

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ ИМ. А.Ю. ИШЛИНСКОГО
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Мещерякова Альмира Рифовна

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ И НАКОПЛЕНИЕ УСТАЛОСТНЫХ
ПОВРЕЖДЕНИЙ ПРИ КАЧЕНИИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Специальность 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: академик РАН, д.ф.-м.н. И.Г. Горячева

Москва — 2021

Оглавление

Введение.....	4
1.1 Развитие теории трения качения	4
1.2 Качение упругих тел.....	5
1.3 Качение вязкоупругих тел.....	9
1.4 Моделирование трения скольжения и качения с учётом межмолекулярного взаимодействия.....	13
1.5 Моделирование накопления контактно-усталостных повреждений в условиях трения скольжения и качения	14
Глава 1. Качение жёсткой сферы по вязкоупругому слою, сцепленному с жёстким полупространством	25
1.1 Постановка задачи.....	25
1.2 Метод решения.....	28
1.3 Анализ влияния свойств промежуточного слоя на контактные характеристики при качении.....	33
1.4 Постановка задачи о качении жёсткой сферы по вязкоупругому слою, сцепленному с жёстким полупространством, с учётом сил межмолекулярного взаимодействия.....	37
1.5 Метод решения.....	39
1.6 Анализ влияния сил межмолекулярного взаимодействия на контактные характеристики	39
1.7 Выводы по главе 1.....	42
Глава 2. Качение упругой сферы по вязкоупругому слою, сцепленному с упругим полупространством.....	44
2.1 Постановка задачи о качении упругой сферы по вязкоупругому слою, сцепленному с упругим полупространством, при наличии продольного проскальзывания	44

2.2 Метод решения задачи качения упругой сферы по вязкоупругому слою, сцепленному с упругим полупространством, основанный на методе полос	47
2.3 Анализ контактных характеристик и силы трения.....	51
2.4 Постановка задачи качения упругой сферы по упругому полупространству, покрытому вязкоупругим слоем, с учётом продольного и бокового проскальзывания и верчения.....	56
2.5 Метод решения задачи качения упругой сферы по упругому полупространству, покрытому вязкоупругим слоем, основанный на вариационном методе	59
2.6 Анализ контактных касательных напряжений.....	61
2.7 Выводы по главе 2.....	68
Глава 3. Накопление контактно-усталостных повреждений упругих тел при качении с проскальзыванием с промежуточным слоем.....	69
3.1 Постановка задачи.....	69
3.2 Алгоритм расчёта напряжённого состояния упругого полупространства	69
3.3 Метод расчёта скорости накопления контактно-усталостных повреждений в упругом полупространстве.....	70
3.4 Анализ влияния свойств вязкоупругого слоя и проскальзывания на напряжённое состояние упругого полупространства в условиях трения качения	71
3.5 Выводы по главе 3.....	78
Заключение	80
Список литературы	82
Список рисунков	96

Введение

1.1 Развитие теории трения качения

Проблема изучения механизмов возникновения сопротивления при качении деформируемых тел является приоритетным направлением исследований в области механики контактных взаимодействий, ее актуальность связана с широким распространением в технике трибосопряжений, работающих в условиях контакта качения, например, система «колесо-рельс», подшипники качения, различные транспортные механизмы.

По определению Джонсона К. [1] качение представляет собой вращение двух контактирующих тел относительно осей, параллельных их общей касательной плоскости. В подвижной системе отсчёта, связанной с точкой контакта, тела имеют касательную компоненту скорости и составляющую угловых скоростей вращения относительно общей нормали к поверхности: если касательные компоненты скорости различны, то говорят о качении с проскальзыванием; если угловые скорости различны, то качение сопровождается верчением; при отсутствии проскальзывания и верчения имеет место свободное качение при наличии и отсутствии касательной силы.

При качении одного тела по поверхности другого возникает сила сопротивления, называемая силой трения качения. На основании многочисленных теоретических и экспериментальных исследований установлено, что основными причинами возникновения силы сопротивления при качении являются частичное проскальзывание поверхностей катящегося тела и основания в области контактного взаимодействия [2], несовершенная упругость контактирующих тел [3], а также силы молекулярного взаимодействия [4].

Теория существования подобластей сцепления и проскальзывания в области контакта катящихся деформируемых тел впервые была построена Рейнольдсом О. [2] и Хизкоутом Г. [5]. Анализируя результаты эксперимента по качению металлического цилиндра по резиновой поверхности и наоборот, Рейнольдс О. рассмотрел случай существования зон микропроскальзывания в

условиях трения качения при пренебрежимо малых деформациях контактирующих поверхностей [2]. Наблюдая качение сферы по канавке, Хизкоут Г. также заметил появление зон проскальзывания в области контакта [5]. Моделирование этого явления привело к постановке контактных задач с неоднородными граничными условиями в области контактного взаимодействия (равенство скоростей перемещений в подобластях сцепления и соотношение нормальных и касательных контактных напряжений в соответствии с законом трения в подобластях проскальзывания) и необходимости разработки методов их решения, в том числе определения границ подобластей сцепления и проскальзывания в зависимости от свойств материалов, приложенной нагрузки, величины относительного проскальзывания и коэффициента трения скольжения.

1.2 Качение упругих тел

При моделировании трения качения упругих тел сложность нахождения касательных напряжений заключается в том, что границы зон проскальзывания и сцепления на площадке контакта заранее неизвестны. В случае одинаковых упругих постоянных тел в контакте качения задачи нахождения нормального и касательного напряжений разделяются. Аналитическое решение задачи качения упругого цилиндра по упругому полупространству впервые было получено Картером Ф. в [3] и спустя некоторое время Фроммом Г. [6], который построил решение задачи качения двух упругих дисков разных радиусов с одинаковыми упругими постоянными. В отличие от решения Картера Ф., Фромм Г. не использовал приближение контактирующих тел полупространствами. В обоих решениях было показано, что в случае одинаковых упругих постоянных область контакта делится на две зоны: сцепления и проскальзывания, причём передняя граница области контакта относительно направления качения цилиндра совпадает с границей зоны сцепления. Картер Ф. и Фромм Г. считали, что вне области контакта нормальное напряжение равно нулю, а в зонах проскальзывания выполняется закон Кулона-Амонтона, и скорость проскальзывания во всех точках области контакта направлена в одну и ту же сторону. Ишлинский А.Ю. [7]

занимался моделированием качения жёсткого цилиндра по основанию, представленному в виде системы упругих стержней, которые отклонялись в сторону и изменяли свою высоту пропорционально действующим на них силам.

Решение задачи качения упругих тел в пространственной постановке при наличии верчения для пренебрежимо малых относительных скоростей проскальзывания и угловой скорости верчения было построено Джонсоном К. для круговой [8, 9] и эллиптической областей контакта [10]. Полученное Картером Ф. решение задачи качения упругих тел с одинаковыми упругими свойствами в плоской постановке было расширено на пространственный случай с помощью метода полос [11, 12]. Результаты моделирования качения упругих тел с учётом существования подобластей сцепления и проскальзывания были подтверждены экспериментами Джонсона К. [8]. С помощью метода полос Калкером Й. были определены касательные напряжения при качении с продольным и боковым проскальзыванием и наличии верчения для круговой и эллиптической областей контакта [13]. Калкер Й. заметил, что метод полос позволяет корректно рассчитать силу сопротивления качению только для областей контакта, вытянутых в поперечном направлении по отношению к направлению качения. Для расчёта силы сопротивления качению упругих тел для заданных скоростей продольного и бокового проскальзывания и угловой скорости верчения была построена линейная теория Калкера Й. [14], в которой также используется метод полос. В линейной теории Калкера Й. в каждой точке области контакта предполагается линейная зависимость между касательными деформациями и напряжениями, причём коэффициент пропорциональности зависит от скоростей продольного и бокового проскальзывания и угловой скорости верчения. Линейная теория стала основой для создания алгоритма FASTSIM [15], который широко применяется в расчётах для системы колесо-рельс [16–18] благодаря высокой скорости вычислений. Область применения алгоритма FASTSIM была расширена на задачи качения упругих тел в неустановившемся режиме [16, 19], с неэллиптической областью контакта [20] и для более общих законов трения [21]. Усовершенствованная версия алгоритма

FASTSIM – FASTSIM2 была представлена в работе [17], данная версия алгоритма позволяет рассчитать зависимость силы сопротивления качению от проскальзывания на более крупной сетке без потери точности. Описание другой модификации алгоритма FASTSIM – FastSimA, в которой касательные силы в каждой полосе области контакта определяются с помощью приближенного аналитического выражения вместо численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, реализованного в алгоритме Калкера Й. FASTSIM, приведено в работе [22]. Данный алгоритм применяется в модуле программного комплекса “Универсальный механизм”, который предназначен для моделирования динамики железнодорожных экипажей. Численное решение задачи качения упругих тел в пространственной постановке с учётом проскальзывания и верчения, в основе которого лежит вариационный метод, получено в работах Калкера Й. [23] и Гольдштейна Р.В. [24]. Калкер Й. объединил принцип виртуальной работы [25], дополнительной энергии и минимума потенциальной энергии, сформулированные в виде вариационных неравенств [26–28], и с помощью методов математического программирования создал алгоритм CONTACT. Данный алгоритм не имеет ограничений на величину скорости проскальзывания, форму области контакта и величину угловой скорости верчения, но требует больших вычислительных ресурсов [23]. Сравнение результатов, полученных с помощью алгоритмов CONTACT и FASTSIM приведено в [18, 29, 30]. Контактная задача качения упругих тел, изготовленных из одинаковых материалов, с помощью эквивалентной вариационной формулировки решалась Гольдштейном Р.В. и др. в [24]. Задача была сведена к нахождению минимума функционала энергетического типа относительно касательных напряжений в области контакта с учётом граничных условий. С помощью методов проекции градиента и линейного программирования было получено численное решение в случае одинаковых упругих свойств контактирующих тел. Было изучено влияние продольного и бокового проскальзывания и угловой скорости верчения на расположение зон сцепления и проскальзывания в области контакта и силу сопротивления качению.

Большое количество работ посвящено численному решению задачи качения упругих тел с помощью метода конечных элементов в приложении к системе «колесо-рельс» [31–38]. Применение метода конечных элементов позволило отказаться от приближения контактирующих тел упругим полупространством и рассматривать контактные задачи с более сложной геометрией и свойствами материала [31]. В системе «колесо-рельс» упругие постоянные контактирующих тел считаются одинаковыми, и задачи нахождения нормального и касательного напряжений разделяются [1]. Полученные решения позволяют проанализировать влияние реальной геометрии и механических характеристик материалов контактирующих тел, а также нагрузочно-скоростных условий взаимодействия на распределение контактных давлений и касательных напряжений. Корректность результатов, рассчитанных с помощью метода конечных элементов, проверяется сравнением с решением Герца и результатами, полученными с помощью алгоритма Калкера Й. CONTACT. Метод расчёта контактных касательных напряжений с использованием измельчённой пространственной конечно-элементной схемы в потенциальных областях контакта, позволяющий в десятки раз снизить затраты требуемых вычислительных ресурсов, представлен в [37]. Решение задачи качения упругих тел в случае конформного контакта с помощью комбинации метода конечных элементов и алгоритма CONTACT приведено в [38]. Результаты показывают, что в отличие от решения, полученного при использовании приближения упругим полупространством, максимальные значения контактных давлений увеличиваются, а площадь области контакта уменьшается.

Более общий случай разных упругих постоянных катящихся тел предполагает существование более сложной конфигурации зон сцепления и проскальзывания в области контакта. Качественный анализ качения тел с разными упругими постоянными проводился Рейнольдсом О. [2]. Задача качения цилиндров с разными упругими характеристиками была решена численно в работе Бенталла Р. и Джонсона К. [39], где использовалось кусочно-линейное представление функций нормального и касательного напряжения. Решение задачи качения упругих тел в

плоской постановке без ограничения на упругие свойства катящихся тел было также получено в работах Моссаковского В.И [40], Новелла Д. и Хилса Д. [41].

Результаты моделирования трения качения упругих тел затем используются для решения динамических задач качения [42, 43], а также встраиваются в автоматизированные программные пакеты [44, 45].

1.3 Качение вязкоупругих тел

Эксперименты по скольжению и качению вязкоупругих тел [46–55] показали, что несовершенная упругость реальных материалов является источником диссипации энергии, приводящим к возникновению силы сопротивления качению. Первой теоретической работой, посвященной изучению сопротивления качению при несовершенной упругости материалов, считается исследование Ишлинского А.Ю. [56], в котором была рассмотрена задача о качении жёсткого цилиндра по вязкоупругому основанию. Механические свойства основания описывались системой одномерных моделей Максвелла и Кельвина-Фойгта. В работе был рассчитан момент трения качения и исследована его зависимость от скорости качения, нагрузки и механических свойств контактирующих тел. Одномерные модели также использовались для описания несовершенной упругости вязкоупругого основания в работах [57, 58] где рассматривались задачи о качении жёстких тел по вязкоупругому полупространству в плоской и пространственной постановках. Решение плоской задачи качения жёсткого ролика по вязкоупругому основанию без учёта касательных напряжений, где вязкоупругий материал рассматривался как сплошная среда, было получено в работе Хантера С. [59]. Задача контакта качения двух вязкоупругих цилиндров с одинаковыми и разными упругими постоянными была решена в работах Морланда Л. [60, 61] Исследованию совместного эффекта несовершенной упругости материалов и относительного проскальзывания при качении вязкоупругих тел посвящена работа Горячевой И.Г. [62], в которой рассматривается задача о качении вязкоупругого цилиндра по основанию из того же материала. В результате были получены аналитические выражения для расчёта

нормального напряжения и определена конфигурации зон сцепления и проскальзывания в области контакта. Было показано, что в случае одинаковых материалов цилиндра и основания, зона сцепления располагается на переднем крае области контакта, а за ней находится зона проскальзывания.

Среди исследований, посвящённых трению качения вязкоупругих тел, можно отдельно выделить работы, посвящённые качению жёстких и деформируемых тел при наличии тонкого промежуточного слоя на поверхности катания. Задача о качении упругого цилиндра по упругому основанию, покрытому вязкоупругим слоем, была решена Горячевой И.Г. в [63]. Решение контактной задачи о качении и скольжении двух упругих цилиндров, покрытых вязкоупругими поверхностными слоями, было построено в [64], в котором были получены распределения нормального и касательного напряжений в области контакта и проведён анализ влияния геометрических и механических параметров слоя на контактные характеристики. Влияние свойств вязкоупругого слоя и скорости качения цилиндров на распределение нормального напряжения и коэффициент трения было изучено в [65]. Описание характеристик вязкоупругого слоя с помощью одномерных моделей позволило получить аналитическое решение, а также проанализировать влияние межмолекулярного взаимодействия контактирующих поверхностей [66] и дискретного характера взаимодействия [67–70] на контактные характеристики и силу трения при скольжении упругих тел. С помощью аналитических и численных методов в [71–73] было изучено влияние свойств вязкоупругого слоя, сцепленного с упругим основанием, на контактные характеристики и силу трения в условиях трения скольжения и качения, в том числе при наличии в зазоре смазки. Для описания свойств поверхностного слоя использовалась модель Максвелла, которая обладает неограниченной ползучестью. Описание механических характеристик вязкоупругих тел с помощью линейной модели также применялось в задаче качения периодической системы цилиндров и свободного вязкоупругого слоя конечной толщины в приложении к моделированию движения конвейерной ленты в [74]. Теоретическое и

экспериментальное исследование контакта качения двух цилиндров с покрытиями из вязкоупругих материалов, в частности резины, проведено в работах Калкера Й. [75, 76].

Большое количество работ посвящено развитию численных методов решения задачи качения вязкоупругих тел, в частности метода конечных элементов [77–84]. Для решения задачи качения вязкоупругого цилиндра по недеформируемому основанию в [77] использовалась вариационная формулировка. Метод решения задач качения вязкоупругих тел, представленный в [78, 81], используется при моделировании процесса установившегося качения, так и для переходных процессов. Развитию численных методов решения контактных задач о качении вязкоупругих тел на основе описания движения с помощью метода Лагранжа-Эйлера (ALE) посвящены работы [85–87]. В [88] представлен метод, разработанный для вязкоупругого полупространства, который также использовался для построения приближенного решения задачи трения качения для вязкоупругого слоя. Широкое распространение получили алгоритмы численного расчёта контактных характеристик в задачах качения упругих тел (FASTSIM, CONTACT), построенные Калкером Й. [23] и позже усовершенствованные для случая контакта упругих тел с промежуточным вязкоупругим слоем [44, 89]. Для расчёта силы сопротивления качению при наличии вязкоупругих покрытий применяются и другие численные методы, среди которых метод граничных элементов [90], быстрое преобразование Фурье [91]. Достоинством численных методов является возможность решения контактных задач с любой формой индентора и моделью вязкоупругого материала, в качестве основного недостатка отмечается их ресурсоёмкость, в частности, при решении задач в пространственной постановке.

Результаты исследований контакта трения качения при наличии промежуточного слоя применяются на практике при моделировании контактного взаимодействия и изнашивания в системе «колесо-рельс», подшипников качения с консистентной смазкой и других трибосопряжений.

Моделирование контактного взаимодействия в системе «колесо-рельс» является значительной областью приложения фундаментальных знаний и результатов исследования задач трения качения упругих тел с промежуточным слоем. Обзор контактных задач, возникающих в системе «колесо-рельс», а также методов их решения приведён в [92]. Задача управления трением в системе «колесо-рельс» была сформулирована в [93]. Идея управления трением заключается в создании на контактирующих поверхностях колеса и рельса специальных слоёв, обладающих заданными характеристиками трения. Для грузовых вагонов задача управления трением состоит в обеспечении заданного коэффициента трения между гребнями колёс и боковой поверхностью головки рельса и между поверхностями катания колеса и рельса (преимущественно в кривых). Применение систем лубрикации в контакте между гребнем колеса и боковой поверхностью головки рельса позволяет уменьшить интенсивность изнашивания гребней колёс и боковой износ рельсов. Модификаторы трения решают вторую часть задачи управления трением – поддержку заданного коэффициента трения на поверхности катания рельсов при взаимодействии с колесами грузовых вагонов [94, 95]. Также модификаторы трения используются для уменьшения износа контактирующих поверхностей [96, 97], снижения шума и вибраций [98, 99], оптимизации силы тяги при разных условиях взаимодействия [100, 101]. В качестве модификаторов трения используют как полимеры [94, 102], так и различные композиционные материалы [103]. Для исследования влияния микроструктуры основания из композиционного материала на контактные характеристики и силу трения помимо одномерных моделей вязкоупругих тел используются модели основания, состоящие из вязкоупругого скелета и флюида-наполнителя [104, 105]. Существующие модели контакта «колесо-рельс» при наличии третьего тела постоянно совершенствуются с целью воспроизведения наблюдаемых в эксперименте контактных характеристик для более широкого диапазона параметров [89].

При искусственной обработке поверхностей, а также в результате их изнашивания, образуются частицы износа, которые задерживаются в области контакта, формируя так называемый слой третьего тела. При моделировании механические свойства смазочного слоя, насыщенного частицами износа, могут быть описаны с помощью моделей вязкоупругого слоя, где толщина слоя третьего тела зависит от скорости изнашивания. Появление продуктов износа в области контакта ведёт к изменению контактных характеристик и напряжённого состояния взаимодействующих тел. Исследованию образования и дальнейшей эволюции продуктов износа при различных условиях контактирования посвящено множество теоретических и экспериментальных работ [106, 107]. Обзор аналитических методов решения контактных задач изнашивания при наличии третьего тела приведён в [108]. В работе Болотова А.Н. был предложен способ адаптации магнитных смазочных наножидкостей для применения в условиях граничного трения (например, в качестве смазочных материалов подшипников качения и скольжения) [109]. Также была исследована влияние концентрации дисперсных частиц в магнитном масле на коэффициент трения, износостойкость и скорость формирования граничных смазочных слоев [110].

1.4 Моделирование трения скольжения и качения с учётом межмолекулярного взаимодействия

Обоснование межмолекулярного взаимодействия как одного из источников силы сопротивления качению приведено в работе Томлинсона Дж. [4], который проводил эксперименты по качению металлических цилиндров при малых нагрузках. Совместное влияние несовершенной упругости материалов и адгезионных свойств их поверхностей на контактные характеристики и силу трения было рассмотрено в задаче о скольжении сферического индентора по вязкоупругому основанию [66], где межмолекулярное взаимодействие поверхностей описывалось с помощью приближения потенциала Леннарда-Джонса одноступенчатой моделью Мажи-Дагдейла.

Моделирование дискретного контакта реальных поверхностей с учётом адгезионного взаимодействия проводилось в работах Измайлова В.В [111, 112], где для описания адгезионных сил использовались модели Дерягина-Мюллера-Топорова [113] и Джонсона-Кендалла-Робертса [114]. Было исследовано влияние адгезии на сближение и площадь фактической области контакта и предложен критерий для оценки степени влияния адгезионных сил на характеристики контакта.

Контактные задачи качения с учётом адгезии изучались в работах Кендалла К. [115], Горячевой И.Г. и Маховской Ю.Ю. [116], Попова В.Л. [117]. Расчёт адгезионной составляющей силы сопротивления качению для упругих и вязкоупругих тел с учётом адгезионного взаимодействия их поверхностей был проведён в [116], где для описания адгезии использовался потенциал Леннарда-Джонса. Метод применения кусочно-постоянной функции в качестве аппроксимации разных существующих потенциалов, например потенциала Леннарда-Джонса, для моделирования контактного взаимодействия индентора и упругого основания был разработан в [118]. Исследованию совместного влияния вязкоупругости и межмолекулярного взаимодействия на контактные характеристики в условиях скольжения посвящены работы [109, 110].

1.5 Моделирование накопления контактно-усталостных повреждений в условиях трения скольжения и качения

При эксплуатации трибосопряжений поверхностные слои со временем разрушаются, причём вид разрушения зависит от свойств материала и условий фрикционного взаимодействия. Одним из характерных механизмов разрушения поверхностных слоёв контактирующих тел является контактно-усталостное изнашивание, обусловленное процессом накопления поврежденности на микроуровне при дискретном характере контактирования, связанном с шероховатостью реальных поверхностей [121]. При циклических нагрузках в активном слое материала возникает неоднородное циклическое поле внутренних напряжений. В результате в слое вблизи пятен фактического контакта существуют

области с высокой концентрацией напряжений, где накапливаются повреждения материала [72]. В монографии Горячевой И.Г. представлен макроскопический подход к построению модели усталостного разрушения поверхности, в котором мера повреждения материала в каждой точке полупространства описывается функцией поврежденности, зависящей от амплитудных значений напряжений в данной точке [72]. Одной из моделей для исследования контактной усталости является модель линейного суммирования повреждений, где скорость накопления усталостных повреждений в каждой точке зависит от амплитудного значения максимальных касательных напряжений в данной точке [72]. С помощью модели линейного суммирования повреждений в [122] был проведен расчёт процесса накопления контактно-усталостных повреждений для эластомеров с критерием накопления повреждений, связанным с амплитудными значениями приведённых напряжений. Обзор подходов к моделированию контактно-усталостного изнашивания при качении приведен в [123]. Описание методов моделирования износа на разных масштабных уровнях представлено в [124]. В работах Горячевой И.Г. и Чекиной О.Г. процесс усталостного изнашивания рассматривался на основе одномерной модели накопления повреждений – модели отслаивания [79, 115]. Зависимость напряженного состояния упругого полупространства от относительного проскальзывания и коэффициента трения при качении упругого цилиндра по основанию из того же материала при наличии тонких поверхностных плёнок была исследована в [71]. Моделирование накопления контактно-усталостных повреждений с помощью функции поврежденности поверхностных слоёв двухслойного упругого основания в зависимости от амплитудных значений напряжений в каждой точке представлено в [126]. Влияние остаточных напряжений на контактно-усталостное изнашивание при качении упругих тел исследовалось в [127, 128].

На практике контактно-усталостные повреждения считаются наиболее распространенными видами дефектов рельсов [129]. Обзор подходов к моделированию появления контактно-усталостных повреждений рельсов приведён

в [130], где в качестве основных групп выделены модели, связанные с максимальными касательными напряжениями; модели, основанные на получении количественных характеристик приспособляемости материалов к циклическим нагрузкам; модели, связанные с критериями, имеющими смысл энергии, выделяющейся на контакте, и модели, прогнозирующие накопление пластической деформации в условиях циклического нагружения. Обзор контактно-усталостных дефектов в материале колеса и рельса и методов, использующихся для предсказания их возникновения, приведен в [131]. Методы и результаты моделирования образования контактно-усталостных дефектов колес грузовых вагонов представлены в [132]. Полученные результаты позволяют установить степень влияния продольного и бокового проскальзываний (по отношению к направлению качения колеса) на распределение напряжений в области контакта и накопление повреждений. В работе [133] разработан алгоритм для моделирования процесса накопления контактно-усталостных повреждений в материале колеса, основанный на методе конечных элементов, где в качестве критерия оценки контактно-усталостной прочности используется критерий Данг Вана [134]. Разработанный алгоритм применяется для выбора профилей колес по критерию минимизации накопления в них контактно-усталостных повреждений [135].

Актуальность данного исследования обусловлена необходимостью развития методов решения контактных задач качения упругих тел с проскальзыванием при наличии тонкого промежуточного слоя и анализа влияния свойств промежуточной среды на контактные характеристики и скорость накопления усталостных повреждений в подповерхностных слоях материалов в условиях трения качения.

Целью диссертационного исследования является разработка методов решения контактных задач о качении жестких и деформируемых тел при наличии промежуточного слоя с учётом основных механизмов трения (относительное проскальзывание, несовершенная упругость, межмолекулярное взаимодействие), а также анализ влияния свойств промежуточной среды на контактные

характеристики, силу трения, распределение внутренних напряжений и скорость накопления усталостных повреждений в поверхностных слоях упругих тел.

Для достижения поставленной цели были сформулированы и решены следующие **задачи**:

- контактная задача в плоской и пространственной постановках о качении жёсткого ролика по вязкоупругому слою, сцепленному с жестким основанием, с учётом относительного продольного проскальзывания и межмолекулярного взаимодействия контактирующих поверхностей;
- контактная задача о качении упругой сферы по упругому полупространству, покрытому тонким вязкоупругим слоем, механические свойства которого в нормальном направлении описываются моделью Винклера, а в касательном направлении – моделью Кельвина;
- контактная задача о качении упругой сферы по вязкоупругому слою, сцепленному с упругим полупространством с учётом трёх составляющих относительного проскальзывания: продольного, бокового и проскальзывания из-за вращения катящегося тела;
- расчет внутренних напряжений в упругом полупространстве в условиях качения с проскальзыванием при наличии вязкоупругого промежуточного слоя и анализ влияния свойств промежуточного слоя на скорость накопления контактно-усталостных повреждений в упругом полупространстве.

Научная новизна работы состоит в следующем:

- разработка метода решения и анализ контактных характеристик в задаче о качении с проскальзыванием жёсткой сферы по жёсткому полупространству, покрытому вязкоупругим слоем, с учётом межмолекулярного взаимодействия поверхностей (совместный учёт всех трёх составляющих сопротивления при качении);
- разработка алгоритма и программы расчёта контактных характеристик (распределение контактных напряжений, расположение зон сцепления и

проскальзывания) и силы сопротивления при взаимодействии упругих тел в условиях трения качения с учётом свойств промежуточного вязкоупругого слоя;

- анализ влияния толщины и механических характеристик промежуточного слоя, описываемого моделями Винклера, Максвелла и Кельвина, а также относительного проскальзывания, скорости качения и радиуса ролика на характеристики контактного взаимодействия (размер и положение области контакта, распределение контактных напряжений) и силу трения;
- алгоритм и программа расчёта скорости накопления контактно-усталостных повреждений в упругом основании при циклическом качении упругой сферы по вязкоупругому слою, сцепленному с упругим полупространством.

Достоверность результатов исследования обеспечена:

- сравнением решения контактных задач о качении с проскальзыванием в отсутствии и при наличии промежуточного слоя с полученными ранее решениями другими методами (аналитические методы, CONTACT, метод конечных элементов);
- использованием при решении задач апробированных численных методов: метод полос, методы численного интегрирования, метод проекции градиента.

Практическая значимость работы

Результаты работы могут использоваться при оценке влияния свойств тонких вязкоупругих промежуточных слоёв на характеристики фрикционного взаимодействия в условиях трения качения и выборе смазочных материалов (консистентной смазки в подшипниках качения, модификаторов трения, способствующих снижению энергетических потерь в системе “колесо-рельс”).

Методы исследования:

- метод разбиения области контакта на полосы, в каждой из которых решается контактная задача в плоской постановке;

- вариационный метод решения контактной задачи в пространственной постановке;
- методы численного интегрирования.

Положения, выносимые на защиту:

- 1) методы решения контактных задач качения жёстких и упругих тел при наличии промежуточного вязкоупругого слоя;
- 2) методика анализа влияния геометрических параметров модели (толщина слоя, радиус ролика), свойств материала слоя (времена последействия и релаксации, модуль упругости), скорости относительного продольного и бокового проскальзывания и скорости качения ролика на расположение подобластей сцепления и проскальзывания в области контакта, распределение контактных напряжений и силу трения;
- 3) алгоритм расчёта компонент напряжений в упругом полупространстве и скорости накопления контактно-усталостных повреждений в условиях трения качения при наличии промежуточного слоя.

Апробация работы

Основные результаты работы были представлены на 9 международных и 10 всероссийских конференциях:

- 1) 57-я всероссийская научная конференция МФТИ с международным участием, посвященная 120-летию со дня рождения П.Л. Капицы, Москва, 24-29 ноября 2014;
- 2) XXVII международная инновационно-ориентированная конференция молодых учёных и студентов (МИКМУС-2015), Москва, 2-4 декабря 2015;
- 3) 58-я всероссийская научная конференция МФТИ с международным участием, Москва, 23-28 ноября 2015;
- 4) 59-я всероссийская научная конференция МФТИ с международным участием, 21-26 ноября 2016;

- 5) XLIII международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения», Москва, 5-20 апреля 2017;
- 6) научная конференция «Ломоносовские чтения – 2018», секция «Механика деформируемого твердого тела», Москва, 16-25 апреля 2018;
- 7) XLIV международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения», Москва, 17-20 апреля 2018;
- 8) 11th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems, Дельфт, Нидерланды, 24-27 сентября 2018;
- 9) International Conference on Engineering Tribology and Applied Technology (ICETAT) 2018, Тайбэй, Тайвань (Китай), 16-18 ноября 2018;
- 10) XLV международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения – 2019», Москва, 16-19 апреля 2019;
- 11) XII всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, 19-24 августа 2019;
- 12) 62-я всероссийская научная конференция МФТИ, 18-23 ноября 2019;
- 13) XXXI Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС - 2019), Москва, 4-6 декабря 2019;
- 14) научная конференция «Ломоносовские чтения – 2019», секция «Механика деформируемого твердого тела», Москва, 15-25 апреля 2019;
- 15) XLVI международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения», онлайн, 13-17 апреля 2020;
- 16) The International Summer School-Conference “Advanced Problems in Mechanics - 2020”, онлайн, 21-26 июня 2020;
- 17) научная конференция «Ломоносовские чтения – 2020», секция «Механика деформируемого твердого тела», онлайн, 30 октября 2020;
- 18) 63-я всероссийская научная конференция МФТИ, онлайн, 23-29 ноября 2020;
- 19) V всероссийский форум «Наука Будущего – Наука Молодых», онлайн, 30 ноября – 3 декабря 2020.

Научные исследования, проведенные в диссертационной работе, осуществлялись в рамках грантов РФФИ: 17-20-01147, 17-58-52030, 18-31-00441, 19-31-90015, 20-01-00400; гранта РФФИ 14-29-00198 и программы Президиума РАН I.16 «Экспериментально-теоретическое изучение влияния геометрических и механических свойств поверхности и тонких поверхностных слоев на фрикционные характеристики и изнашивание элементов пар трения».

Публикации автора по теме диссертации

Основные результаты диссертации изложены в работах [83, 126–134], изданных в периодических научных изданиях, сборниках материалов и тезисах докладов международных и всероссийских конференций. 5 статей [83, 130, 131, 135, 136] из списка публикаций напечатаны в журналах, входящих в перечень ВАК РФ и/или индексируемых в Web of Science, Scopus, в том числе статьи [83, 131] опубликованы в высокорейтинговых международных журналах. Получено одно свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Программа расчёта контактных характеристик в условиях качения упругих тел с учётом свойств промежуточного вязкоупругого слоя» [148].

Основные публикации:

1. Горячева И.Г., Мифтахова А.Р. Моделирование трения качения с учётом свойств промежуточной среды и относительного проскальзывания в области контактного взаимодействия // Машиностроение и инженерное образование. 2016. № 3. С. 38-44.
2. Мифтахова А.Р. Контактные задачи о качении с проскальзыванием для вязкоупругих тел // Трение и износ. 2018. Т. 39, № 1. С. 71-79.
3. Goryacheva I.G., Miftakhova A.R. Modelling of the viscoelastic layer effect in rolling contact // Wear. 2019. Vol. 430. P. 256-262.
4. Miftakhova A., Chen Y.Y., Horng J.H. Effect of rolling on the friction coefficient in three-body contact // Advances in Mechanical Engineering. 2019. Vol. 11, № 8. P. 1-9.

5. Мещерякова А.Р., Горячева И.Г. Напряженное состояние упругих тел в условиях качения с проскальзыванием при наличии промежуточного слоя // Физическая мезомеханика. 2020. Т. 23, № 6.

Личный вклад автора

В работах [83, 126–129, 132–134] автором разработан алгоритм решения контактных задач в условиях трения качения, математические постановки которых были предложены научным руководителем Горячевой И.Г. Все необходимые расчёты были проведены автором самостоятельно, полученные результаты обсуждались совместно с Горячевой И.Г. В работе [141] постановка задачи и обсуждение результатов было выполнено совместно с соавторами, расчёт проводился автором самостоятельно.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Полный объём работы составляет 101 страницу, включая 33 рисунка. Список литературы содержит 144 наименования.

Во введении сформулированы основные цели и задачи диссертационной работы, обоснованы актуальность и научная новизна исследования. Также представлен обзор современного состояния исследований в области, касающейся темы диссертации.

В первой главе предложен алгоритм, основанный на методе полос, для определения нормальных и касательных напряжений при качении с проскальзыванием сферы по вязкоупругому слою, механическое поведение которого описывается моделью Кельвина. Определена конфигурация подобластей сцепления и проскальзывания при разных значениях отношения времён последействия и релаксации материала вязкоупругого слоя, числа Деборы, относительного продольного проскальзывания и коэффициента трения скольжения. Установлено, что увеличение коэффициента трения скольжения и величины относительного проскальзывания приводят к росту отношения касательной силы к нагрузке. Получено решение задачи качения сферы по

вязкоупругому слою, сцепленному с полупространством, при наличии межмолекулярного взаимодействия. Проведён анализ влияния свойств промежуточного слоя, скорости относительного проскальзывания, параметров потенциала межмолекулярного взаимодействия на конфигурацию области контакта и адгезионного взаимодействия и расположение подобластей сцепления при заданной нагрузке на сферу.

Во второй главе рассматривается задача качения с проскальзыванием упругой сферы по упругому полупространству, покрытому тонким вязкоупругим слоем. Для описания механического поведения промежуточного слоя используется несколько одномерных моделей вязкоупругости. *В разделе 2.1* податливость слоя в нормальном направлении описывается степенной функцией, а для моделирования механического поведения слоя в касательном направлении используется тело Кельвина. В постановке задачи *в разделе 2.2* предполагается, что промежуточный вязкоупругий слой не сопротивляется смятию в нормальном направлении, а его механическое поведение в касательном направлении моделируется с помощью тела Максвелла. Задача определения касательного напряжения в области контакта решается с помощью метода полос и вариационного метода. Исследовано влияние относительных продольного и бокового проскальзываний и относительного вращения, а также коэффициента трения скольжения на расположение подобластей сцепления и проскальзывания в области контакта.

Третья глава посвящена исследованию скорости накопления контактно-усталостных повреждений в условиях трения качения при наличии вязкоупругого поверхностного слоя. Рассматривается циклическое качение упругой сферы по вязкоупругому слою, сцепленному с упругим полупространством. Для полученных *во второй главе* распределений контактных нормального и касательного напряжений проведён расчет напряжённого состояния упругого полупространства в условиях трения качения упругих тел с одинаковыми упругими постоянными при наличии промежуточного слоя. Проанализировано влияние относительных продольного и бокового проскальзываний, свойств промежуточного слоя и

коэффициента трения скольжения на расположение областей концентрации максимальных касательных напряжений в подповерхностных слоях упругого полупространства.

В заключении представлены основные результаты диссертационной работы.

Автор выражает большую признательность научному руководителю академику РАН д.ф.-м.н. И.Г. Горячевой, а также д.ф.-м.н. Е.В. Торской и всем сотрудникам лаборатории трибологии ИПМех РАН за поддержку в проведении исследований.

Глава 1. Качение жёсткой сферы по вязкоупругому слою, сцепленному с жёстким полупространством

1.1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу в трёхмерной постановке для жёсткой сферы и основания, состоящего из вязкоупругого слоя толщины h , сцепленного с жёстким полупространством. Сфера катится по основанию с постоянной линейной скоростью V и угловой скоростью ω . Контактная поверхность сферы и основания описывается функцией $f(x, y) = -\frac{x^2 + y^2}{2R}$, где R – радиус сферы. Введём неподвижную систему координат (x', y', z') , связанную с основанием, и подвижную (x, y, z) , связанную с катящейся сферой, так что:

$$x' = x + Vt, \quad (1.1)$$

$$y' = y, \quad (1.2)$$

$$z' = z. \quad (1.3)$$

В данной задаче движение сферы считается установившимся по отношению к системе координат (x, y, z) , поэтому перемещения и напряжения в этой системе координат являются функциями координат (x, y, z) и не зависят явно от времени. Сфера находится под действием нагрузки P , действующей по нормали к поверхности слоя. Схема качения сферы по основанию приведена на рис. 1.

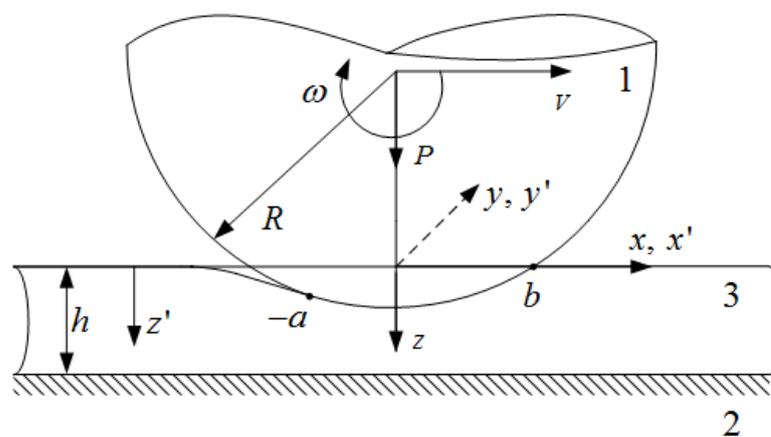


Рисунок 1. Схема качения сферы (1) по полупространству (2), сцепленному с вязкоупругим слоем (3)

Для описания нормальной и касательной податливости слоя используется модель Кельвина, которая представляет собой последовательное соединение пружины и элемента Фойгта и обладает ограниченной ползучестью:

$$w(x', y', t) + T_\varepsilon^{(p)} \frac{\partial w(x', y', t)}{\partial t} = \frac{h}{E_L^{(p)}} \left(p(x', y', t) + T_\sigma^{(p)} \frac{\partial p(x', y', t)}{\partial t} \right), \quad (1.4)$$

$$u(x', y', t) + T_\varepsilon^{(\tau)} \frac{\partial u(x', y', t)}{\partial t} = \frac{h}{E_L^{(\tau)}} \left(\tau(x', y', t) + T_\sigma^{(\tau)} \frac{\partial \tau(x', y', t)}{\partial t} \right), \quad (1.5)$$

где $w(x', y', t)$ и $u(x', y', t)$ – нормальное и касательное перемещения вязкоупругого слоя, $T_\varepsilon^{(p)}$, $T_\sigma^{(p)}$ – времена последействия и релаксации в нормальном направлении, $T_\varepsilon^{(\tau)}$, $T_\sigma^{(\tau)}$ – в касательном, $E_L^{(p)}$ и $E_L^{(\tau)}$ – длительные модули упругости в нормальном и касательном направлениях, $p(x', y', t)$ – нормальное напряжение, $\tau(x', y', t)$ – касательное напряжение в области контакта.

Для упрощения постановки задачи будем считать длительные модули упругости материала вязкоупругого слоя в касательном и нормальном направлениях одинаковыми: $E_L^{(p)} = E_L^{(\tau)} = E_L$.

В подвижной системе координат соотношения (4) и (5) принимают следующий вид:

$$w(x, y) - T_\varepsilon^{(p)} V \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = \frac{h}{E_L} \left(p(x, y) - T_\sigma^{(p)} V \frac{\partial p(x, y)}{\partial x} \right), \quad (1.6)$$

$$u(x, y) - T_\varepsilon^{(\tau)} V \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{h}{E_L} \left(\tau(x, y) - T_\sigma^{(\tau)} V \frac{\partial \tau(x, y)}{\partial x} \right), \quad (1.7)$$

В условиях качения сферы по основанию, которое включает в себя вязкоупругий слой, область контакта разбивается на подобласти сцепления Ω_A и проскальзывания Ω_S . В подобласти проскальзывания абсолютное значение касательного напряжения связано с нормальным давлением по закону

Кулона – Амонтона, и его направление противоположно скорости проскальзывания:

$$|\tau(x, y)| = \mu p(x, y), \quad (1.8)$$

где μ – коэффициент трения скольжения. В случае полного скольжения равенство (1.8) выполняется на всей области контакта сферы и основания.

В подобласти сцепления Ω_A имеет место следующее неравенство:

$$|\tau(x, y)| \leq \mu p(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_A \quad (1.9)$$

Также в данной подобласти равны скорости контактирующих точек сферы и вязкоупругого слоя. В системе координат (x', y', z') для касательных смещений точек сферы и основания выполняется соотношение [72]:

$$\frac{du(x', y', t)}{dt} = V - \omega R + \frac{du_1(x', y', t)}{dt}, \quad z = 0, \quad (x', y') \in \Omega'_A, \quad (1.10)$$

После перехода в подвижную систему координат уравнение (1.10) примет следующий вид:

$$-\frac{du_1(x, y)}{dx} + \frac{du(x, y)}{dx} = \Delta, \quad z = 0, \quad (x, y) \in \Omega_A. \quad (1.11)$$

Сфера и полупространство в данной постановке считаются жёсткими, поэтому получим условие для производных касательных перемещений точек вязкоупругого слоя:

$$\frac{du(x, y)}{dx} = \Delta, \quad z = 0, \quad (x, y) \in \Omega_A \quad (1.12)$$

$$\Delta = \frac{\omega R - V}{V}, \quad (1.13)$$

где Δ – величина продольного относительного проскальзывания.

Для всех точек из области контакта выполняется соотношение:

$$w(x, y) = D - \frac{x^2 + y^2}{2R}, \quad (x, y) \in \Omega \quad (1.14)$$

где R – радиус сферы, D – максимальная глубина внедрения точек сферы в основание.

Вязкоупругий слой считается сцепленным с полуплоскостью, поэтому на границе раздела должны быть выполнены следующие условия:

$$u(x, y, h^-) = u(x, y, h^+), \quad w(x, y, h^-) = w(x, y, h^+), \quad (1.15)$$

$$p(x, y, h^-) = p(x, y, h^+), \quad \tau(x, y, h^-) = \tau(x, y, h^+), \quad (x, y) \in \Omega \quad (1.16)$$

1.2 Метод решения

1.2.1 Переход к решению системы задач в плоской постановке

Для расчёта нормального давления и касательного напряжения на площадке контакта применяется метод полос, который описан в [11] Хейнсом и Оллертоном. Благодаря разбиению области контакта на тонкие полосы, ориентированные вдоль движения катящегося тела, данный метод позволяет вместо исходной пространственной задачи решать систему плоских задач. Схема разбиения области контакта по методу полос показана на рис. 2.

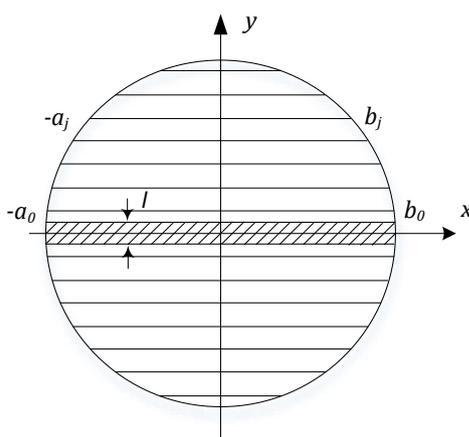


Рисунок 2. Область контакта, разделённая по методу полос, где $(-a_j, b_j)$ – границы области контакта j -й полосы, l – толщина полосы

Таким образом, для каждой полосы решается плоская задача нахождения нормального давления и касательного напряжения на области контакта. Заметим, что для задачи в данной постановке метод полос даёт точное решение.

1.2.2 Расчёт нормального напряжения для полосы

В принятой модели вязкоупругого слоя нормальные и касательные контактные напряжения не зависят друг от друга, поэтому для каждой полосы области контакта сначала найдём распределение нормального напряжения. Затем

определим касательное перемещение точек вязкоупругого слоя и касательное напряжение в области контакта.

Распределение нормального давления симметрично относительно оси y , поэтому расчёт функций контактного давления и касательного напряжения проводится для половины области контакта. При этом полная нагрузка на сферу рассчитывается следующим образом:

$$P = \iint_{\Omega} p(x, y) dx dy = 2 \sum_{j=0}^N \left(l \int_{-a_j}^{b_j} p_j(x) dx \right) \quad (1.17)$$

где $p_j(x) = p(x, y_j)$.

Рассмотрим j -ую полосу области контакта сферы и основания, где $x \in (-a_j, b_j)$. В силу непрерывности функции нормального давления должно выполняться следующее граничное условие:

$$p(-a_j, y_j) = p(b_j, y_j) = 0. \quad (1.18)$$

Запишем условие для нормального перемещения точек вязкоупругого слоя на границе области контакта:

$$w(b_j, y_j) = 0. \quad (1.19)$$

Внедрение точек j -ой полосы при $x = 0$ рассчитывается по формуле:

$$d_j = D - \frac{y_j^2}{2R}, \quad (1.20)$$

где y_j – координата центра j -ой полосы по оси Oy : $y_j = lj$, l – толщина полосы, D – заданное по условию внедрение центральной полосы. Координата передней границы области контакта по направлению качения находится из геометрических соображений и равенства нулю нормального перемещения на границе области контакта (1.19):

$$b_j = (2Rd_j)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.21)$$

Значение координаты левой границы области контакта для каждой из полос определим из условия равенства нулю в данной точке нормального давления (1.18).

Из соотношений (1.6), (1.14) и (1.20) получим:

$$d_j - \frac{x^2}{2R} - T_\varepsilon^{(p)} V \frac{\partial(d_j - \frac{x^2}{2R})}{\partial x} = \frac{h}{E_L} \left(p_j(x) - T_\sigma^{(p)} V \frac{\partial p_j(x)}{\partial x} \right), \quad (1.22)$$

$$(x, y) \in \Omega.$$

Решение для задачи в данной постановке должно быть симметричным относительно оси абсцисс, поэтому расчёт проводится для одной половины области контакта.

Введём безразмерные величины:

$$\tilde{x} = \frac{x}{R}, \quad \tilde{a}_j = \frac{a_j}{R}, \quad \tilde{b}_j = \frac{b_j}{R}, \quad \tilde{d}_j = \frac{d_j}{R}, \quad \tilde{D} = \frac{D}{R},$$

$$\varepsilon_j = \frac{b_j - a_j}{a_j + b_j}, \quad \tilde{p}_j(\tilde{x}) = \frac{p_j(\tilde{x})}{E_L}. \quad (1.23)$$

В безразмерном виде толщина слоя и характеристики материала слоя в нормальном направлении описываются следующими параметрами:

$$\tilde{h} = \frac{h}{R}, \quad \alpha_T^{(p)} = \frac{T_\varepsilon^{(p)}}{T_\sigma^{(p)}}, \quad \zeta^{(p)} = \frac{T_\sigma^{(p)} V}{R}. \quad (1.24)$$

После перехода к новым переменным соотношение (1.22) и условие (1.18) запишутся в следующем виде:

$$\tilde{d}_j - \frac{\tilde{x}^2}{2} - \zeta^{(p)} \alpha_T^{(p)} \frac{\partial(\tilde{d}_j - \frac{\tilde{x}^2}{2})}{\partial \tilde{x}} = \tilde{h} \left(\tilde{p}_j(\tilde{x}) - \zeta^{(p)} \frac{\partial \tilde{p}_j(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} \right), \quad (1.25)$$

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{\Omega},$$

$$\tilde{p}_j(-\tilde{a}_j) = \tilde{p}_j(\tilde{b}_j) = 0. \quad (1.26)$$

Решая уравнение (1.25) с условием на правом конце области контакта (1.26) при известных значениях параметров вязкоупругого слоя α_T , \tilde{h} , безразмерного внедрения сферы в основание \tilde{D} и аналога числа Деборы ζ , получим выражение для распределения контактного нормального напряжения для j -ой полосы в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_j(\tilde{x}) = & -\frac{1}{\tilde{h}} \left[\tilde{D} - \frac{\tilde{b}_j^2 + \tilde{y}_j^2}{2} + \zeta^{(p)} (\alpha_T^{(p)} - 1) (\zeta^{(p)} + \tilde{b}_j) \right] e^{\frac{\tilde{x} - \tilde{b}_j}{\zeta^{(p)}}} + \\ & + \frac{1}{\tilde{h}} \left[\tilde{D} - \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}_j^2}{2} + \zeta^{(p)} (\alpha_T^{(p)} - 1) (\zeta^{(p)} + \tilde{b}_j) \right], \quad (\tilde{x}, \tilde{y}_j) \in \tilde{\Omega}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Правый конец площадки контакта \tilde{a}_j находится численно из условия равенства давления нулю на границе области контакта (1.26).

1.2.3 Нахождение касательного напряжения для полосы

В процессе качения сферы по вязкоупругому основанию при различных значениях параметров область их контакта делится на подобласти сцепления и проскальзывания.

В подобласти проскальзывания для функций касательного и нормального напряжений выполняется закон Кулона – Амонтона (1.8). Для определения функции касательного напряжения в подобласти сцепления воспользуемся соотношением (1.7) для модели вязкоупругого слоя и (1.23) для безразмерных параметров задачи. В этом случае уравнение для распределения касательных напряжений в подобласти сцепления выглядит следующим образом:

$$\tilde{u}_j(\tilde{x}) - \zeta^{(\tau)} \alpha_T^{(\tau)} \frac{\partial \tilde{u}_j(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} = \tilde{h} \left(\tilde{\tau}_j(\tilde{x}) - \zeta^{(\tau)} \frac{\partial \tilde{\tau}_j(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} \right), \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega_A. \quad (1.28)$$

где $\tilde{u}_j(\tilde{x}) = \frac{u(\tilde{x}, \tilde{y}_j)}{R}$ – безразмерное касательное перемещение точек вязкоупругого

слоя, $\tilde{\tau}_j(\tilde{x}) = \frac{\tau(\tilde{x}, \tilde{y}_j)}{E_L}$ – безразмерное касательное напряжение, $\alpha_T^{(\tau)} = \frac{T_\varepsilon^{(\tau)}}{T_\sigma^{(\tau)}}$,

$\zeta^{(\tau)} = \frac{T_\sigma^{(\tau)} V}{R}$ – параметр материала вязкоупругого слоя и аналог числа Деборы в

касательном направлении.

Таким образом, для того, чтобы найти функцию касательного напряжения в подобласти сцепления необходимо определить касательное перемещение, как функцию от безразмерной координаты \tilde{x} .

Из постановки задачи следует, что в подобласти сцепления выполняется равенство (1.12) из которого получим выражение для функции касательного перемещения с точностью до некоторой постоянной C :

$$\tilde{u}_j(\tilde{x}) = \Delta \tilde{x} + C, (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{\Omega}_A, \quad (1.29)$$

где Δ – величина относительного продольного проскальзывания.

Для подобласти проскальзывания из соотношения (1.7) для модели вязкоупругого слоя и закона Кулона – Амонтона (1.8) получим уравнение для поиска функций касательного перемещения с точностью до некоторой постоянной:

$$\tilde{u}_j(\tilde{x}) - \zeta^{(\tau)} \alpha_T^{(\tau)} \frac{\partial \tilde{u}_j(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} = \tilde{h} \left(\mu \tilde{p}_j(\tilde{x}) - \zeta^{(\tau)} \frac{\partial (\mu \tilde{p}_j(\tilde{x}))}{\partial \tilde{x}} \right), \quad (1.30)$$

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{\Omega}_S.$$

Доопределим функцию касательного перемещения в подобласти проскальзывания с помощью условия равенства нулю её значения на соответствующей границе области контакта:

$$\tilde{u}_j(-\tilde{a}_j) = \tilde{u}_j(\tilde{b}_{jj}) = 0, (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{\Omega}. \quad (1.31)$$

Для определения неизвестной постоянной C из (1.29) и координат точек, в которых одна подобласть переходит в другую, воспользуемся условиями непрерывности функций касательного перемещения и напряжения на границах подобластей сцепления и проскальзывания:

$$\tilde{u}_j(\tilde{x}_i - 0) = \tilde{u}_j(\tilde{x}_i + 0), \quad (1.32)$$

$$\tilde{\tau}_j(\tilde{x}_i - 0) = \tilde{\tau}_j(\tilde{x}_i + 0), \quad (1.33)$$

где $i = 1, 2, \dots, k, k+1$ – общее число подобластей проскальзывания и сцепления.

В подобласти проскальзывания касательное перемещение направлено противоположно касательному напряжению, поэтому связь между данными функциями можно представить в следующем виде:

$$\tilde{\tau}_j(\tilde{x}) = \mu \tilde{p}_j(\tilde{x}) \cdot \text{sign}\left(\frac{\partial \tilde{u}_j(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} - \Delta\right), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{\Omega}_S. \quad (1.34)$$

При численном расчёте касательных напряжений и перемещений в области контакта для отдельной полосы использовался следующий алгоритм. При

заданных характеристиках вязкоупругого слоя и сферы варьировался параметр Δ (величина относительного проскальзывания точек сферы и основания в области сцепления) и затем строился график зависимости касательного напряжения от координаты точки в области контакта. Количество точек пересечения функций касательного напряжения, соответствующих зонам сцепления и проскальзывания, равно предполагаемому количеству данных зон в области контакта.

1.3 Анализ влияния свойств промежуточного слоя на контактные характеристики при качении

Разработанный метод решения был использован для расчёта распределения нормальных и касательных контактных напряжений при качении сферы по вязкоупругому слою с различными значениями отношения времён последействия и релаксации. В силу симметрии задачи относительно оси абсцисс решение определялось только для половины области контакта.

Проведён анализ влияния величины внедрения и скорости качения сферы на конфигурацию области контакта. На рис. 3 приведены изображения областей контакта точек сферы и вязкоупругого слоя при различных значениях максимального внедрения и безразмерной скорости качения сферы. Также в скобках приведены рассчитанные значения соответствующей безразмерной нагрузки на сферу. Результаты показывают, что с ростом максимального внедрения точек сферы (рис. 3а) и скорости качения (рис. 3б) увеличивается размер области контакта. Так как передняя граница области контакта при заданном внедрении определяется из геометрических соображений (1.21), то её расположение не зависит от скорости качения сферы (рис. 3б).

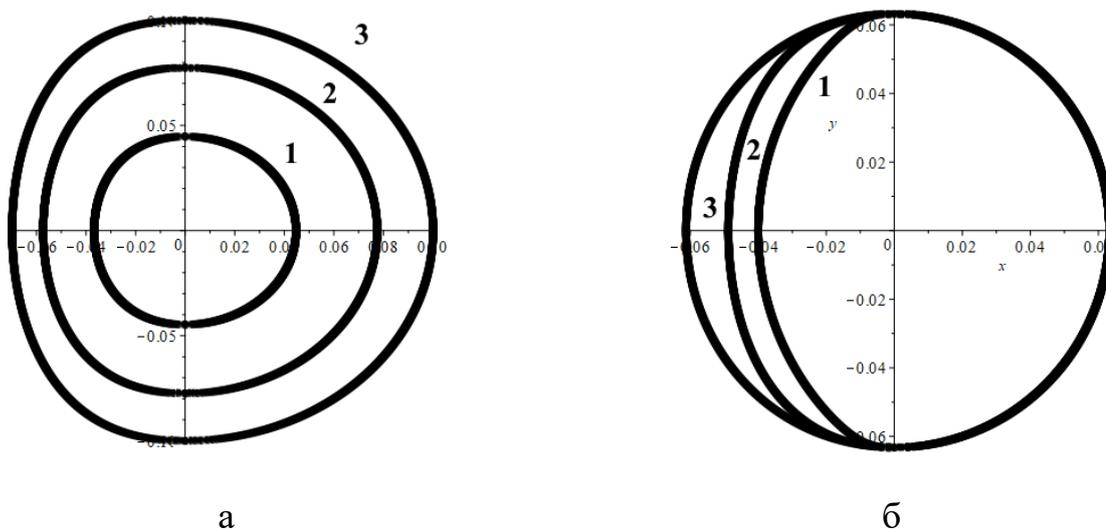


Рисунок 3. Конфигурация области контакта при $h/R = 0,02$, $\alpha_T^{(p)} = \alpha_T^{(\tau)} = 5$ и $\zeta^{(p)} = 0,1$ (а): $D/R = 0,001$ (1), $D/R = 0,003$ (2), $D/R = 0,005$ (3) и $D/R = 0,01$ (б):

$$\zeta^{(p)} = 0,01 \text{ (1)}, \zeta^{(p)} = 0,1 \text{ (2)} \zeta^{(p)} = 1 \text{ (3)}$$

Были исследованы распределения касательного напряжения и расположение зон сцепления и проскальзывания в области контакта при различных значениях коэффициента трения, механических характеристик слоя и величины относительного проскальзывания. На рис. 4 показаны распределения безразмерного касательного напряжения в области контакта при различных значениях относительного проскальзывания, а также случай полного проскальзывания, отмеченный синим цветом. Рассматривается частный случай равенства модулей упругости материала вязкоупругого слоя в нормальном и касательном направлениях. Полученные результаты показывают, что при уменьшении величины относительного проскальзывания увеличивается зона сцепления на области контакта и растёт максимальное значение касательного напряжения.

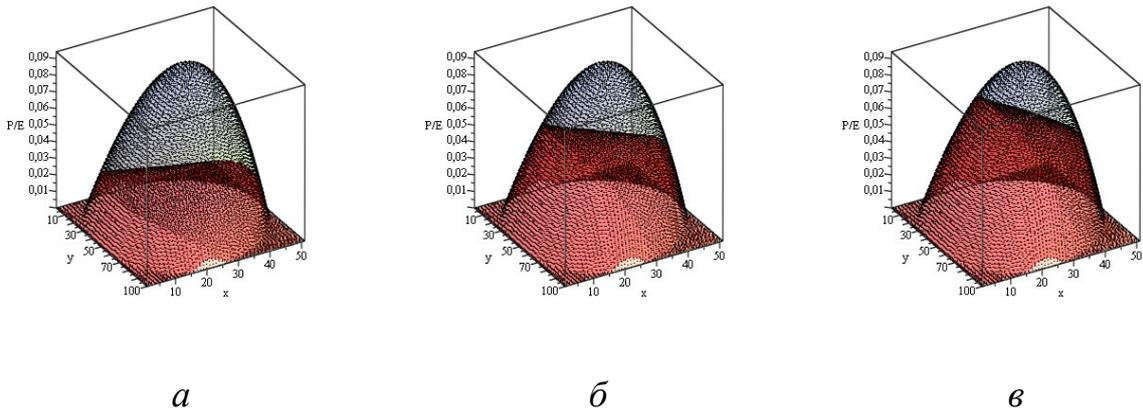


Рисунок 4. Распределение касательного напряжения в области контакта при $D/h = 0,1$, $h/R = 0,02$, $\zeta^{(p)} = \zeta^{(\tau)} = 0,05$, $\mu = 0,3$, $\alpha_T^{(p)} = \alpha_T^{(\tau)} = 5$ и Δ/R : $\Delta = 0,002$ (а), $\Delta = 0,005$ (б), $\Delta = 0,007$ (в)

Проведён анализ влияния исследуемых характеристик на коэффициент сцепления k , который рассчитывается как отношение полной касательной силы к полной нагрузке на площадке контакта и является безразмерной характеристикой качения с проскальзыванием и характеризует адгезионную составляющую силы трения [72]:

$$k = \frac{T}{P}, \quad T = \iint_{\Omega} \tau(x, y) dx dy \quad (1.35)$$

На рис. 5 показана зависимость коэффициента сцепления от абсолютной величины относительного проскальзывания при разных значениях параметров $\alpha_T^{(p)}$, $\alpha_T^{(\tau)}$ и μ .

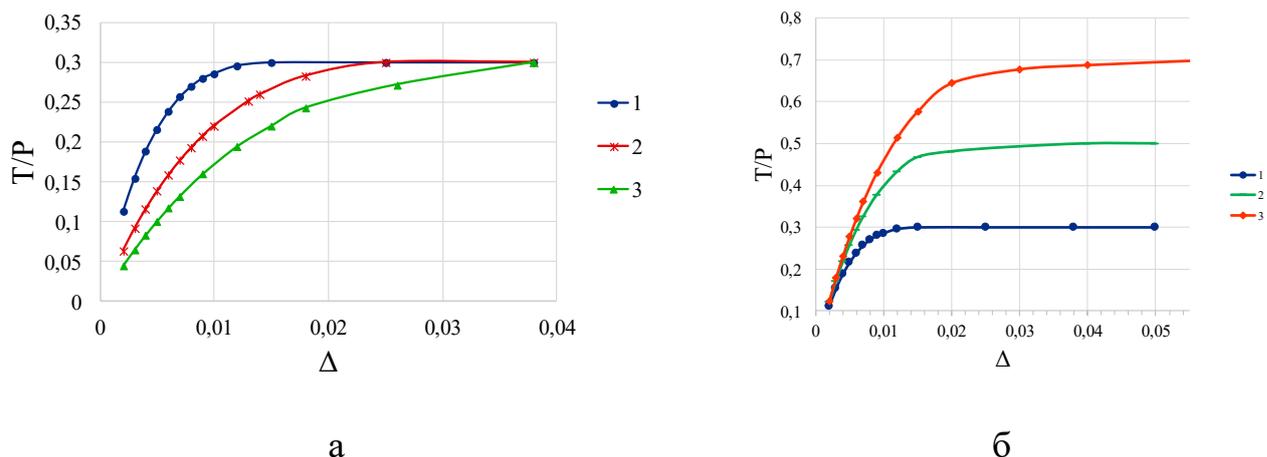


Рисунок 5. Зависимость коэффициента сцепления от величины относительного проскальзывания при $D/h = 0,1$, $h/R = 0,02$, $\zeta^{(p)} = \zeta^{(\tau)} = 0,05$, $\mu = 0,3$ (а):

$$\alpha_T^{(p)} = \alpha_T^{(\tau)} = 5 \text{ (1)}; \alpha_T^{(p)} = 10, \alpha_T^{(\tau)} = 5 \text{ (2)}, \alpha_T^{(p)} = 15, \alpha_T^{(\tau)} = 5 \text{ (3)} \text{ и}$$

$$\alpha_T^{(p)} = \alpha_T^{(\tau)} = 5 \text{ (б)}: \mu = 0,3 \text{ (1)}, \mu = 0,5 \text{ (2)}, \mu = 0,7 \text{ (3)}$$

Из результатов, представленных на рис. 5, видно, что при изменении параметров $\alpha_T^{(p)}$ и $\alpha_T^{(\tau)}$ с ростом коэффициента сцепления уменьшается зона сцепления. Наибольшее значение коэффициента сцепления соответствует случаю чистого проскальзывания, когда на всей области контакта для касательного и нормального напряжений выполняется закон Кулона.

Несимметричность распределения контактного давления на площадке контакте приводит к возникновению касательной силы, действующей на сферу в направлении, противоположном направлению качения. Деформационная составляющая коэффициента трения μ_d , которая является безразмерной характеристикой возникающей силы, определяется из следующего равенства:

$$\mu_d = \frac{M}{P}, \quad M = \iint_{\Omega} xp(x, y) dx dy \quad (1.36)$$

На рис. 6 приведены зависимости деформационной составляющей коэффициента трения μ_d и коэффициента сцепления T/P от безразмерного параметра $\zeta^{(p)} = \zeta^{(\tau)} = \zeta$ при различных значениях параметра $\alpha_T^{(p)} = \alpha_T^{(\tau)} = \alpha_T$. Результаты показывают, что при данных параметрах основной вклад в силу трения

качения вносит её адгезионная составляющая. Деформационная составляющая коэффициента трения немонотонно зависит от скорости качения сферы и при некотором её значении достигает своего максимума, а увеличение параметра α_T ведёт к смещению максимума в сторону больших скоростей.

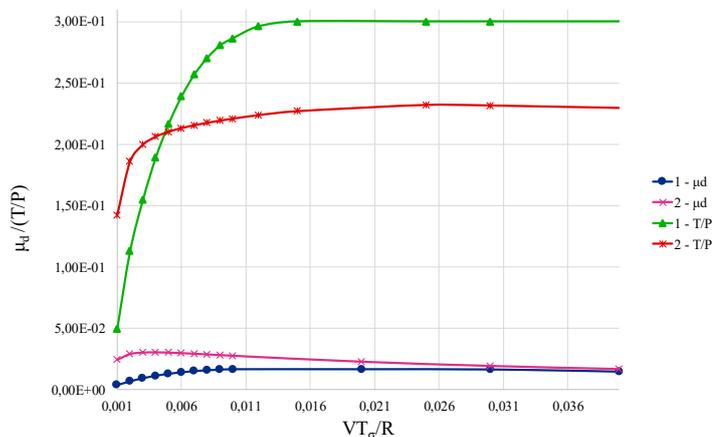


Рисунок 6. Зависимость деформационной составляющей коэффициента трения μ_d и адгезионной составляющей коэффициента трения T/P от параметра ζ при $D/h = 0,1$, $h/R = 0,02$, $\mu = 0,3$, $\Delta = 0,005$, $\alpha_T = 5$ (1), $\alpha_T = 50$ (2)

1.4 Постановка задачи о качении жёсткой сферы по вязкоупругому слою, сцепленному с жёстким полупространством, с учётом сил межмолекулярного взаимодействия

В задачах качения и скольжения межмолекулярное взаимодействие между поверхностями является одним из источников сопротивления движению [4]. Совместное влияние несовершенной упругости материалов и адгезионных свойств их поверхностей на контактные характеристики и силу трения было рассмотрено в задаче о скольжении сферического индентора по вязкоупругому основанию [66]. Межмолекулярное взаимодействие поверхностей описывалось с помощью приближения потенциала Леннарда-Джонса одноступенчатой моделью Мажид-Дагдейла. Расчёт адгезионной составляющей силы сопротивления качению для упругих тел был проведён в [116]. В данном разделе моделируется качение жёсткой сферы по вязкоупругому слою с учётом адгезионного взаимодействия их поверхностей. Для описания адгезии используется потенциал Леннарда-Джонса.

Рассматривается задача о качении сферы радиуса R с постоянной скоростью V по основанию, сцепленному с вязкоупругим слоем. Сфера и основание считаются жёсткими, механические характеристики слоя описываются моделью Кельвина. Считаем, что параметры вязкоупругого слоя в касательном и нормальном направлениях одинаковы: $E_L^{(p)} = E_L^{(\tau)} = E_L$, $\zeta^{(p)} = \zeta^{(\tau)} = \zeta$, $\alpha_T^{(p)} = \alpha_T^{(\tau)} = \alpha_T$. Схема качения сферы показана на рис. 7.

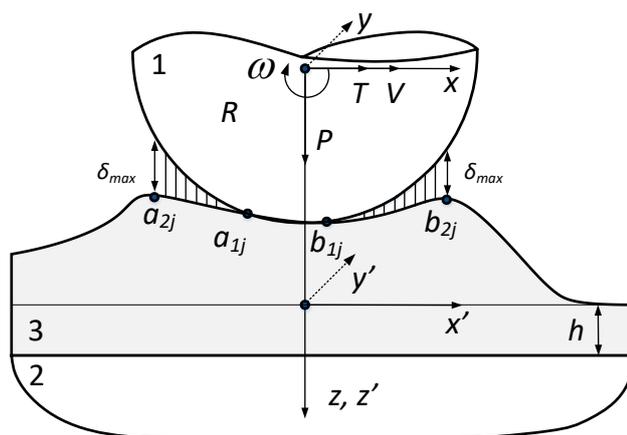


Рисунок 7. Схема качения сферы с учётом адгезионного взаимодействия

Область контакта считается гораздо меньше радиуса сферы, поэтому для описания поверхности сферы используется параболическое приближение:

Расстояние между поверхностью сферы и вязкоупругим слоем определяется соотношением:

$$\delta(x, y) = f(x, y) + D + w(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \cup \Omega_{Adh}, \quad (1.37)$$

где, D – максимальная глубина внедрения сферы.

Для описания межмолекулярного взаимодействия между сферой и вязкоупругим слоем используется потенциал Леннарда-Джонса. Зависимость адгезионного давления на поверхности слоя от величины зазора имеет вид:

$$p_a(\delta) = -\frac{8w_a}{3\delta_0} \left(\left(\frac{\delta_0}{\delta} \right)^3 - \left(\frac{\delta_0}{\delta} \right)^9 \right) \quad (1.38)$$

где δ_0 – равновесное расстояние между поверхностями, при котором сила взаимодействия равна 0, w_a – удельная работа адгезии:

$$w_a = \int_{\delta_0}^{+\infty} p_a(\delta) d\delta \quad (1.39)$$

Вне области контакта и адгезионного взаимодействия нормальное напряжение на поверхности вязкоупругого слоя считается равным 0.

1.5 Метод решения

Задача о качении сферы по вязкоупругому слою решается методом полос (см. п. 1.2), в котором область контакта делится на полосы в направлении качения. В каждой полосе ищется распределение нормального напряжения в области контакта и в области адгезионного взаимодействия. В области контакта зазор между цилиндром и слоем считается равным 0. В зонах на входе и выходе из области контакта между поверхностями действуют силы адгезионного притяжения.

При решении задачи были введены следующие безразмерные параметры:

$$\alpha_T = \frac{T_\epsilon}{T_\sigma}, \quad \zeta = \frac{VT_\sigma}{R}, \quad p_1 = \frac{p}{E_L}, \quad \tau_1 = \frac{\tau}{E_L}, \quad H = \frac{h}{R} \quad (1.40)$$

1.6 Анализ влияния сил межмолекулярного взаимодействия на контактные характеристики

1.6.1 Зависимость нормального напряжения от сил межмолекулярного взаимодействия

Распределения нормального напряжения и перемещения были получены для следующих значений параметров задачи:

$$E_L = 50 \text{ МПа}, \quad \frac{h}{R} = 0,001, \quad R = 200 \text{ нм}, \quad \frac{D}{R} = -0,0005, \quad \frac{w_a}{ER} = 0,1, \quad (1.41)$$

$$\frac{\delta_0}{R} = 0,005$$

На рис. 8 приведены пространственные распределения нормального напряжения и форма поверхности в случае разных значений модификации числа Деборы ζ .

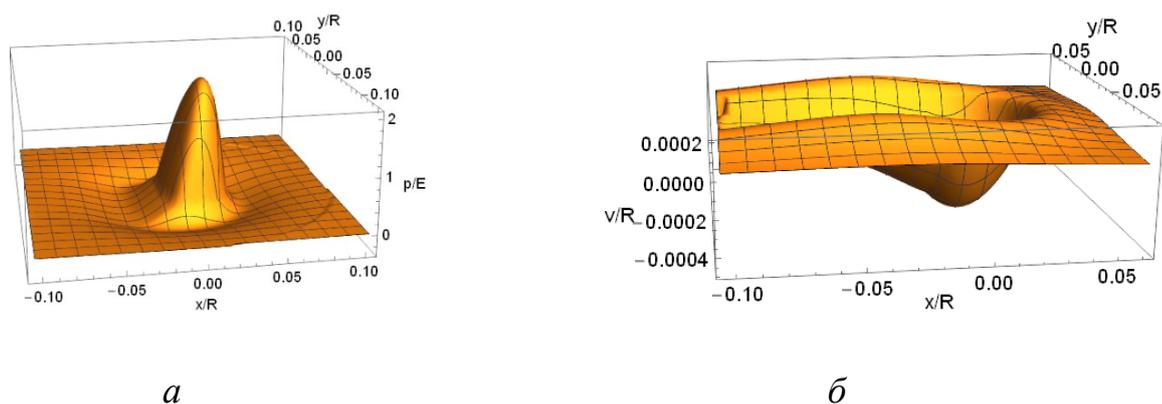


Рисунок 8. Распределения нормального напряжения (а) и перемещения (б) в области контакта и адгезионного взаимодействия при $\alpha_T = 10$, $\zeta = 0,01$

Результаты расчётов показывают, что при наличии адгезии существуют дополнительные деформации поверхности слоя в области контакта и адгезионного притяжения.

На рис. 9 показаны распределения нормального напряжения в центральной полосе области контакта и адгезионного взаимодействия в направлении качения сферы. Расчёты проводились для разных значений параметра ζ , который является модификацией числа Деборы, и отношения времён последействия и релаксации материала слоя α_T .

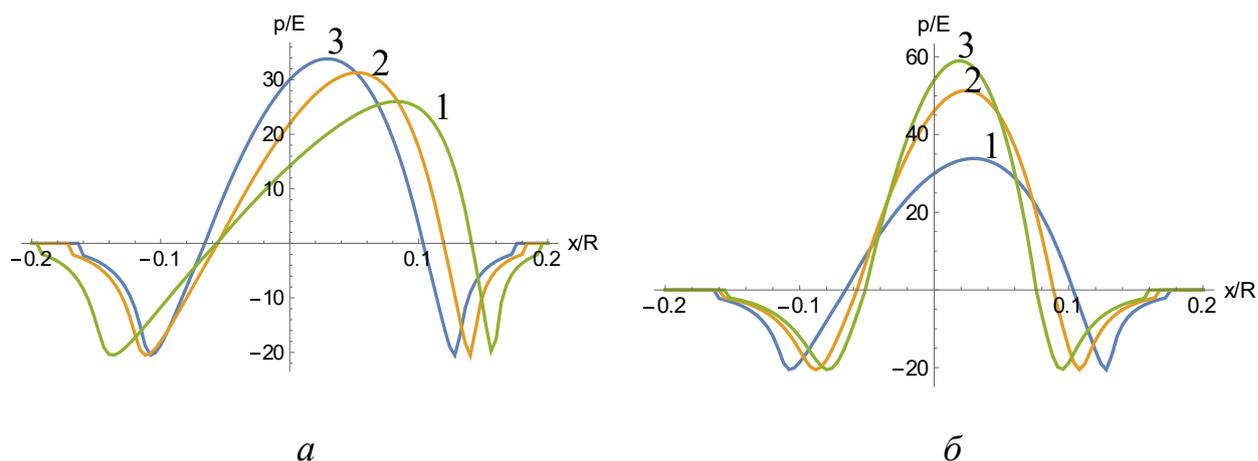


Рисунок 9. Распределение нормального напряжения в области контакта и адгезионного взаимодействия при $P / E_L = -0,07$, $\alpha_T = 10$ (а): $\zeta = 0,025$ (1), $\zeta = 0,05$ (2), $\zeta = 0,1$ (3) и $\zeta = 0,1$ (б): $\alpha_T = 10$ (1), $\alpha_T = 20$ (2), $\alpha_T = 30$ (3)

Распределения нормального и касательного напряжений были получены для постоянных значений полной нагрузки на сферу, толщины слоя, модуля упругости вязкоупругого слоя. На рис 10 приведено распределение нормального напряжения в области контакта для разных значений параметра $\zeta = T_\sigma V / R$.

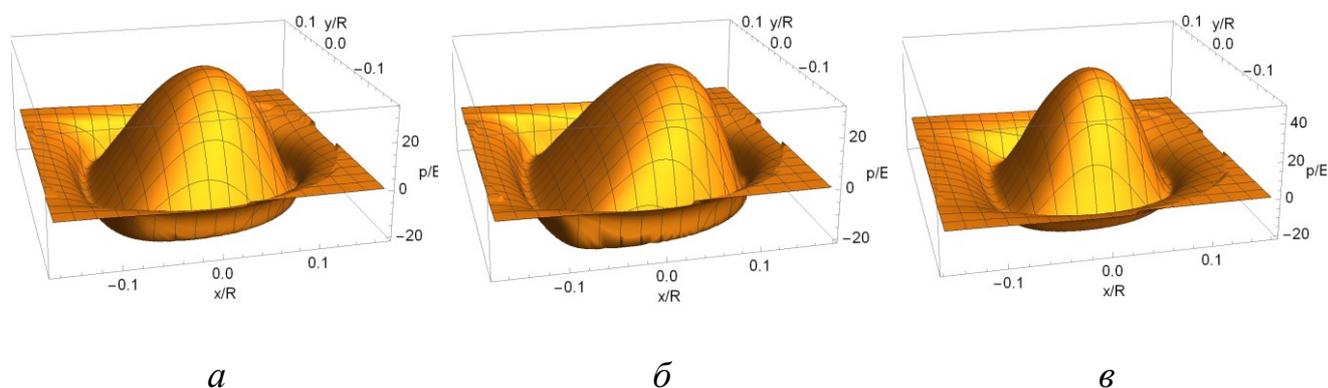


Рисунок 10. Распределение нормального напряжения в области контакта и адгезионного взаимодействия при $P / E_L = -0,07$, $\alpha_T = 10$, $\zeta = 0,1$ (а), $\alpha_T = 10$, $\zeta = 0,05$ (б), $\alpha_T = 20$, $\zeta = 0,1$ (в)

1.6.2 Анализ влияния сил межмолекулярного взаимодействия на распределение касательного напряжения

Для полученных распределений нормального напряжений были рассчитаны распределения касательного напряжения в области контакта и адгезионного взаимодействия. На рис. 11 приведено расположение зон сцепления и проскальзывания для разных значений величины относительного проскальзывания Δ и параметра $\zeta = T_\sigma V / R$.

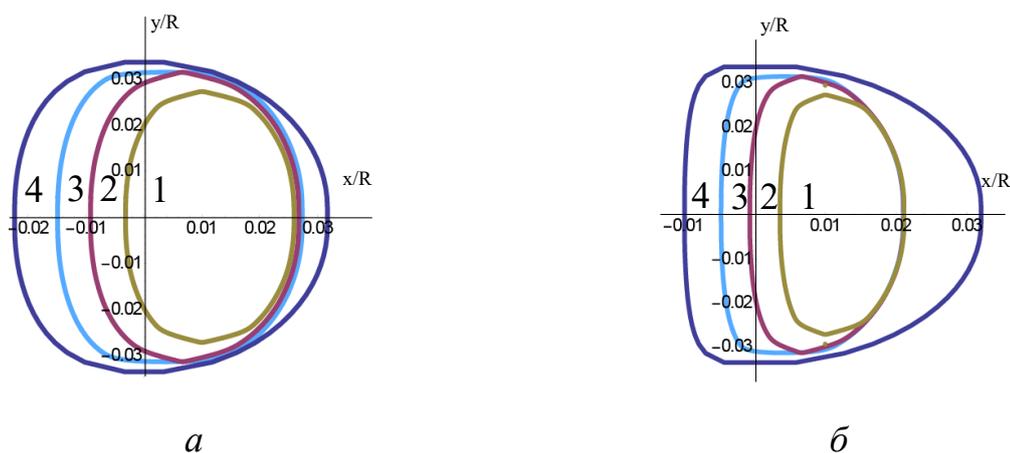


Рисунок 11. Расположение подобластей сцепления и проскальзывания при $\zeta = 0,05$ (а) и $\zeta = 0,01$ (б) и $\Delta = 0,001$ (1), $\Delta = 0,002$ (2), $\Delta = 0,003$ (3), $\Delta = 0,004$ (4)

Кривая с индексом 4 соответствует случаю полного проскальзывания и совпадает с границей области контакта. С уменьшением параметра ζ площадь зоны сцепления относительно площади области контакта уменьшается.

1.7 Выводы по главе 1

В данной главе предложен алгоритм, основанный на методе полос, для определения нормальных и касательных напряжений при качении с продольным проскальзыванием сферы по вязкоупругому слою, механическое поведение которого описывается моделью Кельвина. Определена конфигурация зон сцепления и проскальзывания при разных значениях отношения времён последдействия и релаксации материала вязкоупругого слоя и числа Деборы в нормальном и касательном направлениях, относительного продольного проскальзывания и коэффициента трения скольжения. Установлено, что увеличение коэффициента трения скольжения и величины относительного проскальзывания приводят к росту коэффициента сцепления. Из сравнения величин деформационной (механической) и адгезионной составляющих коэффициента трения качения следует, что основной вклад в силу трения качения в области контактного взаимодействия при данных параметрах вносит адгезионный механизм трения.

Построена модель качения жёсткой сферы по вязкоупругому основанию с учётом адгезионного взаимодействия, где потенциал адгезии представлен в форме Леннарда-Джонса. В области контакта и адгезионного взаимодействия получены распределения нормального и касательного напряжений. Проведён анализ конфигурации области контакта и адгезионного взаимодействия в зависимости от значения числа Деборы и отношения времён последействия и релаксации материала слоя при заданном максимальном внедрении сферы.

Глава 2. Качение упругой сферы по вязкоупругому слою, сцепленному с упругим полупространством

2.1 Постановка задачи о качении упругой сферы по вязкоупругому слою, сцепленному с упругим полупространством, при наличии продольного проскальзывания

Рассматривается контактная задача для упругой сферы (1), катящейся по тонкому вязкоупругому слою (3), связанному с упругим полупространством (2), в пространственной постановке. Сфера радиуса R катится по основанию с постоянной угловой ω и линейной скоростью. P – внешняя нормальная сила, приложенная к сфере. На рисунке 12 показана схема контакта.

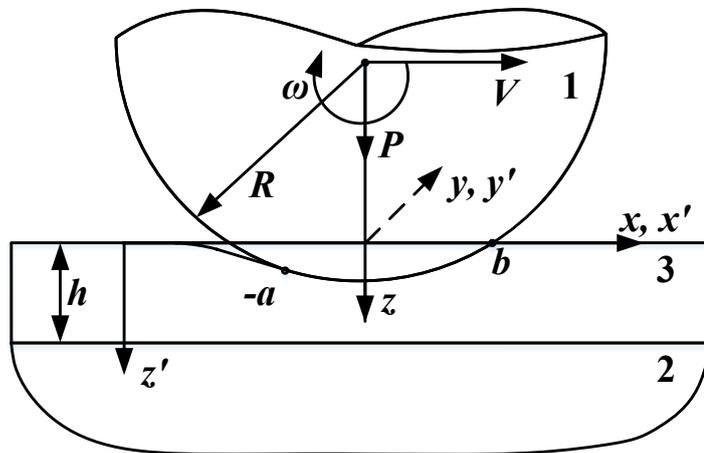


Рисунок 12. Схема качения сферы (1) по полупространству (2), сцепленному с вязкоупругим слоем (3)

Задача рассматривается в двух системах координат: неподвижной $(O'x'y'z')$ и подвижной $(Oxyz)$:

$$\begin{aligned}x' &= x + Vt \\y' &= y \\z' &= z\end{aligned}\tag{2.1}$$

Ось x подвижной системы координат $(Oxyz)$ находится на поверхности недеформированного вязкоупругого слоя, и ее направление совпадает с направлением качения сферы. Ось z перпендикулярна поверхности недеформированного слоя и направлена к центру сферы.

Радиус области контакта Ω сферы и вязкоупругого слоя на порядок меньше радиуса сферы R . Поэтому форма поверхности сферы описывается с помощью параболического приближения с радиусом кривизны R :

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2R}. \quad (2.2)$$

В области контакта Ω сферы и покрытого слоем упругого полупространства выполняется следующее условие контакта, записанное в подвижной системе координат:

$$w^{(1)}(x, y) + w^{(2)}(x, y) + w^{(3)}(x, y) = D - f(x, y) \quad (2.3)$$

где $w^{(1)}(x, y)$, $w^{(2)}(x, y)$, $w^{(3)}(x, y)$ – нормальные перемещения границ упругой сферы, упругого полупространства и вязкоупругого слоя соответственно, D – внедрение сферы в вязкоупругий слой.

Нормальные перемещения границ упругой сферы ($z = 0$, $i = 1$) и упругого полупространства ($z = h$, $i = 2$) определяются следующим соотношением:

$$w^{(i)}(x, y) = \frac{1 - \nu_i^2}{\pi E_i} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \quad (2.4)$$

Здесь ν_i – коэффициент Пуассона, E_i – модуль упругости сферы ($i = 1$) и вязкоупругого полупространства ($i = 2$), $p(x, y)$ – нормальное напряжение. Считается, что в данной модели равны значения нормального напряжения на верхней границе вязкоупругого слоя ($z = 0$) и на границе между вязкоупругим слоем и упругим полупространством ($z = h$).

Нормальное перемещение вязкоупругого слоя описывается следующим соотношением:

$$w^{(3)}(x, y) = h \left[\frac{p(x, y)}{E_3^{(p)}} \right]^{m_w} \quad (2.5)$$

где h – толщина слоя, $E_3^{(p)}$ – модуль упругости слоя в нормальном направлении, m_w – параметр модели слоя ($0, 1 \leq m_w \leq 1$). Для модели Винклера параметр m_w равен 1.

Податливость слоя в касательном направлении описывается моделью Кельвина ($z = 0$):

$$u(x', y', t) + T_\varepsilon \frac{\partial u(x', y', t)}{\partial t} = \frac{h}{E_3^{(\tau)}} \left(\tau(x', y', t) + T_\sigma \frac{\partial \tau(x', y', t)}{\partial t} \right) \quad (2.6)$$

где $u(x', y', t)$ – перемещение слоя в касательном направлении, $\tau(x', y', t)$ – касательное напряжение, T_ε , T_σ – времена последействия и релаксации материала вязкоупругого слоя ($T_\varepsilon > T_\sigma$), $E_3^{(\tau)}$ – модуль упругости материала слоя в касательном направлении.

В подвижной системе координат (x, y, z) соотношение (2.6) имеет вид ($z = 0$):

$$u(x, y) - T_\varepsilon V \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{h}{E_3^{(\tau)}} \left(\tau(x, y) - T_\sigma V \frac{\partial \tau(x, y)}{\partial x} \right). \quad (2.7)$$

При качении границы зон сцепления Ω_A и проскальзывания Ω_S заранее неизвестны и определяются из условий непрерывности напряжений и перемещений на границах зон. В зоне проскальзывания нормальное и касательное напряжения связаны по закону Кулона:

$$|\tau(x, y)| = \mu p(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_S \quad (2.8)$$

где μ – коэффициент трения.

В зоне сцепления равны скорости контактирующих точек вязкоупругого слоя и сферы. Считая, что касательные перемещения границы сферы гораздо меньше касательных перемещений границы слоя, получим:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \Delta = \frac{\omega R - V}{V}, \quad (x, y) \in \Omega_A \quad (2.9)$$

где Δ – величина относительного продольного проскальзывания.

В зоне сцепления для касательного и нормального напряжений выполняется следующее неравенство:

$$|\tau(x, y)| \leq \mu p(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_A \quad (2.10)$$

На границах зон сцепления и проскальзывания выполняются условия непрерывности для функций касательного напряжений и перемещения.

2.2 Метод решения задачи качения упругой сферы по вязкоупругому слою, сцепленному с упругим полупространством, основанный на методе полос

2.2.1 Метод нахождения нормального напряжения

В предположении, что касательное напряжение не влияет на нормальное, задача решается в два этапа. Сначала ищется распределение нормального напряжения в области контакта сферы и слоистого полупространства. Затем результаты используются для расчета распределения напряжения сдвига.

Подставляя выражения для нормального перемещения слоя (2.5) и нормального перемещения (2.4) полупространства и сферы в равенство (2.3), получим следующее уравнение для расчета нормального напряжения в области контакта:

$$K_{12} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} d\xi d\eta + h \left[\frac{p(x, y)}{E_3^{(p)}} \right]^{m_w} = D - f(x, y) \quad (2.11)$$

где:

$$K_{12} = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \quad (2.12)$$

Для полной нагрузки P , приложенной к сфере, и нормального напряжения $p(x, y)$ выполняется условие равновесия:

$$\iint_{\Omega} p(x, y) dx dy = P \quad (2.13)$$

На границе и вне области контакта нормальное напряжение равно 0:

$$p(x, y) = 0, x \notin \Omega \quad (2.14)$$

Задача нахождения нормального напряжения считается осесимметричной, так как контактирующие тела имеют симметричную форму:

Введём следующие безразмерные параметры:

$$\rho = \frac{r}{a}, D_1 = \frac{D}{a}, P_1 = \frac{K_{12}}{a^2} P, \tilde{p}_1(\rho) = K_{12} p(a\rho),$$

$$B = \frac{h}{a \left(K_{12} E_3^{(p)} \right)^{m_w}}, c = \frac{a}{2R}, g(\rho) = \frac{f(\rho a)}{a} = c\rho^2, \quad (2.15)$$

где a – радиус области контакта.

Тогда соотношения (2.11) и (2.13) имеют вид:

$$\int_0^1 K_1(\rho, \xi) \xi \tilde{p}_1(\xi) d\xi + B [\tilde{p}_1(\rho)]^{m_w} = D_1 - g(\rho)$$

$$2\pi \int_0^1 \tilde{p}_1(\rho) \rho d\rho = P_1$$

$$,$$

$$(2.16)$$

где

$$K_1(\rho, \xi) = \frac{4}{\rho + \xi} K \left(\frac{2\sqrt{\rho\xi}}{\rho + \xi} \right) \quad (2.17)$$

Здесь $K(t)$ – эллиптический интеграл второго рода.

Соотношения (2.16) являются основными уравнениями для нахождения нормального напряжения. Интегральное уравнение решается с помощью метода последовательных приближений, который более подробно описан в [149]. После введения функции:

$$\Psi(\rho) = B [\tilde{p}_1(\rho)]^{m_w} - g(1) + g(\rho) \quad (2.18)$$

задача сводится к расчёту предела последовательности функций:

$$\Psi_{n+1}(\rho) = -B \frac{1}{m_w} \int_0^1 \tilde{K} [\Psi_n(\xi) + g(1) - g(\xi)]^{m_w} \xi d\xi$$

$$\tilde{K} \equiv \tilde{K}(\rho, \xi) = K_1(\rho, \xi) - K_1(1, \xi)$$

$$(2.19)$$

В качестве начального приближения рассмотрим следующую функцию:

$$\Psi_0(\rho) = 0 \quad (2.20)$$

В результате получим нормальное напряжение в области контакта, как функцию от Ψ :

$$\tilde{p}_1(\rho) = B \frac{1}{m_w} [\Psi(\rho) + g(1) - g(\rho)]^{m_w} \quad (2.21)$$

2.2.2 Метод расчёта касательного напряжения

Касательное напряжение в области контакта ищется с помощью метода полос, описанного в [11], который для задач в данной постановке даёт точное решение. Область контакта делится на полосы равной ширины, затем в каждой полосе ищется решение плоской задачи качения цилиндра по вязкоупругому основанию.

Для каждой полосы выполняется закон Кулона:

$$\tau_j(x) = \mu p_j(x), \quad x \in \Omega_{S_j} \quad (2.22)$$

где:

$$\tau_{1j}(\xi) = \frac{\tau(x, y_j)}{E_3^{(\tau)}}, \quad p_{1j}(\xi) = \frac{p_j(x, y_j)}{E_3^{(\tau)}}, \quad \xi = \frac{x}{a} \quad (2.23)$$

Здесь $p_{1j}(\xi)$ и $\tau_{1j}(\xi)$ – безразмерное нормальное и касательное напряжения в j -ой полосе. Заметим, что нормальное напряжение в j -ой полосе $p_j(\xi)$ и безразмерное нормальное напряжение в области контакта $\tilde{p}_1(\xi)$ связаны как $p_j(x) = \frac{\tilde{p}_1(\xi)}{K_{12}}$. Так как касательное напряжение в области контакта симметрично относительно оси Ox , расчёты проводятся только для половины области контакта: $y \in [0, a]$.

В зоне проскальзывания касательные перемещения вязкоупругого слоя определяются из (2.7) учитывая (2.8). После перехода к безразмерным параметрам уравнение для расчёта касательного перемещения в зоне проскальзывания имеет вид:

$$u_{1j}^S(\xi) - \alpha_T \zeta \frac{\partial u_{1j}^S(\xi)}{\partial \xi_j} = h_1 \left(\mu p_{1j}(\xi) - \zeta \mu \frac{\partial p_{1j}(\xi)}{\partial \xi} \right) \quad (2.24)$$

где

$$u_{1j}^S(\xi_j) = \frac{u_j^S(\xi_j)}{a}, \quad h_1 = \frac{h}{a}, \quad \zeta = \frac{T_\sigma V}{a}, \quad \alpha_T = \frac{T_\varepsilon}{T_\sigma}. \quad (2.25)$$

Параметр ζ является аналогом числа Деборы.

Из соотношения (2.9) следует, что в зоне сцепления касательное перемещение определяется из уравнения:

$$\frac{du_{1j}^A}{d\xi_j} = \Delta = \frac{\omega R - V}{V}, \quad (2.26)$$

$$\xi_j \in \Omega_{A_j},$$

где Δ – величина относительного продольного проскальзывания.

Касательное напряжение для j -ой полосы найдётся как решение уравнения (2.24):

$$u_{1j}^A - \alpha_T \zeta \frac{\partial u_{1j}^A}{\partial \xi_j} = h_1 \left(\tau_{1j}(\xi_j) - \zeta \frac{\partial \tau_{1j}(\xi_j)}{\partial \xi_j} \right) \quad (2.27)$$

где

$$u_{1j}^A = \frac{u_j^A}{a}, \quad \xi_j \in \Omega_{A_j} \quad (2.28)$$

Для касательного напряжения и перемещения на границах зон сцепления и проскальзывания выполняются условия непрерывности:

$$\begin{aligned} u_{1j}^S(\xi_j^{(1)} + 0) &= u_{1j}^A(\xi_j^{(1)} - 0), \\ \mu p_{1j}(\xi_j^{(1)} + 0) &= \tau_{1j}(\xi_j^{(1)} - 0), \\ u_{1j}^S(\xi_j^{(2)} - 0) &= u_{1j}^A(\xi_j^{(2)} + 0), \\ \mu p_{1j}(\xi_j^{(2)} - 0) &= \tau_{1j}(\xi_j^{(2)} + 0), \end{aligned} \quad (2.29)$$

где $\xi_j^{(k)}$, $k = 1, 2$ – координаты границ между зонами сцепления и проскальзывания, для j -ой полосы $(-a_j < \xi_j^{(2)} < \xi_j^{(1)} < a_j)$, где $(-a_j, a_j)$ область контакта для j -ой полосы.

После расчёта перемещений в зоне сцепления и проскальзывания для заданной величины относительного проскальзывания Δ , касательное напряжение может быть найдено из соотношений (2.26), (2.27) и (2.29).

Повторив описанный выше алгоритм расчёта для каждой полосы, получим распределение касательного напряжения во всей области контакта и конфигурацию зон сцепления и проскальзывания.

2.3 Анализ контактных характеристик и силы трения

Как следует из анализа уравнений (2.11), (2.24) и (2.27), распределения контактных напряжений зависят от следующих безразмерных параметров: коэффициента трения скольжения; числа Деборы, параметров, описывающих механические свойства поверхностного слоя, такие как отношение времени последствия ко времени релаксации и податливость слоя в нормальном направлении и относительное проскальзывание.

Характерное распределение нормального напряжения показано на рисунке 13. При наличии тонкого промежуточного слоя между упругими телами распределение нормального напряжения отличается от решения Герца. Основное различие проявляется в периферийной части области контакта, где возникают нулевые производные нормального напряжения.

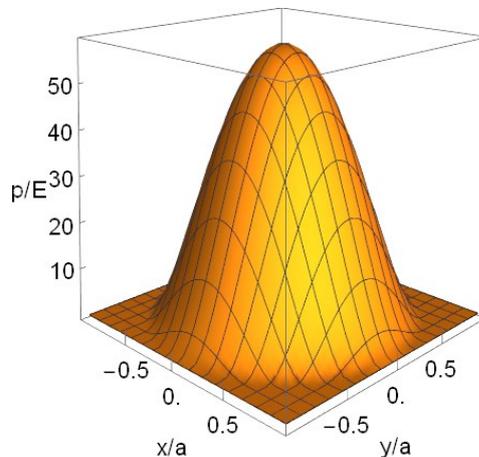


Рисунок 13. Распределение нормального напряжения для сферы, катящейся по упругому полупространству, покрытому вязкоупругим слоем, при $B = 0,24$, $c = 0,01$, $h_1 = 0,001$

На рисунке 14 приведено распределение касательного напряжения в области контакта для $B = 0,24$, $\alpha_T = 40$, $\mu = 0,3$ и $\Delta = 0,00035$.

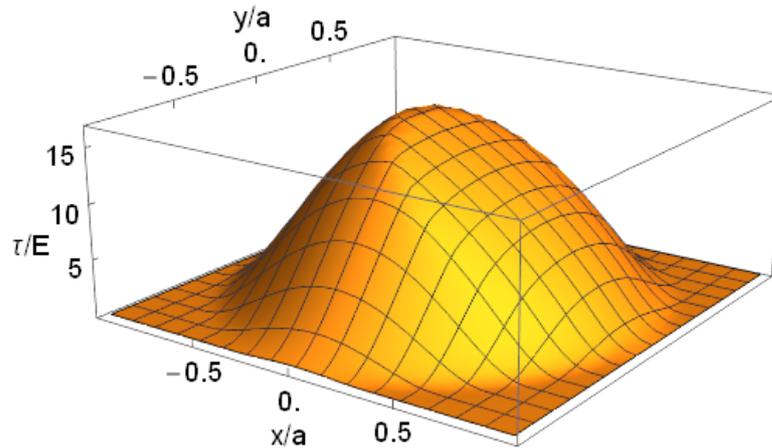


Рисунок 14. Распределение касательного напряжения для сферы, катящейся по упругому полупространству, покрытому вязкоупругим слоем, при $B = 0,24$, $c = 0,01$, $h_l = 0,001$, $\mu = 0,3$, $\zeta = 0,9$, $\alpha_T = 40$, $\Delta = 0,00035$

Результаты показывают, что при качении область контакта состоит из зон проскальзывания и сцепления. Зона сцепления находится ближе к передней стороне области контакта. В этой области касательное напряжение меньше, чем предельное касательное напряжение, соответствующее зоне проскальзывания.

Влияние относительного проскальзывания на распределение касательного напряжения и конфигурацию зон сцепления и проскальзывания показано на рис. 15 и рис. 16.

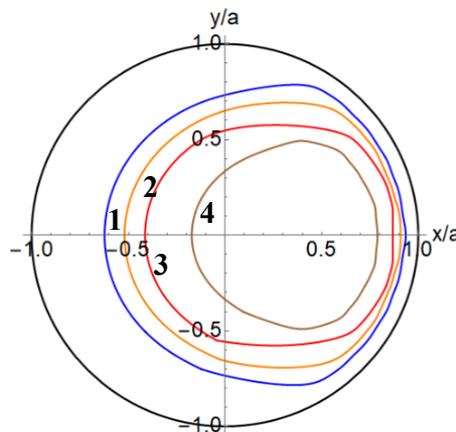


Рисунок 15. Расположение зон сцепления и проскальзывания при качении для $B = 0,24$, $c = 0,01$, $h_l = 0,001$, $\mu = 0,3$, $\zeta = 0,9$, $\alpha_T = 40$ и относительного проскальзывания: $\Delta = 0,00025$ (кривая 1), $\Delta = 0,00035$ (кривая 2), $\Delta = 0,00045$

(кривая 3), $\Delta = 0,00065$ (кривая 4) (чёрная линия соответствует границе области контакта)

Увеличение относительного проскальзывания приводит к уменьшению зоны сцепления и его смещению в направлении качения (см. рис. 15). Следует отметить, что зона сцепления всегда окружена зоной проскальзывания. Этот вывод следует из уравнения (27) и неравенства (10).

Касательное напряжение в центральной полосе (рис. 16) в зоне сцепления увеличивается с ростом относительного проскальзывания. Дальнейшее увеличение этого параметра приводит к полному проскальзыванию в области контакта. В этом случае касательное напряжение во всей области контакта описывается законом Кулона (8).

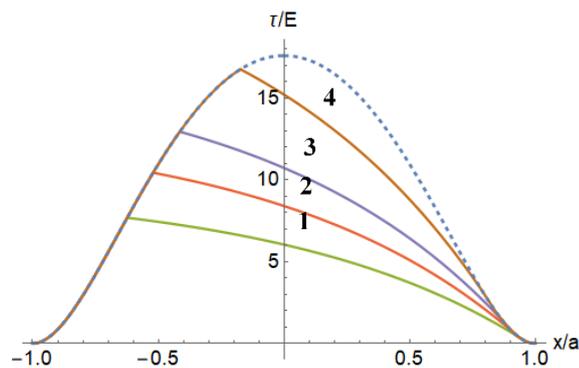


Рисунок 16. Распределение касательного напряжения в центральной полосе области контакта при $B = 0,24$, $c = 0,01$, $h_l = 0,001$, $\mu = 0,3$, $\zeta = T_\sigma V / a_0 = 0,9$,

$\alpha_T = 40$ и разных значениях относительного проскальзывания:

$\Delta = 0,00025$ (кривая 1), $\Delta = 0,00035$ (кривая 2), $\Delta = 0,00045$ (кривая 3),
 $\Delta = 0,00065$ (кривая 4) (пунктирная линия соответствует случаю полного проскальзывания)

На рисунке 17 показаны распределения касательного напряжения в центральной полосе для разных значений параметра α_T , характеризующего вязкость слоя.

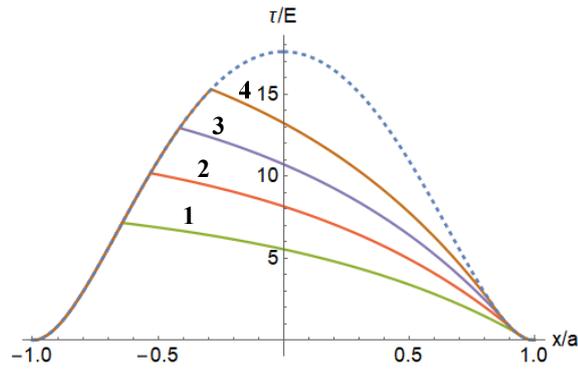


Рисунок 17. Распределение касательного напряжения для центральной полосы области контакта при $B = 0,24$, $c = 0,01$, $h_l = 0,001$, $\mu = 0,3$, $\zeta = T_\sigma V / a_0 = 0,9$, $\Delta = 0,00045$ и $\alpha_T = 20$ (кривая 1), $\alpha_T = 30$ (кривая 2), $\alpha_T = 40$ (кривая 3), $\alpha_T = 50$ (кривая 4) (пунктирная линия соответствует случаю полного проскальзывания)

Результаты иллюстрируют уменьшение размера зоны сцепления и увеличение касательного напряжения в данной подобласти при росте параметра α_T , характеризующего вязкость слоя.

Распределение касательного напряжения в центральной полосе области контакта для разных значений податливости слоя в нормальном направлении и фиксированной нагрузки приведено на рисунке 18. Относительная податливость

слоя в нормальном направлении описывается параметром $B_0 = \frac{h}{2R(K_{12}E_3^{(p)})^{m_w}}$.

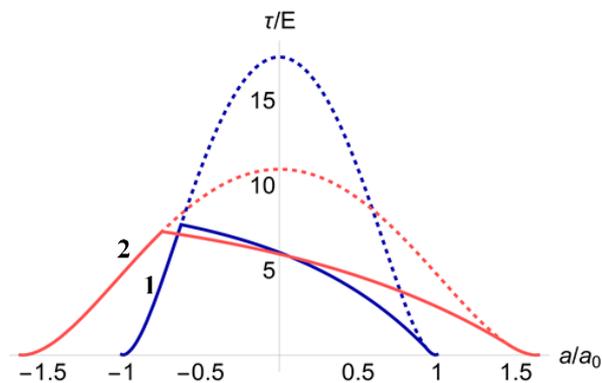


Рисунок 18. Распределение касательного напряжения в центральной полосе области контакта при $c_0 = a_0/2R = 0,01$, $h_0 = h/a_0 = 0,001$, $\mu = 0,3$, $\zeta = T_\sigma V / a_0 = 0,9$,

$\alpha_T = 40$, $\Delta = 0,00025$ и $B_0 = 0,0024$ (кривая 1), $B_0 = 0,0034$ (кривая 2), где a_0 – радиус области контакта при $B_0 = 0,0024$, a – текущий радиус области контакта (пунктирная линия соответствует случаю полного проскальзывания)

Результаты расчёта показывают, что меньшее значение параметра B_0 соответствует большему значению максимального нормального напряжения в области контакта. Радиус области контакта увеличивается с ростом значения параметра B_0 . Относительная площадь зоны сцепления увеличивается с уменьшением модуля упругости промежуточного слоя.

Анализ влияния относительного проскальзывания и вязкости слоя на коэффициент сцепления T/P (T и P – касательная и нормальная сила соответственно) приведён на рисунке 19.

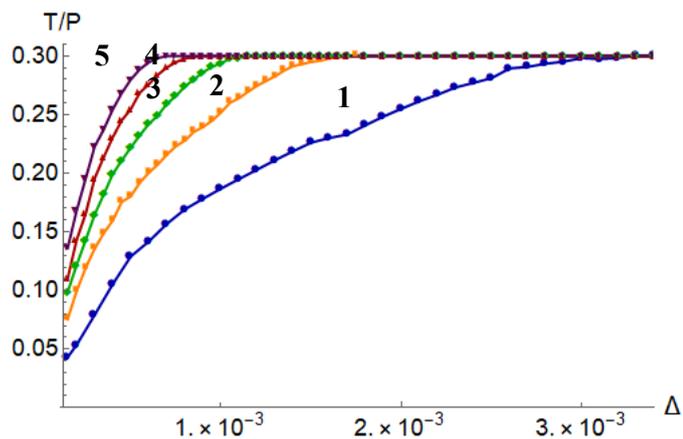


Рисунок 19. Зависимость коэффициента сцепления T/P от относительного проскальзывания при $B = 0,24$, $c = 0,01$, $h_l = 0,001$, $\zeta = 0,9$, $\mu = 0,3$ и отношении

времени последствия ко времени релаксации α_T : $\alpha_T = 10$ (кривая 1),

$\alpha_T = 20$ (кривая 2), $\alpha_T = 30$ (кривая 3), $\alpha_T = 40$ (кривая 4), $\alpha_T = 50$ (кривая 5)

Результаты показывают, что коэффициент сцепления увеличивается с ростом относительного проскальзывания. Для одних и тех же значений относительного проскальзывания увеличение отношения времени последствия (T_ε) ко времени релаксации (T_σ) (параметр α_T) ведёт к росту касательной силы. При этом случай полного проскальзывания для слоя с большим значением α_T достигается при меньших значениях относительного проскальзывания.

Зависимость коэффициента сцепления T/P от относительного проскальзывания для разных значений коэффициент трения μ , параметра ζ и вязкости слоя α_T приведены на рисунке 20.

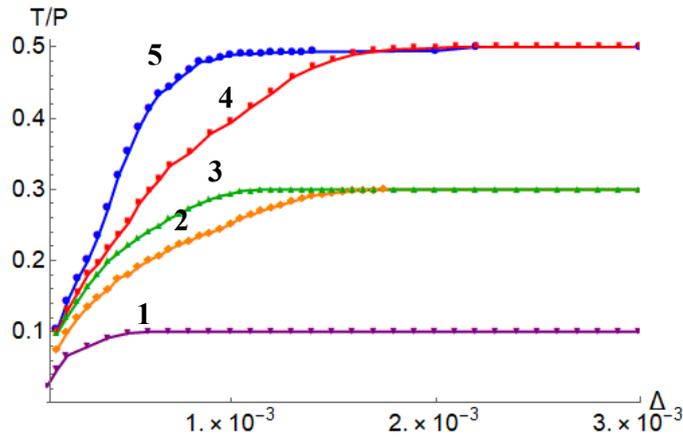


Рисунок 20. Зависимость коэффициента сцепления T/P от относительного проскальзывания при $B = 0,24$, $c = 0,01$, $h_l = 0,001$ и $\mu = 0,1$, $\zeta = 0,9$, $\alpha_T = 30$ (кривая 1), $\mu = 0,3$, $\zeta = 0,9$, $\alpha_T = 20$ (кривая 2), $\mu = 0,3$, $\zeta = 0,9$, $\alpha_T = 30$ (кривая 3), $\mu = 0,5$, $\zeta = 0,9$, $\alpha_T = 30$ (кривая 4), $\mu = 0,5$, $\zeta = 0,6$, $\alpha_T = 30$ (кривая 5)

Результаты показывают влияние свойств вязкоупругого слоя на коэффициент сцепления. В частности, увеличение коэффициента трения скольжения между слоем и роликом приводит к увеличению коэффициента сцепления и значения относительного проскальзывания, соответствующего моменту перехода от качения к полному скольжению. Из сравнения кривых 4 и 5 следует, что рост параметра ζ (увеличение времени релаксации материала слоя) приводит к уменьшению коэффициента сцепления и увеличению диапазона относительного проскальзывания, соответствующего режиму качения.

2.4 Постановка задачи качения упругой сферы по упругому полупространству, покрытому вязкоупругим слоем, с учётом продольного и бокового проскальзывания и вращения

Рассмотрим стационарное качение упругой сферы по упругому полупространству, покрытому вязкоупругим слоем. На катящееся тело (ролик)

действует постоянная нагрузка, продольная и боковая касательные силы и момент, вызывающий верчение движущегося тела вокруг нормали к границе полупространства в точке касания недеформированных поверхностей.

Задача рассматривается в подвижной системе координат (O, x, y, z) , связанной с областью контакта. Схема контакта показана на рис. 21.

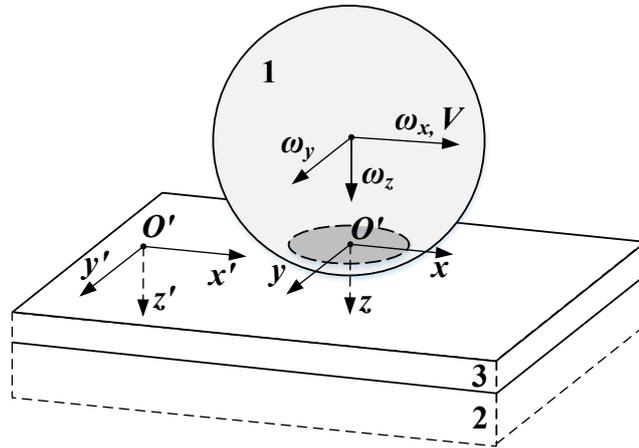


Рисунок 21. Схема качения сферы (1) по упругому полупространству (2), покрытому вязкоупругим слоем (3)

При качении область контакта считается неизменной, а движение установившимся. Область контакта сферы и вязкоупругого слоя состоит из подобластей сцепления и проскальзывания, расположение которых определяется в ходе решения задачи.

Предполагается, что в подобласти проскальзывания Ω_s выполняется закон трения Кулона-Амонтона и направление вектора касательного напряжения $\vec{\tau}(x, y)$ противоположно направлению вектора скорости проскальзывания верхнего тела относительно основания $\vec{s}(x, y)$ [24]:

$$\vec{\tau}(x, y) = -\mu p(x, y) \frac{\vec{s}(x, y)}{|\vec{s}(x, y)|}, \quad (x, y) \in \Omega_s \quad (2.30)$$

Здесь $p(x, y)$ – контактные давления, μ – коэффициент трения скольжения.

При стационарном качении компоненты вектора скорости проскальзывания $\vec{s}(x, y)$ катящегося тела относительно основания определяются следующими выражениями [1]:

$$\vec{s}(x, y) = \vec{v} - V \left(\frac{\partial \vec{u}_1(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial \vec{u}_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial \vec{u}_3(x, y)}{\partial x} \right) \quad (2.31)$$

Где

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} V\Delta_x - \omega_z y + \frac{\omega_y x^2}{2R} + \frac{\omega_y y^2}{2R} \\ V\Delta_y + \omega_z x - \frac{\omega_x x^2}{2R} - \frac{\omega_x y^2}{2R} \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

$\vec{u}_i(u_{ix}, u_{iy})$, $i = 1, 2, 3$ – касательные перемещения точек сферы, полупространства и слоя соответственно, $\vec{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ – угловая скорость вращения, Δ_x и Δ_y – величины относительного продольного и бокового проскальзывания:

$$\Delta_x = \frac{V - \omega_y R}{V}, \quad \Delta_y = \frac{\omega_x R}{V} \quad (2.33)$$

R – радиус кривизны поверхности катящейся сферы в точке O , V – скорость качения сферы.

В подобласти сцепления Ω_A скорости точек верхнего тела и основания, состоящего из вязкоупругого слоя и полупространства, равны:

$$|\vec{s}(x, y)| = 0, \quad (x, y) \in \Omega_A \quad (2.34)$$

Для касательного и нормального напряжений в подобласти Ω_A выполняется неравенство:

$$|\vec{\tau}(x, y)| \leq \mu p(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_A \quad (2.35)$$

В данной постановке предполагается, что промежуточный вязкоупругий слой не сопротивляется смятию в нормальном направлении, а его податливость в касательном направлении моделируется с помощью тела Максвелла [150], которое, как известно, обладает неограниченной ползучестью и применяется для описания механического поведения смазочных материалов в подшипниках скольжения [30, 31] и вязкоупругих свойств загущённых моторных масел [153]. В подвижной системе координат соотношение между вектором перемещений $\vec{u}_3(x, y)$ слоя в

касательном направлении и вектором касательных напряжений для используемой модели Максвелла имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \vec{u}_3(x, y)}{\partial x} = \frac{h}{E^{(\tau)}} \left(-\frac{\vec{\tau}(x, y)}{VT^{(\tau)}} + \frac{\partial \vec{\tau}(x, y)}{\partial x} \right) \quad (2.36)$$

где h – толщина вязкоупругого слоя, $E^{(\tau)}$ и $T^{(\tau)}$ – модуль упругости и время релаксации материала слоя.

2.5 Метод решения задачи качения упругой сферы по упругому полупространству, покрытому вязкоупругим слоем, основанный на вариационном методе

2.5.1 Расчёт распределения нормального напряжения

В силу сделанных предположений распределение контактных давлений $p(x, y)$ может быть рассчитано на основании решения Герца [1]:

$$p(x, y) = p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)^2}, \quad (x, y) \in \Omega \quad (2.37)$$

где p_0 – максимальное значение контактного давления, a – радиус области контакта Ω :

$$p_0 = \frac{3P}{2\pi a^2}, \quad a = \left(\frac{3(1-\nu)PR}{4G} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.38)$$

Здесь G и ν – модуль сдвига и коэффициент Пуассона материалов ролика и полупространства.

2.5.2 Метод расчёта касательного напряжения

Задача нахождения касательных контактных напряжений решается с помощью вариационного метода, в котором минимизируется функционал, построенный с учётом граничных условий для напряжений и перемещений в области контактного взаимодействия [24]:

$$F[\vec{\tau}, \vec{s}(\vec{\tau})] = \int_{\Omega} (\mu p(x, y) |\vec{s}(x, y)| - (\vec{\tau}(x, y), \vec{s}(x, y))) dx dy \quad (2.39)$$

Здесь принимается во внимание существование в области контакта подобластей сцепления и проскальзывания. Доказательство эквивалентности

задачи минимизации функционала (2.39) задаче нахождения вектор-функции контактного касательного напряжения $\vec{\tau}(x, y)$ в области контакта, удовлетворяющей граничным условиям (2.30) и (2.34), приведено в [24].

Для определения вектора скорости относительного проскальзывания примем во внимание, что разницы (2.31) касательных перемещений упругой сферы и упругого полупространства из того же материала вдоль осей Ox и Oy определяются следующими соотношениями [154]:

$$u_{1x}(x, y) - u_{2x}(x, y) = -\frac{1}{\pi G_E} \int \frac{1 - \nu \sin^2 \Theta}{r} \tau_x(x', y') dx' dy' - \frac{1}{\pi G_E} \int \frac{\nu \sin \Theta \cos \Theta}{r} \tau_y(x', y') dx' dy' \quad (2.40)$$

$$u_{1y}(x, y) - u_{2y}(x, y) = -\frac{1}{\pi G_E} \int \frac{\nu \sin \Theta \cos \Theta}{r} \tau_x(x', y') dx' dy' - \frac{1}{\pi G_E} \int \frac{1 - \nu \cos^2 \Theta}{r} \tau_y(x', y') dx' dy' \quad (2.41)$$

где:

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}, \quad \sin \Theta = \frac{y - y'}{r}, \quad \cos \Theta = \frac{x - x'}{r}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (2.42)$$

Тогда формула для расчёта вектора скорости проскальзывания $\vec{s}(x, y)$ с учётом соотношений (2.31), (2.32), (2.36), (2.40) и (2.41) примет следующий вид:

$$\vec{s}(x, y) = \vec{v}(x, y) - V \int_{\Omega} B(x - x', y - y') \vec{\tau}(x, y) dx' dy' + \frac{hV}{E_\tau} \left(\frac{\vec{\tau}(x, y)}{VT_\tau} - \frac{\partial \vec{\tau}(x, y)}{\partial x} \right) \quad (2.43)$$

Здесь $B(x - x', y - y')$ симметричная матрица, элементы которой определяются дифференцированием соотношений (2.40) и (2.41) [24]:

$$B_{11}(x - x', y - y') = -\frac{\cos \Theta (3\nu \sin^2 \Theta - 1)}{\pi G r^2}, \quad (2.44)$$

$$B_{12}(x-x', y-y') = B_{21}(x-x', y-y') = -\frac{\nu \sin \Theta (1 - 3 \cos^2 \Theta)}{\pi G r^2}, \quad (2.45)$$

$$B_{22}(x-x', y-y') = -\frac{\cos \Theta (\nu - 3\nu \sin^2 \Theta - 1)}{\pi G r^2} \quad (2.46)$$

После подстановки выражений (2.37) и (2.43) в функционал (2.39) получим выражение, которое зависит только от одного функционального элемента $\bar{\tau}(x, y)$.

Введём безразмерные функции и параметры:

$$x_1 = \frac{x}{a}, \quad y_1 = \frac{y}{a}, \quad A = \frac{a}{2R}, \quad p_G = \frac{p_0}{G}, \quad (2.47)$$

$$p_1(x_1, y_1) = \frac{p(x, y)}{p_0}, \quad \vec{\tau}_1(x_1, y_1) = \frac{\vec{\tau}(x, y)}{\mu p_0}, \quad \vec{s}_1(x_1, y_1) = \frac{\vec{s}(x, y)}{V}, \quad (2.48)$$

$$\Delta_x = \frac{V - \omega_y R}{V}, \quad \Delta_y = \frac{\omega_x R}{V}, \quad W_z = \frac{\omega_z a}{V}, \quad W_y = \frac{\omega_y a}{V}, \quad (2.49)$$

где a – радиус области контакта, Δ_x и Δ_y – продольное и боковое относительное проскальзывание.

Для описания характеристик промежуточного слоя используются следующие безразмерные параметры:

$$G_\tau = \frac{G}{E^{(\tau)}}, \quad H = \frac{h}{a}, \quad \zeta_\tau = \frac{VT^{(\tau)}}{a}, \quad (2.50)$$

где параметр ζ_τ является аналогом числа Деборы.

Численное решение вариационной задачи минимизации функционала (2.39), представленного в безразмерных переменных и функциях, получено с помощью метода проекции градиента [15, 34]. Искомая вектор-функция касательного напряжения должна удовлетворять условию непрерывности на границе подобластей сцепления и проскальзывания.

2.6 Анализ контактных касательных напряжений

Анализ полученной системы уравнений показывает, что распределения касательных контактных напряжений и напряжённое состояние полупространства в случае качения с проскальзыванием зависят от коэффициента трения

скольжения μ , упругих постоянных (ν, G) материалов ролика и полупространства, продольного и бокового относительного проскальзывания Δ_x, Δ_y , угловой скорости вращения ω_z , скорости качения сферы V и геометрических и механических характеристик вязкоупругого слоя $h, E^{(\tau)}$ и $T^{(\tau)}$.

В расчётах контактных напряжений варьируются безразмерные параметры Δ_x, Δ_y, W_z , которые связаны с относительными скоростями продольного и бокового проскальзывания и угловой скоростью вращения ω_z , соответственно, соотношениями (2.49), коэффициент трения скольжения μ , параметры вязкоупругого слоя $\beta = G_\tau H$ и ζ_τ , где G_τ, H и ζ_τ определяются соотношениями (2.50). Заметим, что параметр ζ_τ : описывает релаксационные свойства промежуточной среды (с увеличением времени релаксации слоя растут значения параметра ζ_τ).

Результаты расчетов сравниваются со случаем контакта качения двух упругих тел без промежуточного слоя ($\beta = 0$). Значение коэффициента Пуассона ν считается постоянным: $\nu = 0,3$.

Результаты расчёта контактного касательного напряжения и векторного поля скоростей проскальзывания при качении сферы по полупространству, покрытому вязкоупругим слоем, при различных значениях продольного и бокового проскальзывания и угловой скорости вращения представлены на рис. 22.

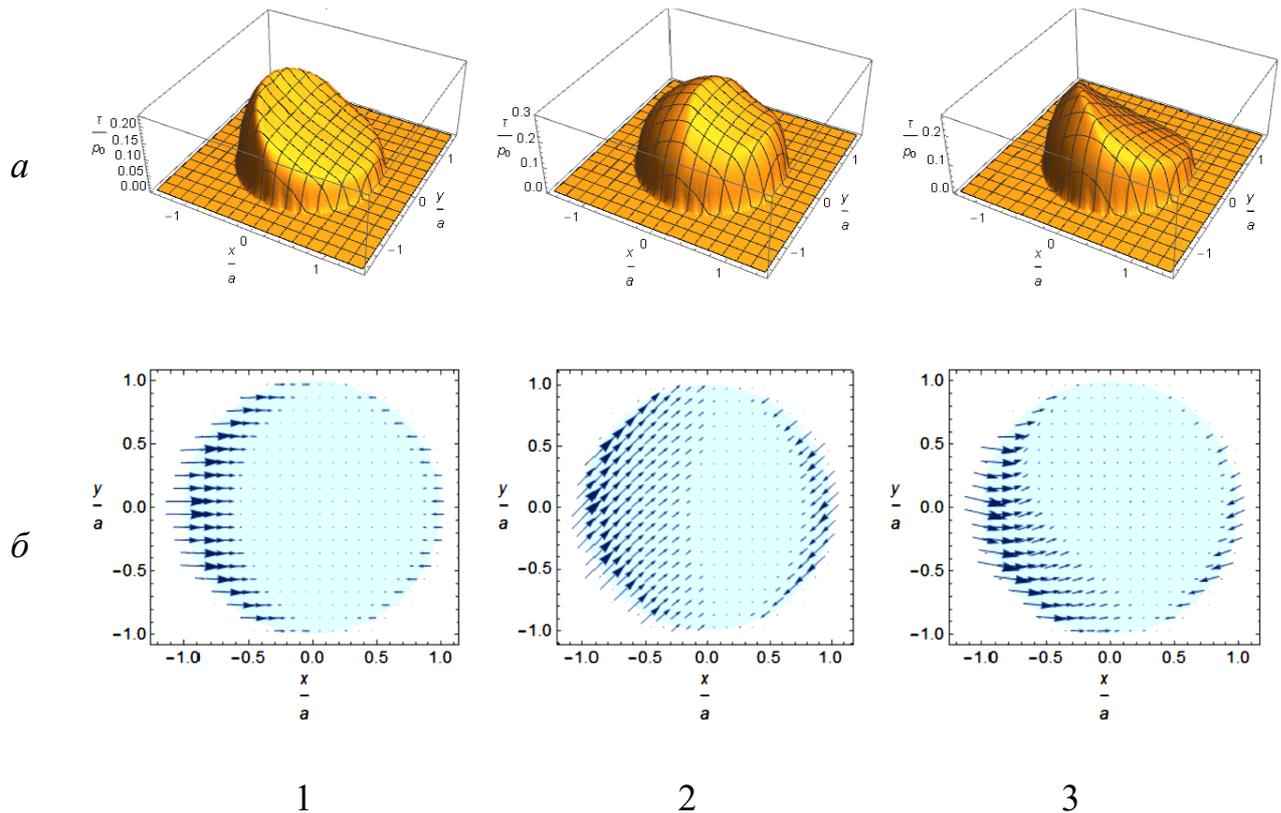


Рисунок 22. Распределение контактного касательного напряжения (*a*) и векторное поле скоростей проскальзывания (*б*) при качении сферы по полупространству, покрытому вязкоупругим слоем, при $\Delta_x = 0,011$, $\beta = 5,75$, $\zeta_\tau = 16$ и $\Delta_y = W_z = 0$ (1), $\Delta_y = 0,011$, $W_z = 0$ (2), $\Delta_y = 0$, $W_z = 0,25$ (3)

Из проведенных расчетов следует, что на величину и положение областей сцепления и проскальзывания существенным образом влияют значения относительных проскальзываний в продольном и боковом направлении, а также наличие или отсутствие верчения. Сравнение результатов, представленных на рис. 22, *a* и *б* показывает, что при наличии бокового относительного проскальзывания меняется направление скоростей проскальзывания, причём расположение подобластей сцепления и проскальзывания остаётся симметричным относительно оси $y = 0$, при этом возрастают максимальные значения касательных контактных напряжений и уменьшается подобласть сцепления (рис. 2, графики 2). При качении с продольным проскальзыванием и верчением распределение контактного касательного напряжения и расположение подобласти сцепления несимметричны относительно оси $y = 0$ (рис. 22, графики 3).

Зависимость распределения контактного касательного напряжения в сечении $y = 0$ от относительного продольного проскальзывания иллюстрируют графики на рис. 23, где пунктирные линии соответствуют случаю контакта двух упругих тел без промежуточного слоя, а сплошные – качению упругих тел при наличии слоя, характеризуемого заданными значениями параметров β и ζ_τ .

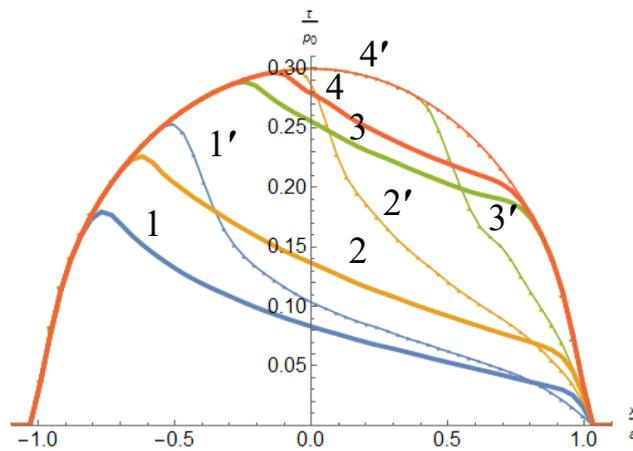


Рисунок 23. Распределение контактного касательного напряжения в сечении $y = 0$ при качении сферы по полупространству, покрытому вязкоупругим слоем, при $\mu = 0,3$, $\Delta_y = W_z = 0$ и $\beta = 5,75$, $\zeta_\tau = 16$ (1-4): $\Delta_x = 0,006$ (1, 1'), $\Delta_x = 0,011$ (2, 2'), $\Delta_x = 0,016$ (3, 3'), $\Delta_x = 0,021$ (4, 4'); кривые 1'-4' соответствуют качению сферы по полупространству без промежуточного слоя ($\beta = 0$)

Результаты расчетов показывают, что при наличии промежуточного слоя с ростом относительного продольного проскальзывания площадь подобласти сцепления уменьшается и она смещается к центру области контакта, а к передней границе области контакта по направлению качения ролика примыкает подобласть проскальзывания. При одинаковых значениях относительного продольного проскальзывания наличие слоя приводит к увеличению области сцепления.

Распределения контактного касательного напряжения в сечении $y = 0$ при различных значениях относительного бокового проскальзывания представлены на рис. 24. Результаты расчетов позволяют сделать вывод, что увеличение бокового проскальзывания, как и продольного, приводит к увеличению подобласти проскальзывания.

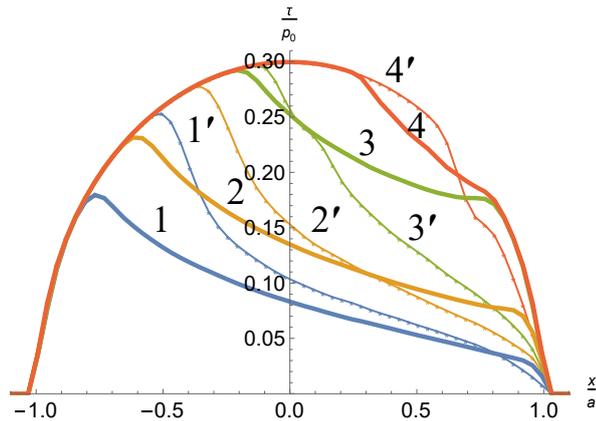


Рисунок 24. Распределение контактного касательного напряжения в сечении $y = 0$ при качении сферы по полупространству, покрытому вязкоупругим слоем при $\mu = 0,3$, $\Delta_x = 0,006$, $W_z = 0$ и $\beta = 5,75$, $\zeta_\tau = 16$ (1-4): $\Delta_y = 0$ (1, 1'), $\Delta_y = 0,006$ (2, 2'), $\Delta_y = 0,011$ (3, 3'), $\Delta_y = 0,021$ (4, 4'), кривые 1'-4' соответствуют качению сферы по полупространству без промежуточного слоя ($\beta = 0$)

Наличие вязкоупругого слоя при небольших значениях продольного и поперечного проскальзываний приводит к уменьшению максимальных значений контактных касательных напряжений в области контакта по сравнению со случаем качения без слоя.

На рис. 25 приведено распределение касательного напряжения в сечении $y = 0$ при отсутствии бокового проскальзывания и вращения и фиксированном значении продольного проскальзывания; при расчетах варьировались значения параметров β и ζ_τ , определяющих свойства вязкоупругого слоя.

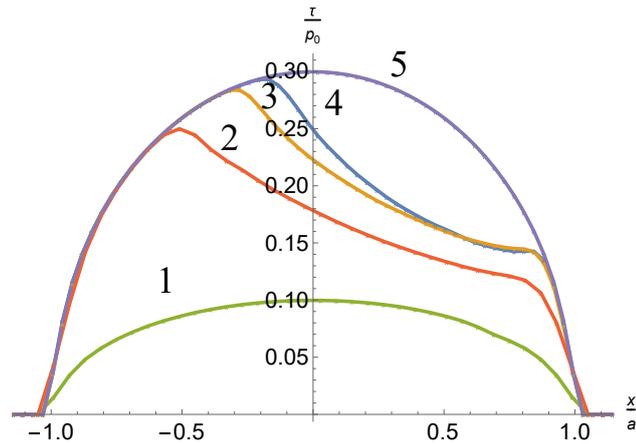


Рисунок 25. Контактное касательное напряжение в сечении $y = 0$ при качении сферы по полупространству при $\Delta_x = 0,011$, $\Delta_y = W_z = 0$ и $\mu = 0,1$ (1), $\mu = 0,3$ (2-4), $\beta = 5,75$, $\zeta_\tau = 16$ (1, 2), $\beta = 2,86$, $\zeta_\tau = 16$ (3), $\beta = 2,86$, $\zeta_\tau = 8$ (4), $\mu = 0,3$, $\Delta_x = 0,036$, $\beta = 0$ (5)

Результаты показывают, что с увеличением параметра β площадь подобласти сцепления в области контакта сферы и основания увеличивается (кривые 2 и 3). Параметр ζ_τ , который здесь является аналогом числа Деборы, также влияет на размер подобласти сцепления: при уменьшении значения ζ_τ (кривые 3 и 4) размер подобласти сцепления уменьшается, причём центр подобласти сцепления смещается в направлении качения сферы. При постоянном относительном продольном проскальзывании с ростом коэффициента трения скольжения увеличивается максимальное значение касательного напряжения.

На рис. 26 представлены распределения касательного напряжения (а) и векторное поле скоростей проскальзывания (б) при качении сферы с продольным проскальзыванием и верчением без слоя (графики 1) и со слоем (графики 2 и 3) для разных значений параметра W_z (2.49) пропорционального угловой скорости верчения сферы.

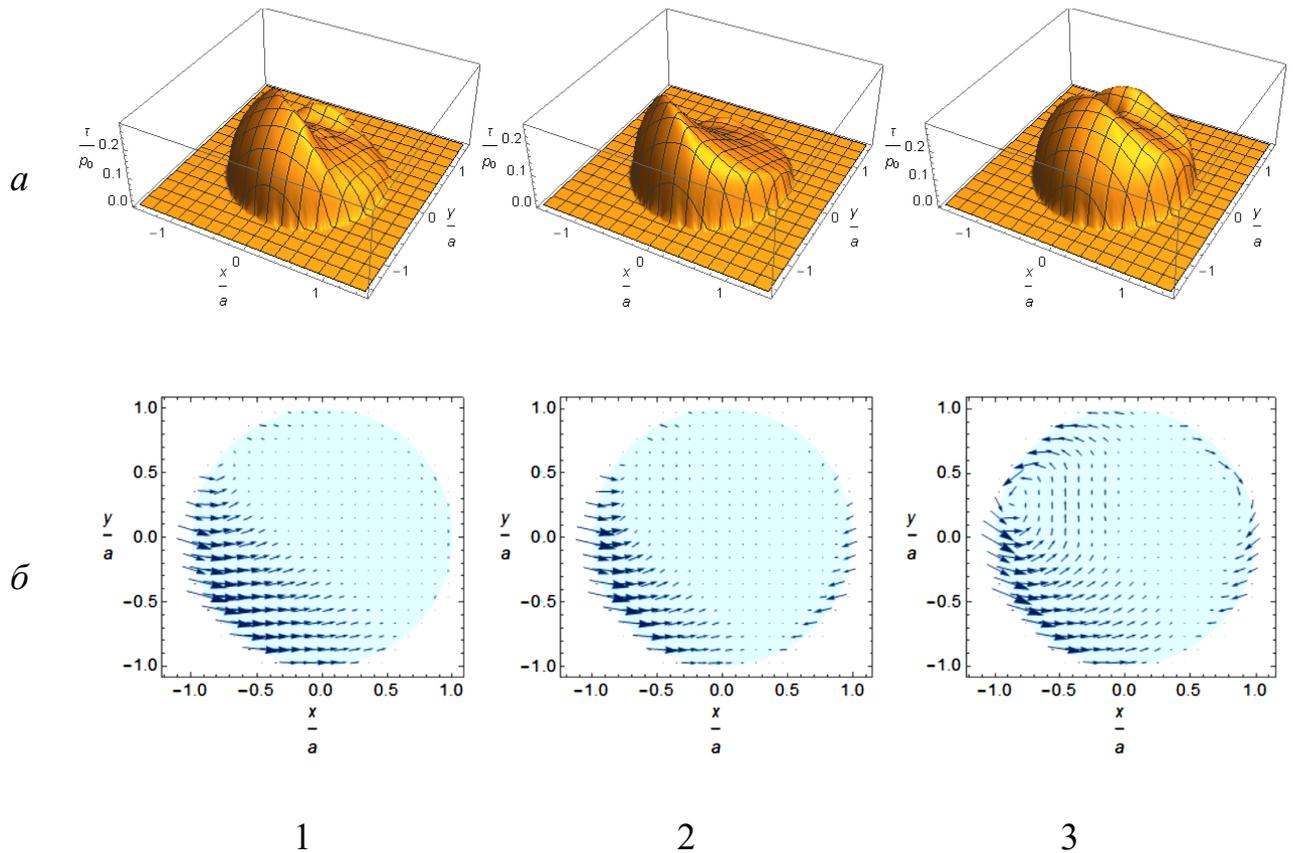


Рисунок 26. Распределение контактного касательного напряжения (*a*) и векторное поле скоростей проскальзывания (*б*) при качении сферы по полупространству, покрытому вязкоупругим слоем при $\mu = 0,3$, $\Delta_x = 0,006$, $\Delta_y = 0$ и $\beta = 0$, $W_z = 0,25$ (1), $\beta = 5,75$, $W_z = 0,25$ (2), $\beta = 5,75$, $W_z = 0,5$ (3)

При наличии верчения сферы нарушается симметрия касательных контактных напряжений (рис. 6, *a*) и подобластей сцепления и проскальзывания (рис. 6, *б*) относительно оси $y = 0$, проходящей через центр области контакта в направлении качения сферы. Сравнение касательных напряжений (рис. 6, *a*) и полей скоростей проскальзывания (рис. 6, *б*) при отсутствии (рис. 6, графики 1) и при наличии (рис. 6, графики 2) промежуточного слоя позволяет заключить, что наличие слоя увеличивает подобласть сцепления и смещает ее в сторону, противоположную скорости бокового проскальзывания, при этом возникают относительные проскальзывания на набегающей части области контакта. Увеличение скорости верчения (см. рис. 6, графики 2 и 3) приводит к уменьшению

подобласти сцепления и росту максимальных значений контактных касательных напряжений.

Результаты расчёта контактных касательных напряжений, полученные при наличии ненулевой угловой скорости вращения сферы для двух упругих тел (без промежуточного слоя), согласуются с результатами расчёта, проведенного с использованием стандартной программы CONTACT [23].

2.7 Выводы по главе 2

Разработана модель и соответствующий алгоритм расчёта границы области контакта и распределения нормального и касательного напряжений при качении с проскальзыванием упругих тел по основанию, сцепленному с вязкоупругим слоем. В случае качения с проскальзыванием только в продольном направлении был предложен алгоритм нахождения нормального и касательного контактных напряжений, основанный на методе полос. Для задачи качения упругой сферы по основанию, покрытому вязкоупругим слоем, при наличии продольного и бокового относительного проскальзываний и вращения касательные контактные напряжения были рассчитаны с помощью численной реализации вариационного метода. Проведен анализ влияния механических и геометрических характеристик вязкоупругого слоя при качении упругой сферы по вязкоупругому слою на размер области контакта, расположение зон сцепления и проскальзывания, распределение нормального и касательного напряжений и коэффициент сцепления.

Глава 3. Накопление контактно-усталостных повреждений упругих тел при качении с проскальзыванием с промежуточным слоем

3.1 Постановка задачи

Для анализа напряженного состояния упругого полупространства используются полученные в главе 2 контактные нормальные и касательные напряжения с учетом сдвиговой податливости промежуточного слоя, по которым затем определяются поля внутренних напряжений в приповерхностных слоях материала и оцениваются места концентрации максимальных касательных напряжений.

3.2 Алгоритм расчёта напряжённого состояния упругого полупространства

Для численного расчета внутренних напряжений разделим квадратную область с длиной стороны $2a$ на M элементов одинакового размера с постоянным значением нормального напряжения $p(x_i, y_i)$ и касательного напряжения $\tau(x_i, y_i)$ внутри каждого i -го элемента, где a – радиус области контакта. Компоненты тензора внутренних напряжений в каждой точке упругого полупространства рассчитываются по принципу суперпозиции на основании решений Буссинеска и Черрути для единичной сосредоточенной силы, действующей на упругое полупространство в нормальном (Oz) и касательных (Ox и Oy) направлениях [1]. Для нахождения компонентов тензора напряжений в каждой точке полупространства проводится суммирование по всем нагруженным элементам поверхности. Ниже приведено соотношение для расчёта одной из компонент тензора внутренних напряжений упругого полупространства:

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y, z) = & \sum_{i=1}^M \left(p(x_i, y_i) \iint_{\Omega_i} \sigma_x^{(p)}(\xi, \eta, x, y, z) d\xi d\eta \right) - \\ & - \sum_{i=1}^M \left(\tau_x(x_i, y_i) \iint_{\Omega_i} \sigma_x^{(\tau_x)}(\xi, \eta, x, y, z) d\xi d\eta \right) - \\ & - \sum_{i=1}^M \left(\tau_y(x_i, y_i) \iint_{\Omega_i} \sigma_x^{(\tau_y)}(\xi, \eta, x, y, z) d\xi d\eta \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\sigma_x^{(p)}$, $\sigma_x^{(\tau_x)}$, $\sigma_x^{(\tau_y)}$ – решения Буссинеска и Черрути для единичной сосредоточенной силы, действующей на упругое полупространство в нормальном (Oz) и касательных (Ox и Oy) направлениях, соответственно [1].

3.3 Метод расчёта скорости накопления контактно-усталостных повреждений в упругом полупространстве

Поврежденность материала в точке (x, y, z) характеризуется функцией $Q(x, y, z, t)$, которая зависит от амплитудных значений напряжений в данной точке. Материал разрушается, когда значение функции становится равным пороговому значению. В случае нормированной функции, пороговое значение равно 1.

В случае колеса и рельса выбирается модель накопления поврежденности, связанная с амплитудным значением максимального касательного напряжения и числом циклов. В соответствии с моделью линейного суммирования повреждений для расчёта скорости накопления контактно-усталостных повреждений используется следующая формула:

$$q(x, y, z, t) = \frac{\partial Q(x, y, z, t)}{\partial t} = c \left(\frac{\tau_{\max}(x, y, z, t)}{E} \right)^m \quad (3.2)$$

где E – модуль упругости материала полупространства, $\tau_{\max}(x, y, z)$ – наибольшее значение максимального касательного напряжения в точке (x, y, z) , c и m – постоянные модели, которые определяются из экспериментальных данных.

Из соотношения (3.2) поврежденность в произвольной точке полупространства, которая накопилась за N циклов, рассчитывается следующим образом:

$$Q(x, y, z, N) = \int_0^N q(x, y, z, n) dn + Q_0(x, y, z) \quad (3.3)$$

где N – количество циклов, $Q_0(x, y, z)$ – распределение начальной поврежденности в материале. В данной задаче начальная поврежденность принимается равной 0.

Наибольшие значения максимальных касательных напряжений на фиксированной глубине z_0 определяются их амплитудными значениями в сечении плоскостью $z = z_0$, параллельной поверхности полупространства:

$$\tau_{\max}(z_0) = \max_{x,y} \left[\frac{1}{2} (\sigma_1(x, y, z_0) - \sigma_3(x, y, z_0)) \right] \quad (3.5)$$

где $\sigma_1(x, y, z)$ и $\sigma_3(x, y, z)$ – наибольшее и наименьшее главные напряжения в точке (x, y, z) . Главные напряжения $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ являются решениями характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0, \quad (3.7)$$

при условии, что в каждой точке для них выполняется условие: $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$.

3.4 Анализ влияния свойств вязкоупругого слоя и проскальзывания на напряжённое состояние упругого полупространства в условиях трения качения

3.4.1 Анализ внутренних напряжений в упругом полупространстве при качении с продольным проскальзыванием

Для распределений нормального и касательного контактных напряжений, полученных в разделе 2.1, было рассчитано напряжённое состояние упругого полупространства. На рис. 27 показаны изолинии растягивающих-сжимающих напряжений в сечении упругого полупространства под центральной полосой области контакта ($y = 0$).

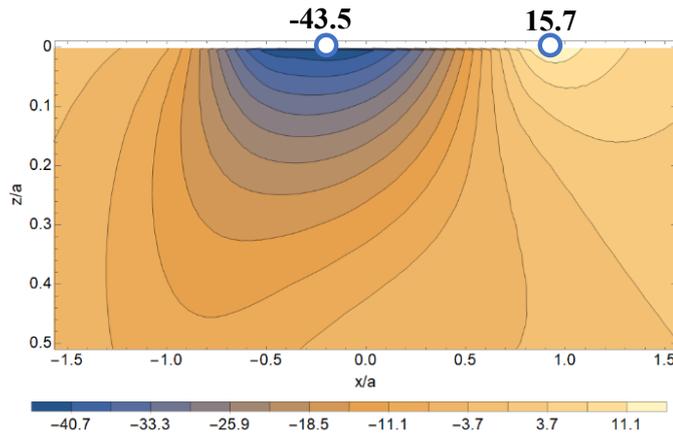


Рисунок 27. Изолинии растягивающих-сжимающих напряжений в сечении упругого полупространства ($y = 0$) при $c = 0,01$, $h_l = 0,001$, $\mu = 0,3$, $\zeta = 0,9$, $\alpha_T = 40$, $\Delta = 0,00045$

Нормальное и касательное напряжения, соответствующие данному случаю, приведены на рис. 13 и 14. Толщина вязкоупругого слоя равна $h/a = 0,001$. Области контакта соответствует диапазон $x/a \in [-1, 1]$, $z = 0$. Результаты показывают, что зона с максимальным значением растягивающих напряжений ($\sigma_x(0,9; 0; 0,001) = 15,7$) находится в части упругого полупространства под передней границе области контакта.

Растягивающие-сжимающие напряжения на поверхности упругого полупространства ($y = 0$, $z = 0,001$), рассчитанные для различных значений относительного продольного проскальзывания, приведены на рис. 28.

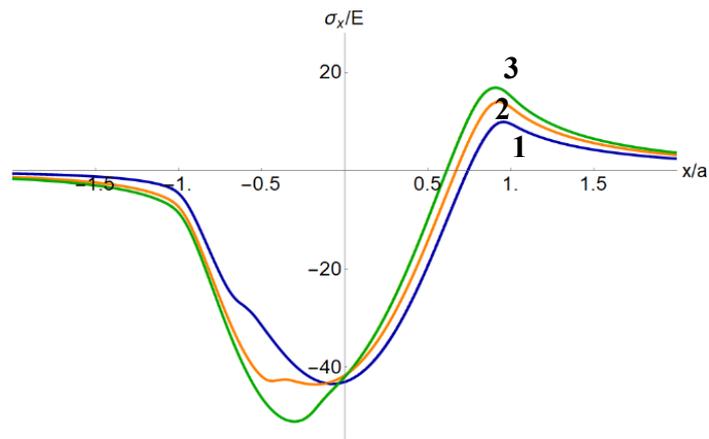


Рисунок 28. Распределение растягивающих-сжимающих напряжений на поверхности упругого полупространства ($y = 0, z = 0,001$) при $c = 0,01, h_l = 0,001, \mu = 0,3, \zeta = 0,9, \alpha_T = 40$, и $\Delta = 0,00025$ (кривая 1), $\Delta = 0,00045$ (кривая 2), $\Delta = 0,00065$ (кривая 3)

Результаты показывают, что область максимальных сжимающих напряжений находится под центром области контакта. Максимальные значения сжимающих напряжений увеличиваются с ростом относительного продольного проскальзывания.

Зависимость напряженного состояние упругого полупространства при качении с продольным проскальзыванием от коэффициента трения скольжения приведена на рис. 29.

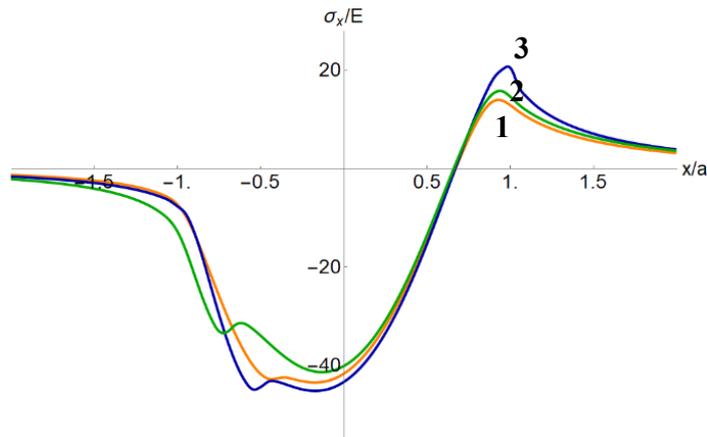


Рисунок 29. Распределение растягивающих-сжимающих напряжений на поверхности упругого полупространства ($y = 0, z = 0,001$) при $c = 0,01, h_1 = 0,001, \zeta = 0,9, \alpha_T = 40, \Delta = 0,00045$ и $\mu = 0,3$ (кривая 1), $\mu = 0,5$ (кривая 2), $\mu = 0,7$ (кривая 3)

Результаты показывают, что увеличение коэффициента трения приводит к росту сжимающих напряжений под передней границей области контакта в направлении качения сферы.

3.4.2 Анализ напряжённого состояния упругого полупространства при качении с продольным и боковым проскальзыванием и верчением

Для распределений нормального и касательного контактных напряжений, полученных в разделе 2.4, были рассчитаны внутренние напряжения в подповерхностных слоях упругого полупространства под областью контакта согласно алгоритму, изложенному в п. 3.3.

На рис. 30 показаны изолинии максимальных касательных напряжений в сечении $y = 0$ упругого полупространства под катящейся сферой, построенные при наличии промежуточного слоя и разных значениях коэффициента трения скольжения и относительного продольного проскальзывания.

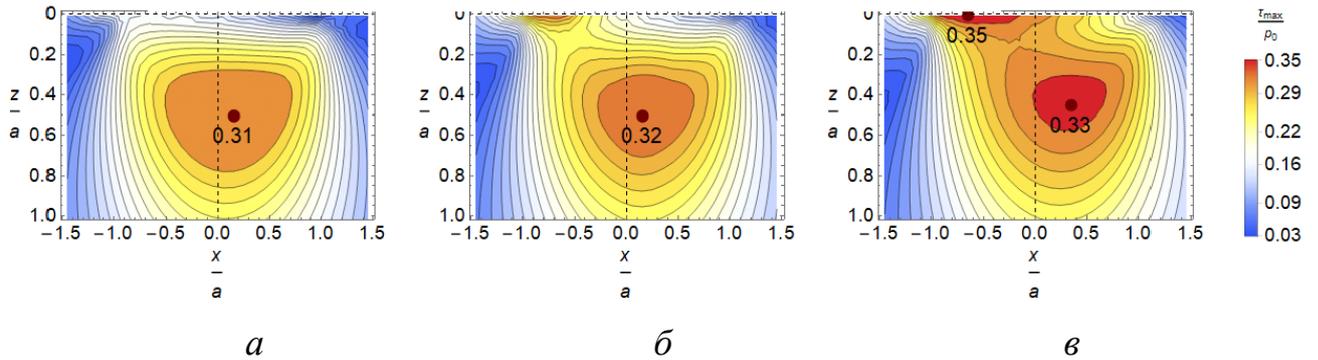


Рисунок 30. Изолинии максимальных касательных напряжений в сечении $y = 0$ полупространства при $\Delta_y = W_z = 0$, $\beta = 5,75$, $\zeta_\tau = 16$ и $\mu = 0,1$, $\Delta_x = 0,011$ (а), $\mu = 0,3$, $\Delta_x = 0,011$ (б), $\mu = 0,3$, $\Delta_x = 0,036$ (в)

В сечении полупространства плоскостью $y = 0$ область контакта находится в промежутке $-1 \leq x \leq 1$. Результаты иллюстрируют наличие локального максимума функции максимальных касательных напряжений в сечении $y = 0$ на некоторой глубине под поверхностью и появление дополнительно поверхностного локального максимума исследуемой функции с ростом коэффициента трения скольжения (соответственно, графики *а* и *б* на рис. 30). Сравнение изолиний напряжений, представленных на рис. 7, *б* и рис. 7, *в* показывает, что с ростом относительного продольного проскальзывания имеет место увеличение значений локальных максимумов максимальных касательных напряжений как под поверхностью, так и вблизи поверхности. Увеличение относительного продольного проскальзывания приводит также к смещению места концентрации максимальных касательных напряжений под поверхностью в направлении качения ролика. Изолинии максимального касательного напряжения при $\mu = 0,3$, $\Delta_x = 0,036$, показанные на рис. 30, *в*, соответствуют случаю полного проскальзывания, когда максимум функции максимальных касательных напряжений на поверхности превышает значение подповерхностного максимума. Результаты показывают, что величина относительного продольного проскальзывания слабо влияет на значение подповерхностного максимума функции максимальных касательных напряжений.

На рис. 31 приведены зависимости максимальных значений максимальных касательных напряжений от безразмерного расстояния z/a от поверхности при

отсутствии (рис. 31, *а*) и наличии (рис. 31, *б*) промежуточного вязкоупругого слоя, рассчитанные для разных значений относительного продольного проскальзывания и параметров вязкоупругого слоя.

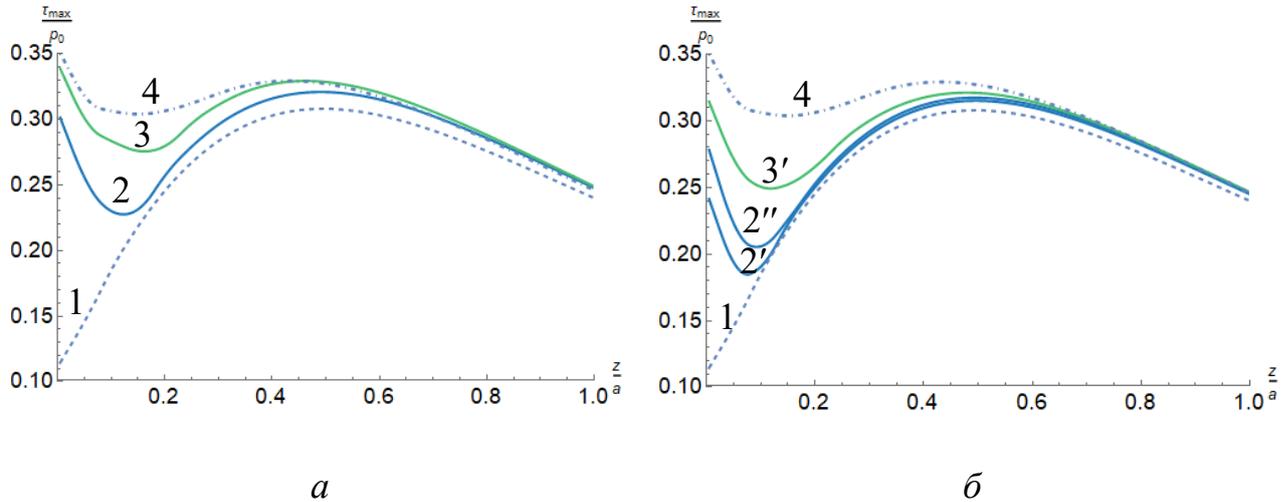


Рисунок 31. Зависимость максимальных значений максимальных касательных напряжений от координаты z при качении сферы по полупространству без слоя (*а*) и при наличии вязкоупругого слоя (*б*) при $\Delta_y = W_z = 0$, $\mu = 0,3$ и $\Delta_x = 0,006$ (2, 2', 2''), $\Delta_x = 0,011$ (3, 3'), $\Delta_x = 0,036$ (4) и параметрах слоя: $\zeta_\tau = 16$, $\beta = 5,75$ (2', 3'), $\beta = 2,86$ (2''); пунктирная кривая 1 соответствует теории Герца ($\mu = 0$)

Пунктирные кривые 1 на рис. 31, *а* и *б* соответствуют распределению максимального касательного напряжения в случае нормального контакта упругих тел (кривая Герца). Штрихпунктирные кривые 4 соответствуют случаю полного проскальзывания ($\mu = 0,3$), когда контактные касательные напряжения во всей области контакта определяются по закону Кулона. Зависимости максимальных значений максимальных касательных напряжений от глубины z для качения с проскальзыванием при разных значениях относительного продольного проскальзывания Δ_x и параметра вязкоупругого слоя β на рис. 31, *а* и *б* представлены кривыми 2, 2', 2'' и 3, 3'. Анализ результатов показывает, что при качении с проскальзыванием с увеличением относительного продольного проскальзывания Δ_x увеличивается поверхностный максимум максимальных

касательных напряжений. В случае качения с проскальзыванием при коэффициенте трения скольжения $\mu = 0,3$ и относительном продольном проскальзывании больше $\Delta_x = 0,01$ значение функции максимальных касательных напряжений на поверхности больше либо равно значению подповерхностного максимума (кривые 3, 3', 4). При наличии вязкоупругого слоя максимальные касательные напряжения вблизи поверхности уменьшаются.

Изолинии растягивающих-сжимающих напряжений σ_x вблизи поверхности упругого полупространства ($z/a = 0,005$) при качении сферы по полупространству в отсутствие (рис. 9, а) и при наличии (рис. 9, б и в) вязкоупругого слоя, показаны на рис. 32.

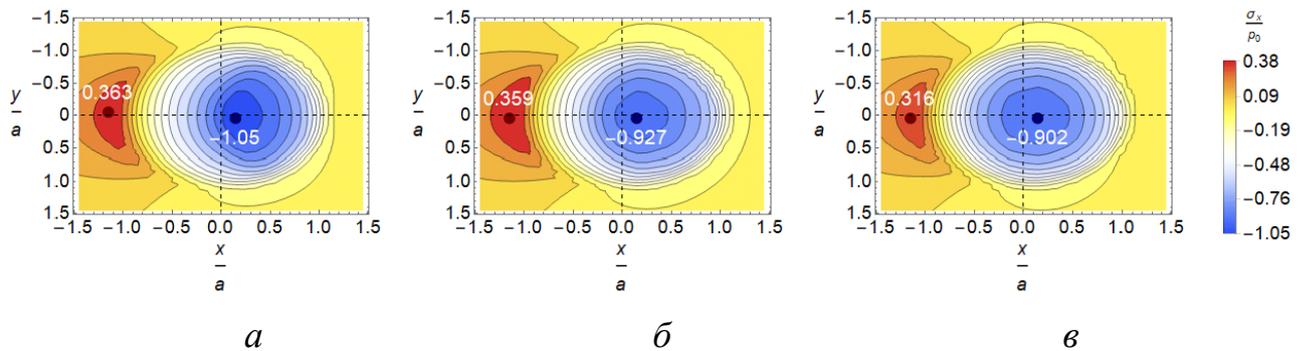


Рисунок 32. Изолинии растягивающих-сжимающих напряжений σ_x вблизи поверхности упругого полупространства ($y/a = 0, z/a = 0,005$) при $\mu = 0,3$, $\Delta_x = 0,011$, $\Delta_y = W_z = 0$ и $\beta = 0$ (а), $\beta = 2,86$, $\zeta_\tau = 16$ (б), $\beta = 5,75$, $\zeta_\tau = 16$ (в)

Из полученных результатов следует, что при качении с проскальзыванием вблизи поверхности полупространства на задней границе области контакта (по отношению к направлению качения) имеет место концентрация растягивающих напряжений; максимум сжимающих напряжений находится ближе центру области контакта. Сравнение изолиний (рис. 32, б и в) показывает, что с увеличением параметра β , характеризующего упругие свойства материала промежуточного слоя, уменьшаются по абсолютной величине значения растягивающих и сжимающих напряжений на поверхности полупространства.

Изолинии растягивающих-сжимающих напряжений σ_x вблизи поверхности полупространства, рассчитанные для разных значений относительного продольного проскальзывания и угловой скорости вращения, приведены на рис. 33.

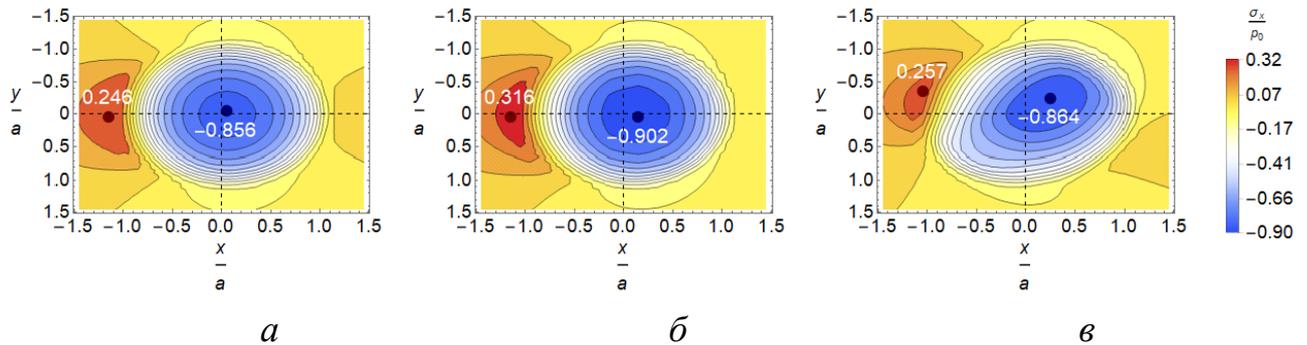


Рисунок 33. Изолинии растягивающих-сжимающих напряжений σ_x вблизи поверхности упругого полупространства ($y/a = 0, z/a = 0,005$) при $\mu = 0,3, \Delta_y = 0, \beta = 5,75, \zeta_\tau = 16$ и $\Delta_x = 0,006, W_z = 0$ (а), $\Delta_x = 0,011, W_z = 0$ (б), $\Delta_x = 0,006, W_z = 0,5$ (в)

Сравнение результатов расчетов показывает, что при качении ролика с вращением изолинии растягивающих-сжимающих напряжений несимметричны относительно оси $y = 0$. С ростом относительного продольного проскальзывания (рис. 33, б) увеличиваются абсолютные значения наибольших растягивающих и сжимающих напряжений σ_x вблизи поверхности упругого полупространства.

3.5 Выводы по главе 3

Проведён анализ напряжённого состояния упругого полупространства в условиях трения качения упругих тел с одинаковыми упругими постоянными при наличии промежуточной вязкоупругой среды. Для распределений контактных нормального и касательного напряжений, полученных в главе 2, рассчитано напряжённое состояние в упругом полупространстве под вязкоупругим слоем и определено расположение областей с максимальными растягивающими и сжимающими напряжениями. Для заданных параметров найдено местонахождение областей концентрации наибольших значений максимального касательного напряжения. Исследовано влияние относительного продольного и бокового проскальзывания и относительного вращения, а также коэффициента трения

скольжения на места концентрации внутренних напряжений в подповерхностных слоях полупространства. Разработан метод расчёта скорости контактно-усталостных повреждений в поверхностных слоях упругого полупространства в условиях трения качения с проскальзыванием при наличии промежуточного слоя.

Установлено, что при больших значениях коэффициента трения скольжения $\mu = 0,2 - 0,3$ функция зависимости максимальных значений максимального касательного напряжения на фиксированной глубине от поверхности контакта имеет два максимума: на поверхности и под поверхностью на глубине около половины радиуса области контакта. Добавление промежуточного слоя при заданных характеристиках продольного и бокового проскальзываний в условиях качения ролика по упругому полупространству приводит к уменьшению максимальных касательных напряжений на поверхности полупространства. Установлено, что с ростом относительного продольного проскальзывания увеличиваются абсолютные значения растягивающих и сжимающих напряжений на поверхности полупространства, при этом наличие слоя приводит к снижению пиковых значений растягивающих напряжений.

Результаты проведенных исследований показывают, что применение смазочных материалов в узлах трения качения является одним из способов снижения максимальных касательных напряжений вблизи поверхности, определяющих изнашивание поверхностей по контактно-усталостному механизму, и позволяют дать количественную оценку эффективности применения конкретных смазочных материалов при заданных условиях эксплуатации.

Заключение

Цель проведённого исследования заключалась в разработке методов решения контактных задач для деформируемых тел в условиях трения качения с учётом основных механизмов трения и наличия тонкого промежуточного слоя, а также анализе влияния свойств промежуточной среды на контактные характеристики, силу трения, распределение внутренних напряжений и скорость накопления усталостных повреждений в поверхностных слоях упругих тел. В работе получены следующие основные результаты:

- 1) построено решение контактной задачи о качении жёсткого цилиндра и сферы по тонкому вязкоупругому слою, сцепленному с жёстким основанием, с учётом относительного продольного проскальзывания и межмолекулярного взаимодействия контактирующих поверхностей (при описании механических свойств слоя в нормальном и касательном направлении моделью Кельвина);
- 2) решена контактная задача о качении упругой сферы по упругому полупространству, покрытому тонким промежуточным слоем (податливость слоя в нормальном направлении описывается степенной функцией, а связь между касательными напряжениями и перемещениями – моделью Кельвина);
- 3) разработан алгоритм решения задачи о качении упругой сферы по вязкоупругому слою, сцепленному с упругим полупространством, основанный на вариационном методе с учётом продольного и бокового относительного проскальзывания, а также составляющих проскальзывания вследствие вращения катящегося тела;
- 4) установлена зависимость контактных характеристик при качении жёстких и упругих тел по основанию, покрытому вязкоупругим слоем (распределение нормального и касательного напряжений на площадке контакта, расположение зон сцепления и проскальзывания), а также силы

сопротивления качению от величины относительного проскальзывания и свойств промежуточной среды;

- 5) проведен расчет распределения максимальных касательных напряжений внутри упругого полупространства в условиях качения упругой сферы по упругому полупространству при наличии вязкоупругого промежуточного слоя и дан анализ влияния свойств промежуточного слоя на скорость накопления контактно-усталостных повреждений в упругом полупространстве.

Список литературы

1. Johnson K.L. Contact Mechanics. Cambridge University Press, 1985.
2. Reynolds O. On rolling friction // Philos. Trans. R. Soc. London. 1875. Vol. 166, № 0. P. 155–174.
3. Carter F.W. On the Action of a Locomotive Driving Wheel // Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci. 1926. Vol. 112, № 760. P. 151–157.
4. Tomlinson G.A. A molecular theory of friction // London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. J. Sci. 1929. Vol. 7, № 46. P. 905–939.
5. Heathcote H.L. The Ball Bearing: In the Making, under Test and on Service // Proc. Inst. Automob. Eng. 1920. Vol. 15, № 1. P. 569–702.
6. Fromm H. Berechnung des Schlupfes beim Rollen deformierbarer Scheiben // ZAMM - Zeitschrift Für Angew. Math. Und Mech. 1927. Vol. 7, № 1. P. 27–58.
7. Ишлинский А.Ю. Трение качения // Прикладная математика и механика. 1938. Vol. 2, № 2. P. 245–260.
8. Johnson K.L. The effect of spin upon the rolling motion of an elastic sphere on a plane // J. Appl. Mech. 1958. Vol. 25. P. 332–338.
9. Johnson K.L. The Influence of Elastic Deformation upon the Motion of a Ball Rolling between Two Surfaces // Proc. Inst. Mech. Eng. 1959. Vol. 173, № 1. P. 795–810.
10. Vermeulen P.J., Johnson K.L. Contact of Nonspherical Elastic Bodies Transmitting Tangential Forces // J. Appl. Mech. 1964. Vol. 31, № 2. P. 338.
11. Haines D.J., Ollerton E. Contact stress distributions on elliptical contact surfaces subjected to radial and tangential forces // Proc. Inst. Mechanical Eng. 1963. Vol. 177. P. 95–114.
12. Halling J. Microslip between a Rolling Element and its Track Arising from Geometric Conformity and Applied Surface Traction // J. Mech. Eng. Sci. 1964. Vol. 6, № 1. P. 64–73.
13. Kalker J.J. Rolling with slip and spin in the presence of dry friction // Wear. 1966. Vol. 9, № 1. P. 20–38.

14. Kalker J.J. Simplified theory of rolling contact // Delft Prog. Rep. 1973. Vol. 1, № 1. P. 1–10.
15. Kalker J.J. A Fast Algorithm for the Simplified Theory of Rolling Contact // Veh. Syst. Dyn. 1982. Vol. 11, № 1. P. 1–13.
16. Alonso A., Giménez J.G. Non-steady state modelling of wheel-rail contact problem for the dynamic simulation of railway vehicles // Veh. Syst. Dyn. 2008. Vol. 46, № 3. P. 179–196.
17. Vollebregt E.A.H.A.H.H., Wilders P. FASTSIM2: A second-order accurate frictional rolling contact algorithm // Comput. Mech. Springer Verlag, 2011. Vol. 47, № 1. P. 105–116.
18. Sh. Sichani M., Enblom R., Berg M. An alternative to FASTSIM for tangential solution of the wheel–rail contact // Veh. Syst. Dyn. 2016. Vol. 54, № 6. P. 748–764.
19. Shen Z., Li Z. A fast non-steady state creep force model based on the simplified theory // Wear. 1996. Vol. 191, № 1–2. P. 242–244.
20. Alonso A., Giménez J.G. Tangential problem solution for non-elliptical contact areas with the FastSim algorithm // Veh. Syst. Dyn. 2007. Vol. 45, № 4. P. 341–357.
21. Giménez J.G., Alonso A., Gómez E. Introduction of a friction coefficient dependent on the slip in the FastSim algorithm // Veh. Syst. Dyn. 2005. Vol. 43, № 4. P. 233–244.
22. Погорелов Д.Ю., Языков В.Н. Модификация алгоритма FASTSIM решения задачи контакта колеса и рельса // Вестник Брянского государственного технического университета. 2004. Vol. 2, № 2.
23. Kalker J.J. Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact // book. Springer, 1990. Vol. 66.
24. Гольдштейн Р.В. et al. Решение вариационными методами пространственных контактных задач качения с проскальзыванием и сцеплением // Успехи механики. 1982. Vol. 5, № 3/4. P. 60–102.

25. Duvaut G., Lions J.L. Inéquations en thermoélasticité et magnétohydrodynamique // Arch. Ration. Mech. Anal. 1972. Vol. 46, № 4. P. 241–279.
26. Kalker J.J. The computation of three-dimensional rolling contact with dry friction // Int. J. Numer. Methods Eng. 1979. Vol. 14, № 9. P. 1293–1307.
27. Kalker J.J. A Minimum Principle for the Law of Dry Friction , With Application to Elastic Cylinders in Rolling Contact Part 1 : Fundamentals — Application to Steady Rolling. 1971. P. 875–880.
28. Kalker J.J. A minimum principle for the law of dry friction part 2: Application to nonsteadily rolling elastic cylinders // J. Appl. Mech. Trans. ASME. 1971. Vol. 38, № 4. P. 881–887.
29. Spiryagin M. et al. Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks Vol 2 // The Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks. CRC Press, 2017. Vol. 2. 613–619 p.
30. Zaazaa K.E., Schwab A.L. Review of Joost Kalker’s Wheel-Rail Contact Theories and Their Implementation in Multibody Codes // Conference: ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. 2009. P. 1–12.
31. Zhao X., Li Z. The solution of frictional wheel-rail rolling contact with a 3D transient finite element model: Validation and error analysis // Wear. Elsevier B.V., 2011. Vol. 271, № 1–2. P. 444–452.
32. Toumi M., Chollet H., Yin H. Finite element analysis of the frictional wheel-rail rolling contact using explicit and implicit methods // Wear. Elsevier, 2016. Vol. 366–367. P. 157–166.
33. Deng X., Qian Z., Dollevoet R. Lagrangian explicit finite element modeling for spin-rolling contact // J. Tribol. 2015. Vol. 137, № 4. P. 1–11.
34. Wen Z. et al. Three-dimensional elastic-plastic stress analysis of wheel-rail rolling contact // Wear. 2011. Vol. 271, № 1–2. P. 426–436.
35. Sladkowski A., Sitarz M. Analysis of wheel-rail interaction using FE software // Wear. 2005. Vol. 258, № 7–8. P. 1217–1223.
36. Telliskivi T., Olofsson U. Contact mechanics analysis of measured wheel–rail //

- Rail Rapid Transit. 2005. Vol. 215, № 2. P. 65–73.
37. Сакало А.В. Метод моделирования контактных напряжений с использованием конечно-элементных фрагментов на упругом основании // Вестник ВГТУ. 2009. № 9. P. 71–76.
 38. Vollebregt E., Segal G. Solving conformal wheel-rail rolling contact problems // Veh. Syst. Dyn. 2014. Vol. 52, № SUPPL. 1. P. 455–468.
 39. Bental R.H., Johnson K.L. Slip in the rolling contact of two dissimilar elastic rollers // Int. J. Mech.Sci. Pergamon, 1967. Vol. 9, № 6. P. 389–404.
 40. Моссаковский В.И., Мицишин И.И. Качение упругих тел // Прикладная математика и механика. 1967. Vol. 31, № 5. P. 870–876.
 41. Nowell D., Hills D.A. Tractive rolling of dissimilar elastic cylinders // Int. J. Mech. Sci. 1988. Vol. 30, № 6. P. 427–439.
 42. Nackenhorst U., Brinkmeier M. On the dynamics of rotating and rolling structures // Arch. Appl. Mech. 2008. Vol. 78, № 6. P. 477–488.
 43. Зобова А.А., Горячева И.Г. Анализ динамики торможения цилиндра с учётом распределения контактных напряжений для упругих и вязкоупругих тел. 2012. Vol. 17, № 4. P. 291–297.
 44. Vollebregt E.A.H. User guide for CONTACT, Rolling and sliding contact with friction. Delft, 2019.
 45. Pogorelov D., Rodikov A., Kovalev R. Parallel computations and co-simulation in universal mechanism software. Part I: Algorithms and implementation // Transp. Probl. 2019. Vol. 14, № 3. P. 163–175.
 46. Tabor D. The mechanism of rolling friction // London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. J. Sci. 1952. Vol. 43, № 345. P. 1055–1059.
 47. Боуден Ф.П., Тейбор Д. Трение и смазка твёрдых тел. Москва: Машиностроение, 1968.
 48. Крагельский И.В. Трение и износ. Машиностроение, 1968.
 49. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчётов на трение и износ. Машиностроение, 1977.

50. Bowden F.P., Tabor D. Friction, lubrication and wear: A survey of work during the last decade // *Br. J. Appl. Phys.* 1966. Vol. 17, № 12. P. 1521–1544.
51. Eldredge K.R., Tabor D. The mechanism of rolling friction. I. The plastic range // *Proc. R. Soc. London. Ser. A. Math. Phys. Sci.* 1955. Vol. 229, № 1177. P. 181–198.
52. Tabor D. The mechanism of rolling friction II. The elastic range // *Proc. R. Soc. London. Ser. A. Math. Phys. Sci.* 1955. Vol. 229, № 1177. P. 198–220.
53. Flom D.G. Rolling friction of polymeric materials. I. Elastomers // *J. Appl. Phys.* 1960. Vol. 31, № 2. P. 306–314.
54. Flom D.G. Rolling friction of polymeric materials. II. Thermoplastics // *J. Appl. Phys.* 1961. Vol. 32, № 8. P. 1426–1436.
55. Flom D.G. Dynamic Mechanical Spectrometry by means of Rolling Friction Measurements // *Anal. Chem.* 1960. Vol. 32, № 12. P. 1550–1554.
56. Теория сопротивления перекатыванию и смежных явлений // Трение и износ в машинах. 1-я Всесоюзная конференция по трению и износу в машинах. Т. II. Москва: АН СССР, 1940. P. 255–264.
57. May W.D., Morris E.L., Atack D. Rolling friction of a hard cylinder over a viscoelastic material // *J. Appl. Phys.* 1959. Vol. 30, № 11. P. 1713–1724.
58. Flom D.G., Bueche A.M. Theory of rolling friction for spheres // *J. Appl. Phys.* 1959. Vol. 30, № 11. P. 1725–1730.
59. Hunter S.C. The rolling contact of a rigid cylinder with a viscoelastic half space // *J. Appl. Mech. Trans. ASME.* 1960. Vol. 28, № 4. P. 611–617.
60. Morland L.W. A plane problem of rolling contact in linear viscoelasticity theory // *J. Appl. Mech. Trans. ASME.* 1960. Vol. 29, № 2. P. 345–352.
61. Morland L.W. Exact solutions for rolling contact between viscoelastic cylinders // *Q. J. Mech. Appl. Math.* 1967. Vol. 20, № 1. P. 73–106.
62. Горячева И.Г. Контактная задача качения вязкоупругого цилиндра по основанию из того же материала // *Прикладная математика и механика.* 1973. Vol. 37, № 5. P. 925–933.

63. Goryacheva I., Sadeghi F. Contact characteristics of a rolling/sliding cylinder and a viscoelastic layer bonded to an elastic substrate // *Wear*. 1995. Vol. 184, № 2. P. 125–132.
64. Goryacheva I.G., Sadeghi F., Goryachev A.P. Contact of elastic bodies with thin visco-elastic coatings under conditions of rolling or sliding friction // *J. Appl. Math. Mech.* 1996. Vol. 59, № 4. P. 607–614.
65. Goryacheva I.G., Sadeghi F. Viscoelastic effects in lubricated contacts // *Wear*. 1996. Vol. 198. P. 307–312.
66. Горячева И.Г., Губенко М.М., Маховская Ю.Ю. Скольжение сферического индентора с учетом сил молекулярного притяжения. 2014. P. 99–107.
67. Klüppel M., Heinrich G. Rubber friction on self-affine road tracks // *Rubber Chem. Technol.* 2000. Vol. 73, № 4. P. 578–606.
68. Lyubicheva A.N. Analysis of the mutual influence of contact spots in sliding of the periodic system of asperities on a viscoelastic base of the winkler type // *J. Frict. Wear*. 2008. Vol. 29, № 2. P. 92–98.
69. Soldatenkov I.A. Calculation of friction for indenter with fractal roughness that slides against a viscoelastic foundation // *J. Frict. Wear*. 2015. Vol. 36, № 3. P. 193–196.
70. Persson B.N.J.N.J. Theory of rubber friction and contact mechanics // *J. Chem. Phys.* 2001. Vol. 115, № 8. P. 3840–3861.
71. Goryacheva I.G., Torskaya E.V., Zakharov S.M. The effect of relative slippage and properties of the surface layer on the stress-strain state of elastic bodies in rolling friction // *Frict. Wear*. 2003. Vol. 24, № 1. P. 5–15.
72. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. Москва: Наука, 2001. 478 p.
73. Goryacheva I.G., Goryachev A.P., Sadeghi F. The effect of surface layer with bleeding properties in rolling/sliding contact // *Tribol. Trans.* 2000. Vol. 43, № 1. P. 123–129.
74. Rudolphi T.J., Reicks A. V. Viscoelastic indentation and resistance to motion of

- conveyor belts using a generalized maxwell model of the backing material // *Rubber Chem. Technol.* 2006. Vol. 79, № 2. P. 307–319.
75. Kalker J.J. Viscoelastic multilayered cylinders rolling with dry friction // *J. Appl. Mech. Trans. ASME.* 1991. Vol. 58, № 3. P. 666–679.
76. Braat G.F.M., Kalker J.J. Theoretical and experimental analysis of the rolling contact between two cylinders coated with multilayered, viscoelastic rubber // *Trans. Eng. Sci.* 1993. Vol. 1. P. 589–598.
77. Oden J.T., Lin T.L. On the general rolling contact problem for finite deformations of a viscoelastic cylinder // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1986. Vol. 57, № 3. P. 297–367.
78. Padovan J. Finite element analysis of steady and transiently moving/rolling nonlinear viscoelastic structure-I. Theory // *Comput. Struct.* 1987. Vol. 27, № 2. P. 249–257.
79. Nasdala L. et al. An efficient viscoelastic formulation for steady-state rolling // *Comput. Mech.* 1998. Vol. 22. P. 395–403.
80. Carbone G., Putignano C. A novel methodology to predict sliding and rolling friction of viscoelastic materials: Theory and experiments // *J. Mech. Phys. Solids.* Elsevier, 2013. Vol. 61, № 8. P. 1822–1834.
81. Padovan J., Paramadilok O. Transient and steady state viscoelastic rolling contact // *Comput. Struct.* 1985. Vol. 20, № 1–3. P. 545–553.
82. De S. Lynch F. A finite element method of viscoelastic stress analysis with application to rolling contact problems // *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1969. Vol. 1, № 4. P. 379–394.
83. Kong X.A., Wang Q. A boundary element approach for rolling contact of viscoelastic bodies with friction // *Comput. Struct.* 1995. Vol. 54, № 3. P. 405–413.
84. Koumi K.E.K.E.K.E., Chaise T., Nelias D. Rolling contact of a rigid sphere/sliding of a spherical indenter upon a viscoelastic half-space containing an ellipsoidal inhomogeneity // *J. Mech. Phys. Solids.* Elsevier, 2015. Vol. 80. P. 1–25.
85. Nackenhorst U. A new finite element rolling contact algorithm // *Trans. Eng. Sci.*

1999. Vol. 24. P. 497–598.
86. Nackenhorst U. The ALE-formulation of bodies in rolling contact Theoretical foundations and finite element approach // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2004. Vol. 193, № 39-41 SPEC. ISS. P. 4299–4322.
87. Nackenhorst U. On the finite element analysis of steady state rolling contact // *Contact Mech. Tech. Comput. Mech. Publ.* 1993. Vol. 1. P. 53–60.
88. Menga N., Afferrante L., Carbone G. Effect of thickness and boundary conditions on the behavior of viscoelastic layers in sliding contact with wavy profiles // *J. Mech. Phys. Solids.* Elsevier, 2016. Vol. 95. P. 517–529.
89. Vollebregt E.A.H. Numerical modeling of measured railway creep versus creep-force curves with CONTACT // *Wear.* 2014. Vol. 314, № 1. P. 87–95.
90. Zéhil G.P., Gavin H.P. Three-dimensional boundary element formulation of an incompressible viscoelastic layer of finite thickness applied to the rolling resistance of a rigid sphere // *Int. J. Solids Struct.* 2013. Vol. 50, № 6. P. 833–842.
91. Wallace E.R., Chaise T., Nelias D. Three-dimensional rolling/sliding contact on a viscoelastic layered half-space // *J. Mech. Phys. Solids.* Elsevier Ltd, 2020. Vol. 143. P. 104067.
92. Захаров С.М., Горячева И.Г. Об управлении трением и изнашиванием в системе колесо - рельс. P. 1–12.
93. Захаров С.М. et al. Обобщение передового опыта тяжеловесно-о движения: вопросы взаимодействия колеса и рельса // *Science.* 1997. № 96. 45–47 p.
94. Захаров С.М. Об управлении трением в системе колесо — рельс в условиях тяжеловесного движения // *Вестник ВНИИЖТ.* 2012. Vol. 3. P. 12–16.
95. Harmon M., Lewis R. Review of top of rail friction modifier tribology // *Tribol. - Mater. Surfaces Interfaces.* 2016. Vol. 10, № 3. P. 150–162.
96. Eadie D.T., Kalousek J., Chiddick K.C. The role of high positive friction (HPF) modifier in the control of short pitch corrugations and related phenomena // *Wear.* 2002. Vol. 253, № 1–2. P. 185–192.
97. Eadie D.T. et al. The effects of top of rail friction modifier on wear and rolling

- contact fatigue: Full-scale rail-wheel test rig evaluation, analysis and modelling // *Wear*. 2008. Vol. 265, № 9–10. P. 1222–1230.
98. Matsumoto A. et al. Creep force characteristics between rail and wheel on scaled model // *Wear*. 2002. Vol. 253, № 1–2. P. 199–203.
99. Liu X., Xiao C., Meehan P.A. The effect of rolling speed on lateral adhesion at wheel/rail interface under dry and wet condition // *Wear*. Elsevier Ltd, 2019. Vol. 438–439.
100. Meierhofer A. et al. Third body layer-experimental results and a model describing its influence on the traction coefficient // *Wear*. 2014. Vol. 314, № 1–2. P. 148–154.
101. Galas R. et al. Case study: The influence of oil-based friction modifier quantity on tram braking distance and noise // *Tribol. Ind.* 2017. Vol. 39, № 2. P. 198–206.
102. Stock R. et al. Material concepts for top of rail friction management – Classification, characterisation and application // *Wear*. Elsevier, 2016. Vol. 366–367. P. 225–232.
103. Vélez J.C. et al. Development of a composite friction modifier with carbon nanotubes for applications at the wheel–rail interface // *Adv. Compos. Lett.* 2020. Vol. 29. P. 1–8.
104. Суворова Т.В., Беляк О.А. Контактные задачи для пористоупругого композита при наличии сил трения // *Прикладная математика и механика*. 2020. Vol. 84, № 4. P. 529–539.
105. Kolesnikov V.I. et al. A Mathematical Model for Prediction of the Tribological Properties of Oil-Filled Composites under Vibration // *Dokl. Phys.* 2020. Vol. 65, № 4. P. 149–152.
106. Leonard B.D. et al. Third body modeling in fretting using the combined finite-discrete element method // *Int. J. Solids Struct.* Elsevier Ltd, 2014. Vol. 51, № 6. P. 1375–1389.
107. Ding J. et al. A finite element based approach to simulating the effects of debris on fretting wear // *Wear*. 2007. Vol. 263, № 1-6 SPEC. ISS. P. 481–491.
108. Argatov I.I., Chai Y.S. An analytical approach to the third body modelling in fretting wear contact: a minireview // *Facta Univ. Ser. Mech. Eng.* 2020. P. 1–8.

109. Болотов А.Н., Новикова О.О., Новиков В.В. Магнитные силоксановые наножидкости адаптированные для условий граничного трения // Физико-химические аспекты изучения кластеров, наноструктур и наноматериалов. 2020. № 12. P. 546–556.
110. Болотов А.Н., Новиков В.В., Новикова О.О. Влияние магнитных дисперсных частиц на трибологические свойства магнитных масел // Новые материалы и технологии в машиностроении. 2015. № 15. P. 16–17.
111. Измайлов В.В., Новоселова М.В. О ДМТ-модели дискретно адгезионного контакта // Машиностроение и машиноведение. 2019. Vol. 4, № 4. P. 5–15.
112. Izmailov V. V. Calculation of characteristics of discrete adhesive contact // J. Frict. Wear. 2014. Vol. 35, № 5. P. 343–350.
113. Derjaguin B. V., Muller V.M., Toporov Y.P. Effect of contact deformation on the adhesion of elastic solids // J. Colloid Interface Sci. 1975. Vol. 53, № 2. P. 314–326.
114. Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D. Surface energy and the contact of elastic solids // Proc. R. Soc. London. A. Math. Phys. Sci. 1971. Vol. 324, № 1558. P. 301–313.
115. Kendall K. Rolling friction and adhesion between smooth solids // Wear. 1975. Vol. 33, № 2. P. 351–358.
116. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю. Адгезионное сопротивление при качении упругих тел // Прикладная математика и механика. 2007. Vol. 71, № 4. P. 534–543.
117. Popov V.L. Adhesive and non-adhesive contact of a rigid indenter and a thin elastic layer with surface tension. 2020. P. 1–9.
118. Makhovskaya Y.Y. Modeling contact of indenter with elastic half-space with adhesive attraction assigned in arbitrary form // J. Frict. Wear. 2016. Vol. 37, № 4. P. 301–307.
119. Makhovskaya Y.Y. The sliding of viscoelastic bodies when there is adhesion // J. Appl. Math. Mech. 2005. Vol. 69, № 2. P. 305–314.

120. Carbone G., Bottiglione F. Adhesion, Friction and Lubrication of Viscoelastic Materials. 2021.
121. Stewart S., Ahmed R. Rolling contact fatigue of surface coatings - A review // *Wear*. 2002. Vol. 253, № 11–12. P. 1132–1144.
122. Горячева И.Г., Степанов Ф.И., Торская Е.В. Моделирование усталостного изнашивания эластомеров // *Физическая мезомеханика*. 2018. Vol. 21, № 6. P. 66–74.
123. Sadeghi F. et al. A review of rolling contact fatigue // *J. Tribol.* 2009. Vol. 131, № 4. P. 1–15.
124. Goryacheva I.G. Modeling of wear of solids at different scales // *Phys. Mesomech.* 2007. Vol. 10, № 5–6. P. 247–254.
125. Горячева И.Г., Чекина О.Г. Модель усталостного разрушения поверхностей // *Трение и износ*. 1990. Vol. 11, № 3. P. 389–400.
126. Горячева И.Г., Торская Е.В. Моделирование контактно-усталостного разрушения двухслойного упругого основания // *Механика твердого тела*. Татполиграф, 2008. Vol. 3. P. 132–144.
127. Goryacheva I.G., Torskaya E.V. Modeling the Accumulation of Contact Fatigue Damage in Materials with Residual Stresses under Rolling Friction // *Journal of Friction and Wear*. 2019. Vol. 40, № 1. 33–38 p.
128. Morris D. et al. Effect of Residual Stresses on Microstructural Evolution Due to Rolling Contact Fatigue // *J. Tribol.* 2018. Vol. 140, № 6. P. 1–9.
129. Шур Е.А. et al. Эволюция повреждаемости рельсов дефектами контактной усталости. 2014. № дефекты 21. P. 3–9.
130. Захаров С.М., Торская Е.В. Подходы к моделированию возникновения поверхностных контактно-усталостных повреждений в рельсах // *Вестник ВНИИЖТ*. 2018. Vol. 77, № 5. P. 259–268.
131. Ekberg A., Kabo E. Fatigue of railway wheels and rails under rolling contact and thermal loading-an overview // *Wear*. 2005. Vol. 258, № 7–8. P. 1288–1300.
132. Zakharov S.M., Goryacheva I.G. Rolling contact fatigue defects in freight car

- wheels // *Wear*. 2005. Vol. 258, № 7–8. P. 1142–1147.
133. Сакало А.В. Моделирование накопления контактно-усталостных повреждений в колесе вагона с использованием конечно-элементных фрагментов на упругом основании // *Вестник ВНИИЖТ*. 2011. Vol. 4. P. 44–49.
 134. DangVan. On a New Multiaxial Fatigue Limit Criterion: Theory and Application.
 135. Сакало А.В. Совершенствование профиля поверхности катания колеса вагона на основе критерия контактной усталости. 2011.
 136. Мифтахова А.Р. Развитие методов решения задачи о трении качения упругих тел при наличии проскальзывания // *Труды 57-й научной конференции МФТИ с международным участием, посвящённой 120-летию со дня рождения П.Л. Капицы*. 24-28 ноября 2014 г. Москва: МФТИ, 2014.
 137. Мифтахова А.Р. Контактная задача о качении с проскальзыванием колеса по рельсу при наличии промежуточного вязкоупругого слоя // *Тезисы 58-й научной конференции МФТИ*. Долгопрудный: МФТИ, 2015.
 138. Мифтахова А.Р., Горячева И.Г. Моделирование трения при качении цилиндра по вязкоупругому слою, описываемому моделью Кельвина // *XXVII Международная инновационно-ориентированная конференция молодых учёных и студентов (МИКМУС – 2015): сборник трудов конференции*. Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН. Москва: Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН Москва, 2015. P. 182–186.
 139. Мифтахова А.Р. Решение задачи о качении цилиндра по вязкоупругому слою, описываемому моделью Кельвина // *XLI Гагаринские чтения. Научные труды Международной молодёжной научной конференции в 4 томах*. 2015. P. 259.
 140. Goryacheva I.I.G.I.I.G., Miftakhova A.R.A. Modelling of the viscoelastic layer effect in rolling contact // *Wear*. Elsevier B.V., 2019. Vol. 430–431, № May. P. 256–262.
 141. Miftakhova A., Chen Y.-Y., Horng J.-H. Effect of rolling on the friction coefficient in three-body contact // *Adv. Mech. Eng.* 2019. Vol. 11, № 8.

142. Мещерякова А.Р., Горячева И.Г. Напряженное состояние упругих тел в условиях качения с проскальзыванием при наличии промежуточного слоя // Физическая мезомеханика. 2020. Vol. 23, № 6.
143. Meshcheryakova A.R. Effect of viscoelastic layer on contact fatigue damage accumulation in rolling friction // IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng. 2020. Vol. 747, № 1. P. 1–5.
144. Мещерякова А.Р. Оценка применимости метода полос при исследовании задач о качении упругих тел // Механика и моделирование материалов и технологий. Сборник трудов Секции Международной молодёжной научной конференции XLVI Гагаринские чтения. ИПМех РАН Москва. 2020. P. 77–78.
145. Мещерякова А.Р. Влияние поверхностного слоя на накопление контактно-усталостных повреждений в условиях трения качения // XXXI Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС - 2019): Сборник трудов конференции. Изд-во ИМАШ РАН Москва. Изд-во ИМАШ РАН Москва, 2020. P. 237–240.
146. Горячева И.Г., Мифтахова А.Р. Моделирование трения качения с учётом свойств промежуточной среды и относительного проскальзывания в области контактного взаимодействия // Машиностроение и инженерное образование. 2016. № 3. P. 38–44.
147. Мифтахова А.Р.Р. Контактные задачи о качении с проскальзыванием для вязкоупругих тел // Трение и износ. 2018. Vol. 39, № 1. P. 71–79.
148. Мещерякова А.Р. Программа расчёта контактных характеристик в условиях качения упругих тел с учётом свойств промежуточного вязкоупругого слоя. RU 2021613038. 2021.
149. Горячева И.Г. Плоские и осесимметричные контактные задачи для шероховатых упругих тел // Прикладная математика и механика. 1979. Vol. 43, № 1. P. 99–105.
150. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. Москва: Мир, 1974.
151. Ахвердиев К.С., Яковлев М.В., Журба И.А. Расчет радиальных подшипников

- с учетом сил инерции вязкоупругой смазочной композиции. 2003. № 4. Р. 4–6.
152. Ахвердиев К.С. Современное состояние гидродинамической и реодинамической теории смазки и некоторые перспективные направления в трибологии // Вестник РГУПС. 2017. № 1. Р. 8–18.
153. Леванов И.Г. Обзор реологических моделей моторных масел, используемых при расчётах динамики подшипников скольжения коленчатого вала // Вестник Южно-Уральского государственного университета. 2010. № 10. Р. 54–62.
154. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955.
155. Федоренко Р.П. Метод численного решения пространственных контактных задач качения с проскальзыванием и сцеплением. 1979.

Список рисунков

- Рисунок 1. Схема качения сферы (1) по полупространству (2), сцепленному с вязкоупругим слоем (3) 25
- Рисунок 2. Область контакта, разделённая по методу полос, где $(-a_j, b_j)$ – границы области контакта j -й полосы, l – толщина полосы 28
- Рисунок 3. Конфигурация области контакта при $h/R = 0,02$, $\alpha_T^{(p)} = \alpha_T^{(\tau)} = 5$ и $\zeta^{(p)} = 0,1$ (а): $D/R = 0,001$ (1), $D/R = 0,003$ (2), $D/R = 0,005$ (3) и $D/R = 0,01$ (б): $\zeta^{(p)} = 0,01$ (1), $\zeta^{(p)} = 0,1$ (2) $\zeta^{(p)} = 1$ (3) 34
- Рисунок 4. Распределение касательного напряжения в области контакта при $D/h = 0,1$, $h/R = 0,02$, $\zeta^{(p)} = \zeta^{(\tau)} = 0,05$, $\mu = 0,3$, $\alpha_T^{(p)} = \alpha_T^{(\tau)} = 5$ и Δ/R : $\Delta = 0,002$ (а), $\Delta = 0,005$ (б), $\Delta = 0,007$ (в) 35
- Рисунок 5. Зависимость коэффициента сцепления от величины относительного проскальзывания при $D/h = 0,1$, $h/R = 0,02$, $\zeta^{(p)} = \zeta^{(\tau)} = 0,05$, $\mu = 0,3$ (а): $\alpha_T^{(p)} = \alpha_T^{(\tau)} = 5$ (1); $\alpha_T^{(p)} = 10$, $\alpha_T^{(\tau)} = 5$ (2), $\alpha_T^{(p)} = 15$, $\alpha_T^{(\tau)} = 5$ (3) и $\alpha_T^{(p)} = \alpha_T^{(\tau)} = 5$ (б): $\mu = 0,3$ (1), $\mu = 0,5$ (2), $\mu = 0,7$ (3) 36
- Рисунок 6. Зависимость деформационной составляющей коэффициента трения μ_d и адгезионной составляющей коэффициента трения T/P от параметра ζ при $D/h = 0,1$, $h/R = 0,02$, $\mu = 0,3$, $\Delta = 0,005$, $\alpha_T = 5$ (1), $\alpha_T = 50$ (2) 37
- Рисунок 7. Схема качения сферы с учётом адгезионного взаимодействия 38
- Рисунок 8. Распределения нормального напряжения (а) и перемещения (б) в области контакта и адгезионного взаимодействия при $\alpha_T = 10$, $\zeta = 0,01$ 40

- Рисунок 9. Распределение нормального напряжения в области контакта и адгезионного взаимодействия при $P / E_L = -0,07$, $\alpha_T = 10$ (а): $\zeta = 0,025$ (1), $\zeta = 0,05$ (2), $\zeta = 0,1$ (3) и $\zeta = 0,1$ (б): $\alpha_T = 10$ (1), $\alpha_T = 20$ (2), $\alpha_T = 30$ (3) 40
- Рисунок 10. Распределение нормального напряжения в области контакта и адгезионного взаимодействия при $P / E_L = -0,07$, $\alpha_T = 10$, $\zeta = 0,1$ (а), $\alpha_T = 10$, $\zeta = 0,05$ (б), $\alpha_T = 20$, $\zeta = 0,1$ (в) 41
- Рисунок 11. Расположение подобластей сцепления и проскальзывания при $\zeta = 0,05$ (а) и $\zeta = 0,01$ (б) и $\Delta = 0,001$ (1), $\Delta = 0,002$ (2), $\Delta = 0,003$ (3), $\Delta = 0,004$ (4) 42
- Рисунок 12. Схема качения сферы (1) по полупространству (2), сцепленному с вязкоупругим слоем (3) 44
- Рисунок 13. Распределение нормального напряжения для сферы, катящейся по упругому полупространству, покрытому вязкоупругим слоем, при $B = 0,24$, $c = 0,01$, $h_l = 0,001$ 51
- Рисунок 14. Распределение касательного напряжения для сферы, катящейся по упругому полупространству, покрытому вязкоупругим слоем, при $B = 0,24$, $c = 0,01$, $h_l = 0,001$, $\mu = 0,3$, $\zeta = 0,9$, $\alpha_T = 40$, $\Delta = 0,00035$ 52
- Рисунок 15. Расположение зон сцепления и проскальзывания при качении для $B = 0,24$, $c = 0,01$, $h_l = 0,001$, $\mu = 0,3$, $\zeta = 0,9$, $\alpha_T = 40$ и относительного проскальзывания: $\Delta = 0,00025$ (кривая 1), $\Delta = 0,00035$ (кривая 2), $\Delta = 0,00045$ (кривая 3), $\Delta = 0,00065$ (кривая 4) (чёрная линия соответствует границе области контакта) 52

Рисунок 16. Распределение касательного напряжения в центральной полосе области контакта при $B = 0,24$, $c = 0,01$, $h/l = 0,001$, $\mu = 0,3$, $\zeta = T_{\sigma}V / a_0 = 0,9$, $\alpha_T = 40$ и разных значениях относительного проскальзывания: $\Delta = 0,00025$ (кривая 1), $\Delta = 0,00035$ (кривая 2), $\Delta = 0,00045$ (кривая 3), $\Delta = 0,00065$ (кривая 4) (пунктирная линия соответствует случаю полного проскальзывания) 53

Рисунок 17. Распределение касательного напряжения для центральной полосы области контакта при $B = 0,24$, $c = 0,01$, $h/l = 0,001$, $\mu = 0,3$, $\zeta = T_{\sigma}V / a_0 = 0,9$, $\Delta = 0,00045$ и $\alpha_T = 20$ (кривая 1), $\alpha_T = 30$ (кривая 2), $\alpha_T = 40$ (кривая 3), $\alpha_T = 50$ (кривая 4) (пунктирная линия соответствует случаю полного проскальзывания) 54

Рисунок 18. Распределение касательного напряжения в центральной полосе области контакта при $c\theta = a\theta/2R = 0,01$, $h\theta = h/a\theta = 0,001$, $\mu = 0,3$, $\zeta = T_{\sigma}V / a_0 = 0,9$, $\alpha_T = 40$, $\Delta = 0,00025$ и $B\theta = 0,0024$ (кривая 1), $B\theta = 0,0034$ (кривая 2), где $a\theta$ – радиус области контакта при $B\theta = 0,0024$, a – текущий радиус области контакта (пунктирная линия соответствует случаю полного проскальзывания) 54

Рисунок 19. Зависимость коэффициента сцепления T/P от относительного проскальзывания при $B = 0,24$, $c = 0,01$, $h/l = 0,001$, $\zeta = 0,9$, $\mu = 0,3$ и отношении времени последействия ко времени релаксации α_T : $\alpha_T = 10$ (кривая 1), $\alpha_T = 20$ (кривая 2), $\alpha_T = 30$ (кривая 3), $\alpha_T = 40$ (кривая 4), $\alpha_T = 50$ (кривая 5) 55

Рисунок 20. Зависимость коэффициента сцепления T/P от относительного проскальзывания при $B = 0,24$, $c = 0,01$, $hI = 0,001$ и $\mu = 0,1$, $\zeta = 0,9$, $\alpha_T = 30$ (кривая 1), $\mu = 0,3$, $\zeta = 0,9$, $\alpha_T = 20$ (кривая 2), $\mu = 0,3$, $\zeta = 0,9$, $\alpha_T = 30$ (кривая 3), $\mu = 0,5$, $\zeta = 0,9$, $\alpha_T = 30$ (кривая 4), $\mu = 0,5$, $\zeta = 0,6$, $\alpha_T = 30$ (кривая 5)

Рисунок 21. Схема качения сферы (1) по упругому полупространству (2), покрытому вязкоупругим слоем (3)

Рисунок 22. Распределение контактного касательного напряжения (a) и векторное поле скоростей проскальзывания (b) при качении сферы по полупространству, покрытому вязкоупругим слоем, при $\Delta_x = 0,011$, $\beta = 5,75$, $\zeta_\tau = 16$ и $\Delta_y = Wz = 0$ (1), $\Delta_y = 0,011$, $Wz = 0$ (2), $\Delta_y = 0$, $Wz = 0,25$ (3)

Рисунок 23. Распределение контактного касательного напряжения в сечении $y = 0$ при качении сферы по полупространству, покрытому вязкоупругим слоем, при $\mu = 0,3$, $\Delta_y = Wz = 0$ и $\beta = 5,75$, $\zeta_\tau = 16$ (1-4): $\Delta_x = 0,006$ (1, 1'), $\Delta_x = 0,011$ (2, 2'), $\Delta_x = 0,016$ (3, 3'), $\Delta_x = 0,021$ (4, 4'); кривые 1'-4' соответствуют качению сферы по полупространству без промежуточного слоя ($\beta = 0$)

Рисунок 24. Распределение контактного касательного напряжения в сечении $y = 0$ при качении сферы по полупространству, покрытому вязкоупругим слоем при $\mu = 0,3$, $\Delta_x = 0,006$, $Wz = 0$ и $\beta = 5,75$, $\zeta_\tau = 16$ (1-4): $\Delta_y = 0$ (1, 1'), $\Delta_y = 0,006$ (2, 2'), $\Delta_y = 0,011$ (3, 3'), $\Delta_y = 0,021$ (4, 4'), кривые 1'-4' соответствуют качению сферы по полупространству без промежуточного слоя ($\beta = 0$)

Рисунок 25. Контактное касательное напряжение в сечении $y = 0$ при качении сферы по полупространству при $\Delta_x = 0,011$, $\Delta_y = Wz = 0$ и $\mu = 0,1$ (1), $\mu = 0,3$ (2-4), $\beta = 5,75$, $\zeta_\tau = 16$ (1, 2), $\beta = 2,86$, $\zeta_\tau = 16$ (3), $\beta = 2,86$, $\zeta_\tau = 8$ (4), $\mu = 0,3$, $\Delta_x = 0,036$, $\beta = 0$ (5) 66

Рисунок 26. Распределение контактного касательного напряжения (а) и векторное поле скоростей проскальзывания (б) при качении сферы по полупространству, покрытому вязкоупругим слоем при $\mu = 0,3$, $\Delta_x = 0,006$, $\Delta_y = 0$ и $\beta = 0$, $Wz = 0,25$ (1), $\beta = 5,75$, $Wz = 0,25$ (2), $\beta = 5,75$, $Wz = 0,5$ (3) 67

Рисунок 27. Изолинии растягивающих-сжимающих напряжений в сечении упругого полупространства ($y = 0$) при $c = 0,01$, $h_l = 0,001$, $\mu = 0,3$, $\zeta = 0,9$, $\alpha_T = 40$, $\Delta = 0,00045$ 72

Рисунок 28. Распределение растягивающих-сжимающих напряжений на поверхности упругого полупространства ($y = 0$, $z = 0,001$) при $c = 0,01$, $h_l = 0,001$, $\mu = 0,3$, $\zeta = 0,9$, $\alpha_T = 40$, и $\Delta = 0,00025$ (кривая 1), $\Delta = 0,00045$ (кривая 2), $\Delta = 0,00065$ (кривая 3) 73

Рисунок 29. Распределение растягивающих-сжимающих напряжений на поверхности упругого полупространства ($y = 0$, $z = 0,001$) при $c = 0,01$, $h_l = 0,001$, $\zeta = 0,9$, $\alpha_T = 40$, $\Delta = 0,00045$ и $\mu = 0,3$ (кривая 1), $\mu = 0,5$ (кривая 2), $\mu = 0,7$ (кривая 3) 74

Рисунок 30. Изолинии максимальных касательных напряжений в сечении $y = 0$ полупространства при $\Delta_y = Wz = 0$, $\beta = 5,75$, $\zeta_\tau = 16$ и $\mu = 0,1$, $\Delta_x = 0,011$ (а), $\mu = 0,3$, $\Delta_x = 0,011$ (б), $\mu = 0,3$, $\Delta_x = 0,036$ (в) 75

Рисунок 31. Зависимость максимальных значений максимальных касательных напряжений от координаты z при качении сферы по полупространству без слоя (а) и при наличии вязкоупругого слоя (б) при $\Delta_y = Wz = 0$, $\mu = 0,3$ и $\Delta_x = 0,006$ (2, 2', 2''), $\Delta_x = 0,011$ (3, 3'), $\Delta_x = 0,036$ (4) и параметрах слоя: $\zeta_\tau = 16$, $\beta = 5,75$ (2', 3'), $\beta = 2,86$ (2''); пунктирная кривая 1 соответствует теории Герца ($\mu = 0$) 76

Рисунок 32. Изолинии растягивающих-сжимающих напряжений σ_x вблизи поверхности упругого полупространства ($y/a = 0$, $z/a = 0,005$) при $\mu = 0,3$, $\Delta_x = 0,011$, $\Delta_y = Wz = 0$ и $\beta = 0$ (а), $\beta = 2,86$, $\zeta_\tau = 16$ (б), $\beta = 5,75$, $\zeta_\tau = 16$ (в) 77

Рисунок 33. Изолинии растягивающих-сжимающих напряжений σ_x вблизи поверхности упругого полупространства ($y/a = 0$, $z/a = 0,005$) при $\mu = 0,3$, $\Delta_y = 0$, $\beta = 5,75$, $\zeta_\tau = 16$ и $\Delta_x = 0,006$, $Wz = 0$ (а), $\Delta_x = 0,011$, $Wz = 0$ (б), $\Delta_x = 0,006$, $Wz = 0,5$ (в) 78