. Goryacheva I.G., Miftakhova A.R. Modelling of the viscoelastic layer effect in rolling contact // *Wear*. 2019. Vol. 430. P. 256-262. <https://doi.org/10.1016/j.wear.2019.05.021>
4. Miftakhova A., Chen Y.Y., Horng J.H. Effect of rolling on the friction coefficient in three-body contact // *Advances in Mechanical Engineering*. 2019. Vol. 11, № 8. P. 1–9. <https://doi.org/10.1177/1687814019872303>
5. Мещерякова А.Р., Горячева И.Г. Напряженное состояние упругих тел в условиях качения с проскальзыванием при наличии промежуточного слоя // *Физическая мезомеханика*. 2020. Т. 23, № 6. <http://dx.doi.org/10.24411/1683-805X-2020-16006>
6. Мифтахова А.Р. Развитие методов решения задачи о трении качения упругих тел при наличии проскальзывания // Труды 57-й научной конференции МФТИ с международным участием, посвящённой 120-летию со дня рождения П.Л. Капицы. 24-28 ноября 2014 г. Москва. 2014.
7. Мифтахова А.Р. Контактная задача о качении с проскальзыванием колеса по рельсу при наличии промежуточного вязкоупругого слоя // Тезисы 58-й научной конференции МФТИ. Долгопрудный. 2015.
8. Мифтахова А.Р., Горячева И.Г. Моделирование трения при качении цилиндра по вязкоупругому слою, описываемому моделью Кельвина // XXVII Международная инновационно-ориентированная конференция

- молодых учёных и студентов (МИКМУС – 2015): сборник трудов конференции. Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН Москва, 2015. С. 182–186.
9. Мифтахова А.Р., Горячева И.Г. Решение задачи о качении цилиндра по вязкоупругому слою, описываемому моделью Кельвина // Международная молодёжная научная конференция "XLI Гагаринские чтения" Материалы секции №16 Механика и моделирование материалов и технологий. 2015. С. 61–62.
 10. Мифтахова А.Р. Анализ влияния вязкоупругого промежуточного слоя на контактные характеристики и силу трения при качении с проскальзыванием // Труды 59-й научной конференции МФТИ. Аэрофизика и космические исследования. МФТИ Москва, 2016. С. 22–23.
 11. Мифтахова А.Р. Анализ распределения касательных контактных напряжений при качении с проскальзыванием по вязкоупругому основанию // Гагаринские чтения 2017: XLIII Международная молодёжная научная конференция: Сборник тезисов докладов. ISBN 978-5-90363-115-5. Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) Москва, 2017. С. 346–347.
 12. Мифтахова А.Р. Задача о качении с проскальзыванием периодической системы цилиндров по вязкоупругому основанию // Гагаринские чтения – 2018 Сборник тезисов докладов XLIV Международной молодёжной научной конференции. 2018. Т. 3. Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, 2018. С. 401–402.
 13. Мифтахова А.Р., Горячева И.Г. Анализ влияния тонких вязкоупругих покрытий на характеристики трения качения // Ломоносовские чтения 2018. Секция механики. Тезисы докладов. Издательство Московского университета Москва, 2018. С. 142.

14. Goryacheva I., Miftakhova A. Modelling of the viscoelastic layer effect in rolling contact // Proceedings of the 11th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/wheel Systems (CM2018). TU Delft. Delft, The Netherlands. 2018. P. 322–327.
15. Мифтахова А.Р. Влияние адгезии при качении цилиндра по вязкоупругому слою // Гагаринские чтения – 2019: Сборник тезисов докладов. М.: МАИ Москва, 2019. С. 966–967.
16. Горячева И.Г., Мифтахова А.Р. Моделирование напряженного состояния упругих тел в условиях трения качения // Ломоносовские чтения 2019 Секция механики. 2019.
17. Мифтахова А.Р. Влияние адгезии при качении цилиндра по вязкоупругому слою // Гагаринские чтения – 2019: Сборник тезисов докладов. М.: МАИ Москва, 2019. С. 966-967.
18. Meshcheryakova A.R. Effect of viscoelastic layer on contact fatigue damage accumulation in rolling friction // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 747, no. 012037.
19. Мещерякова А.Р. Оценка применимости метода полос при исследовании задач о качении упругих тел // Механика и моделирование материалов и технологий. Сборник трудов Секции Международной молодёжной научной конференции XLVI Гагаринские чтения. ИПМех РАН Москва, 2020. С. 77–78.
20. Мещерякова А.Р. Влияние поверхностного слоя на накопление контактно-усталостных повреждений в условиях трения качения // XXXI Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС - 2019): Сборник трудов конференции. Изд-во ИМАШ РАН Москва, 2020. С. 237–240.
21. Мещерякова А.Р. Программа расчёта контактных характеристик в условиях качения упругих тел с учётом свойств промежуточного вязкоупругого слоя. RU 2021613038. 2021.