

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ ИМ. А.Ю. ИШЛИНСКОГО
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Дигилов Александр Вячеславович

**НЕСОВМЕСТНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ В ГИБКИХ ПЛАСТИНАХ.
ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ**

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д. ф.-м. н., доцент
Лычев Сергей Александрович

Москва

2026

Оглавление

Введение	4
Краткая история и современное состояние теории гибких пластин	14
Глава 1 Уравнения конечных несовместных деформаций тонкостенных элементов МЭМС	46
1.1 Вывод уравнений трехмерной теории упругости	47
1.2 Разложение по деформационному параметру	57
1.3 Разложение по толщинному параметру	61
1.4 Редукция уравнений на случай двумерного континуума	65
1.5 Модели различных асимптотических порядков	70
1.6 Анализ областей применимости моделей различных асимптотических порядков	81
Выводы по главе	98
Глава 2 Решение нелинейных краевых задач о конечных деформациях ультратонких пластин	100
2.1 Круглая пластина	100
2.1.1 Построение обратных операторов	104
2.1.2 Замечание о теоретической сходимости решения	108
2.1.3 Регуляризация итерационного процесса	113
2.1.4 Итерационный процесс с эквивалентным оператором	118
2.1.5 Учет несовместных деформаций	124
2.2 Прямоугольная пластина	127
2.2.1 Построение базиса функционального пространства	133
2.2.2 Решение линейной задачи	138
2.2.3 Решение вспомогательной граничной задачи	142
2.2.4 Решение для случая деформируемых краев	148
2.2.5 Решение для случая абсолютно жестких краев	158
2.2.6 Учет несовместных деформаций	167

Выводы по главе.....	171
Глава 3 Экспериментальное исследование деформаций тонких пластин.....	174
3.1 Исследования методом голографической интерферометрии.....	174
3.1.1 Методика проведения эксперимента.....	175
3.1.2 Исследование квадратных образцов.....	176
3.1.3 Исследование круглых образцов.....	178
3.1.4 Идентификация изолиний смещений.....	183
3.2 Влияние нарушения адгезионного контакта.....	193
Выводы по главе.....	194
Заключение.....	197
Литература.....	199
Приложение А.....	220
Приложение Б.....	224
Приложение В.....	233
Приложение Г.....	234
Приложение Д.....	238

Введение

В диссертационной работе развиваются теоретические и экспериментальные методы моделирования напряженно-деформированного состояния тонкостенных элементов микроэлектромеханических систем (МЭМС), характерный размер которых – от десятков нанометров до десятков микрон [9]. Механические свойства таких элементов обладают спецификой, характерной для нанометрового масштаба. Это проявляется, в частности, в их высокой гибкости (прогибы пластинчатых элементов могут превосходить их толщины более чем на порядок) и существенной зависимости эффективной жесткости от несовместных деформаций, неизбежно возникающих в ходе их изготовления (напыления, травления и т. п. [10]). Учет этих факторов требует привлечения методов нелинейной теории упругости [11] и дифференциально-геометрических подходов к описанию несовместных деформаций и вызываемых ими внутренних напряжений [12, 13].

Несмотря на то, что теория гибких пластин т. е., теория, в рамках которой перемещения точек поверхности осреднения полагаются конечными, имеет более чем столетнюю историю, многие вопросы эффективного вычислительного моделирования остаются открытыми. В первую очередь, это связано со сложностью постановок и представлений решений задач нелинейной теории упругости. Это подтверждается, в частности, тем, что в большинстве руководств по расчетам гибких пластин поле из перемещений определяется по одной или двум пробным функциям (в рамках различных нелинейных обобщений метода Галеркина [14]). С другой стороны, прямой нелинейный конечноэлементный анализ приводит к плохо обусловленным численным схемам из-за малого параметра – отношения толщины к характерному размеру, который для элементов МЭМС может достигать величин $10^{-3} - 10^{-6}$.

Решение проблемы, казалось бы, очевидно: нужно лишь построить асимптотическое представление для уравнений и краевых условий нелинейных задач, учитывая тем самым малый параметр на уровне аналитических предваритель-

ных преобразований, а на уровне численной схемы работать уже с уравнениями без малого параметра. Однако такой подход, приводящий к уравнениям линейных теорий Кирхгофа [15], Миндлина – Рейсснера [16, 17], Кильчевского – Векуа [18, 19], в нелинейном случае приводит к сложным и запутанным формулировкам. Так, классический результат, полученный в этом направлении в начале XX века – уравнения Феппля – фон Кармана – был охарактеризован К. А. Трусделлом как “теория, дарованная некой высшей силой (например, венгерским волшебником), вывод которой никто не может понять” [20]. Подобная характеристика не случайна: на тот момент эти уравнения не имели строгого вывода из общих положений нелинейной теории упругости. Хотя в настоящее время в обосновании уравнений Феппля – фон Кармана достигнут определенный уровень математической строгости [21], это сделано за счет значительных усложнений исходных положений и гипотез, которые с общих позиций оказываются асимптотически непоследовательными. В связи с этим использование уравнений Феппля – фон Кармана не вызывает сомнений лишь в случаях, когда физико-механические параметры и геометрические размеры оказываются в областях изменения, проверенных многолетними расчетами и экспериментальными исследованиями. Такие области соответствуют, например, конструкционным элементам машин и механизмов классического размера. Уравнения Феппля – фон Кармана активно изучались практически весь XX век. Большой вклад здесь внесли отечественные ученые, такие как С. П. Тимошенко [22], Д. Ю. Панов [23], П. Ф. Папкович, В. И. Феодосьев, Л. Е. Андреева [24], Э. И. Григолюк [25], И. И. Ворович [26], Х. М. Муштари, В. З. Власов, Н. Ф. Морозов [27], М. С. Корнишин, Ф. С. Исанбаева [28], А. С. Вольмир [14] и многие другие. Не претендуя на полноту, перечислим также и некоторых зарубежных авторов, значительно развивших теорию гибких пластин Феппля – фон Кармана: A. Nadai [29], R. Kaiser [30], S. Way [31], S. Levy [32, 33], С.-Т. Wang [34, 35], K. Friedrichs, J. Stoker [36, 37], J. Green, R. Southwell [38], L. Bauer, E. Reiss [39], H. Berger [40], N. Yamaki [41], M. Berger, P. Fife [42], G. Knightly [43], I. Hlavacek, J. Naumann [44, 45], T. Miyoshi [46], S. Antman [47], P. Ciarlet [20, 21], R. Van Gorder [48, 49].

Для элементов МЭМС пока нет столь широкого опыта применения, как для гибких пластин конструкционных размеров, поэтому при теоретическом моделировании предпочтительно использовать теории с минимальным набором

упрощающих предположений. А именно, опираясь на базовые нелинейные уравнения трехмерной теории, получать их асимптотические приближения на основе строгих математических построений, не используя эвристические предположения. Кроме того, учет несовместных деформаций требует асимптотически последовательного вывода уравнений и краевых условий. По этой причине в настоящей работе развивается подход, основанный на представлении деформирования в терминах уравнений поля и законов сохранения, получаемых из условий стационарности действия и его инвариантности относительно специфических групп преобразований координат и времени. При этом мера несовместности конечных деформаций – поле импланта – естественным образом входит в список аргументов плотности действия как тензорная скрытая переменная состояния.

Дифференциально-геометрическая теория несовместных деформаций берет свое начало из физической теории дислокаций, развитой в начале XX века в работах В. Вольтерра, Д. Тейлора, Э. Орована, М. Полани, И. Бюргерса и других. Изучение дислокаций шло двумя путями, которые в литературе условно называют микроскопическим и макроскопическим. Исследователи, шедшие по последнему пути, такие как Е. Кренер [50], Дж. Эшелби [51], Р. де Вит [52], Г. Шефер, К. Кондо, Б. Билби, Ф. Франк и Ф. Набарро, создали теорию несовместных деформаций в том виде, в котором она известна в настоящее время. На этом ее развитие не завершилось, в настоящее время этот раздел механики сплошных сред является одним из наиболее бурно развивающихся. Множество заметных результатов в этой области было получено отечественными учеными, в частности, Р. А. Арутюняном, А. В. Манжировым, С. А. Лычевым [13], П. А. Беловым, С. А. Лурье [53], В. П. Мясниковым и М. А. Гузевым [54]. За рубежом весомый вклад в изучение несовместных деформаций внесли такие современные исследователи как А. Yavari [55], А. Acharya, G. Maugin [12] и многие другие.

Актуальность. В настоящее время упругие элементы нанометрового масштаба используются в качестве датчиков и актуаторов практически всех микроэлектромеханических систем, разрабатываемых в Российской Федерации и за рубежом. Между тем в широкой инженерной практике приемлемые методы анализа напряженно-деформированного состояния таких элементов практически отсутствуют. Существующие решения представляют собой либо простые ап-

проксимации, которые могут приводить к значительным погрешностям (например, формула Стоуни), либо предполагают использование различных конечно-элементных схем. Последние часто оказываются неэффективными для анализа деформаций пластинчатых элементов ввиду того, что у пластин один пространственный параметр (толщина) может быть на порядки меньше двух других и поэтому для построения невырожденной конечно-элементной сетки приходится значительно уменьшать размеры элементов, тем самым неоправданно увеличивая их число. Кроме того, особенности технологического процесса производства элементов МЭМС приводят к тому, что в них неизбежно присутствуют несовместные деформации, оказывающие серьезно влияние на упругий отклик элемента. В настоящее время этот факт редко учитывается при проектировании МЭМС, что приводит к тому, что их конструкции зачастую оказываются неоптимальными.

Цель работы заключается в развитии методов математического моделирования конечных несовместных деформаций в гибких элементах МЭМС и их экспериментальной валидации. Эта цель предполагает решение следующих задач:

1. Вывод уравнений поля, законов сохранения, краевых и начальных условий для тонких пластин, учитывающих их значительную гибкость и несовместные деформации, возникающие при их изготовлении;
2. Развитие алгоритмов решения нелинейных краевых задач для гибких пластин;
3. Развитие методов экспериментального исследования деформаций элементов нанометрового масштаба;
4. Экспериментальная валидация предлагаемых теоретических моделей конечного изгиба тонких пластин.

Методы исследования. Для вывода уравнений движений, краевых условий и законов сохранения используется принцип стационарности действия и теорема Нетер [56]. Для формулировки плотности действия, в форме специфичной для развиваемой теории, применяются положения дифференциально-геометрической теории конечных несовместных деформаций, в частности, гипотеза локальной разгрузки [13] и поле импланта [12] как универсальная мера

несовместности. Для решения нелинейных краевых задач развит метод последовательных приближений и алгоритмы его регуляризации, а также нелинейные обобщения метода Галеркина [14]. Экспериментальное исследование проводилось методом голографической интерферометрии с помощью классической внеосевой схемы Лейта – Упатниекса [57].

Положения, выносимые на защиту:

1. Новые уравнения для конечных несовместных деформаций гибких пластин и упорядоченная по мере усложнения последовательность их асимптотических представлений.
2. Определение областей применения асимптотических представлений в зависимости от относительной толщины и отношения толщины к прогибу.
3. Итерационное решение нелинейной задачи о конечном деформировании круглой пластины для произвольного нагружения с учетом несовместных деформация.
4. Решение нелинейной задачи о деформировании прямоугольной пластины для произвольного нагружения с учетом двух вариантов краевых условий и несовместных деформаций.
5. Экспериментальная валидация представленных решений.

Научная новизна работы. Нелинейные уравнения движения и законы сохранения, полученные в Главе 1 из общих вариационных принципов, учитывают несовместные конечные деформации за счет двух дополнительных полей имплантов, ассоциированных с классической и микроморфной дисторсиями. Уравнения в такой форме для гибких тонкостенных элементов получены впервые. В Главе 2 предлагаются новые методы регуляризации итерационной процедуры построения решения нелинейной краевой задачи для гибкой пластины и построено новое замкнутое решение нелинейной задачи для жестко закрепленной прямоугольной пластины, удовлетворяющие полным условиям жесткого закрепления. Представленные решения краевых задач с учетом несовместных деформаций также являются оригинальными.

Практическая значимость исследования. Использование развитых в ходе выполнения диссертационной работы алгоритмов позволило согласовать

теоретические предсказания с результатами инструментальных измерений изгиба круглых мембран, произведенных сотрудниками Московского института электронной техники в ходе разработки датчиков давления и оптических элементов динамической маски рентгенлитографа [3, 4]. Результаты исследований были использованы в проектах РНФ (проекты № 23-19-00866 “Термомеханика ультратонких мембран, подвергаемых облучению в рентгеновском диапазоне” и № 25-11-00333 “Конечные деформации гибких элементов микроэлектромеханических систем в связанных полях. Многомасштабный подход”) и при выполнении работ по теме “Разработка и исследование перспективных материалов и наноструктур для технологии безмасочной рентгеновской нанолитографии, применимой к созданию новой компонентной базы микро- и наноэлектроники с использованием источника синхротронного излучения” в рамках проекта министерства науки и высшего образования “Методы синхротронной и нейтронной диагностики материалов и наноразмерных структур для перспективных технологий и технических систем, включая принципиально новую природоподобную компонентную базу” (шифр № 2021-951-ФП5-0002).

Достоверность результатов обеспечивается строгостью математического вывода из наиболее общих физических принципов. Достоверность построенных решений также подтверждается сравнением с известными приближенными решениями и экспериментальными данными, полученными методом голографической интерферометрии. Адекватность оценок сходимости представленных итерационных решений показана на серии вычислительных экспериментов.

Апробация работы. Основные результаты диссертационного исследования были доложены на международных и всероссийских научных конференциях:

- XLIX International Summer School - - Conference Advanced Problems in Mechanic. Устный доклад “Nonlinear boundary value problem for circular elastic plate”. Авторы: S. A. Lychev и A. V. Digilov. Докладывал A. V. Digilov;
- XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Стенодовый доклад “Уточненная модель тонких пластин микроэлектромеханических систем”. Авторы: С. А. Лычев, А. В. Дигилов и Н. А. Дюжев. Докладывал А. В. Дигилов;
- XXXI Всероссийская межвузовская научно-техническая конференция сту-

дентов, аспирантов и молодых учёных «Микроэлектроника и информатика – 2024». Устный доклад “Уточненная модель тонких пластин микроэлектромеханических систем”. Авторы: С. А. Лычев и А. В. Дигилов. Докладывал С. А. Лычев;

- 51 школа-конференция “Актуальные проблемы механики” памяти Д. А. Индейцева. Устный доклад “Изгиб толстых, тонких и ультратонких квадратных пластин”. Автор: А. В. Дигилов.

Также результаты исследования представлены в докладах, принятых к участию в 53 школе-конференции “Актуальные проблемы механики”:

- “Решение уравнений Феппля – фон Кармана в круговой области с учетом несовместных деформаций”. Автор: А. В. Дигилов;
- Стендовый доклад “Влияние деформируемости краев на изгиб прямоугольных пластин Феппля – фон Кармана”. Авторы: А. В. Дигилов, С. А. Лычев. Докладчик: А. В. Дигилов.

Публикации Основные результаты диссертационной работы были изложены в 8 работах, 4 из которых [3–5, 8] опубликованы в рецензируемых научных изданиях, входящих в список ВАК и имеющих категорию К1, а прочие [1, 2, 6, 7] – в издании, индексируемом в международной базе математических журналов Zentralblatt MATH.

Личный вклад автора. Автор принимал участие в выводе всех теоретических результатов, представленных в работе. Численные алгоритмы решений, представленные в Главе 2, разработаны автором. Валидация теоретических моделей по результатам экспериментальных исследований, представленных в Главе 3, также проведена автором.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из трех глав, введения, заключения и 5 приложений. Общий объем работы составляет 243 страницы, 40 рисунков и 23 таблицы. Список литературы содержит 229 позиций.

Во введении к работе представлен подробный обзор работ, посвященных исследованию тонких пластин, начиная от самых первых исследований, лежащих в основе теории, и заканчивая работами, отражающими современное ее состояние.

Первая глава посвящена выводу уравнений теории пластин с учетом несовместных деформаций из общих уравнений трехмерной теории упругости с помощью последовательной асимптотической редукции по двум малым параметрам – толщинному и деформационному. Сами уравнения теории упругости, учитывающие несовместные деформации (поле импланта), выводятся из принципа наименьшего действия и вариационных симметрий.

Во второй главе рассмотрены задачи о конечных деформациях круглой и прямоугольной пластин. Представлены идеи построения решений, реализованы соответствующие алгоритмы. Дана оценка влияния несовместных деформаций на упругий отклик пластин.

Третья глава описывает экспериментальные исследования деформаций тонких пластин, выполненные методом голографической интерферометрии. Продемонстрировано влияние конечных несовместных деформаций на жесткость упругих элементов. Экспериментально установлено существенное влияние нелинейных факторов натяжения и собственных напряжений, вызванных несовместными деформациями, на упругий отклик пластин. Проведена качественная валидация решений, представленных в работе.

В заключении подведен краткий итог проделанной работы.

Приложения содержат необходимую справочную информацию, некоторые дополнительные результаты и различные соотношения, оказавшиеся слишком громоздкими для включения в основную часть, но необходимые для воспроизведения представленных решений.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность Сергею Александровичу Лычеву за научное руководство и всеобъемлющую поддержку на всех этапах выполнения диссертационного исследования. Также автор хотел бы поблагодарить сотрудников лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела (ИПМех РАН) Павла Сергеевича Бычкова и Юсупа Назиповича Сайфутдинова за помощь в проведении экспериментального исследования методом голографической интерферометрии. Автор выражает благодарность сотрудникам ЦКП МИЭТ, а именно Николаю Алексеевичу Дюжеву, Глебу Дмитриевичу Демину, Евгению Эдурдовичу Гусеву и Ивану Васильевичу Кушнареву, которые предоставили образцы нанометрового масштаба для экспериментальных исследований. Автор глубоко признателен своим коллегам и товарищам, особенно Александру Леонидовичу Левитину, Константину Ге-

оргиевичу Койфману, Никите Алексеевичу Пивоварову и Давиду Вагановичу Гандилянцу за плодотворные обсуждения и ценные замечания. Наконец, автор хотел бы сердечно поблагодарить свою супругу Екатерину, чья многолетняя поддержка позволила завершить этот труд.

* * *

Основным деформируемым элементом многих микроэлектромеханических систем являются различные тонкостенные структуры: пластины, оболочки, мембраны и кантиливеры [9]. Их используют в качестве измерительных элементов различных приборов, например, акселерометров [58], сенсоров расхода газа [59], датчиков давления [60, 61], микроболометров [62] и многих других [63–65]. Обычно такие устройства регистрируют деформацию или нагрев измерительного элемента, а значение оцениваемой величины получают пересчетом из некоторой математической модели. Таким образом, качество работы таких приборов напрямую зависит от адекватности используемой модели.

Упругие элементы МЭМС обладают рядом особенностей, которые необходимо учитывать при их моделировании. Учесть их все в рамках одной модели не представляется возможным, поэтому в настоящем исследовании будут рассмотрены лишь некоторые, наиболее существенные:

1. **Конечность деформаций.** Обычно упругие элементы МЭМС чрезвычайно гибкие и могут значительно деформироваться без возникновения неупругих деформаций.
2. **Наличие малого параметра.** Практически все упругие элементы МЭМС относятся к тонкостенным, т. е. отношение их габаритных размеров к толщине много больше единицы. В большинстве случаев используют тонкие элементы с соотношением размеров в диапазоне от 100 до 500 [66–68], однако существуют ультратонкие элементы (например, пелликулы для ЭУФ литографии), у которых это соотношение превосходит 10^6 [69, 70].
3. **Несовместность деформаций.** В силу особенностей технологического процесса изготовления элементов МЭМС в них всегда присутствуют несовместные деформации. Эти деформации и порождаемые ими остаточные

напряжения бывают довольно существенными и могут оказывать значительное влияние на жесткость и прочность элемента [3].

Для того чтобы учесть конечность деформаций, необходимо проводить постановку задачи в рамках нелинейной теории упругости, однако порождаемая ее уравнениями краевая задача крайне сложна и в общем случае не может быть решена аналитически. Кроме того, наличие малого параметра приводит к вырождению трехмерной численной схемы решения. Поэтому для моделирования элементов МЭМС целесообразно обратиться к асимптотической теории, т. е. к теории пластин. В настоящее время эта теория успешно применяется для решения подобных задач [71–73].

Перед тем как продолжить обсуждение теории пластин, необходимо дать краткий комментарий по поводу принятой терминологии. Когда речь идет о плоских упругих элементах, у которых два линейных размера много больше третьего, обычно употребляют один из трех терминов: мембрана, пластина или плита. В технике такие элементы классифицируют, опираясь на гибкость элемента [24] и отношение его толщины к некоторому габаритному размеру [74], который выбирается в известной степени произвольно. В настоящей работе будет использован подход, принятый в теории упругости, согласно которому плиты – это трехмерные упругие тела (подробнее о понятии тела в [11]), а пластины и мембраны – двумерные материальные континуумы или, другими словами, материальные поверхности, оснащенные физическими свойствами [75, 76]. Имея в виду конечные деформации, подразумевается, что и пластины и мембраны сопротивляются изменению своей внутренней геометрии (метрики), а единственное различие между ними состоит в том, что пластины вдобавок имеют изгибную жесткость, т. е. могут сопротивляться изгибаниям (деформациям, сохраняющим внутреннюю геометрию [77]). Важно отметить, что в теории упругости речь идет не о реальных телах, а о математических абстракциях, соответственно один и тот же упругий элемент может быть описан разными моделями теории упругости, как, например, в первой главе настоящей работы.

Замечание 0.1. *В большинстве учебных пособий по теории упругости [78] и математической физике [79–81] под мембранами понимают равномерно натянутую пленку, не сопротивляющуюся изгибам и сдвигам. Такое определение удобно потому, что в случае малых деформаций оно приводит к хо-*

рошо известному гиперболическому уравнению, на примере которого удобно рассматривать решение задачи Штурма – Лиувилля в двумерной области:

$$T_0 \nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Здесь и далее w – функция прогибов, t – время и T_0 – среднее натяжение мембраны в плоскости.

Ниже приведен краткий исторический обзор основных работ по теории пластин. Подробности, когда это возможно, воспроизведены по оригинальным работам, а общие сведения почерпнуты из работ [14, 78, 82]. Изложение соответствует хронологическому порядку появления важнейших работ по теории пластин.

Краткая история и современное состояние теории гибких пластин

Первые работы по теории пластин. Линейная теория пластин приводит к хорошо известному бигармоническому уравнению изгиба, полученному французским математиком Софи Жермен в начале XIX века:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = p, \tag{0.1}$$

где p – функция внешнего давления, приложенного к одной из лицевых поверхностей пластины и D – константа, называемая цилиндрической жесткостью. Последняя выражается через толщину пластины h и параметры ее материала – модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Несмотря на то, что уравнение (0.1) и развернувшаяся вокруг него дискуссия широко обсуждались в литературе, см. например, в [82–86], идеи, лежавшие в методе его вывода непосредственно связаны с вариационными формулами, используемыми в Главе 1 настоящей работы. В этой связи в рамках исторического обзора уместно будет кратко описать те соображения, которые привели Софи Жермен к уравнению (0.1). Поскольку ее идеи во многом опирались на идеи предшественников: Эйлера и Лагранжа, изложение целесообразно начать с краткого обзора их работ.

Систематическому изучению пластин предшествовали работы, посвященные мембранам. Первой такой работой считается, опубликованная в 1766 году, работа Эйлера “De motu vibratorio tympanorum” [87], в которой он получил уравнение малых колебаний круглой мембраны. Идея Эйлера заключалась в том, чтобы сперва вывести уравнение колебаний прямоугольной мембраны, рассмотрев ее как систему перекрестно натянутых гибких упругих нитей, а затем преобразовать его для случая круглой мембраны с помощью формул преобразования координат. Для прямоугольной мембраны Эйлер получил следующее уравнение¹:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = g \left(h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

где h, f – натяжения нитей, а g – половина ускорения свободного падения (в оригинале: “высота падения за минуту”). Такой вид уравнения объясняется тем, что в модели Эйлера перекрестные нити работали независимо друг от друга и поэтому могли быть натянуты по-разному. Далее, однако, Эйлер предположил, что натяжения нитей одинаковы и после преобразования координат получил уравнение малых колебаний круглой мембраны в следующем виде:

$$k \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2}.$$

Другой вывод дифференциального уравнения равновесия мембраны был представлен в первом томе “Аналитической механики” Лагранжа [88], вышедшем в 1788 году. Лагранж получил уравнение статического изгиба квадратной мембраны, нагруженной собственным весом (a – некоторая константа):

$$-g = a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

однако не составляет труда обобщить его для произвольного нагружения. Это уравнение было получено с помощью нового вариационного метода, развитого Лагранжем².

Необходимость учета изгибной жесткости возникла в связи с попытками дать объяснение эффектам, обнаруженным Хладни в ходе его экспериментов. Их суть хорошо известна: Хладни насыпал песок на тонкую металлическую или стеклянную пластинку, закрепленную в центре, а затем проводил по ее краю

¹Здесь и далее будут использоваться обозначения принятые в современной теории пластин.

²В настоящее время этот метод известен как принцип Даламбера – Лагранжа, а его основное уравнение – как общее уравнение динамики [89]

смычком, в результате чего песок собирался в различные фигуры. Первый набор таких фигур был опубликован Хладни в 1787 году в книге “Entdeckungen über die Theorie des Klanges” [90].

Годом позже в работе [91] Яков Бернулли-младший попытался дать объяснение результатам Хладни. Он попробовал адаптировать идею, которую Эйлер использовал для мембран, заменив упругие нити на балки, частотное уравнение для которых уже было известно из работ Эйлера [92] (оригинал вышел в 1744 году). Таким образом Бернулли получил уравнение:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{w}{c^4},$$

где $c^4 = \frac{Eh^2l}{8\rho}$. Под l здесь понимается длина математического маятника, колеблющего с той же частотой, т. е. это величина обратная собственной частоте пластины. Бернулли понимал ошибочность этого уравнения и рассматривал его лишь как первое приближение [82].

В 1809 Хладни продемонстрированных свои эксперименты Наполеону, который предложил Парижской Академии Наук учредить премию за их объяснение [93]. К сроку, который поставила Академия, на конкурс была подана лишь работа Софи Жермен, в которой она получила уравнение колебаний упругой пластины и естественные краевые условия с помощью метода, примененного Лагранжем для вывода уравнения равновесия мембраны. В приложении к задаче о малых колебаниях пластины этот метод может быть сформулирован следующим образом: точки пластины будут находится в состоянии динамического равновесия тогда и только тогда когда для любой системы их виртуальных перемещений выполнено равенство:

$$\iint_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \, dx \, dy + \delta \mathcal{A} = 0, \quad (0.2)$$

где ρ – плотность материала пластины, $\delta \mathcal{A}$ – работа сил упругости на виртуальных перемещениях точек пластины δw , а Ω – ограниченная область, занимаемая пластиной в недеформированном состоянии (в дальнейшем будем предполагать, что ее граница $\partial\Omega$ кусочно-гладкая).

Замечание 0.2. *Необходимо пояснить, что запись δw не следует воспринимать как вариацию функции w . Здесь эти символы неотделимы и обозначают произвольный элемент функционального множества виртуальных пере-*

мещений. Таким образом, выражение (0.2) представляет собой континуальное множество равенств.

Замечание 0.3. Напомним, что множество виртуальных перемещений не является первичным, его элементы определяются как инфинитезимальные перемещения по направлениям элементов множества виртуальных скоростей, которые, в свою очередь, представляют собой разность двух любых элементов множества возможных (т. е. допускаемых связями) скоростей. Нетрудно показать [89], что в случае когда на систему наложены лишь стационарные связи возможные и виртуальные скорости (и перемещения) неразличимы.

Софи Жермен предположила, что силы упругости, стремящиеся вернуть деформированную пластину в исходное состояние, пропорциональны средней кривизне деформированной поверхности пластины [94]:

$$F \sim \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad (0.3)$$

где R_1, R_2 – главные кривизны. Для работы этих сил она записала следующее выражение:

$$\delta \mathcal{A} = \iint_{\Omega} N^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \delta \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dx dy, \quad (0.4)$$

где N^2 – некоторый коэффициент, зависящий от материала пластины и пропорциональный четвертой степени ее толщины, а $\delta \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ – приращение средней кривизны при переходе пластины из одного возможного состояния в другое. Тем самым Софи Жермен напрямую увязала упругий отклик с геометрической характеристикой срединной поверхности пластины. Этот подход лег в основу геометрического формализма современной механики континуума, который широко используется в настоящем исследовании и во многих современных работах по теории пластин, некоторые из которых рассмотрены в конце этой главы.

Замечание 0.4. Выражение для работы упругих сил в [94] также содержало слагаемое, связанное с работой, совершаемой упругими силами при изменении площади элементарного участка пластины, т. е. слагаемое соответствующее мембранным усилиям, однако в процессе вывода оно было отброшено в силу малости.

Замечание 0.5. Софи Жермен определила работу сил упругости по аналогии с тем как это делал Лагранж, выводя уравнение мембраны, однако, как заметил Ж. Бертран в комментариях к [88], такая форма записи работы ниоткуда не следует. Впрочем, к этому результату можно прийти и по методу Эйлера, изложенному в [92], если предположить, что потенциальная энергия пластины \mathcal{W} пропорциональна квадрату суммы главных кривизн ее деформированной поверхности:

$$\mathcal{W} = \iint_{\Omega} \frac{N^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^2 dx dy. \quad (0.5)$$

Эта форма записи также позволяет явно проследить преемственность между гипотезой Софи Жермен и идеей, высказанной Даниилом Бернулли в письме к Эйлеру, о том, что потенциальная энергия балки пропорциональна квадрату кривизны ее упругой линии [92].

После подстановки выражения (0.4) в (0.2) Софи Жермен получила условие динамического равновесия пластины в виде:

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w + N^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \delta \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] dx dy = 0. \quad (0.6)$$

В процессе решения этого уравнения Софи Жермен допустила ошибку и полученное ей уравнение малых колебаний пластины оказалось ошибочным [86]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + N^2 \left(\frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} \right) = 0.$$

Ошибку заметил и исправил Лагранж, однако он высказал сомнения насчет правильности исходной гипотезы. После продолжительной дискуссии Софи Жермен все же получила премию в 1816 году. Исправленную версию своего вывода она опубликовала в 1821 году, дополнив его для случая пластины с начальной погибью. Подробный критический разбор этой работы приведен в [83].

В своем выводе Софи Жермен предположила, что с точностью до слагаемых порядка квадрата прогиба средняя кривизна деформированной поверхности равна сумме вторых производных w . Действительно, средняя кривизна поверхности определяется как сумма ее главных кривизн, или след ее тензора кривизны [95]:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12} + h_{22}g_{11}}{\omega}, \quad (0.7)$$

где g_{ij} , h_{ij} – коэффициенты первой и второй фундаментальных форм деформированной поверхности пластины, а $\omega = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ – второй инвариант ее метрического тензора. Коэффициенты фундаментальных форм, в свою очередь, выражаются через функцию прогиба (подробный вывод приведен в Приложении А):

$$g_{11} = 1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad g_{12} = g_{21} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad g_{22} = 1 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ h_{11} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad h_{12} = h_{21} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad h_{22} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

После подстановки этих выражений в (0.7) имеем:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + o(w^2).$$

Полученное равенство позволяет выразить (0.6) только лишь через вторые производные функции прогиба:

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w + N^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \delta \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] dx dy = \\ = \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dx dy + \iint_{\Omega} N^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy.$$

В силу ограничений, наложенных на $\partial\Omega$, второй интеграл в этой сумме можно проинтегрировать по частям. Для сокращения выкладок будем предполагать, что граница области интегрирования $\partial\Omega$ – выпуклая кривая:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dx dy + \iint_{\Omega} N^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy = \\ = \int_{y_1}^{y_2} N^2 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \frac{\partial w}{\partial x} - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \delta w \right] dy \Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)} + \quad (0.8) \\ + \int_{x_1}^{x_2} N^2 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \frac{\partial w}{\partial y} - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \delta w \right] dx \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} + \\ + \iint_{\Omega} \left[N^2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \delta w dx dy.$$

Здесь $x_{1,2}(y)$, $y_{1,2}(x)$ – функции, описывающие части контура $\partial\Omega$. Одинарные интегралы в полученной сумме можно преобразовать к криволинейным:

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} N^2 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \frac{\partial w}{\partial x} - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \delta w \right] dy \Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)} &= \quad (0.9) \\ &= \pm \oint_{\partial\Omega} N^2 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \frac{\partial w}{\partial x} - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \delta w \right] dy, \\ \int_{x_1}^{x_2} N^2 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \frac{\partial w}{\partial y} - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \delta w \right] dx \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} &= \\ &= \mp \oint_{\partial\Omega} N^2 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \frac{\partial w}{\partial y} - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \delta w \right] dx. \end{aligned}$$

Знаки перед криволинейными интегралами зависят от выбранного направления обхода контура $\partial\Omega$, верхние знаки соответствуют обходу против часовой стрелки, а нижние – по часовой. Суммируя полученные интегралы приходим к следующему:

$$\begin{aligned} \pm \oint_{\partial\Omega} N^2 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} dy - \frac{\partial w}{\partial y} dx \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} dy - \frac{\partial}{\partial y} dx \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta w \right] &= \\ &= \oint_{\partial\Omega} N^2 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta w \right] ds, \quad (0.10) \end{aligned}$$

где ds – элемент дуги контура $\partial\Omega$, а $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ – производная по направлению его внешней нормали.

Замечание 0.6. Напомним, что понимается под производной по направлению нормали. Пусть контур $\partial\Omega$ задан параметрически через радиус-вектор $\mathbf{r} = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j}$, где t – некоторый скалярный параметр, а \mathbf{i} , \mathbf{j} – орты декартовой системы координат. Производная радиус-вектора по параметру t задает поле касательных векторов $\mathbf{e} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j}$, каждому из которых соответствует пара нормалей (внешняя и внутренняя³) $\mathbf{n} = \pm \left(\frac{dy}{dt} \mathbf{i} - \frac{dx}{dt} \mathbf{j} \right)$. Если в качестве параметра принять длину дуги контура s , тогда полученные касательные и нормали будут единичными. С помощью вектора нормали на плоскости можно параметрически задать прямую:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_0 + k \mathbf{n} = x(k) \mathbf{i} + y(k) \mathbf{j},$$

³При обходе против часовой стрелки, если обход идет по часовой, то знаки следует изменить

где \mathbf{r}_0 – радиус-вектор точки контура, из которой строится нормаль, а k – скалярный параметр. Тогда производная функции f по направлению нормали (для определенности, внешней) будет пропорциональна производной сложной функции по параметру k :

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{\|\mathbf{n}\|} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dk} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dk} \right) = \frac{1}{\|\mathbf{n}\|} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dy}{dt} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dx}{dt} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dx}{ds}.$$

Подстановка (0.10) в (0.8) позволяет избавиться от зависимых вариаций в исходном функционале:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \, dx \, dy + \iint_{\Omega} N^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx \, dy = \\ & = \iint_{\Omega} \left[N^2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \delta w \, dx \, dy + \\ & + \oint_{\partial \Omega} N^2 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta w \right] ds. \end{aligned}$$

Отсюда, с помощью основной леммы вариационного исчисления [96], можно получить уравнение поля:

$$N^2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (0.11)$$

и естественные краевые условия:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{\partial \Omega} = 0. \quad (0.12)$$

В 1850 году в статье [15] Кирхгоф показал, что гипотеза Софи Жермен (0.3) не выполняется и, хотя уравнение изгиба (0.11) оказалось верным, первое из полученных естественных краевых условий (0.12) ошибочно. Впрочем догадка Софи Жермен о том, что сопротивление упругой пластины, а следовательно и ее потенциальная энергия, зависят лишь от кривизн ее деформированной поверхности была точной, ошибка заключалась лишь в том, что она учла только первый инвариант тензора кривизны. В современной теории пластин выражение для потенциальной энергии обычно записывают в следующем виде:

$$\mathcal{W} = \frac{D}{2} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx \, dy, \quad (0.13)$$

Если преобразовать подынтегральное выражение, то в нем можно явно выделить слагаемые соответствующие первому и второму инвариантам тензора кривизны:

$$\mathcal{W} = \frac{D}{2} \iint_{\Omega} \left[\underbrace{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2}_{I_1} - 2(1 - \nu) \underbrace{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right)}_{I_2} \right] dx dy.$$

Этот результат был предсказан Пуассоном в 1814 году в работе [97]. В этой работе он попытался дать более строгий вывод уравнений равновесия мембраны и пластины, полученных Эйлером, Лагранжем и “анонимным автором” (работа Софи Жермен была подана на конкурс анонимно, поэтому Пуассон не мог знать автора уравнения (0.11)). В первой части своей работы Пуассон вывел уравнение малых колебаний мембраны, причем он считал силы, растягивающие элементарный участок мембраны вдоль координатных осей, независимыми друг от друга, таким образом он пришел к уравнению, полученному Эйлером в [87].

Пуассон получил уравнение изгиба пластины, отталкиваясь от представлений о молекулярном строении тела⁴. Он предположил, что пластина представляет собой совокупность частиц, изначально расположенных в одной плоскости, между которыми действуют силы молекулярного взаимодействия:

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2} h^2 f(\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|),$$

где \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 – радиус-вектора точек, h – толщина пластины, а f – некоторая функция, описывающая физический закон взаимодействия между точками. Пуассон не конкретизировал вид этой функции, он лишь потребовал, чтобы при превышении некоторого значения аргумента она тождественно обращалась в ноль. Такое требование отражает идею Пуассона об ограниченной сфере действия молекулярных сил. Итоговое уравнение изгиба пластины по Пуассону практически идентично уравнению (0.11), с той лишь разницей, что у Пуассона коэффициент при бигармоническом операторе пропорционален квадрату толщины.

В заключение своей работы Пуассон сделал важное замечание о том, что существует функционал более общего вида чем (0.5), условие минимизации кото-

⁴Фактически, Пуассон предпринял попытку вывода закона состояния ab initio. В настоящее время эта задача чрезвычайно актуальна для анализа деформаций МЭМС, но она выходит за рамки настоящего исследования

рого приводит к уравнению типа (0.11) (константа перед интегралом опущена):

$$\mathcal{W} = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^2 - \alpha \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_2} \right] dx dy, \quad (0.14)$$

где α – произвольная константа.

Замечание 0.7. Если положить $\alpha = 1$, то получится функционал, известный как энергия Уиллмора (в некоторых источниках так называют выражение (0.5)). Этот функционал является интегральной мерой локального отклонения поверхности от сферы [98]. В настоящее время интенсивно развивается теория обобщенных поверхностей, доставляющих минимум этому функционалу (их называют поверхностями Уиллмора). С некоторыми результатами можно ознакомиться, например, в работах [98, 99].

Покажем, что дополнительное слагаемое в функционале (0.14) действительно влияет только лишь на краевые условия, оставляя уравнение поля без изменений. По аналогии с выводом Софи Жермен, нужно выразить произведение главных кривизн (гауссову кривизну) через функцию прогиба, удерживая лишь слагаемые порядка квадрата прогиба (Приложение А):

$$\frac{1}{R_1} \frac{1}{R_2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + o(w^2).$$

Соответственно условие минимальности (0.14) будет следующим (здесь и далее слагаемое, связанное со средней кривизной, показано условно, т. к. результат для него уже получен выше):

$$\delta \mathcal{W} = \iint_{\Omega} \left[(\dots) - \alpha \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] dx dy = 0.$$

Выражение в скобках можно представить как сумму частных производных:

$$\delta \mathcal{W} = (\dots) - \alpha \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \delta \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy.$$

По формуле Грина [100] этот поверхностный интеграл можно преобразовать к интегралу по границе $\partial\Omega$:

$$\delta \mathcal{W} = (\dots) \mp \alpha \oint_{\partial\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \delta \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \right].$$

Это показывает, что добавочные слагаемые в (0.14) не вносят вклада в уравнение поля (0.11).

Получить естественные краевые условия, соответствующие (0.14), непосредственно из этого криволинейного интеграла не удастся, т. к. на контуре частные производные функции прогиба по декартовым координатам, в общем случае, зависят друг от друга. Для вывода краевых условий следует перейти к естественным координатам контура. Если же на некотором участке контура они совпадают с декартовыми, тогда краевые условия могут быть получены сразу же, например на стороне прямоугольного контура они имеют следующий вид:

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (1 - \alpha) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \Big|_{x=const} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (1 + \alpha) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=const} = 0.$$

Эти краевые условия совпадают с принятыми в настоящее время если положить $\alpha = 1 - \nu$.

Теория Кирхгофа. В работе [97] Пуассон лишь продемонстрировал возможность вывода уравнения Софи Жермен из более общего чем (0.5) функционала (0.14), но естественные краевые условия он не получил. Позже Коши [101] и Пуассон [102] попытались строго вывести полную постановку краевой задачи теории пластин из более общего подхода, основанного на разложениях всех функций, описывающих деформированное состояние пластины, в ряд по степеням трансверсальной координаты. Однако, как отмечает Кильчевский [18], уровень развития теории упругости в то время не позволил получить верные уравнения в рамках такого подхода. В работах Коши и Пуассона краевая задача теории пластин содержала лишнее краевое условие, что привело к длительной дискуссии, в результате которой их метод на долгое время был вытеснен более простой и наглядной техникой, развитой в работах Кирхгофа, Кельвина и Тэта.

Теория Кирхгофа, основанная на знаменитых гипотезах, впоследствии названных в его честь, была представлена в 1850 году в статье [15]. В этой работе Кирхгоф показал ошибочность краевых условий, полученных Софи Жермен [94] и Пуассоном [102], а взамен предложил свою теорию.

В начале своей статьи он доказал, что если в уравнении (0.11) заменить инерционное слагаемое на заданную силу p , что допускается выводом Софи Жермен, то для прямоугольной пластины краевая задача (0.11), (0.12) не будет иметь решения, за исключением некоторых частных случаев. Для этого он

ввел вспомогательную функцию:

$$f = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

и переписал через нее (0.11), (0.12):

$$N^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = p, \quad f|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Вспомогательная функция позволила снизить порядок дифференциального уравнения до второго, соответственно для построения его решения необходимо задать четыре краевых условия. Однако, число независимых краевых условий, как видно, не уменьшилось и равно восьми. Отсюда следует, что, в общем случае, при выполнении части из них, например, $f|_{\partial\Omega} = 0$, оставшиеся условия не могут быть выполнены.

Свой вывод Кирхгоф произвел на основе двух гипотез аналогичных тем, которые ввел Яков Бернулли для балки:

1. Каждый прямой отрезок пластины, изначально перпендикулярный ее лицевым поверхностям, остается прямым и перпендикулярным к поверхностям, изначально параллельным лицевым.
2. Все элементы срединной поверхности не испытывают никакой деформации при изменении формы пластины.

Замечание 0.8. *Интересно отметить, что требование недеформируемости трансверсальных волокон, которое многие исследователи включают в кинематическую гипотезу Кирхгофа, не входит в оригинальную формулировку.*

Вывод уравнения поля и краевых условий Кирхгоф осуществил методом Лагранжа. Потенциальную энергию деформации пластины он представил в виде:

$$\mathcal{W} = K \iiint_{\Omega} \left[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \theta (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 \right] dx dy dz, \quad (0.15)$$

где K, θ – константы материала, λ_i – главные удлинения пластины, т. е. собственные числа линеаризованного тензора Грина – Сен-Венана:

$$\text{Lin}(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \left((\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u} \right).$$

Замечание 0.9. Материальные константы, использованные Кирхгофом, связаны с модулем Юнга и коэффициентом Пуассона формулами перехода:

$$E = 2K \frac{1 + 3\theta}{1 + 2\theta}, \quad \nu = \frac{\theta}{1 + 2\theta}. \quad (0.16)$$

Если преобразовать подынтегральное выражение в (0.15):

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \theta (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 = (\theta + 1) (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 2 (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1),$$

то легко видеть, что оно представляет собой функцию инвариантов тензора (0.16) аналогичную функции кривизн, которую предложил Пуассон (0.14). Этот результат не случаен, он является следствием того, что сущность гипотез Кирхгофа, заключается в связи тензора деформаций трехмерного тела с тензором кривизн двумерной поверхности. Таким образом, гипотезы Кирхгофа это частный случай решения задачи приведения (в терминологии Кильчевского [18]), которую в общем виде пытались разрешить Коши и Пуассон.

Действительно, согласно гипотезам Кирхгофа, главные удлинения выражаются через главные кривизны срединной поверхности и некоторую функцию q , выражающую изменение длин трансверсальных волокон:

$$\lambda_1 = \frac{z}{R_1}, \quad \lambda_2 = \frac{z}{R_2}, \quad \lambda_3 = \frac{\partial q}{\partial z}.$$

Таким образом функция потенциальной энергии принимает вид, похожий на трехмерный аналог (0.14):

$$\mathcal{W} = K \iiint_{\Omega} \left[z^2 \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) + \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right)^2 + \theta \left(\frac{z}{R_1} + \frac{z}{R_2} + \frac{\partial q}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz,$$

После построения упругой энергии, в статье Кирхгофа следуют рассуждения о вариации работы внешних сил:

$$\delta \mathcal{A} = \iiint_{\Omega} [\mathbf{X} \delta U + \mathbf{Y} \delta V + \mathbf{Z} \delta W] dx dy dz, \quad (0.17)$$

где U, V, W – перемещения точек трехмерного тела, а $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ – компоненты поля внешних сил. В соответствии с принятыми гипотезами, вариации функций перемещений выражаются через вариации перемещений точек срединной поверхности u, v, w :

$$\delta U = \delta u + z \delta \cos(\mathbf{n}, x), \quad \delta V = \delta v + z \delta \cos(\mathbf{n}, y), \quad \delta W = \delta w + z \delta \cos(\mathbf{n}, z),$$

где под $\cos(\mathbf{n}, \dots)$ понимаются косинусы углов между нормалью к деформированной срединной поверхности и координатными осями.

Кирхгоф заметил, что, в отличие от вариации потенциальной энергии:

$$\delta \mathcal{W} = K \iiint_{\Omega} \left[z^2 \delta \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} \right) + 2 \frac{\partial q}{\partial z} \delta \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right) + 2\theta \left(\frac{z}{R_1} + \frac{z}{R_2} + \frac{\partial q}{\partial z} \right) \delta \left(\frac{z}{R_1} + \frac{z}{R_2} + \frac{\partial q}{\partial z} \right) \right] dx dy dz,$$

вариация работы внешних сил (0.17) не содержит слагаемых пропорциональных независимой вариации $\delta \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right)$, следовательно они не могут входить и в вариацию потенциальной энергии. Отсюда он пришел к равенству:

$$\frac{\partial q}{\partial z} = -\frac{\theta}{1+\theta} \left(\frac{z}{R_1} + \frac{z}{R_2} \right).$$

Замечание 0.10. Полученное уравнение есть не что иное как уравнение одной из связей, налагаемых гипотезами Кирхгофа, а функция $\frac{\partial q}{\partial z}$ выступает как множитель Лагранжа. Подробнее вывод уравнений Кирхгофа с точки зрения среды со связями представлен в работах [2, 103].

С учетом полученного уравнения выражение для потенциальной энергии записывается следующим образом:

$$\mathcal{W} = K \iiint_{\Omega} \left[\frac{1+2\theta}{1+\theta} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^2 - \frac{2}{R_1 R_2} \right] z^2 dx dy dz.$$

Если его проинтегрировать по трансверсальной координате, то результат будет совпадать с (0.14) с точностью до множителей при слагаемых⁵:

$$\mathcal{W} = \frac{K h^3}{12} \iint_{\Omega} \left[\frac{1+2\theta}{1+\theta} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^2 - \frac{2}{R_1 R_2} \right] dx dy.$$

Дальнейший вывод Кирхгофа следует выводу, представленному в предыдущей главе, однако он пошел дальше и получил краевые условия для произвольного контура, составленного из регулярных участков. Опуская рассуждения,

⁵Здесь h – это полная толщина пластины, а в работе Кирхгофа эта формула записана через $\varepsilon = h/2$

аналогичные уже изложенным, продолжим вывода Кирхгофа с вариации⁶:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W} = & \frac{Kh^3}{12} \frac{2(1+2\theta)}{1+\theta} \left\{ \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \delta w \, dx \, dy + \right. \\ & + \oint_{\partial\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \frac{\partial w}{\partial x} - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \delta w \right] dy - \\ & - \oint_{\partial\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \delta \frac{\partial w}{\partial y} - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \delta w \right] dx - \\ & \left. - \frac{1+\theta}{1+2\theta} \oint_{\partial\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \delta \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \right] \right\}. \end{aligned}$$

Как было сказано выше, для того чтобы исключить зависимые вариации необходимо перейти от интегрирования по декартовым координатам (x, y) к интегрированию по естественному параметру, т. е. длине дуги контура s , что можно сделать с помощью дифференциальных соотношений:

$$dx = \sin \phi \, ds, \quad dy = -\cos \phi \, ds,$$

где ϕ – угол между касательной к контуру и отрицательным направлением оси ординат, отсчитываемый против часовой стрелки. В этом случае производные по декартовым координатам будут преобразованы следующим образом⁷:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \cos \phi + \frac{\partial}{\partial s} \sin \phi, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \sin \phi - \frac{\partial}{\partial s} \cos \phi.$$

С учетом этих выражений вариация потенциальной энергии может быть преобразована к виду:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W} = & \frac{Kh^3}{6} \left\{ \frac{(1+2\theta)}{1+\theta} \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \delta w \, dx \, dy + \right. \\ & + \oint_{\partial\Omega} \left\{ \frac{(1+2\theta)}{1+\theta} \left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \cos \phi + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \sin \phi \right] - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin \phi \cos \phi \right] \right\} \delta w \, ds - \\ & - \oint_{\partial\Omega} \left[\frac{\theta}{1+\theta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \phi + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \phi \cos \phi + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \phi \right] \delta \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \, ds \left. \right\}. \end{aligned}$$

⁶Направление обхода контура выбрано против часовой стрелки так чтобы знаки соответствовали [15]

⁷В отличие от предыдущего раздела, здесь имеется ввиду производная по внутренней нормали, как в [15]

Отсюда получается левая часть уравнения поля, которая отличается от уравнения Софи Жермен лишь коэффициентом при бигармоническом операторе и два естественных краевых условия:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \cos \phi + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \sin \phi - \\ & \quad - \frac{1 + \theta}{1 + 2\theta} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos(2\phi) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \sin(2\phi) \right] = 0, \\ & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1 + \theta}{\theta} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \phi + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin(2\phi) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \phi \right] = 0. \end{aligned}$$

Второе уравнение здесь – это условие отсутствия изгибающих моментов на границе. Первое же уравнение содержит две группы слагаемых, одна из которых (в квадратных скобках) соответствует крутящим моментам, а другая – перерезывающим силам. В работах Коши и Пуассона это условие было разбито на два, отдельно для каждого силового фактора. Кирхгоф математически показал, что они должны быть объединены, а физическое обоснование этому было представлено несколько позднее в работе Кельвина и Тэта. В своем известном трактате по натуральной философии [104] они показали, что любое распределение крутящих моментов (пар сил) на границе пластины может быть заменено эквивалентным распределением перерезывающих сил.

Работа Кирхгофа на долгое время закрыла вопрос формулировки уравнений, описывающих изгиб тонких пластинок. Последующие усилия исследователей, до начала XX века, были направлены на построение решений этих уравнений, некоторые из которых рассмотрены в следующих разделах.

Решения Навье и М. Леви. Первое решение уравнения изгиба тонкой пластины было опубликовано Навье в 1823 году в работе [105]. При выводе своей версии уравнения Навье отталкивался от тех же представлений о молекулярном строении вещества, которые использовал Пуассон в [97], но он учел распределение частиц по толщине и в результате получил следующее уравнение:

$$\varepsilon h^3 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p(x, y), \quad (0.18)$$

где ε – некоторый коэффициент, характеризующий упругость материала, а p – функция поперечной нагрузки.

Навье рассматривал шарнирно опертую со всех сторон прямоугольную пластину со сторонами a и b . Условия шарнирного опирания он записал в форме,

следующей из вывода Софи Жермен:

$$w \Big|_{\mathcal{E}_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{\mathcal{E}_1} = 0,$$

где $\mathcal{E}_1 \subset \partial\Omega$ – часть прямоугольного контура пластины $\partial\Omega$, включающая стороны параллельные оси ординат (для другой пары сторон условия аналогичные). Здесь второе условие, вообще говоря, ошибочно, т. к. отсутствует коэффициент перед $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, однако в силу первого условия, производная функции прогиба по y на \mathcal{E}_1 тождественно равна нулю, так что итоговые краевые условия:

$$w \Big|_{\mathcal{E}_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{\mathcal{E}_1} = 0, \quad (0.19)$$

получились верными.

Навье предложил искать решение уравнения (0.18) в виде разложения в ряд Фурье:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \sin\left(\pi n \frac{x}{a}\right) \sin\left(\pi m \frac{y}{b}\right).$$

Это разложение особенно удобно, т. к. оно позволяет автоматически удовлетворить краевым условиям (0.19). Уравнения равновесия (0.18) в этом случае имеет следующий вид:

$$\varepsilon h^3 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \pi^4 \left(\frac{n^4}{a^4} + 2 \frac{n^2 m^2}{a^2 b^2} + \frac{m^4}{b^4} \right) \sin\left(\pi n \frac{x}{a}\right) \sin\left(\pi m \frac{y}{b}\right) = p.$$

Проецируя это уравнения на собственные подпространства, можно отыскать неизвестные коэффициенты Фурье:

$$c_{nm} = \frac{p_{nm}}{\pi^4 \varepsilon h^3} \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)^{-2}, \quad n, m = 1, \dots, \infty, \quad (0.20)$$

где:

$$p_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p \sin\left(\pi n \frac{x}{a}\right) \sin\left(\pi m \frac{y}{b}\right) dx dy. \quad (0.21)$$

Таким образом функция прогибов может быть представлена рядом:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_{nm}}{\pi^4 \varepsilon h^3} \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)^{-2} \sin\left(\pi n \frac{x}{a}\right) \sin\left(\pi m \frac{y}{b}\right).$$

В 1899 году в работе [106] М. Леви представил модификацию решения Навье для случая когда лишь на двух противоположащих краях пластины заданы

условия шарнирного опирания, например на $\partial\Omega$ а два других края закреплены произвольно. Он предложил искать решение в виде ряда:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \sin\left(\pi n \frac{x}{a}\right). \quad (0.22)$$

Как и в решении Навье, удачный выбор функционального базиса разложения позволяет заведомо выполнить условия шарнирного опирания, т. е. условия на части \mathcal{E}_1 границы $\partial\Omega$. Уравнение же изгиба пластины (0.1) примет следующий вид:

$$D \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{d^4 f_n}{dy^4} - \frac{2\pi^2 n^2}{a^2} \frac{d^2 f_n}{dy^2} + \frac{\pi^4 n^4}{a^4} f_n \right] \sin\left(\pi n \frac{x}{a}\right) = p.$$

Замечание 0.11. В оригинальной работе Леви [106] уравнение равновесия пластины было записано в несколько ошибочном виде, в современных обозначениях оно выглядело бы следующим образом:

$$\frac{16}{15} D \nabla^2 \nabla^2 w = p.$$

С помощью процедуры проецирования полученное уравнение сводится к бесконечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$D \left(\frac{d^4 f_n}{dy^4} - \frac{2\pi^2 n^2}{a^2} \frac{d^2 f_n}{dy^2} + \frac{\pi^4 n^4}{a^4} f_n \right) = p_n, \quad n = 1, \dots, \infty, \quad (0.23)$$

где:

$$p_n = \frac{2}{a} \int_0^a p \sin\left(\pi n \frac{x}{a}\right) dx. \quad (0.24)$$

Решение n -ого уравнения можно отыскать в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. Фундаментальная система решений однородного уравнения хорошо известна:

$$\left\{ e^{-\frac{\pi n}{a} y}, e^{\frac{\pi n}{a} y}, ye^{-\frac{\pi n}{a} y}, ye^{\frac{\pi n}{a} y} \right\}. \quad (0.25)$$

Замечание 0.12. На практике функции (0.25) неудобно использовать при численном счете в силу того, что при больших n часть из них быстро возрастает с увеличением y , а остальные – напротив, быстро убывают. Поэтому обычно эти функции домножают на нормирующий множитель:

$$\left\{ e^{-\frac{\pi n}{a} y}, e^{\frac{\pi n}{a} (y-b)}, ye^{-\frac{\pi n}{a} y}, ye^{\frac{\pi n}{a} (y-b)} \right\}.$$

Таким образом, общее решение n -ого однородного уравнения можно представить в виде вид:

$$f_0^n = C_1^n e^{-\frac{\pi n}{a}y} + C_2^n e^{\frac{\pi n}{a}(y-b)} + C_3^n y e^{-\frac{\pi n}{a}y} + C_4^n y e^{\frac{\pi n}{a}(y-b)}, \quad (0.26)$$

где C_1^n, \dots, C_4^n – неизвестные константы, определяемые из краевых условий на $\mathcal{E}_2 = \partial\Omega \setminus \mathcal{E}_1$.

Частное решение n -ого уравнения (0.23) можно искать с помощью метода Лагранжа (вариации постоянных [107, 108]) в виде суммы:

$$f_*^n = C_1^n(y) e^{-\frac{\pi n}{a}y} + C_2^n(y) e^{\frac{\pi n}{a}(y-b)} + C_3^n(y) y e^{-\frac{\pi n}{a}y} + C_4^n(y) y e^{\frac{\pi n}{a}(y-b)}.$$

Проделав стандартные промежуточные выкладки, можно получить общее решение n -ого неоднородного дифференциального уравнения:

$$f_n = \frac{a^2}{4\pi^3 n^3 D} \left\{ \int_0^y p_n [a + \pi n (y - \xi)] e^{\frac{\pi n}{a}(\xi - y)} d\xi + \int_y^b p_n [a + \pi n (\xi - y)] e^{\frac{\pi n}{a}(y - \xi)} d\xi \right\} + \\ + C_1^n e^{-\frac{\pi n}{a}y} + C_2^n e^{\frac{\pi n}{a}(y-b)} + C_3^n y e^{-\frac{\pi n}{a}y} + C_4^n y e^{\frac{\pi n}{a}(y-b)}. \quad (0.27)$$

Таким образом, для того чтобы получить решение уравнения изгиба пластины по М. Леви осталось лишь определить неизвестные константы, которые, как было сказано выше, несложно получить из краевых условий на \mathcal{E}_2 и подставить решения уравнений (0.23) для каждого n в исходный ряд (0.22).

В 1900 году Э. Эстанаве доказал [109], что в случае когда пластина шарнирно оперта по всей границе, решения Навье и Леви полностью совпадают, т. е. имеет место равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \sin\left(\pi n \frac{x}{a}\right) \sin\left(\pi m \frac{y}{b}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \sin\left(\pi n \frac{x}{a}\right), \quad (0.28)$$

где коэффициенты c_{nm} определяются выражениями (0.20), (0.21), а функции f_n – (0.27), (0.24).

Для доказательства по Эстанаве необходимо показать, что функции $f_n(y)$ и $\sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \sin\left(\pi m \frac{y}{b}\right)$ удовлетворяют одному и тому же семейству дифференциальных уравнений:

$$D \left(\frac{d^4 Y_n}{dy^4} - \frac{2\pi^2 n^2}{a^2} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + \frac{\pi^4 n^4}{a^4} Y_n \right) = \frac{2}{a} \int_0^a p \sin\left(\pi n \frac{x}{a}\right) dx. \quad (0.29)$$

Для функций $f_n(y)$ утверждение очевидно, так как эти функции по определению являются решениями аналогичных уравнений (0.23).

Чтобы доказать то же для функции в левой части (0.28) следует подставить ее в уравнение (0.29) (заменяв εh^3 на D):

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_{nm} \sin\left(\pi m \frac{y}{b}\right) = \frac{2}{a} \int_0^a p \sin\left(\pi n \frac{x}{a}\right) dx.$$

После подстановки выражения (0.21) имеем:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{b} \sin\left(\pi m \frac{y}{b}\right) \int_0^a \int_0^b p \sin\left(\pi n \frac{x}{a}\right) \sin\left(\pi m \frac{y}{b}\right) dx dy = \int_0^a p \sin\left(\pi n \frac{x}{a}\right) dx.$$

Полученное равенство можно спроецировать на элементы функционального базиса Фурье:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^a \int_0^b p \sin\left(\pi n \frac{x}{a}\right) \sin\left(\pi m \frac{y}{b}\right) dx dy \int_0^b \frac{2}{b} \sin\left(\pi m \frac{y}{b}\right) \sin\left(\pi k \frac{y}{b}\right) dy = \\ = \int_0^a \int_0^b p \sin\left(\pi n \frac{x}{a}\right) \sin\left(\pi k \frac{y}{b}\right) dx dy, \quad k = 1, \dots, \infty. \end{aligned}$$

Интеграл в левой части равенства можно вычислить сразу же:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \delta_{mk} \int_0^a \int_0^b p \sin\left(\pi n \frac{x}{a}\right) \sin\left(\pi m \frac{y}{b}\right) dx dy = \int_0^a \int_0^b p \sin\left(\pi n \frac{x}{a}\right) \sin\left(\pi k \frac{y}{b}\right) dx dy,$$

где δ_{mk} – дельта Кронекера, которая принимает значение 0 при любых различных m, k , а в случае их равенства – 1. Таким образом, после подстановки значений δ_{mk} , полученное равенство переходит в тождество:

$$\int_0^a \int_0^b p \sin\left(\pi n \frac{x}{a}\right) \sin\left(\pi k \frac{y}{b}\right) dx dy \equiv \int_0^a \int_0^b p \sin\left(\pi n \frac{x}{a}\right) \sin\left(\pi k \frac{y}{b}\right) dx dy.$$

Полученное тождество доказывает, что функции в обеих частях (0.28) удовлетворяют (0.29). Они могут различаться на некоторое решение однородного уравнения:

$$\frac{d^4 Y_n}{dy^4} - \frac{2\pi^2 n^2}{a^2} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + \frac{\pi^4 n^4}{a^4} Y_n = 0,$$

однако если они удовлетворяют одним и тем же краевым условием, тогда они совпадают, что и доказывает эквивалентность решений Навье и М. Леви.

В заключение этого подраздела целесообразно упомянуть модификацию решения Леви, приведенную в книге Тимошенко и Войновского-Кригера [110]. В рамках предложенного ими подхода предлагается искать решение задачи об изгибе прямоугольной пластины, стороны которой либо шарнирно оперты либо жестко зацементированы, как сумму решения для полностью шарнирно опертой пластины с линейной комбинацией решений нескольких граничных задач. В качестве вспомогательных берутся задачи о нагружении пластины с неподвижным контуром распределенными на двух противоположных сторонах моментами (одного или разных знаков), в то время как другие стороны шарнирно оперты.

В частном случае когда на \mathcal{E}_2 заданы моменты одного знака вспомогательная краевая задача выглядит следующим образом:

$$D\nabla^2\nabla^2w = 0, \quad w\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial^2w}{\partial x^2}\Big|_{\mathcal{E}_1} = 0, \quad \frac{\partial^2w}{\partial y^2}\Big|_{\mathcal{E}_2} = \mathbf{m}(x),$$

где $\mathbf{m}(x)$ – некоторая заранее неизвестная функция, задающая распределение внешних моментов. Как показано выше, для такой задачи можно использовать решением Леви (0.27), для этого нужно также разложить по синусам правую часть неоднородных краевых условий:

$$\mathbf{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{m}_n \sin\left(\pi n \frac{x}{a}\right),$$

где коэффициенты \mathbf{m}_n определяются интегралами типа (0.24). Тогда решение может быть получено в виде ряда (0.22), коэффициенты которого будут представлены общим решением (0.26) однородного дифференциального уравнения. С учетом заданных краевых условий решение (0.26) будет следующим:

$$f_n = -\frac{abe^{\frac{b\pi n}{a}}}{2\pi n \left(1 + e^{\frac{b\pi n}{a}}\right)} \mathbf{m}_n \left[\frac{2 \sinh\left(\frac{\pi n}{a} y\right)}{1 + e^{\frac{b\pi n}{a}}} + \frac{y}{b} \left(e^{-\frac{\pi n}{a} y} - e^{\frac{\pi n}{a}(y-b)} \right) \right].$$

Если рассматривается пластина, например, с двумя противоположными зацементированными краями и двумя шарнирно опертыми, то для построения решения исходной задачи теперь остается только просуммировать полученное решение с решением Навье или Леви для шарнирно опертой пластины и подобрать неизвестные коэффициенты \mathbf{m}_n так чтобы углы поворота пластины на жестко за-

крепленных сторонах равнялись нулю. Если же рассматривается пластина с более специфичными краевыми условиями, например, в случае когда все стороны шарнирно оперты за исключением лишь одной защемленной, то искомое решение можно построить с помощью решения двух вспомогательных задач (одна с одинаковыми моментами на краях, а другая – с моментами разных знаков).

Решение Тимошенко – Войновского-Кригера существенно опирается на линейность исходного дифференциального уравнения, поэтому при рассмотрении конечных деформаций это решение не может быть применено. Однако, как показано в Главе 2, идея корректировочного решения в виде решения вспомогательной граничной задачи оказывается крайне полезной и при рассмотрении нелинейных уравнений пластин.

Метод Ритца. Изучение фигур Хладни не закончилось с появлением теории Кирхгофа, подробный обзор работ посвященных им можно найти в статье [111]. Как отмечают авторы, среди множества работ по этой теме выделяется последняя работа Ритца [112], в которой он применил новый, предложенный им в том же году, метод к задаче об отыскании собственных форм колебаний квадратной пластины со свободными краями. В настоящее время метод Ритца и близкий к нему метод Петрова – Галеркина являются мощными инструментами для решения задач математической физики. Хотя они были изначально разработаны и обоснованы для линейных систем, они допускают естественное обобщение и на нелинейные системы. Последнее обстоятельство позволило построить решение нелинейных уравнений изгиба гибких пластин в прямоугольной области, приведенное во второй главе настоящей работы. В этой связи здесь, в обзорной части исследования, целесообразно кратко привести основные идеи одного из этих методов, например, метода Ритца.

Ритц рассматривал задачу Штурма – Лиувилля:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) &= \lambda w, & (x, y) \in (-1, 1) \times (-1, 1), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{x=\pm 1} &= 0, & \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \Big|_{x=\pm 1} &= 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{y=\pm 1} &= 0, & \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \Big|_{y=\pm 1} &= 0. \end{aligned} \quad (0.30)$$

Для ее исследования он применил вспомогательную задачу об экстремуме

функционала (0.13), ассоциированного с (0.30), при следующем условии⁸:

$$\iint_{\Omega} w^2 dx dy = 1. \quad (0.31)$$

Эту задачу он решил методом неопределенных множителей Лагранжа, заменив функционал (0.13) на следующий:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{W}} = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \right. \\ \left. - \Lambda \left(w^2 - \frac{1}{4} \right) \right] dx dy, \end{aligned} \quad (0.32)$$

где множитель Лагранжа Λ должен быть подобран так, чтобы функция доставляющая минимум этому функционалу удовлетворяла (0.31).

Функцию w Ритц предложил искать в виде разложения:

$$w = \sum_{k=1}^N r_k \psi_k(x, y), \quad (0.33)$$

по функциям ψ_k из множества:

$$\Psi = \{ \mathbf{u}_i(x) \mathbf{u}_j(y), \mathbf{u}_i(x) \mathbf{v}_j(y), \mathbf{v}_i(x) \mathbf{u}_j(y), \mathbf{v}_i(x) \mathbf{v}_j(y) \}, \quad i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (0.34)$$

состоящего из различных комбинаций функций \mathbf{u} , \mathbf{v} , описывающих соответственно симметричные и кососимметричные собственные формы колебаний балки со свободными концами или, другими словами, четные и нечетные собственные функции оператора:

$$\mathcal{L}(f) = \frac{d^4 f}{dv^4}, \quad \left. \frac{d^2 f}{dv^2} \right|_{v=\pm 1} = 0, \quad \left. \frac{d^3 f}{dv^3} \right|_{v=\pm 1} = 0. \quad (0.35)$$

Замечание 0.13. *Способ выбора k -ой функции из множества (0.34), т. е. выбор биекции $\mathbb{N} \leftrightarrow \{1, \dots, 4\} \times \mathbb{N} \cup \{0\} \times \mathbb{N} \cup \{0\}$ в известной степени произволен. Некоторые примеры подобной биекции приведены в Главе 2 и в статье [6].*

Замечание 0.14. *Важно отметить, что функции из множества (0.34) не удовлетворяют краевым условиям (0.30), однако, так как в методе Ритца используется вариационная формулировка, то краевые условия автоматически будут приближенно выполнены в среднеквадратичном смысле.*

⁸Детальную информацию о вариационных методах исследования задачи Штурма – Лиувилля можно найти, например, в [79], [96]

Легко показать, что оператор (0.35) вырожден, т. е. он имеет нулевые собственные значения, которым соответствуют нормированные функции:

$$\mathbf{u}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{v}_0(v) = \sqrt{\frac{3}{2}}v,$$

Алгоритм нахождения остальных собственных функций детально описан в Главе 2 настоящей работы и в статье [5], здесь же приведем лишь характеристические уравнения для отыскания собственных значений:

$$\operatorname{th}(\lambda_k) + \operatorname{tg}(\lambda_k) = 0, \quad \operatorname{th}(\mu_k) - \operatorname{tg}(\mu_k) = 0,$$

и соответствующие им нормированные собственные функции:

$$\mathbf{u}_k(v) = \frac{\cos(\lambda_k v) \cosh(\lambda_k) + \cos(\lambda_k) \cosh(\lambda_k v)}{\sqrt{\cosh(\lambda_k)^2 + \cos(\lambda_k)^2}}$$

$$\mathbf{v}_k(v) = \frac{\sin(\mu_k v) \sinh(\mu_k) + \sin(\mu_k) \sinh(\mu_k v)}{\sqrt{\sinh(\mu_k)^2 - \sin(\mu_k)^2}}$$

Подстановка разложения (0.33) в функционал (0.32) приводит к квадратичной форме относительно коэффициентов r_k :

$$\widetilde{\mathcal{W}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[\alpha_{ij} r_i r_j - \Lambda \left(\delta_{ij} r_i r_j - \frac{1}{4} \right) \right],$$

где коэффициенты квадратичной формы α_{ij} определяются по формуле:

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial y^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x^2} \right) + \right. \\ \left. + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x \partial y} \right] dx dy,$$

а δ_{ij} – символ Кронекера. Отсюда легко можно придти к системе линейных уравнений, решение которой минимизирует $\widetilde{\mathcal{W}}$:

$$\sum_{i=1}^N (\alpha_{ij} - \Lambda \delta_{ij}) r_i = 0, \quad j = 1, \dots, \infty. \quad (0.36)$$

Замечание 0.15. Если две функции ψ_i, ψ_j принадлежат к разным сериям множества (0.34), т. е. имеют разную четность хотя бы по одной координате, то соответствующий коэффициент квадратичной формы α_{ij} равен

нулю. Отсюда следует, что система алгебраических уравнений (0.36) представляет из себя четыре независимых системы, которые могут решаться раздельно.

В разложении (0.33) Ритц учитывал конечное число слагаемых, лишь интуитивно догадываясь, что при увеличении их числа частичная сумма сходится к точному решению. В настоящее время этот метод известен как метод редукции, он был строго обоснован для линейных систем в работах Кояловича [113]. Ритц смог получить систему (0.36), учитывая пять членов разложения, однако проанализировать высшие гармоники вручную он не мог.

Для того чтобы определить высшие собственные частоты Ритц допустил, что в разложении (0.33) для каждой собственной формы значимыми оказываются лишь некоторые слагаемые (обертоны), сконцентрированные в окрестности наиболее весомого слагаемого (основного тона). Кроме того, он предположил, что все основные тона принадлежат следующему множеству:

$$\{u_i(x) u_j(y) \pm u_j(x) u_i(y), \dots, v_i(x) v_j(y) \pm v_j(x) v_i(y)\}.$$

Эти допущения позволили ему применить метод, который можно условно назвать методом подвижной редукции. Его суть заключается в том, что из матрицы системы уравнений рассматривается лишь квадратный участок, но не угловой, как в обычном методе редукции, а произвольный, в окрестности термов, соответствующих основному тону. Такой метод позволяет приближенно искать любые неизвестные (0.36), рассматривая лишь малую часть уравнений с малым числом слагаемых.

Современные вычислительные системы позволяют учесть практически неограниченное число слагаемых, поэтому несложно оценить погрешность гипотез Ритца, рассматривая сколь угодно большое число слагаемых в разложении (0.33). Такая оценка приведена, например, в [111], где собственные формы были построены методом суперпозиции. В настоящей работе алгоритм Ритца был реализован с учетом 420 членов разложения, сравнение собственных частот, с полученными в [112] и [111] приведено в Приложении Б.

Теория гибких пластин. Как было сказано выше, первый этап развития теории пластин был завершен в середине XIX века, когда были получены основные уравнения для случая малых деформаций. Следующий этап был посвящен

попыткам обобщить полученные уравнения для гибких пластин, т. е. пластин прогибы которых сопоставимы с их толщинами.

По-видимому, первая попытка такого обобщения теории Кирхгофа была предпринята Клебшем в книге “Theorie der elasticität fester körper” [114]. Полученные им уравнения были не совсем верны, так как в них связь между прогибами и натяжениями в плоскости пластины была односторонней (прогиб не влиял на натяжения), однако уравнение полученное им для частного случая равномерного натяжения⁹:

$$D\nabla^2\nabla^2w - T_0\nabla^2w = p, \quad T_0 = \text{const}, \quad (0.37)$$

оказалось весьма полезным, в силу того, что в ряде случаев оно допускает аналитическое решение. Несколько позже Сен-Венан в комментариях к французскому переводу книги Клебша [115] представил модификацию этого уравнения для случая когда натяжения пластины вдоль координатных осей различны¹⁰:

$$D\nabla^2\nabla^2w - \left(T_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2T_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = p.$$

Уравнение (0.37) было переоткрыто в диссертации Г. Бергера [40], в которой он получил его, исходя из гипотезы о том, что полная потенциальная энергия деформации пластины зависит лишь от первого инварианта тензора конечной деформации. Более того, в этой работе было предложено определять неизвестную константу T_0 из упрощенного уравнения равновесия в плоскости пластины при заданной граничной нагрузке, что позволило построить решения для круглых и прямоугольных пластин, нагруженных равномерным давлением, при различных краевых условиях. Этот метод построения решения активно применяют при анализе конечных деформаций [118–121], в том числе и в современных исследованиях [2, 122–124]. Более того, идея разделения уравнений оказалась настолько удачной, что были предприняты попытки построения уточненной модели на основе (0.37), например в [125] был представлен нелинейный вариант этого уравнения.

После Клебша следующий важный результат в теории гибких пластин был получен Кирхгофом в его лекциях по уравнениям математической физики [126].

⁹В оригинале константа T имеет иной физический смысл и домножается на толщину

¹⁰В книге [116] Карман отметил, что похожее выражение получено в статье Бубнова [117], однако автору настоящей работы не удалось это проверить

Он показал, что если считать деформации конечными, то при вычислении деформации срединной поверхности необходимо учитывать нелинейные слагаемые, что приводит к следующим выражениям для деформаций:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^{\text{NL}} &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, & \varepsilon_{yy}^{\text{NL}} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - z \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \varepsilon_{xy}^{\text{NL}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}$$

Хотя в [126] Кирхгоф и не привел итоговые уравнения, его достижение состоит в том, что он получил верные выражения для компонент тензора деформаций, которые играют ключевую роль в современных уравнениях изгиба гибких пластин.

Как и в случае малых прогибов, появлению уравнений конечного изгиба пластины предшествовали уравнения для мембраны, полученные в 1907 году в работе Фешля “Vorlesungen über technische Mechanik” [127]¹¹:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{p}{h} &= 0, \\ \nabla^2 \nabla^2 \phi + E \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) &= 0.\end{aligned}$$

Чуть позже, в работе [116], опубликованной в 1910 году, Карман представил уравнения изгиба гибких пластин в том, почти симметричном, виде, в котором они известны сейчас:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - h L(w, \phi) = p, \quad \nabla^2 \nabla^2 \phi + \frac{E}{2} L(w, w) = 0. \quad (0.38)$$

Здесь L – это нелинейный дифференциальный оператор типа Монжа – Ампера. Соответственно, сами уравнения (0.38), известные как уравнения Фешля – фон Кармана, также являются нелинейными в чем и состоит их главное отличие от (0.1). Уравнения Фешля – фон Кармана играют значительную роль в настоящем исследовании, поэтому их детальный вывод представлен в основном тексте работы (Глава 1). Здесь же уместно привести не претендующий на полноту обзор работ, посвященных поиску решений этих уравнений и их анализу.

Первые решения уравнений (0.38) были получены для круглой пластины при осесимметричном нагружении. Такие условия позволяют свести уравнения в

¹¹Здесь ϕ – функция напряжений Эри

частных производных (0.38) к обыкновенным дифференциальным:

$$D \left(w'''' + \frac{2w'''}{r} - \frac{w''}{r^2} + \frac{w'}{r^3} \right) - h \left(w'' \frac{\phi'}{r} + \frac{w'}{r} \phi'' \right) = p, \quad (0.39)$$

$$\phi'''' + \frac{2\phi'''}{r} - \frac{\phi''}{r^2} + \frac{\phi'}{r^3} + E w'' \frac{w'}{r} = 0,$$

первый интеграл которых, как показано в Главе 2, может быть найден непосредственным интегрированием.

Одно из первых решений для круглой заземленной пластины, нагруженной равномерным давлением, было получено Надаи [29] в 1925 году при помощи представления функции Эри в виде суммы линейной и степенной функций. Вэй [31] усовершенствовал это решение, перейдя к полноценным разложениям искомых функций в ряды по четным степеням радиальной координаты¹². Другой вариант решения, методом Релэя – Ритца, был представлен в работе Тимошенко [128].

Несколько позже были получены первые решения для квадратных и прямоугольных пластин. В 1936 году Кайзер [30] опубликовал решение для ширнрно опертой по всему контуру квадратной пластины, полученное с помощью метода конечных разностей. Решения для заземленных прямоугольных пластин с различными соотношениями сторон были получены Вэем [129] методом Ритца.

Примерно в это же время в отечественной литературе появилось много важных результатов по теории гибких пластин. К сожалению, большинство отечественных работ тех лет не представлено в открытом доступе, поэтому автор имеет возможность лишь сослаться на исторические обзоры других исследователей, в частности на замечательный очерк, помещенный в книге Вольмира [14], и на исторический труд Тимошенко [82]. Здесь же отметим только три работы: вышедшую в 1902 году работу Бубнова [117], в которой он показал, что при расчетах обшивки корабля необходимо учитывать натяжение пластин в плоскости, статью Тимошенко [22], в которой приведено вероятно первое решение уравнений Фешля – фон Кармана и работу Панова [23], посвященную решению этих уравнений методом Галеркина.

Множество интересных результатов было получено в сороковых годах. В работе [37] Фридрихс и Стокер рассмотрели круглую пластину, нагруженную

¹²В Главе (2) показано, что такое представление решения естественно следует из структуры дифференциальных операторов (0.39)

сжимающей нагрузкой на контуре, они представили численные решения, полученные с помощью трех различных алгоритмов. При формулировке краевой задачи они использовали специальную замену переменных, предложенную ими ранее [36], которая позволила снизить порядок системы с восьмого до четвертого. Более того, во второй части [37] авторы доказали теорему существования решения уравнений Фешля – фон Кармана для рассматриваемого случая.

Начиная с 1942 года, С. Леви получил ряд результатов для шарнирно опертых [32] и защемленных [33, 130] прямоугольных пластин, нагруженных равномерным давлением. Для этого он развил новый метод, основанный на разложении искомых функций в тригонометрические ряды. Этот метод также был успешно использован для анализа деформирования длинных пластин при комбинированной нагрузке [131, 132]. Важно отметить, что в работах С. Леви предполагалось, что защемление пластины реализуется так, что ее края не могут поворачиваться и смещаться, но могут деформироваться в продольном направлении. Численное решение для заделки, препятствующей всем перемещениям было получено в работах Вана [34, 35]. Аналитическое решение этой задачи приведено в Главе 2.

Во второй половине XX века появилось множество работ, направленных на решение системы уравнений Фешля – фон Кармана различными методами. Кратко перечислим основные применявшиеся методы и работы, посвященные им (более полные обзоры могут быть найдены в работах [5, 133–135]). В работах [39, 136], было получено решение для шарнирно опертой прямоугольной пластины с помощью специально разработанного “ускоренного” итерационного метода. Метод возмущений был успешно применен в работах [137–140]. Многие авторы получили численное решение с помощью метода конечных разностей [28, 141, 142], интересная модификация которого была представлена в работе [143], где было предложено использовать его в сочетании с методом релаксации. Широко применялись бурно развивавшиеся в то время методы конечных [46, 144–146] и граничных [147–151] элементов. В последние годы активно развивается новый метод гомотопического анализа [48, 152–154]. Также имеется значительное число работ, в которых успешно были использованы традиционные методы Ритца [155–159] и Галеркина, на последнем остановимся подробнее.

В настоящей работе задача об изгибе гибкой прямоугольной пластины решена методом Галеркина, поэтому целесообразно в рамках вводной части рас-

смотреть некоторые работы, представляющие аналогичное решение. Как было сказано выше, по-видимому, впервые этот метод был применен для решения уравнений Фешля – фон Кармана в работе Панова [23]. Следующая важная работа в этом направлении была опубликована Ямаки [41]. В этой работе он использовал модификацию метода Галеркина для решения динамического варианта уравнений Фешля – фон Кармана и, кроме того, привел удобную классификацию краевых условий для гибких пластин. Айенгар и Накви в работе [160] использовали полноценные ортогональные разложения функций перемещений и напряжений. Решения построены для шарнирно опертой и защемленной пластин с подвижными и неподвижными краями. Они показали, что с помощью метода Галеркина систему Фешля – фон Кармана удастся свести к системе кубических уравнений относительно коэффициентов разложения, однако конечное решение им удалось получить с учетом только лишь одного члена разложения. В статьях [161, 162] с помощью метода Галеркина система кубических уравнений получена в явном виде. В одной из следующих работ этих авторов [163], полученный результат был дополнен явным выражением обращенной матрицы Галеркина, что позволило построить более эффективную численную процедуру решения. Завершая часть обзора, посвященную методу Галеркина, отметим, что в последнее время широко используется, так называемый, метод вейвлет-Галеркина [164, 165], который позволяет несколько упростить вычисления за счет того, что в качестве базиса функционального пространства выбирается вейвлет-базис.

В заключение этого раздела необходимо упомянуть работы, в которых уравнения Фешля – фон Кармана были исследованы с позиций чистой математики. Эти уравнения оказались достаточно привлекательными для математиков за счет удобной, почти симметричной формы и наличия точки бифуркации решения [166], однако изначальный их вывод нельзя назвать строгим, так как он в значительной мере основан на вспомогательных гипотезах [21]. Строгое обоснование уравнений Фешля – фон Кармана было осуществлено в работах Сьярле [20, 21]. Он показал, что эти уравнения могут быть получены в результате асимптотического разложения нелинейных уравнений теории упругости по малому параметру, если принять некоторые допущения об асимптотическом порядке компонент вектора перемещения. С помощью этого подхода в недавних работах [167, 168] было сконструировано семейство нелинейных моделей подоб-

ных уравнениям Кармана.

Для уравнений Феппля – фон Кармана было доказано несколько важных теорем существования и единственности. Существование решения этих уравнений, удовлетворяющих однородным краевым условиям, заданным на достаточно гладком контуре, было доказано в работе Морозова [27] с помощью метода Лерэя – Шаудера [169]. Аналогичная теорема для случая нагружения сжимающей нагрузкой на контуре была сформулирована и доказана М. Бергером и Файфом [42]. Найтли продемонстрировал [43] существование решения для случая комбинированной нагрузки и, более того, он сформулировал условие, при котором задача имеет единственное решение. Чуть позже он и Сатер улучшили этот результат в работе [170]. Главачек и Науман получили аналогичные результаты для различных типов неоднородных краевых условий [44, 45]. Важно отметить, что результаты, полученные в работах [43–45, 170], справедливы для пластин, контур которых составлен из дуг кривых из C^3 и может включать углы, т. е. для большинства пластин, используемых в технике.

Современные работы по теории пластин. В настоящее время активно разрабатываются новые модели пластин, учитывающие различные эффекты, которые ранее не учитывались, например, связанные электромагнитные и термоупругие поля (А. Eringen [171], L. Librescu, D. Hasanyan [172, 173], С. А. Калоев, А. В. Сероштанов [174]), распространение фронта химической реакции (А. Б. Фрейдин, В. О. Штегман [175]) и даже эффект Казимира (F. M. Serry, D. Wallise и G. J. Maclay [176]). Несовместные деформации, как фактор существенно влияющий на деформирование пластины, также изучались в ряде работ. Одной из первых таких работ была статья Н. Liang и L. Mahadevan [177], в которой были представлены (без вывода) модифицированные уравнения Феппля – фон Кармана, учитывающие несовместные деформации, возникающие при росте длинных листов. Эти уравнения подробно исследовались разными авторами, например, М. Lewicka [178, 179], Р. Ciarletta [72, 180] и А. Gupta [181], однако автору неизвестны работы, содержащие аналитические или полуаналитические решения таких уравнений.

В подавляющем большинстве перечисленных работ “расширенные” модели пластин строятся как некоторые обобщения классических моделей, основанных на гипотезах Кирхгофа, однако в настоящее время развиваются и прин-

ципиально иные подходы. Например, можно отметить подход, основанный на идеологии микрополярных сред и континуумов Коссера. Не имея возможности перечислить все работы, упомянем лишь замечательный обзор за авторством И. Альтенбаха, Х. Альтенбаха и В. А. Еремеева [182]. Другое важное направление – это аналитическая теория пластин. Она берет свое начало с идеи С. Д. Пуассона и Л. О. Коши о построении теории пластин с помощью строгого асимптотического разложения общих уравнений для трехмерного континуума, которая в то время она не получила развития ввиду того, что сама теория упругости только зарождалась. Уже в XX веке этот подход был возрожден и развит в работах Н. А. Кильчевского [18], И. Н. Векуа [19], И. И. Воровича [26], А. Л. Гольденвейзера [183, 184], Р. Ciarlet [21]. Из более современных исследований в этом направлении необходимо упомянуть работы D. Fox, A. Raoult, J. Simo [185], G. Friesecke, R. James, S. Muller [186], P. Podio-Guidugli [103] и D. J. Steigmann [187–189].

Глава 1 Уравнения конечных несовместных деформаций тонкостенных элементов МЭМС

В настоящей главе уравнения изгиба тонких гибких пластин будут получены прямой редукцией нелинейных уравнений, описывающих конечную деформацию трехмерного континуума. Первые попытки построения такой редукции с помощью разложений по толщинному параметру впервые были предприняты еще в работах Коши [101] и Пуассона [102]. Однако в то время их подход был подвергнут критике, суть которой изложена, например, в [18]. Лишь после появления работ, в которых были подробно исследованы аналитические свойства решений теории упругости (теорема Лауричелла [190]), подход Коши и Пуассона вновь начал активно развиваться, в частности, в работах Кильчевского [18], Гольденвейзера [183], Векуа [19], Сьярле [20] и ряда других исследователей.

Альтернативный подход к построению двумерных уравнений деформирования тонкостенных конструкций, основанный на введении дополнительных связей (кинематических гипотез [103]), приводит к тому, что часть компонент тензора напряжений определяется не из закона состояния, а из некоторых дополнительных соображений (например, из так называемой статической гипотезы). Этот известный дефект классических теорий пластин и оболочек нивелируется априорными знаниями о характере напряженно-деформированного состояния типовых конструктивных элементов при стандартных нагружениях, однако при моделировании самонапряженных элементов МЭМС он может привести к непредсказуемым погрешностям и принципиальным ошибкам. По этой причине в работе систематически используется первый – *аналитический* – подход [18,19], а связь с теми или иными кинематическими гипотезами принимается во внимание лишь для сопоставления результатов с известными.

Первый шаг аналитического подхода состоит в выводе трехмерных уравнений, которые будут служить “основой” для редукции к двумерным. В этой работе мы получим эти уравнения с учетом несовместных деформаций.

1.1 Вывод уравнений трехмерной теории упругости

Поскольку математическая формализация непрерывно распределенных несовместных деформаций эквивалентна дифференциально-геометрическому описанию полей распределенных дефектов [55], в работе используется хорошо развитый геометрический формализм этой теории [12, 56, 191]. Кратко изложим его основы. Идентификация элементарных объемов деформируемого тела осуществляется прообразами их центроидов на материальном многообразии \mathcal{B} . При выбранном картрировании им соответствуют упорядоченные тройки материальных координат¹ $\varphi : \mathcal{B} \ni p \mapsto (q^1, q^2, q^3) \in \mathbb{R}^3$. Важно подчеркнуть, что многообразие \mathcal{B} не несет никакой геометрической суперструктуры (метрики, связности и пр.) и характеризует лишь топологию тела. Его геометрические образы задаются *конфигурациями* – вложениями $\varkappa : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{E}$, где \mathbb{E} – физическое трехмерное пространство с евклидовой геометрией (метрикой и связностью). При этом движение представляется непрерывным семейством конфигураций $\{\varkappa_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, параметр которого (t) времяподобен, а *деформация* γ – отображение одной формы в другую – композицией:

$$\gamma = \varkappa_{t_2} \circ \varkappa_{t_1}^{-1} : \mathcal{S}_{t_1} \rightarrow \mathcal{S}_{t_2}. \quad (1.1)$$

Поскольку в евклидовом физическом пространстве всегда можно выбрать декартову систему координат (x^1, x^2, x^3) относительно некоторого выбранного начала O , то любую форму \mathcal{S}_t можно представить как точечное множество:

$$\mathcal{S}_t = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{E} : \mathbf{x} = O + x^1(\vec{q}) \mathbf{i} + x^2(\vec{q}) \mathbf{j} + x^3(\vec{q}) \mathbf{k}, \vec{q} \in \varphi(\mathcal{B}) \subset \mathbb{R}^3 \}.$$

Здесь и далее символ стрелки обозначает арифметический вектор, т. е. тройку координат $\vec{q} = (q^1, q^2, q^3)$. Среди всех допустимых форм удобно выбрать одну, *отсчетную* (ее будем обозначать символом \mathcal{S}_R), относительно которой можно вычислять деформации остальных форм по (1.1). В рамках классической нелинейной теории упругости в качестве отсчетной формы используют форму, полностью свободную от напряжений². При несовместных деформациях такой формы не существует, и выбор \mathcal{S}_R диктуется соображениями удобства

¹В общем случае может понадобиться более одной карты для покрытия всего тела. В этом случае следует снабжать картрирующее отображение индексом, например, φ_k . Мы, однако, эту индексацию будем опускать, поскольку при необходимости ее можно восстановить по контексту изложения

²Состояние “свободное от напряжений” формализуется неоднозначно и зависит от физического масштаба рассматриваемой задачи. Мы будем полагать, что окрестность точки свободна от напряжений, если при отделении (отсечении) этой окрестности от всего тела ее физико-механическое состояние не изменяется

ее формализации. Декартовы координаты пространственных положений материальных точек в составе отсчетной формы будем обозначать строчными латинскими буквами, а в составе остальных форм – заглавными, для краткости письма опуская индекс t .

Геометрические очертания форм можно “визуализировать” если зафиксировать две из трех материальных координат, а оставшиеся использовать для параметризации получившейся таким образом кривой. В результате каждая форма порождает три семейства кривых, которые в совокупности образуют сеть координатных линий специфической координатной системы, порождаемой рассматриваемой формой.

Нас, в основном, будут интересовать две формы: отсчетная \mathcal{S}_R и принимаемая телом в текущий момент времени, которую будем называть актуальной и обозначать \mathcal{S}_A . Две эти формы порождают две сети координатных линий и, соответственно, две системы координат в физическом пространстве, которые также будем называть отсчетными и актуальными координатами. В этих координатах деформации γ можно рассматривать как функции перехода между различными картированиями многообразия \mathcal{B} , а именно:

$$\kappa_R : \vec{q} \mapsto \mathbf{x}(\vec{q}), \quad \kappa_A : \vec{q} \mapsto \mathbf{X}(\vec{q}), \quad \gamma : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{X}(\mathbf{x}) = (\mathbf{X} \circ \mathbf{x}^{-1})(\mathbf{x}). \quad (1.2)$$

Касательные к координатным линиям образуют локальные векторные базисы отсчетных и актуальных координат (векторные базисы в терминологии [192]):

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^i}, \quad \mathbf{E}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q^i}.$$

В общем случае базисы образуемые этими векторами не являются ортонормированными, поэтому приходится также рассматривать дуальные к ним:

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i, \quad \mathbf{E}^i \cdot \mathbf{E}_j = \delta_j^i. \quad (1.3)$$

Специфические картирования \mathcal{B} , порождаемые формами, позволяют в координатном виде перенести метрику и связность физического пространства на \mathcal{B} посредством обратного образа (pullback) [56]. Имея ввиду две формы, отсчетную и актуальную, можем записать:

$$g_{ij} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^j}, \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q^i \partial q^j} \cdot \mathbf{e}^k, \quad G_{ij} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q^j}, \quad \tilde{\Gamma}_{ij}^k = \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial q^i \partial q^j} \cdot \mathbf{E}^k.$$

Здесь g_{ij} – компоненты метрического тензора, а Γ_{ij}^k – коэффициенты аффинной связности, индуцированные на \mathcal{B} отсчетной формой, а G_{ij} и $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$, соответственно, актуальной. Заметим, что в такой формализации процесс деформирования можно рассматривать не как искажение формы, а как эволюцию метрики и ассоциированной с ней связностью на одном и том же многообразии \mathcal{B}^3 .

Здесь и всюду далее мы принимаем *гипотезу простого материала*, согласно которой зависимость упругого отклика \mathfrak{K} от деформации γ (которая в своем естественном представлении является элементом бесконечномерного функционального пространства) можно с достаточной степенью точности представить конечномерной зависимостью от представления Тейлора первого порядка, т. е. в окрестности материальной точки с отсчетными координатами \mathbf{x} :

$$\mathfrak{K}(\gamma)|_{\mathbf{x}} \approx \mathfrak{K}(\gamma|_{\mathbf{x}}, \nabla_R \gamma|_{\mathbf{x}}), \quad (1.4)$$

где ∇_R – так называемый отсчетный оператор Гамильтона⁴:

$$\nabla_R = e^i \frac{\partial}{\partial q^i}.$$

Аналогичное соотношение можно записать и в актуальных координатах [192]:

$$\hat{\mathfrak{K}}(\gamma)|_{\mathbf{X}} \approx \hat{\mathfrak{K}}(\gamma|_{\mathbf{X}}, \nabla \gamma|_{\mathbf{X}}), \quad \nabla = \mathbf{E}^i \frac{\partial}{\partial q^i}.$$

Используя общепринятые обозначения, запишем $\mathbf{F} = \nabla_R \gamma$. Полученный оператор называют градиентом деформации. Он определяет отображение, переводящее бесконечно малую окрестность отсчетной формы в окрестность актуальной, с точностью до сдвигов как жесткого целого.

Важно подчеркнуть, что отклик (1.4) определен *относительно* формы \mathcal{S}_R , поскольку относительно нее находится деформация γ (1.2). Этот факт оказывается в тени, когда форма \mathcal{S}_R глобально свободна от напряжений, что обычно и предполагается в классической нелинейной теории упругости. Действительно, в этом случае \mathcal{S}_R задана однозначно с точностью до жесткого движения. Однако в случае несовместных деформаций такой формы не существует, и отклик, определенный по (1.4), характеризует *парциальное* напряженное состояние поверх некоторого начального, записанного в \mathcal{S}_R в форме собственных (или внутренних, или остаточных) напряжений. Для характеристики полного напряженного

³Такое представление деформации является весьма общим и позволяет определить меры деформации, в том числе, в рамках релятивистской механики континуума [193]

⁴Здесь и далее используется правило Эйнштейна суммирования по индексам

состояния относительно базового (ненапряженного, см. сноску 2) состояния требуется дополнительная конституционная гипотеза, которую мы сформулируем, следуя [13].

*Гипотеза локальной разгрузки*⁵: инфинитезимальная окрестность любой материальной точки p , принадлежащей телу, может быть преобразована в ненапряженное состояние (в том смысле, что отсечение этой окрестности от всего тела не изменяет ее напряженно-деформированного состояния) некоторой деформацией γ_p формы \mathcal{S}_R .

Конечно, для различных точек p_1, p_2 эти деформации, в общем случае, не совпадают: $\gamma_{(p_1)} \neq \gamma_{(p_2)}$, так же как и их градиенты: $\nabla \gamma_{(p_1)}|_{\mathbf{x}} \neq \nabla \gamma_{(p_2)}|_{\mathbf{x}}$ (здесь \mathbf{x} – произвольная точка \mathcal{S}_R). Эта гипотеза является непосредственным обобщением гипотезы о существовании единой глобальной формы, принимаемой в классической теории, только теперь вместо одной такой формы предлагается континуальное семейство отсчетных форм, получаемых из напряженной отсчетной семейством локально разгружающих деформаций:

$$\{\mathcal{S}_{(p)}\}_{p \in \mathcal{B}} = \{\gamma_{(p)}\mathcal{S}_R\}_{p \in \mathcal{B}} \quad (1.5)$$

Для простого материала вместо семейства отображений $\{\gamma_{(p)}\}_{p \in \mathcal{B}}$ достаточно рассмотреть семейство локальных линейных отображений (с точки зрения механики – однородных деформаций), порождаемых (1.5), а именно:

$$\{\mathfrak{K}_{(p)}^{-1}\}_{p \in \mathcal{B}} = \{\nabla_R \gamma_{(p)}\}_{p \in \mathcal{B}},$$

которое может быть полностью записано в координатах отсчетной формы:

$$\{\mathfrak{K}_{(\mathbf{x})}^{-1}\}_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}_R} = \{\nabla_R \gamma(\mathfrak{x}_R^{-1}(\mathbf{x}))\}_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}_R}.$$

Осталось лишь ввести еще одно предположение: отображение $\mathcal{S}_R \ni \mathbf{x} \mapsto \mathfrak{K}^{-1}(\mathbf{x}) \in T\mathbb{E} \otimes T^*\mathbb{E}$ гладкое, и мы приходим к фундаментальному понятию поля импланта $\mathfrak{K}(\mathbf{x})$, которое вводилось в различных формах многими авторами [12, 13, 50, 191] и является краеугольным камнем современной теории несов-

⁵Заметим, что гипотеза локальной разгрузки не охватывает все возможные случаи локальных нетривиальных состояний. Например, если двумерное упругое тело обладает ненапряженной формой в виде полусферы, а физическое двумерное пространство плоское, то его вложение не может быть освобождено от напряжений никаким разбиением, ибо любая его сколь угодно малая часть будет обладать кривизной не свойственной плоскому физическому пространству. Однако небольшое преобразование сферы к сферическому политопу сразу исправляет ситуацию. Впрочем, исследование этих тонких вопросов материальной геометрии тела выходит за рамки настоящей работы.

местных деформаций. Образно, поле $\mathfrak{K}^{-1}(\boldsymbol{x})$ можно представить как совокупность однородных деформаций, которые испытывают мелкие осколки закаленного стекла после сильного удара молотком. Каждый такой осколок становится ненапряженным, однако вновь собрать из них сплошной лист не получится – геометрически они не будут согласованы друг с другом, и “пазл” не сложится. Математически это означает, что поле \mathfrak{K}^{-1} не может быть представлено как градиент некоторого гладкого векторного поля и для него, как и для \mathfrak{K} , не выполняются условия совместности деформаций: $\nabla_R \times \mathfrak{K} \neq \mathbf{0}$.

Вместе с тем, “пазл” соберется в единое тело без зазоров и наложений, если перед сборкой каждый осколок вернуть в напряженное состояние, подвергнув деформации, обратной \mathfrak{K}^{-1} , т. е. деформации \mathfrak{K} . Это подобно сборке с предварительными “сборочными искажениями”, или “имплантацией”, что и объясняет термин “имплант” для поля \mathfrak{K} , который был введен в [12]. Вместо семейства отсчетных форм мы могли бы рассмотреть единую отсчетную форму, построенную как суперструктура над \mathcal{B} , определяющая на теле неевклидову метрику и связность в духе Кондо, Кренера и Нолла [50, 191], но ограничение на на объем диссертационной работы не позволяет нам этого. Мы лишь укажем ссылки на некоторые работы, посвященные этому дифференциально-геометрическому формализму [193–195].

Итак, локальное напряженное состояние – локальный отклик – полностью определяется функционалом $\mathfrak{K}(\boldsymbol{F}_{\text{tot}})$, где $\boldsymbol{F}_{\text{tot}} = \boldsymbol{F} \cdot \mathfrak{K}$. Полагая справедливым принцип *материальной индифферентности*, ограничим аргумент отклика только симметричными тензорами (искажениями), что, в силу теоремы о полярном разложении Коши, приводит к выражению:

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(\boldsymbol{C}_{\text{tot}}), \quad \boldsymbol{C}_{\text{tot}} = \mathfrak{K}^T \cdot \boldsymbol{C} \cdot \mathfrak{K}, \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{F},$$

где \boldsymbol{C} – левый тензор Коши – Грина, характеризующий деформацию из напряженной отсчетной формы \mathcal{S}_R .

Уравнения, описывающие динамику деформируемого тела и соответствующие законы сохранения получим из принципа стационарности действия и симметрии действия относительно действия специфических групп преобразований координат и времени. Для этой цели мы введем еще одно предположение о *гиперупругости* материала, т. е. существовании упругого потенциала $\mathcal{W}(\boldsymbol{F}, \mathfrak{K})$,

который порождает упругий отклик по формуле Дойля – Эриксона:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{F}}, \quad (1.6)$$

где \mathbf{P} – первый (несимметричный) тензор напряжений Пиола. Его аналогом, ассоциированным с имплантом, является тензор напряжений Эшелби [12]:

$$\mathbf{S} = -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{K}} \cdot \mathbf{K}^T.$$

С учетом этого предположения, а также предположения об *аддитивности* действия, оно может быть представлено интегралом

$$\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{R} \times \mathcal{B}} \mathcal{L} dV dt,$$

где \mathcal{L} – плотность действия (лагранжиан). Следуя классическим положениям нелинейной механики континуума, представим лагранжиан в форме аддитивного разложения:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{C}_{\text{tot}}) = \mathcal{W}(\mathbf{x}, \mathbf{C}_{\text{tot}}) - \mathcal{T}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{u}}) - \mathcal{A}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}),$$

где $\mathcal{W}(\mathbf{x}, \mathbf{C}_{\text{tot}}) = \widetilde{\mathcal{W}}(\mathbf{x}, \mathbf{C}, \mathbf{K})$ – потенциальная энергия, запасаемая элементарным объемом при локальной деформации как композиции импланта и деформации из отсчетной формы \mathcal{S}_R , $\mathcal{T}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{u}})$ – кинетическая энергия тела и $\mathcal{A}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u})$ – работа внешних сил.

Важно отметить, что даже в случае когда \mathcal{W} явно не зависит от отсчетных координат \mathbf{x} и является изотропной функцией по отношению ко второму аргументу (что соответствует однородному и изотропному материалу в ненапряженном состоянии), $\widetilde{\mathcal{W}}$ уже зависит от \mathbf{x} через \mathbf{K} и остается изотропной функцией только при специфических значениях импланта. Таким образом локально однородный и изотропный материал оказывается неоднородным и анизотропным в составе самонапряженного тела. Этот факт характеризуется понятиями однородности и неоднородности материала [12].

Принцип стационарности действия формулируется следующим образом:

$$\delta \mathcal{J} = 0,$$

причем при варьировании изменяются только поля при фиксированных координатах. В расширенной вариационной формулировке, включающей анализ нетеровых симметрий, рассматриваются полные вариации координат, времени и полей [96]. Для их формализации рассмотрим семейства для координат $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \zeta)$,

и полей $\tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}, \zeta)$, которые зависят от скалярного параметра $\zeta \in (-\zeta_0, \zeta_0)$, таким образом, что:

$$\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \zeta) \Big|_{\zeta=0} = \mathbf{x}, \quad \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\mathbf{x}}, \zeta) \Big|_{\zeta=0} = \mathbf{u}(\mathbf{x}).$$

Тогда полные вариации, с точностью до слагаемых высших порядков, могут быть определены следующим образом [96]:

$$\delta \mathbf{x} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \delta \zeta, \quad \delta t = \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \delta \zeta, \quad \delta \mathbf{u} = \overline{\delta \mathbf{u}} + \nabla \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{x} + \dot{\mathbf{u}} \delta t, \quad \overline{\delta \mathbf{u}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \delta \zeta,$$

где символом $\overline{\delta \mathbf{u}}$ обозначена частичная вариация поля перемещений, а $\delta \zeta$ – это произвольное допустимое малое приращение параметра ζ . Эти вариации вызывают соответствующее изменение функционала действия [196]:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F} &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \delta \zeta = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{B}} \left[\frac{d\mathcal{L}}{d\zeta} + \mathcal{L} \left(\nabla \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \zeta} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \zeta} \right) \right] dV dt \Big|_{\zeta=0} \delta \zeta = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{B}} \left[\delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \left(\nabla \cdot \delta \mathbf{x} + \frac{d}{dt} \delta t \right) \right] dV dt. \end{aligned}$$

Первое слагаемое полученного интеграла можно преобразовать вариацию по формуле производной сложной функции:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \delta \zeta = \left(\nabla \mathcal{L} \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \zeta} + \dot{\mathcal{L}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \cdot \frac{\partial \dot{\tilde{\mathbf{u}}}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \mathbf{u}} : \frac{\partial \nabla \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \zeta} \right) \Big|_{\zeta=0} \delta \zeta = \\ &= \nabla \mathcal{L} \cdot \delta \mathbf{x} + \dot{\mathcal{L}} \delta t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \cdot \delta \dot{\mathbf{u}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \mathbf{u}} : \delta \nabla \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Подставляя полную вариацию лагранжиана в выражение для вариации действия, после несложных преобразований аналогичных тем, что были проделаны при выводе уравнения Софи Жермен (0.8) – (0.10), можно представить полную вариацию действия как сумму трех слагаемых:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F} &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{B}} \left(\nabla \cdot \delta \mathcal{F}_1 + \frac{d}{dt} \delta \mathcal{F}_2 + \mathcal{E} \cdot \overline{\delta \mathbf{u}} \right) dV dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\partial \Omega} \delta \mathcal{F}_1 \cdot \mathbf{n} dS dt + \int_{\mathcal{B}} \delta (\mathcal{F}_2(t_2) - \mathcal{F}_2(t_1)) dV + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{B}} \mathcal{E} \cdot \overline{\delta \mathbf{u}} dV dt. \end{aligned}$$

Здесь $\delta \mathcal{F}_1$ и $\delta \mathcal{F}_2$ – это вариации соответственно пространственной и временной частей тока Нетер, \mathcal{E} – дифференциальный оператор Эйлера – Лагранжа:

$$\delta \mathcal{F}_1 = \mathcal{L} \delta \mathbf{x} + \overline{\delta \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \mathbf{u}}, \quad \delta \mathcal{F}_2 = \mathcal{L} \delta t + \overline{\delta \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}},$$

$$\mathcal{E} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \mathbf{u}} \right)^{\text{T}}.$$

Подробный вывод этих формул можно найти в [196] и в [4, 197], нужно только учесть, что в статьях [4, 197] используется (3+1)-формализм, а в работах [196, 197] для оператора градиента используется нотация Гиббса.

Из частных вариаций, в которых поля меняются, а координаты и время зафиксированы, следуют полевые уравнения, естественные краевые и начальные условия:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \mathbf{u}} \right)^{\text{T}} = \mathbf{0}, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{u} \Big|_{\partial \Omega_1} = \mathbf{0}, \quad \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \mathbf{u}} \right)^{\text{T}} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\partial \Omega_2} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \Big|_{t=t_1} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \Big|_{t=t_2} = \mathbf{0},$$

где $\partial \Omega_1$, $\partial \Omega_2$ – участки границы тела, объединение которых составляет полную границу \mathcal{B} . Другой тип частных вариаций, при котором фиксируются поля, а варьируются координаты и время, приводит к законам сохранения:

$$\nabla \mathcal{L} - \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \mathbf{u}} \right) \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \mathbf{u}} : \nabla \nabla \mathbf{u} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right) \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0},$$

$$\left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \mathbf{u}} \right) \cdot \dot{\mathbf{u}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \mathbf{u}} : \nabla \dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathcal{L}} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \right) \cdot \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0},$$

Если ввести соответствующие обозначения, то эти уравнения можно представить в компактном виде:

$$\nabla \cdot \mathfrak{S} - \dot{\mathfrak{P}} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathfrak{U} - \dot{\mathcal{H}} = \mathbf{0},$$

где \mathfrak{S} – тензор напряжений Эшелби, \mathfrak{P} – канонический импульс, \mathcal{H} – плотность гамильтониана и \mathfrak{U} – вектор Умова – Пойнтинга:

$$\mathfrak{S} = \mathcal{L} \mathbf{I} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad \mathfrak{P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \cdot \nabla \mathbf{u},$$

$$\mathfrak{U} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \mathbf{u}} \right)^{\text{T}} \cdot \dot{\mathbf{u}}, \quad \mathcal{H} = \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \cdot \dot{\mathbf{u}}.$$

Здесь и далее символом \mathbf{I} обозначен единичный тензор.

В случае несовместных деформаций законы сохранения следует переписать с ненулевой правой частью:

$$\nabla \cdot \mathfrak{S} - \mathfrak{P} = \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathfrak{u} - \mathfrak{H} = \mathfrak{d}.$$

Здесь \mathbf{f} – поле конфигурационных сил (сил Эшелби), а \mathfrak{d} – поле диссипативных сил:

$$\mathbf{f} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathfrak{d} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Подчеркнем, что именно конфигурационные и диссипативные силы определяют нетривиальное состояние самонапряженного состояния, вызванное наличием несовместных деформаций и их эволюцией. Действительно, эти силы возникают из-за пространственной и временной неоднородности, которая возникает из-за неоднородного поля импланта \mathfrak{K} и его эволюции во времени.

В качестве примера тела с несовместными деформациями рассмотрим пластину⁶ (Рисунок 1.1), изготовленную последовательным нанесением тонких слоев разогретого металла на неподвижную подложку (на рисунке подложка условно показана толстой черной линией). В любой момент процесса изготовления эту пластину можно представить как объединение континуального множества бесконечно тонких растянутых слоев, мера деформации которых зависит от их температуры. Такую пластину можно привести в ненапряженное состояние, разделив ее на отдельные слои и позволив каждому из них свободно деформироваться (Рисунок 1.1а). Для того чтобы осуществить их сборку в единое тело необходимо подвергнуть каждый слой локальной деформации (Рисунок 1.1б), однако полученная таким образом форма, \mathcal{S}_R , будет находиться в равновесии только под действием уравнивающих ее объемных сил (Рисунок 1.1в). При отсутствии внешних полей вся сборка деформируется в некоторую искаженную форму (Рисунок 1.1г).

Для определенности предположим, что материал этой пластины описывается упругим потенциалом Сен-Венана – Кирхгофа, т. е.

$$\mathcal{W} = \frac{\lambda}{2} (\mathbf{I} : \mathbf{E}_{\text{tot}})^2 + \mu \mathbf{E}_{\text{tot}} : \mathbf{E}_{\text{tot}}, \quad (1.8)$$

где λ, μ – материальные константы, соответствующие модулям Ламе в линейном

⁶Заметим, что здесь речь идет о пластине в “конструкционном” смысле и с точки зрения теории упругости ее следует классифицировать как очень короткий трехмерный цилиндр

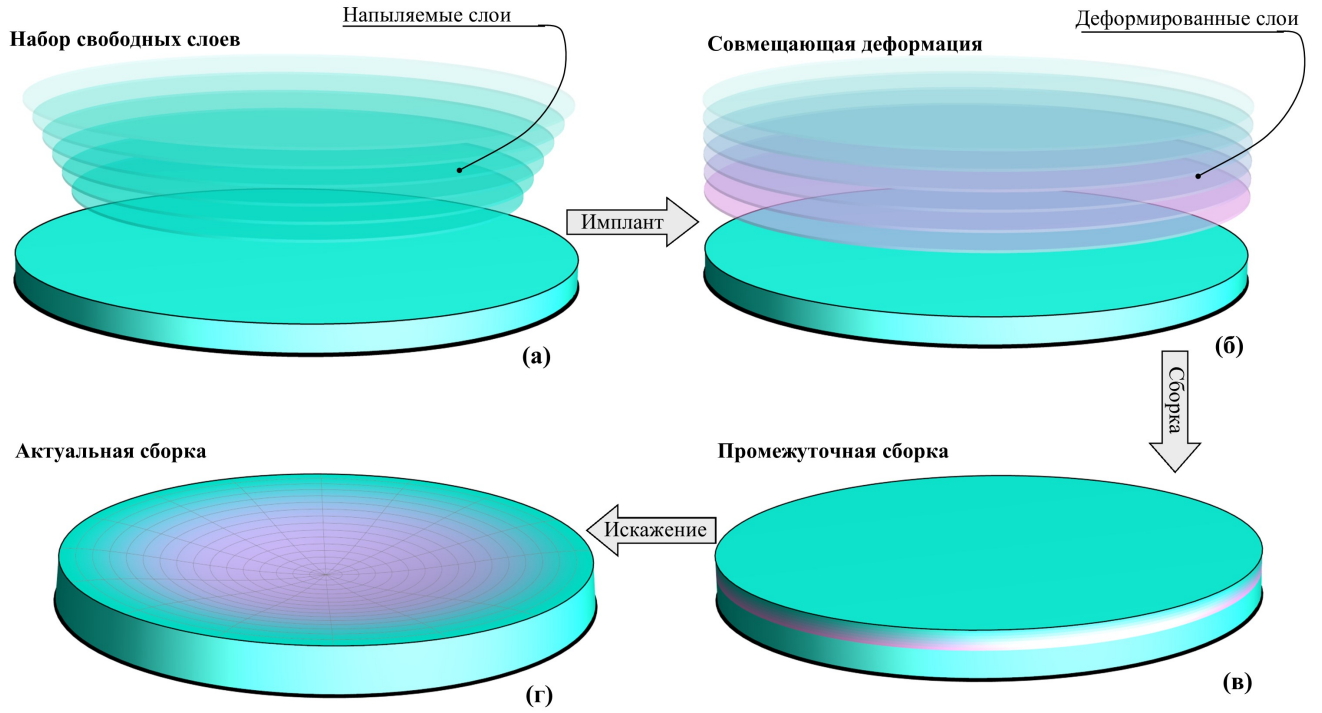


Рисунок 1.1 – Самонапряженная круглая пластина: (а) Пластина с набором свободных от напряжений дополнительных слоев; (б) Локальная деформация дополнительных слоев, обеспечивающая геометрическую совместность; (в) Сборка, уравновешенная некоторым полем объемных сил; (г) Искаженная форма сборки при отсутствии внешних полей

подходе, а \mathbf{E}_{tot} обозначает полный тензор деформаций Грина – Сен-Венана:

$$\mathbf{E}_{\text{tot}} = \frac{1}{2} (\mathbf{C}_{\text{tot}} - \mathbf{I}) = \mathbf{\mathcal{R}}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{\mathcal{R}} + \frac{1}{2} (\mathbf{\mathcal{R}}^T \cdot \mathbf{\mathcal{R}} - \mathbf{I}), \quad (1.9)$$

выражающийся через тензорное поле импланта $\mathbf{\mathcal{R}}$, которое на практике следует находить из решения эволюционной задачи⁷. В этом случае напряженное состояние пластины удобно описывать вторым тензором напряжений Пиола – Кирхгофа \mathbf{S} , который находится по формуле типа Дойля – Эриксона (1.6), записанной через полный тензор Грина – Сен-Венана:

$$\mathbf{S} = \lambda \mathbf{I} \text{tr} \mathbf{E}_{\text{tot}} + 2\mu \mathbf{E}_{\text{tot}}. \quad (1.10)$$

В общем случае полученное соотношение приводит к довольно сложным уравнениям в перемещениях, поэтому зачастую его редуцируют, предполагая, что перемещения малы и отбрасывая слагаемые высоких порядков малости. В случае несовместных деформаций построение такой редукции несколько осложняется, однако оно не представляет принципиальных трудностей, что будет показано далее.

⁷Хотя рассмотрение эволюционных задач выходит за рамки диссертационной работы, можно указать некоторые статьи в которых они рассмотрены более подробно [13, 194]

1.2 Разложение по деформационному параметру

Для построения асимптотической теории пригодной для анализа изгиба тонких пластин необходимо редуцировать полученные уравнения трехмерной упругости, причем редукцию следует проводить по двум параметрам – деформационному и толщинному. Редукция по толщинному параметру в том или ином виде присутствует практически во всех моделях тонких пластин и призвана учесть малость толщин пластин по сравнению с их характерными размерами в плане. Однако нелинейные уравнения, получающиеся в результате, достаточно сложны и чаще всего не могут быть эффективно решены. Поэтому обычно полученные уравнения редуцируют также и по деформационному параметру, отражающему меру “малости” деформаций пластины.

Для конкретизации потенциала \mathcal{W} воспользуемся алгебраическими инвариантами поля \mathbf{C}_{tot} :

$$I_1 = \mathbf{C}_{\text{tot}} : \mathbf{I}, \quad I_2 = \frac{1}{2} (I_1^2 - \mathbf{C}_{\text{tot}}^2 : \mathbf{I}), \quad I_3 = \frac{1}{3} (\mathbf{C}_{\text{tot}}^3 : \mathbf{I} - I_1^3 + 3I_1 I_2). \quad (1.11)$$

Их, в свою очередь, удобно выражать через градиент поля перемещений, описывающий деформирование из промежуточной формы. Будем считать, что он пропорционален малому параметру ε :

$$\varepsilon = \|\nabla \mathbf{u}\| = \sqrt{\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u}}, \quad \nabla \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{D}, \quad \mathbf{D} := \frac{1}{\varepsilon} \nabla \mathbf{u}.$$

Тогда:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{\kappa} = \mathbf{\kappa} + \varepsilon \mathbf{D} \cdot \mathbf{\kappa}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{\kappa}^T \cdot \mathbf{\kappa} + \varepsilon \mathbf{\kappa}^T \cdot (\mathbf{D} + \mathbf{D}^T) \cdot \mathbf{\kappa} + \varepsilon^2 \mathbf{\kappa}^T \cdot \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{\kappa}.$$

Подстановка этого разложения в выражения для первых двух инвариантов (1.11) позволяет представить их в следующем виде:

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathbf{k}_1 : \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_1 : (\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2) \varepsilon + (\mathbf{d}_1 : \mathbf{d}_1) \varepsilon^2, \\ I_2 &= \frac{1}{2} \left[I_1^2 - \mathbf{k}_2 : \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 : (\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2) \varepsilon - 2(\mathbf{d}_3 : \mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_3 : \mathbf{d}_4 + \mathbf{k}_2 : \mathbf{d}_5) \varepsilon^2 - \right. \\ &\quad \left. - 4(\mathbf{d}_3 : \mathbf{d}_5) \varepsilon^3 - (\mathbf{d}_5 : \mathbf{d}_5) \varepsilon^4 \right]. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь, для краткости, вводится новая система обозначений, в которой латин-

скими буквами обозначены различные скалярные функции тензора \mathbf{D} :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &:= \mathfrak{K}, & \mathbf{k}_2 &:= \mathfrak{K}^\top \cdot \mathfrak{K}, & \mathbf{k}_3 &:= \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{K}^\top \cdot \mathfrak{K}, \\ \mathbf{d}_1 &:= \mathbf{D} \cdot \mathfrak{K}, & \mathbf{d}_2 &:= \mathbf{D}^\top \cdot \mathfrak{K}, & \mathbf{d}_3 &:= \mathfrak{K}^\top \cdot \mathbf{D} \cdot \mathfrak{K}, \\ \mathbf{d}_4 &:= \mathfrak{K}^\top \cdot \mathbf{D}^\top \cdot \mathfrak{K}, & \mathbf{d}_5 &:= \mathfrak{K}^\top \cdot \mathbf{D}^\top \cdot \mathbf{D} \cdot \mathfrak{K}. \end{aligned}$$

Осталось получить аналогичное соотношение для третьего инварианта. Хотя формула (1.11), полученная из тождества Гамильтона – Кэли, является наиболее наглядной, ее неудобно использовать для вывода разложения по деформационному параметру. Дело в том, что при непосредственном использовании этой формулы приходится использовать расширенную систему символов для обозначения слагаемых высших порядков относительно \mathbf{D} . Этого можно избежать если воспользоваться мультипликативным свойством определителей, т. е. отыскивать выражение для третьего инварианта полного тензора Коши – Грина как квадрат определителя матрицы тензора $\mathbf{F} \cdot \mathfrak{K}$. Для этого необходимо сперва выписать его инварианты:

$$\begin{aligned} I_{1\mathbf{F}} &= \text{tr } \mathbf{k}_1 + (\text{tr } \mathbf{d}_1) \varepsilon, & I_{2\mathbf{F}} &= \frac{1}{2} (I_{1\mathbf{F}}^2 - \mathbf{k}_1^\top : \mathbf{k}_1 - 2 (\mathbf{k}_1^\top : \mathbf{d}_1) \varepsilon - (\mathbf{d}_1^\top : \mathbf{d}_1) \varepsilon^2), \\ I_{3\mathbf{F}} &= \frac{1}{3} (\mathbf{k}_1 : \mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_4 : (2\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_6) \varepsilon + (2\mathbf{d}_1 : \mathbf{d}_7 + \mathbf{k}_4 : \mathbf{d}_8) \varepsilon^2 + (\mathbf{d}_7 : \mathbf{d}_8) \varepsilon^3 - I_{1\mathbf{F}}^3 + 3I_{1\mathbf{F}}I_{2\mathbf{F}}), \end{aligned}$$

где:

$$\mathbf{k}_4 := \mathfrak{K}^\top \cdot \mathfrak{K}^\top, \quad \mathbf{d}_6 := \mathfrak{K} \cdot \mathbf{D}, \quad \mathbf{d}_7 := \mathfrak{K}^\top \cdot \mathbf{D}^\top \cdot \mathfrak{K}^\top, \quad \mathbf{d}_8 := \mathbf{D} \cdot \mathfrak{K} \cdot \mathbf{D}.$$

Теперь третий инвариант тензора \mathbf{C}_T , можно получить, возведя в квадрат инвариант $I_{3\mathbf{F}}$:

$$I_3 = I_{3\mathbf{F}}^2. \quad (1.13)$$

Это выражение вместе с (1.12) позволяет получить разложения всех инвариантов по деформационному параметру. Важно отметить, что сама редукция по деформационному параметру еще не была проведена, то есть полученные выражения являются точными для выбранной меры деформации.

Явная форма функции потенциальной энергии определяется выбранной моделью материала, для примера ее можно выбрать в форме, предложенной Муни [198] и модифицированной Ривлином [199]:

$$\mathscr{W} = \frac{\mu}{4} \left[(1-\beta) \left(\frac{I_1}{I_3^{1/3}} - 3 \right) + (1+\beta) \left(\frac{I_2}{I_3^{2/3}} - 3 \right) \right] + \frac{3\lambda + 2\mu}{6} \left(\sqrt{I_3} - 1 \right)^2, \quad (1.14)$$

где символами μ , λ , как и ранее, обозначены, параметры Ламе, а β – эмпирически определяемый положительный коэффициент.

Теперь, для того чтобы получить разложение правой части уравнения поля (1.7), нужно представить тензор напряжений Пиола \mathbf{P} в виде суммы:

$$\mathbf{P}^T = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \nabla \mathbf{u}} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{D}} = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{s=1}^3 \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial I_s} \frac{\partial I_s}{\partial \mathbf{D}}, \quad (1.15)$$

которую в свою очередь нетрудно представить степенными рядами относительно ε . Для этого нужно представить производные инвариантов $I_1 \dots I_3$ в виде полиномов. Для первых двух инвариантов это можно сделать сразу же:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{D}} &= 2\mathbf{k}_5 \varepsilon + 2\mathbf{d}_9 \varepsilon^2, \\ \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{D}} &= I_1 \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{D}} - \mathbf{k}_6 \varepsilon - 2(\mathbf{d}_{10} + \mathbf{d}_{10}^T + \mathbf{d}_{11}) \varepsilon^2 - 2(\mathbf{d}_{12} + \mathbf{d}_{13} + \mathbf{d}_{14}) \varepsilon^3 - 2\mathbf{d}_{15} \varepsilon^4, \end{aligned}$$

где:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_5 &:= \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{K}^T, & \mathbf{k}_6 &:= \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{K}^T \cdot \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{K}^T, \\ \mathbf{d}_9 &:= \mathbf{D} \cdot \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{K}^T, & \mathbf{d}_{10} &:= \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{K}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{K}^T, & \mathbf{d}_{11} &:= \mathbf{D} \cdot \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{K}^T \cdot \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{K}^T, \\ \mathbf{d}_{12} &:= \mathbf{D} \cdot \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{K}^T \cdot \mathbf{D}^T \cdot \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{K}^T, & \mathbf{d}_{13} &:= \mathbf{D} \cdot \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{K}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{K}^T \\ \mathbf{d}_{14} &:= \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{K}^T \cdot \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{K}^T & \mathbf{d}_{15} &:= \mathbf{D} \cdot \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{K}^T \cdot \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathfrak{K} \cdot \mathfrak{K}^T. \end{aligned}$$

Выражение для производной третьего инварианта очевидным образом получается из (1.13), но для этого необходимо отыскать производные инвариантов $I_{1F} \dots I_{3F}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{1F}}{\partial \mathbf{D}} &= \mathbf{k}_1^T \varepsilon, & \frac{\partial I_{2F}}{\partial \mathbf{D}} &= I_{1F} \frac{\partial I_{1F}}{\partial \mathbf{D}} - \mathbf{k}_4 \varepsilon - \mathbf{d}_7 \varepsilon^2, \\ \frac{\partial I_{3F}}{\partial \mathbf{D}} &= \mathbf{k}_7 \varepsilon + 2\mathbf{d}_{16} \varepsilon^2 + \mathbf{d}_{17} \varepsilon^3 - I_{1F}^2 \frac{\partial I_{1F}}{\partial \mathbf{D}} + \frac{\partial I_{1F}}{\partial \mathbf{D}} I_{2F} + I_{1F} \frac{\partial I_{2F}}{\partial \mathbf{D}}, \end{aligned}$$

где:

$$\mathbf{k}_7 := \mathfrak{K}^T \cdot \mathfrak{K}^T \cdot \mathfrak{K}^T, \quad \mathbf{d}_{16} := \mathfrak{K}^T \cdot \mathfrak{K}^T \cdot \mathbf{D}^T \cdot \mathfrak{K}^T, \quad \mathbf{d}_{17} := \mathfrak{K}^T \cdot \mathbf{D}^T \cdot \mathfrak{K}^T \cdot \mathbf{D}^T \cdot \mathfrak{K}^T.$$

Выписанные выражения позволяют использовать формулу (1.15) для вычисления компонент первого тензора напряжений Пиола, для этого осталось лишь вычислить производные упругого потенциала по инвариантам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial I_1} &= \frac{(1-\beta)\mu}{4\sqrt[3]{I_3}}, & \frac{\partial W}{\partial I_2} &= \frac{(1+\beta)\mu}{4I_3^{2/3}}, \\ \frac{\partial W}{\partial I_3} &= \frac{\mu}{12} \left[\frac{(\beta-1)I_1}{I_3^{4/3}} - \frac{2(\beta+1)I_2}{I_3^{5/3}} \right] + \frac{(\sqrt{I_3}-1)(3\lambda+2\mu)}{6\sqrt{I_3}}. \end{aligned}$$

Однако из-за того, что выражения для производных потенциала включают слагаемые с нецелыми отрицательными степенями третьего инварианта, для разложения тензоров напряжений по степеням ε нужно предварительно разложить такие термы в ряды в окрестности единицы:

$$I_3^\gamma = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\gamma}{n} (I_3 - 1)^n.$$

Здесь $\binom{\gamma}{n} = \frac{\gamma^n}{n!}$ обобщенная формула биномиальных коэффициентов, допускающая случаи $\gamma \in \mathbb{R}$, где $\gamma^n = \gamma(\gamma - 1)(\gamma - 2) \dots (\gamma - n + 1)$ – убывающий факториал.

Последнее разложение вместе с формулами для инвариантов и производных позволяют представить функцию потенциальной энергии и первый тензор Пиола в виде степенных рядов:

$$\mathcal{W} = \sum_{k=0}^{\infty} W_k \varepsilon^k, \quad \mathbf{P} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}_k \varepsilon^k.$$

Оценим влияние старших термов, отвечающих за нелинейный отклик. Для этого рассмотрим однородное растяжение тела без несовместных деформаций. Зададим градиент деформации в виде:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Используя формулы, полученные выше, (или их упрощенный аналог для тела без несовместных деформаций [2]) можно определить области изменения параметров A, B , в которых асимптотические формулы отличаются от полных выражений не более чем на 5% (для выбранного материала). На Рисунке 1.2 приведены соответствующие диаграммы для алюминия⁸. По осям отложены значения диагональных компонент градиента деформации (1.16), а цветом обозначены области, в которых асимптотика (потенциальной энергии или дивергента тензора Пиола) отличается от точного значения не более чем на 5%. Из диаграмм видно, что для обеспечения требуемой точности в широкой области изменения параметров достаточно учесть слагаемые порядка не старше третьего.

⁸Модули Ламе приняты по [200]: $\mu = 26.2$ ГПа, $\lambda = 58.4$ ГПа, а параметр β произвольно принят равным нулю

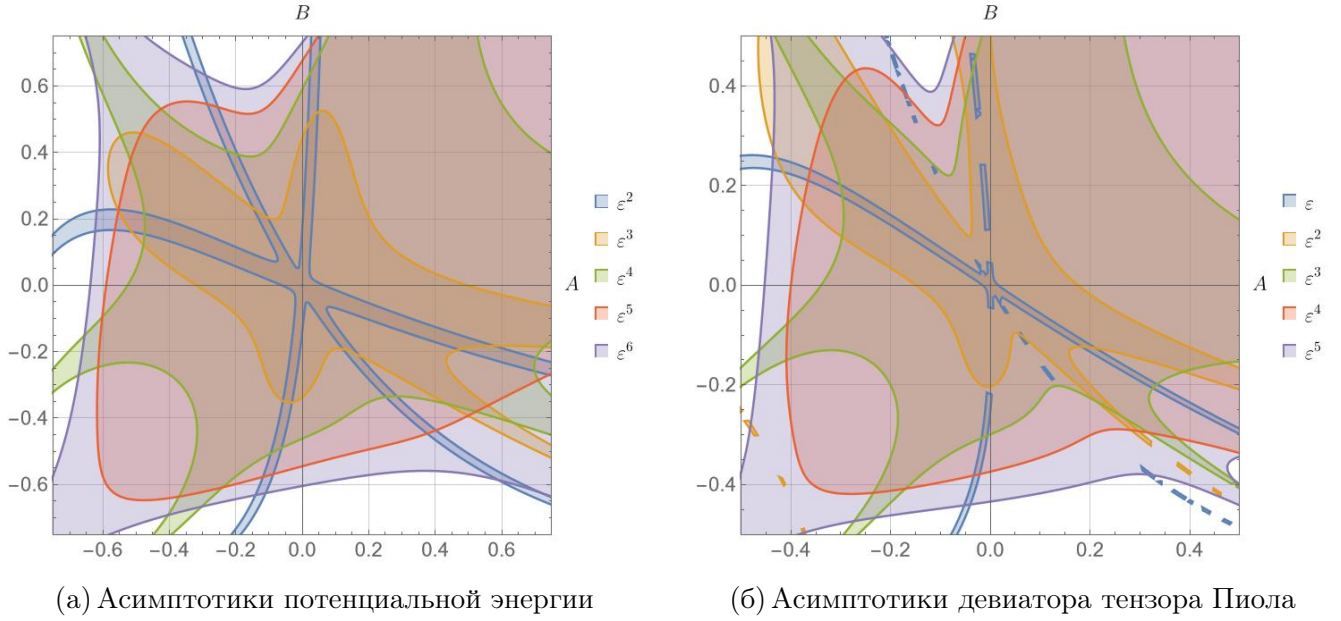


Рисунок 1.2 – Области пятипроцентной точности

1.3 Разложение по толщинному параметру

Теперь перейдем к редукции по толщинному параметру. Для этого необходимо детально рассмотреть кинематику тонкой пластины, но прежде дадим краткий комментарий о том, что она из себя представляет с математической точки зрения. Под пластиной в дальнейшем будем понимать тело \mathcal{B} , все допустимые формы которого удовлетворяют следующему условию: граница формы может быть разбита на две части, $\partial\mathcal{S} = \Pi_1 \cup \Pi_2$, такие, что существует плоскость ω , и для каждой точки A на Π_2 существует шар содержащий эту точку, с центром на ω , радиус которого r_A много меньше радиуса R сферы, описанной около всей формы \mathcal{S} . Мы будем называть ω плоскостью приведения, множество поверхностей Π_2 – лицевыми поверхностями, а Π_1 – боковыми поверхностями. Контуром пластины будем называть пересечение плоскости приведения с боковыми поверхностями, т. е., множество $\Gamma = \omega \cap \Pi_1$.

Предположим, что некоторая форма \mathcal{S}_R может рассматриваться как отчетная. Введем $\{O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})\}$ правый ортонормированный (декартов) репер такой, что \mathbf{i}, \mathbf{j} лежат в плоскости приведения ω . Таким образом хотя бы часть $\omega_0 \subset \omega$ может быть покрыта соответствующей криволинейной сеткой (ρ^1, ρ^2) такой что:

$$\omega \supset \omega_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = O + x^1(\rho^1, \rho^2) \mathbf{i} + x^2(\rho^1, \rho^2) \mathbf{j}, \\ (\rho^1, \rho^2) \in D_0 \subset \mathbb{R}^2, \quad \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial \rho^\beta} \right| > 0 \end{array} \right\}.$$

Для простоты будем считать, что контур Γ полностью лежит ω_0 , а Π_1 состоит из одной поверхности без самопересечения. Следовательно, форма \mathcal{S}_R , как область в физическом пространстве может быть определена координатным способом путем расширения сетки (ρ^1, ρ^2) в окрестности поверхности приведения:

$$\mathcal{S}_R = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = O + x^1(\rho^1, \rho^2) \mathbf{i} + x^2(\rho^1, \rho^2) \mathbf{j} + z \mathbf{k}, \quad (\rho^1, \rho^2, z) \in D \subset \mathbb{R}^3 \}.$$

В области ω_0 можно определить поле реперов с локальными базисами $(\mathbf{e}_\alpha)_{\alpha=1}^2$ следующим образом:

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho^\alpha} = \frac{\partial x^1}{\partial \rho^\alpha} \mathbf{i} + \frac{\partial x^2}{\partial \rho^\alpha} \mathbf{j}.$$

Дуальный базис $(\mathbf{e}^\alpha)_{\alpha=1}^2$ может быть получен аналогично трехмерному случаю (1.3), как решение линейных неоднородных уравнений $\mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_\beta^\alpha$. Поля реперов и дуальных к ним могут быть расширены на всю область, занимаемую пластиной, \mathcal{S}_R с базисами $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{k})$ и $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{k})$. Реперы заданные таким образом позволяют определить плоскостной и пространственный операторы Гамильтона в ω_0 и \mathcal{S}_R соответственно следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla_\omega &:= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} = \mathbf{e}^1 \frac{\partial}{\partial \rho^1} + \mathbf{e}^2 \frac{\partial}{\partial \rho^2} = \mathbf{e}^\alpha \frac{\partial}{\partial \rho^\alpha}, \\ \nabla_R &:= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{e}^1 \frac{\partial}{\partial \rho^1} + \mathbf{e}^2 \frac{\partial}{\partial \rho^2} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} = \nabla_\omega + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Как и ранее, мы считаем, что действие этих операторов на векторное поле определяется как транспонированный результат формального тензорного произведения оператора Гамильтона и этого поля, например, в случае действия на векторное поле перемещений:

$$\mathbf{u} = u^1 \mathbf{e}_1 + u^2 \mathbf{e}_2 + w \mathbf{k} = u^\alpha \mathbf{e}_\alpha + w \mathbf{k},$$

имеем:

$$\begin{aligned} \nabla_\omega \mathbf{u} &= \left(\mathbf{e}^\alpha \frac{\partial}{\partial \rho^\alpha} \otimes (u^\beta \mathbf{e}_\beta + \mathbf{k} w) \right)^\top = \left(\frac{\partial u^\beta}{\partial \rho^\alpha} + u^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta \right) \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{e}^\alpha + \frac{\partial w}{\partial \rho^\alpha} \mathbf{k} \otimes \mathbf{e}^\alpha, \\ \nabla_R \mathbf{u} &= \left(\left(\mathbf{e}^\alpha \frac{\partial}{\partial \rho^\alpha} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \otimes (u^\beta \mathbf{e}_\beta + \mathbf{k} w) \right)^\top = \nabla_\omega \mathbf{u} + \frac{\partial u^\beta}{\partial z} \mathbf{e}_\beta \otimes \mathbf{k} + \frac{\partial w}{\partial z} \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}, \end{aligned}$$

где $\Gamma_{\gamma\alpha}^\beta = \mathbf{e}^\beta \cdot (\partial \mathbf{e}_\gamma / \partial \rho^\alpha)$ – символы Кристоффеля, связанные с криволинейными координатами на ω_0 .

Определим деформацию как диффеоморфизм \varkappa отображающий карту области \mathcal{S}_R на область \mathcal{S} , т. е.,

$$\varkappa : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}, \quad \mathbf{X} \mapsto \varkappa(\mathbf{X}).$$

Это отображение индуцирует деформацию плоскости приведения как сужение \varkappa на ω_0 :

$$\varkappa_0 := \varkappa|_{\omega}, \quad \varkappa_0 : \omega_0 \rightarrow \Omega,$$

где Ω – образ плоскости приведения, $\varkappa(\omega_0)$ который можно назвать поверхностью приведения.

Так как оба множества \mathcal{S}_R и \mathcal{S} – это регулярные области в физическом пространстве, то они наследуют структуру аффинно-евклидова пространства, что позволяет определить вектор поля перемещений:

$$\mathbf{u} = \varkappa(\mathbf{X}) - \mathbf{X}.$$

Поскольку все допустимые формы тонкостенны в смысле данного выше определения, то z может считаться малым параметром, который мы и называем толщиной. Исторически сложилось так, что формы подобных разложений задавались не из строгих математических построений, а на основе эвристических соображений, потому многие из них с формальной точки зрения оказываются асимптотически непоследовательными. Некоторые из таких разложений приведены в Таблице 1.1.

В настоящем исследовании принят более общий подход к построению кинематической гипотезы, восходящий к работам Коши и Пуассона. Поле перемещений представляется как степенной ряд:

$$\mathbf{u}(\rho^1, \rho^2, z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{u}_n(\rho^1, \rho^2),$$

коэффициенты которого могут быть (в силу теоремы Лауричелла [190]) определены как производные поля \mathbf{u} :

$$\mathbf{u}_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \mathbf{u}(\rho^1, \rho^2, z) \Big|_{z=0}.$$

Таким образом, вместо трехмерной задачи относительно \mathbf{u} , можно рассматривать более простую двумерную задачу относительно последовательности неизвестных \mathbf{u}_n . В этом случае градиент деформации может быть представлен в

Модель	Трехмерное поле перемещений	Источник
Кирхгоф	$\mathbf{u}_0 - z(\mathbf{i}w_x + \mathbf{j}w_y)$	[15]
Уфлянд, Миндлин	$\mathbf{u}_0 \pm z(\mathbf{i}\phi + \mathbf{j}\psi)$	[16, 201]
Кончковский, Рейсснер, Панц	$\mathbf{u}_0 - z(\mathbf{i}w_x + \mathbf{j}w_y) + \frac{5}{4} \left(z - \frac{4z^3}{3h^2} \right) \mathbf{V}$	[17, 202, 203]
Левинсон, Мурти, Редди	$\mathbf{u}_0 + z(\mathbf{i}\phi + \mathbf{j}\psi) - \frac{4z^3}{3h^2} \mathbf{V}$	[204–206]
Туратье	$\mathbf{u}_0 - z(\mathbf{i}w_x + \mathbf{j}w_y) + \frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h} \mathbf{V}$	[207]
Афаг	$\mathbf{u}_0 - z(\mathbf{i}w_x + \mathbf{j}w_y) + ze^{-2(z/h)^2} \mathbf{V}$	[208]

Таблица 1.1 – Представление поля перемещений

терминах \mathbf{u}_n :

$$\nabla \mathbf{u} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \nabla_{\omega} \mathbf{u}_n + \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{k} = \nabla_{\omega} \mathbf{u}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} (z \nabla_{\omega} \mathbf{u}_n + n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{k}).$$

Учитывая лишь конечное число слагаемых мы приходим к асимптотическому представлению. В частности, первая асимптотика имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 + z\mathbf{u}_1 + \mathbf{o}(z), \\ \nabla \mathbf{u} &= \nabla_{\omega} \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{k} + z(\nabla_{\omega} \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{k}) + \mathbf{o}(z). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Присутствие \mathbf{u}_2 в этом выражении для градиента деформации асимптотически согласовано, но оно приводит к расхождению с классическими представлениями теории пластин. Для того чтобы избежать расхождения можно или пренебречь этим слагаемым или поменять взгляд на способ построения асимптотики (1.17) и рассматривать ее как точное выражение деформации для двумерного континуума Коссера. Тогда вместо (1.17) получим:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + z\mathbf{u}_1, \quad \nabla \mathbf{u} = \nabla_{\omega} \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{k} + z \nabla_{\omega} \mathbf{u}_1.$$

Здесь \mathbf{u}_1 – заранее неизвестная функция поворота прямолинейного элемента,

трансверсального к ω , т. е.⁹,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{H} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{u}_0 + \|\mathbf{d}\| \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{d}}{\|\mathbf{d}\|} = \mathbf{u}_0 + z \mathbf{u}_1, \quad z := \|\mathbf{d}\|, \quad \mathbf{u}_1 := \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{d}}{\|\mathbf{d}\|},$$

где \mathbf{H} – ортогональный тензор поворота ($\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H} = \mathbf{I}$). Для малых значений $\|\mathbf{H}\|$ допустима аппроксимация $\mathbf{H} \cdot \mathbf{d} \approx \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{d}$, где $\boldsymbol{\omega}$ – это кососимметричный тензор. В этом случае приходим к кинематической гипотезе Уфлянда – Миндлина, приведенной в Таблице 1.1.

1.4 Редукция уравнений на случай двумерного континуума

Представим теперь, что вместо трехмерного тела, мы наблюдаем лишь за поверхностью приведения ω , составляющей часть плоскости, вложенной в \mathbb{E} (в общем случае она не обязательно лежит внутри отчетной формы \mathcal{S}_R). Все что мы можем наблюдать – это изгиб и растяжение этой поверхности. Растяжение характеризуется двумерными деформациями, аналогично трехмерному случаю, только для случая когда одно из пространственных направлений игнорируется. Однако изгиб, т. е., изменение кривизны и трансверсальных перемещений должен быть описан принципиально иным способом, например, в рамках формализма Коссера [11, 76]. Этот подход позволяет учесть дополнительные степени свободы, которые могут быть интерпретированы либо как внутренние деформации, например, микродеформации отдельных зерен в поликристаллическом твердом теле, либо как внешние деформации, связанные с изгибом, которые нельзя непосредственно наблюдать в рамках двумерной геометрии поверхности приведения [16, 76, 210].

Для двумерного континуума Коссера действие \mathcal{J}_ω определенное на ω может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\omega &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \mathcal{L}_\omega \left(\boldsymbol{\rho}, t, \mathbf{u}, \mathbf{H}, \nabla_\omega \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \nabla_\omega \mathbf{H}, \dot{\mathbf{H}} \right) d\omega(\boldsymbol{\rho}) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \iint_{\omega} \mathcal{L}_\omega \left(\boldsymbol{\rho}, t, \mathbf{u}, \mathbf{H}, \nabla_\omega \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \nabla_\omega \mathbf{H}, \dot{\mathbf{H}} \right) \sqrt{g} d\rho^1 d\rho^2 dt. \end{aligned}$$

⁹Эта формула есть прямое следствие теоремы о повороте тела с закрепленной точкой, приведенной, например, в [209]

Здесь $\mathcal{L}_\omega(\dots)$ обозначает плотность действия по отношению к элементу площади $d\omega$, $\boldsymbol{\rho}$ – пара поверхностных координат материальной точки на ω , а \mathbf{H} – тензорное поле второго ранга, описывающее локальную дополнительную деформацию специального вида. Оно может быть интерпретировано как линейное преобразование скрытых геометрических параметров, связанных с элементарным объемом, который, в свою очередь, идентифицируется материальной точкой деформируемого тела. В рамках общего подхода Коссера компоненты \mathbf{H} считаются независимыми друг от друга и от обычных деформаций, представленных полем $\nabla_\omega \mathbf{u}$. В таком случае \mathbf{H} называется микроморфными деформациями [211] и могут быть представлены как набор векторов $\{\mathbf{d}_\alpha\}_{\alpha=1}^n$, $\{\mathbf{D}^\alpha\}_{\alpha=1}^n$ (которые могут быть никак не связаны с трансляционными векторами в \mathbb{E}), называемых директорами: $\mathbf{H} = \mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{D}^\alpha$. В общем случае, директора могут быть определены в некотором абстрактном векторном пространстве размерности n , отличной от 2 и 3. Между тем, для моделирования деформаций пластин и оболочек в рамках традиционного подхода такая общность является излишней, поскольку дополнительные степени свободы связаны с поворотами нормального элемента, т. е., материального волокна, трансверсально ориентированного к поверхности приведения. ω_0 в отсчетной форме. Это означает, что тензорное поле \mathbf{H} действует в \mathbb{E} (так $n = 3$) и его компоненты связаны отношением ортогональности $\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{I}$. Таким образом, компоненты \mathbf{H} не могут рассматриваться как независимые функции, и для применения вариационной техники важно выразить их через независимые переменные. Такое выражение мы можем получить с помощью формулы Родрига:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4 + \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}} [(4 - \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} - 4\mathbf{I} \times \boldsymbol{\theta}],$$

где $\boldsymbol{\theta}$ – векторное поле, компоненты которого не связаны друг с другом. Геометрически, вектор $\boldsymbol{\theta}$ может быть выражен через единичный вектор \mathbf{e} , определяющий положение оси вращения, и угол поворота χ следующим образом: $\boldsymbol{\theta} = 2\mathbf{e} \tan \frac{\chi}{2}$. Несложные расчеты показывают, что

$$\boldsymbol{\theta} = 2(1 + \mathbf{I} : \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}_\times,$$

где \mathbf{H}_\times – векторный инвариант (Гиббсов крест) тензора \mathbf{H} .

Повторяя рассуждения, приведенные выше для трехмерного твердого тела, мы считаем, что лагранжиан можно представить в виде следующего разложе-

ния:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\omega(\boldsymbol{\rho}, t, \mathbf{u}, \mathbf{H}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{H}}, \nabla_\omega \mathbf{u}, \nabla_\omega \mathbf{H}) = & \mathcal{W}_\omega(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{H}, \nabla_\omega \mathbf{u}, \nabla_\omega \mathbf{H}) - \\ & - \mathcal{T}_\omega(\boldsymbol{\rho}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{H}}) - \mathcal{A}_\omega(\boldsymbol{\rho}, t, \mathbf{u}, \mathbf{H}), \end{aligned} \quad (1.18)$$

где $\mathcal{W}_\omega(\dots)$, $\mathcal{K}_\omega(\dots)$, $\mathcal{A}_\omega(\dots)$ – плотности соответственно запасенной упругой энергии, кинетической энергии и работы внешних полей, определенные по отношению к элементу площади $d\omega$.

Как и для трехмерных тел, мы принимаем принцип материальной индифферентности. Таким образом, функционал \mathcal{W}_ω должен удовлетворять условию

$$\mathcal{W}_\omega(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{O} \cdot \nabla_\omega \mathbf{u}, \mathbf{O} \cdot \mathbf{H}, \mathbf{O} \cdot \nabla_\omega \mathbf{H}) = \mathcal{W}_\omega(\boldsymbol{\rho}, \nabla_\omega \mathbf{u}, \mathbf{H}, \nabla_\omega \mathbf{H}), \quad (1.19)$$

где \mathbf{O} – произвольный ортогональный тензор \mathbb{E} . Нужно отметить что, несмотря на то что плотность запасенной упругой энергии \mathcal{W}_ω определена на двумерной плоскости ω_0 , ортогональный тензор \mathbf{O} определяется в объемлющем трехмерном пространстве. Более того, ортогональные преобразования которые действует на обычный градиент деформации $\nabla_\omega \mathbf{u}$ и ортогональные преобразования микродеформаций \mathbf{H} осуществляются последовательно, с помощью одного и того же тензора \mathbf{O} . Следует отметить это отличие теории оболочек Коссера от абстрактной теории микроморфного континуума, в рамках которой преобразование микродеформации \mathbf{H} , связанное с материальной точкой, не зависит от преобразования аффинного пространства, содержащего эту точку.

Условие (1.19) будет удовлетворено если определить \mathcal{W}_ω в конкретной форме, заменяя аргументы $\nabla_\omega \mathbf{u}$, \mathbf{H} , $\nabla_\omega \mathbf{H}$ их комбинациями, удовлетворяющими принципу материальной индифферентности. Поскольку \mathbf{H} определяет ортогональное преобразование, $\text{Sym}(\mathbf{H}) = \mathbf{I}$, упругий потенциал \mathcal{W}_ω явно не зависит от \mathbf{H} . Два других аргумента могут быть выбраны как $\mathbf{H}^T \cdot \nabla_\omega \mathbf{u}$, $\mathbf{H}^T \cdot \nabla_\omega \mathbf{H}$. Эти комбинации инварианты по отношению к ортогональным преобразованиям и в линейном приближении соответствуют обычным кинематическим гипотезам классической линейной теории оболочек. Чтобы устранить взаимную зависимость между компонентами этих полей (возникающую в силу ортогональности поля \mathbf{H}), следуя [76], введем меры деформации \mathbf{E} и \mathbf{K} через отношения

$$\mathbf{E} = \mathbf{H}^T \cdot \nabla_\omega \mathbf{u}, \quad \mathbf{I} \times \mathbf{K} = \mathbf{H}^T \cdot \nabla_\omega \mathbf{H}. \quad (1.20)$$

Из последнего соотношения можно явно выразить \mathbf{K} как

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}:(\mathbf{H}^T \cdot \nabla_\omega \mathbf{H}) = \frac{4}{4 + \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}} \left(\mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{I} \times \boldsymbol{\theta} \right) \cdot \nabla_\omega \boldsymbol{\theta}, \quad (1.21)$$

где $\boldsymbol{\epsilon} = -\mathbf{I} \times \mathbf{I}$ – тензор Леви-Чивиты.

Таким образом, аргументы функционала \mathcal{W}_ω можно задать следующим образом:

$$\mathcal{W}_\omega(\boldsymbol{\rho}, \nabla_\omega \mathbf{u}, \mathbf{H}, \nabla_\omega \mathbf{H}) = \widetilde{\mathcal{W}}_\omega(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{E}(\mathbf{u}), \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})). \quad (1.22)$$

Для учета локальных несовместимых деформаций можно определить функционал \mathcal{W}_ω связанный с однородным состоянием как

$$\mathcal{W}_\omega(\boldsymbol{\rho}, \nabla_\omega \mathbf{u}, \mathbf{H}, \nabla_\omega \mathbf{H}) = \widetilde{\mathcal{W}}_\omega(\boldsymbol{\rho}, \mathcal{K}^{-T} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \mathfrak{K}^{-1}, \mathcal{K}^{-T} \cdot \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathfrak{K}^{-1}), \quad (1.23)$$

где \mathfrak{K} – локальная двумерная деформация (в общем несовместная), определенная аналогично случаю трехмерного тела выше, \mathcal{K} – локальное ортогональное преобразование, которое приводит директора в однородное состояние.

С помощью (1.18), (1.22), (1.23) можно рассматривать лагранжиан как явную функцию от $\boldsymbol{\rho}$, t , \mathbf{u} , $\boldsymbol{\theta}$ или в виде следующих композиций:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\omega(\boldsymbol{\rho}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \nabla_\omega \mathbf{u}, \nabla_\omega \boldsymbol{\theta}) &= \widetilde{\mathcal{L}}_\omega(\boldsymbol{\rho}, t, \mathbf{E}(\mathbf{u}), \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})) = \\ &= \widetilde{\mathcal{L}}_{\omega 0}(\boldsymbol{\rho}, t, \mathcal{K}^{-1} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \mathfrak{K}^{-1}, \mathcal{K}^{-1} \cdot \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathfrak{K}^{-1}). \end{aligned}$$

Явная форма через $\mathcal{L}_\omega(\dots)$ приводит к уравнениям поля и законам сохранения в наиболее простой форме, которая отражает характер модели первого порядка теории и структуру совокупности полей. Форма с набором $\widetilde{\mathcal{L}}_\omega(\dots)$, $\mathbf{E}(\dots)$, и $\mathbf{K}(\dots)$ приводит к уравнениям поля, результирующим напряжениям и граничным условиям, подобным тем, которые используются в обычной теории оболочек. Последняя форма, записанная в терминах $\widetilde{\mathcal{L}}_{\omega 0}(\dots)$, $\mathbf{E}(\dots)$, $\mathbf{K}(\dots)$, \mathfrak{K} , и \mathcal{K} позволяет использовать в лагранжиане выражение для упругой энергии, совпадающее со стандартным выражением, которое определяется при механическом испытании на однородное растяжение-сжатие. Именно $\widetilde{\mathcal{L}}_{\omega 0}(\dots)$ представляет собой исходную информацию о физико-механических свойствах материала, которая может быть получена в результате испытаний стандартных образцов. С другой стороны, $\mathcal{L}_\omega(\dots)$ представляет собой явную зависимость от кинематических функций для самонапряженного тела, неоднородность и анизотропия которого вызваны несовместными деформациями составляющих его элементарных объемов.

Предполагая, что лагранжиан зависит от координат и полей \mathbf{u} , $\boldsymbol{\theta}$, компоненты которых не зависят друг от друга, мы приходим к выражению для вариации действия в следующих эквивалентных формах:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{F} &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \left(\nabla_{\omega} \cdot \delta\mathcal{F}_{\omega 1} + \frac{d}{dt} \delta\mathcal{F}_{\omega 2} + \mathcal{E}_{\mathbf{u}} \cdot \overline{\delta\mathbf{u}} + \mathcal{E}_{\boldsymbol{\theta}} \cdot \overline{\delta\boldsymbol{\theta}} \right) d\omega dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\Gamma} \delta\mathcal{F}_{\omega 1} \cdot \mathbf{n} dS dt + \int_{\omega} \delta(\mathcal{F}_{\omega 2}(t_2) - \mathcal{F}_{\omega 2}(t_1)) dV + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} (\mathcal{E}_{\mathbf{u}} \cdot \overline{\delta\mathbf{u}} + \mathcal{E}_{\boldsymbol{\theta}} \cdot \overline{\delta\boldsymbol{\theta}}) d\omega dt.\end{aligned}$$

Здесь вариации частей тока Нетер $\mathcal{F}_{\omega 1}$, $\mathcal{F}_{\omega 2}$, операторы Эйлера – Лагранжа $\mathcal{E}_{\mathbf{u}}$, $\mathcal{E}_{\boldsymbol{\theta}}$, и тензор напряжений Эшелби $\boldsymbol{\mathfrak{S}}_{\omega}$ принимают следующие формы:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{F}_{\omega 1} &= \mathcal{L}_{\omega} \delta\mathbf{x} + \overline{\delta\mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}_{\omega}}{\partial \nabla_{\omega} \mathbf{u}} + \overline{\delta\boldsymbol{\theta}} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}_{\omega}}{\partial \nabla_{\omega} \boldsymbol{\theta}}, & \delta\mathcal{F}_{\omega 2} &= \mathcal{L}_{\omega} \delta t + \overline{\delta\mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}_{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} + \overline{\delta\boldsymbol{\theta}} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}_{\omega}}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}}, \\ \mathcal{E}_{\mathbf{u}} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{\omega}}{\partial \mathbf{u}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} - \nabla_{\omega} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\omega}}{\partial \nabla_{\omega} \mathbf{u}} \right)^{\text{T}}, & \mathcal{E}_{\boldsymbol{\theta}} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{\omega}}{\partial \boldsymbol{\theta}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_{\omega}}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} - \nabla_{\omega} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\omega}}{\partial \nabla_{\omega} \boldsymbol{\theta}} \right)^{\text{T}}, \\ \boldsymbol{\mathfrak{S}}_{\omega} &= \mathcal{L}_{\omega} \mathbf{I} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\omega}}{\partial \nabla_{\omega} \mathbf{u}} \right)^{\text{T}} \cdot \nabla_{\omega} \mathbf{u} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\omega}}{\partial \nabla_{\omega} \boldsymbol{\theta}} \right)^{\text{T}} \cdot \nabla_{\omega} \boldsymbol{\theta}.\end{aligned}$$

Как и выше, из частичных вариаций, в которых поля меняются, а координаты остаются фиксированными, следуют уравнения поля:

$$\mathcal{E}_{\mathbf{u}} = 0, \quad \mathcal{E}_{\boldsymbol{\theta}} = 0,$$

естественные краевые условия и начальные условия:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \Big|_{\Gamma_1} &= \mathbf{0}, & \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\omega}}{\partial \nabla_{\omega} \mathbf{u}} \right)^{\text{T}} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Gamma_2} &= \mathbf{0}, & \mathbf{u} \Big|_{t=t_1} &= \mathbf{0}, & \mathbf{u} \Big|_{t=t_2} &= \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\theta} \Big|_{\Gamma_1} &= \mathbf{0}, & \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\omega}}{\partial \nabla_{\omega} \boldsymbol{\theta}} \right)^{\text{T}} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Gamma_2} &= \mathbf{0}, & \boldsymbol{\theta} \Big|_{t=t_1} &= \mathbf{0}, & \boldsymbol{\theta} \Big|_{t=t_2} &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Уравнения поля могут быть приведены к более привычной форме, если функцию запасенной упругой энергии $\mathcal{W}(\dots)$ представить в виде явной зависимости от мер деформации (1.20), (1.21). В этом случае, принимая во внимание выражения для частных вариаций мер деформации:

$$\overline{\delta\mathbf{E}} = \mathbf{H}^{\text{T}} \cdot \nabla_{\omega} \overline{\delta\mathbf{u}} - (\mathbf{H} \times \overline{\delta\boldsymbol{\psi}})^{\text{T}} \cdot \nabla_{\omega} \mathbf{u}, \quad \overline{\delta\mathbf{K}} = \mathbf{H}^{\text{T}} \cdot \nabla_{\omega} \overline{\delta\boldsymbol{\psi}}$$

где для краткости обозначено:

$$\overline{\delta\boldsymbol{\psi}} = \frac{4}{4 + \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}} \left(\overline{\delta\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \overline{\delta\boldsymbol{\theta}} \right),$$

и, следующее отсюда, выражение для вариации плотности запасенной энергии

$$\begin{aligned}\overline{\delta\mathcal{W}} &= \frac{\partial\mathcal{W}}{\partial\mathbf{E}}:\overline{\delta\mathbf{E}} + \frac{\partial\mathcal{W}}{\partial\mathbf{K}}:\overline{\delta\mathbf{K}} \\ &= \frac{\partial\mathcal{W}}{\partial\mathbf{E}}:\left(\mathbf{H}^T\cdot\nabla_\omega\overline{\delta\mathbf{u}} - (\mathbf{H}\times\overline{\delta\psi})^T\cdot\nabla_\omega\mathbf{u}\right) + \frac{\partial\mathcal{W}}{\partial\mathbf{K}}:(\mathbf{H}^T\cdot\nabla_\omega\overline{\delta\psi}) \\ &= \left(\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial\mathbf{E}}\right):\nabla_\omega\overline{\delta\mathbf{u}} - \left(\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial\mathbf{E}}\cdot(\nabla_\omega\mathbf{u})^T\right)_\times\cdot\overline{\delta\psi} + \left(\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial\mathbf{K}}\right):\nabla_\omega\overline{\delta\psi},\end{aligned}$$

можно придти к уравнениям поля в хорошо знакомой форме:

$$\begin{aligned}\nabla_\omega\cdot\mathbf{P}_\omega - \dot{\mathcal{P}}_\omega + \mathbf{f}_\omega &= \mathbf{0}, \\ \nabla_\omega\cdot\mathbf{M}_\omega - (\mathbf{F}_\omega\cdot\mathbf{P}_\omega)_\times^T - \dot{\mathbf{Q}}_\omega + \mathbf{m}_\omega &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Здесь

$$\mathbf{P}_\omega = \mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial\mathbf{E}}, \quad \mathbf{M}_\omega = \mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial\mathbf{K}}, \quad \mathcal{P}_\omega = \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot{\mathbf{u}}}, \quad \mathbf{Q}_\omega = \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot{\boldsymbol{\theta}}}$$

– это условные силовые факторы, связанные с результирующими напряжениями и импульсами.

Иллюстрация, аналогичная показанной на Рисунке 1.1, но адаптированная к случаю континуума Коссера и двух полей имплантатов, представлена на Рисунке 1.3. Для краткости в ней пропущены этапы сборки промежуточной формы, но наряду с геометрическими изображениями формы показаны поля директоров, роль которых играют волокна (нормальные элементы) пластины. Образно говоря, для сборки набора геометрически несовместимых форм типа Коссера необходимо согласовать не только занимаемые ими геометрические области, но и ориентацию их волокон. Этот факт наглядно подчеркивает необходимость двух полей имплантатов.

1.5 Модели различных асимптотических порядков

Общие соотношения, приведенные выше, удобны для формулировки расчетных схем МКЭ, например, в среде COMSOL, однако при попытке построить аналитическое или численно-аналитическое решение, приводят к очень громоздким выражениям. Например, даже для наиболее простого потенциала Сен-Венана – Кирхгофа (1.8) выражения для уравнений равновесия (1.7) (без инерционных термов) и меры деформации принимают достаточно сложный вид [168]. В связи с этим возникает желание построить упрощенные аналоги общих уравнений,

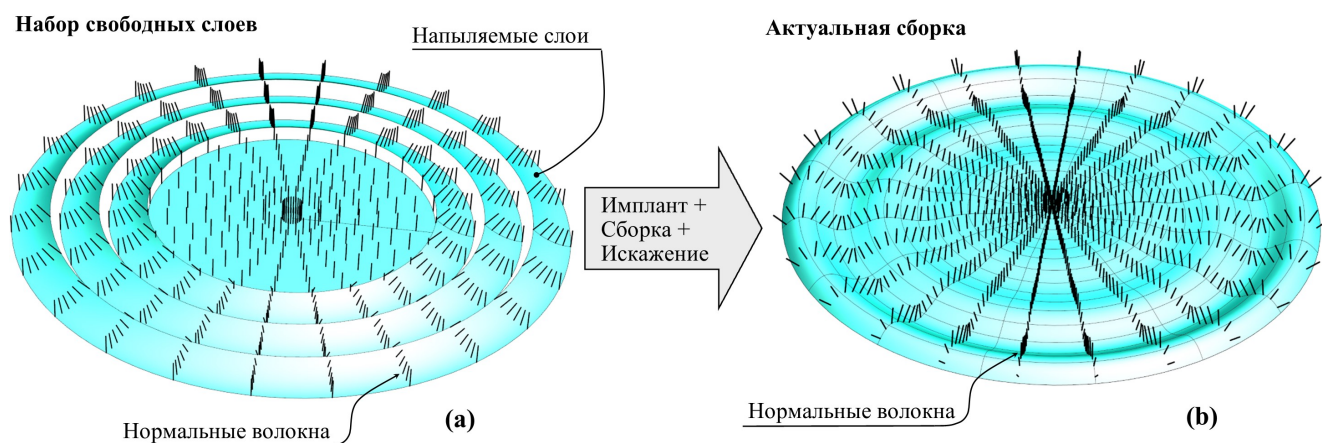


Рисунок 1.3 – Сборка форм типа Коссера: (а) Пластина с набором дополнительных слоев без напряжений; (б) Искривленная форма сборки.

Модель	Порядок ε	Порядок z	Пример модели
3D линейная упругость	1	∞	Малые деформации плит
3D гиперупругость	∞	∞	Конечные деформации плит
Кирхгофа	1*	1*	Малые деформации пластин
Кильчевского – Векуа	1	1*	Малые деформации пластин
Фешля – фон Кармана	2*	1*	Конечные деформации пластин
Грина – Ривлина – Адкинса	∞	0	Тонкие мембраны
Полная модель Коссера	∞	1	Ультратонкие мембраны

Таблица 1.2 – Иерархия моделей

удерживая в них не полные выражения, а частные разложения по двум малым параметрам. Общая схема такой иерархии моделей приведена в Таблице 1.2.

В этой таблице * означает использование не полных разложений, а только лишь части слагаемых, причем отбрасывание остальных осуществляется на основе эмпирических соображений (асимптотически непоследовательно). Для примера, приведем в Таблице 1.3 схему учета слагаемых различных асимптотических порядков для уравнений типа Фешля – фон Кармана [167].

Перемещение	Функция	Производная	Вторая производная
u	ε	ε^2	$o(\varepsilon^2)$
v	ε	ε^2	$o(\varepsilon^2)$
w	1	ε	ε^2

Таблица 1.3 – Асимптотические порядки модели Фешля – фон Карман

В результате, после удержания директивно назначенных слагаемых, можно прийти к уравнениям [167], вхождение импланта в которые аналогично (1.8),

но при этом они имеют иной вид, определяемый выбранной асимптотической моделью редукции. Покажем это на примере уравнений Феппля – фон Кармана, записанных в круговой области.

Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) , с началом совмещенным с центром пластины. Эти координаты выражаются через декартовы формулами перехода:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \varphi &= \operatorname{arctg}^*(y/x), & z &= z, \\ x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, \end{aligned}$$

где arctg^* – расширенная функция арктангенса [2]:

$$\operatorname{arctg}^*(y/x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x), & x \neq 0 \\ 0, & (x = 0) \wedge (y \neq 0) \end{cases} + \\ + \frac{\pi}{2} [1 - \operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} y (1 + \operatorname{sgn} x) (1 - \operatorname{sgn} y)].$$

Локальные базисы и дуальные к ним в этой системе выражаются через орты декартовой системы координат с помощью известных формул:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi, & \mathbf{e}_\varphi &= r (-\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi), & \mathbf{e}_z &= \mathbf{k}, \\ \mathbf{e}^r &= \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi, & \mathbf{e}^\varphi &= \frac{1}{r} (-\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi), & \mathbf{e}^z &= \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Через эти векторы трехмерное поле перемещений, принятое в модели Феппля – фон Кармана (модель Кирхгофа в Таблице 1.1), выражается следующим образом:

$$\mathbf{u} = \left(u - z \frac{\partial w}{\partial r} \right) \mathbf{e}^r + r \left(v - \frac{z}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}^\varphi + w \mathbf{e}^z,$$

где u, v, w – радиальные, окружные и осевые перемещения точек срединной плоскости пластины.

Действуя на это поле оператором градиента в цилиндрической системе координат:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}^r + \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}^\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}^z,$$

можно получить компоненты градиента поля перемещений:

$$[\nabla \mathbf{u}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} - z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} & \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) & -\frac{\partial w}{\partial r} \\ r \left[\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{z}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right] & r \left[u + \frac{\partial v}{\partial \varphi} - z \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right] & -\frac{\partial w}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial \varphi} & 0 \end{pmatrix},$$

а через них, в свою очередь, выразить компоненты тензора Грина – Сен-Венана:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{u}), \\
E_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} - z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial r} - z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right)^2 + \left[\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{z}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right]^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right\}, \\
E_{\varphi\varphi} &= r \left[u + \frac{\partial v}{\partial \varphi} - z \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right] + \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right]^2 + \right. \\
&\quad \left. + \left[u + \frac{\partial v}{\partial \varphi} - z \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right]^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 \right\}, \\
E_{r\varphi} = E_{\varphi r} &= \frac{r}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \times \\
&\quad \times \left[\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{z}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right] \times \\
&\quad \times \left[u + \frac{\partial v}{\partial \varphi} - z \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \\
E_{rz} = E_{zr} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{2r} \left[\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{z}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right] \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \\
E_{\varphi z} = E_{z\varphi} &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right] \frac{\partial w}{\partial r} - \\
&\quad - \frac{1}{2r} \left[u + \frac{\partial v}{\partial \varphi} - z \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right] \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \\
E_{zz} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Для вывода уравнений Фешля – фон Кармана здесь необходимо отбросить слагаемые, у которых асимптотический порядок по толщинному параметру вы-

ше первого или по деформационному параметру выше второго (по Таблице 1.3):

$$\begin{aligned}
E_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} - z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2, \\
E_{\varphi\varphi} &= r \left[u + \frac{\partial v}{\partial \varphi} - z \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2, \\
E_{r\varphi} = E_{\varphi r} &= \frac{r}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \\
E_{rz} = E_{zr} &= \frac{z}{2r^3} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2, \\
E_{\varphi z} = E_{z\varphi} &= \frac{v}{2} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{u}{2r} \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \\
E_{zz} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 \right].
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Нужно отметить, что согласно кинематической гипотезе Кирхгофа, угол между нормальными волокнами и поверхностью пластины должен сохраняться при изгибе, однако нетрудно показать, что при произвольных u , v , w это условие будет выполнено только если компоненты E_{rz} , $E_{\varphi z}$ будут тождественно равны нулю. Поэтому в модели Кармана эти компоненты директивно принимают равными нулю, а соответствующие компоненты тензора напряжений определяют не из закона состояния, а из уравнений равновесия. Кроме того, компоненту тензора напряжений, ассоциированную с нормальными напряжениями в площадках перпендикулярных нормалям, также полагают равной нулю. В общем случае этого можно добиться, подвергнув нормальные волокна дополнительной продольной деформации $q(r, \varphi, z)$, которую следует определять из закона состояния. Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{E}] &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 & \frac{r}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) & 0 \\ \frac{r}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) & r \left(u + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} - \\
&\quad - z \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} & 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} & r \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Замечание 1.1. Этот вывод можно проделать, рассматривая принятые допущения как строгие математические гипотезы. Для этого нужно опираться

ся на соотношения для трехмерного трансверсально-изотропного материала с наложенными связями [103].

Теперь можно перейти к полному тензору Грина – Сен-Венана (1.9). Для этого необходимо задать явное выражения импланта \mathfrak{K} . В общем случае, его следует получать из решения соответствующей эволюционной задачи, однако для теоретических построений можно задать его произвольно. В настоящей работе будем считать, что имплант представлен шаровым тензором:

$$\mathfrak{K} = \sqrt{\theta} \mathbf{I}, \quad (1.25)$$

где функция θ выбрана так, чтобы имплант линейно изменялся вдоль толщинной координаты:

$$\theta = \left(\sqrt{\mathbf{a}} + \frac{\mathbf{b}}{2\sqrt{\mathbf{a}}} z \right)^2 = \mathbf{a} + \mathbf{b}z + \frac{\mathbf{b}^2}{4\mathbf{a}} z^2 \approx \mathbf{a} + \mathbf{b}z.$$

Здесь \mathbf{a} – строго положительная константа, отвечающая за равномерную усадку всей пластины, а \mathbf{b} – произвольная постоянная, ассоциированная с изгибом самонапряженной формы. На практике \mathbf{a} изменяется в окрестности единицы ($\mathbf{a} > 1$ – растяжение, $\mathbf{a} < 1$ – сжатие), а \mathbf{b} – в окрестности нуля.

В этом случае полный тензор Грина – Сен-Венана выражается через \mathbf{E} следующим образом:

$$\mathbf{E}_{\text{tot}} = \theta \mathbf{E} + \frac{\theta - 1}{2} \mathbf{I}.$$

Подставляя это выражение в (1.10):

$$\mathbf{S} = \theta (\lambda \mathbf{I} (\mathbf{I} : \mathbf{E}) + 2\mu \mathbf{E}) + \frac{\theta - 1}{2} \mathbf{I} (3\lambda + 2\mu),$$

нетрудно видеть, что, в случае когда имплант имеет вид (1.25), тензор напряжений состоит из двух слагаемых, первое из которых пропорционально тензору напряжений для бездефектной среды, а второе является шаровым тензором.

Прежде чем переходить к компонентам напряжений необходимо определить неизвестную функцию q . Ее можно отыскать если приравнять выражение для компоненты S_{zz} к нулю:

$$S_{zz} = \theta \left[\lambda \left(E_{rr} + \frac{E_{\varphi\varphi}}{r^2} + q \right) + 2\mu q \right] + \frac{\theta - 1}{2} (3\lambda + 2\mu) = 0,$$

$$q = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(E_{rr} + \frac{E_{\varphi\varphi}}{r^2} \right) - \frac{\theta - 1}{2\theta} \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

Теперь можно выразить ненулевые диагональные компоненты:

$$S_{rr} = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \theta \left[2(\lambda + \mu) E_{rr} + \lambda \frac{E_{\varphi\varphi}}{r^2} \right] + \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} (\theta - 1),$$

$$S_{\varphi\varphi} = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \theta \left[2(\lambda + \mu) E_{\varphi\varphi} + \lambda r^2 E_{rr} \right] + r^2 \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} (\theta - 1).$$

Из недиагональных компонент в этой модели из закона состояния определяются лишь две:

$$S_{r\varphi} = S_{\varphi r} = 2\theta\mu E_{r\varphi}.$$

Если перейти от модулей Ламе к модулю Юнга и коэффициенту Пуассона:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)},$$

то можно получить более привычные выражения для выписанных компонент:

$$S_{rr} = \frac{\theta E}{1 - \nu^2} \left(E_{rr} + \nu \frac{E_{\varphi\varphi}}{r^2} \right) + \frac{E}{2(1 - \nu)} (\theta - 1),$$

$$S_{\varphi\varphi} = \frac{\theta E}{1 - \nu^2} (E_{\varphi\varphi} + \nu r^2 E_{rr}) + \frac{Er^2}{2(1 - \nu)} (\theta - 1),$$

$$S_{r\varphi} = S_{\varphi r} = \frac{\theta E}{1 + \nu} E_{r\varphi}.$$

Эти компоненты можно использовать чтобы перейти к компонентам первого тензора напряжений Пиола, который используется для формулировки уравнений равновесия (1.7). Связь между этими тензорами задается формулой:

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S},$$

причем при выводе уравнений Фешля – фон Кармана, здесь используют не полный тензор \mathbf{F} , а его редуцированный вариант:

$$[\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\partial w}{\partial r} \\ 0 & r^2 & -\frac{\partial w}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial \varphi} & 1 \end{pmatrix}.$$

Это объясняется тем, что в этой модели полагают, что изменение геометрии пластины в ходе ее деформации связано лишь с поворотами нормалей, в то время как поворотом в касательной плоскости и удлинениями можно пренебречь. В этом случае ненулевые компоненты первого тензора Пиола выражаются по

формулам:

$$\begin{aligned}
P_{rr} &= S_{rr} - S_{zr} \frac{\partial w}{\partial r}, & P_{\varphi\varphi} &= S_{\varphi\varphi} - S_{z\varphi} \frac{\partial w}{\partial \varphi}, & P_{zz} &= S_{rz} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{S_{\varphi z} \partial w}{r^2 \partial \varphi}, \\
P_{r\varphi} &= S_{r\varphi} - S_{z\varphi} \frac{\partial w}{\partial r}, & P_{\varphi r} &= S_{\varphi r} - S_{zr} \frac{\partial w}{\partial \varphi}, & P_{zr} &= S_{zr} + S_{rr} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{S_{\varphi r} \partial w}{r^2 \partial \varphi}, \\
P_{rz} &= S_{rz}, & P_{\varphi z} &= S_{\varphi z}, & P_{z\varphi} &= S_{z\varphi} + \frac{S_{\varphi\varphi} \partial w}{r^2 \partial \varphi} + S_{r\varphi} \frac{\partial w}{\partial r}.
\end{aligned}$$

Теперь для того чтобы получить уравнения Фешля – фон Кармана нужно лишь рассмотреть уравнение равновесия (1.7) (полагаем, что объемные силы отсутствуют):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial S_{rr}}{\partial r} + \frac{S_{rr}}{r} - \frac{S_{\varphi\varphi}}{r^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial S_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} - \left(\frac{\partial S_{zr}}{\partial r} + \frac{S_{zr}}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial S_{z\varphi}}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial w}{\partial r} + \\
&\quad + \frac{S_{z\varphi} \partial w}{r^3 \partial \varphi} - S_{zr} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{S_{z\varphi}}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} = 0, \\
&\frac{\partial S_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{S_{r\varphi}}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial S_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial S_{\varphi z}}{\partial z} - \left(\frac{\partial S_{zr}}{\partial r} + \frac{S_{zr}}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial S_{z\varphi}}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \\
&\quad - \frac{S_{z\varphi} \partial w}{r \partial r} - \frac{S_{z\varphi}}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - S_{zr} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} = 0, \\
&\frac{\partial S_{zr}}{\partial r} + \frac{S_{zr}}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial S_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \left(\frac{\partial S_{rr}}{\partial r} + \frac{S_{rr}}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial S_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} \right) \frac{\partial w}{\partial r} + S_{rr} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \\
&\quad + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S_{\varphi r}}{\partial r} - \frac{S_{\varphi r}}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial S_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial S_{\varphi z}}{\partial z} \right) \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{S_{\varphi\varphi}}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{2S_{r\varphi}}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} = 0.
\end{aligned}$$

Здесь необходимо совершить еще одну асимптотически непоследовательную редукцию, положив малыми произведения касательных напряжений, ассоциированных с толщиной координатой, и первых производных функции w :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial S_{rr}}{\partial r} + \frac{S_{rr}}{r} - \frac{S_{\varphi\varphi}}{r^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial S_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} = 0, \\
&\frac{\partial S_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{S_{r\varphi}}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial S_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial S_{\varphi z}}{\partial z} = 0, \\
&\frac{\partial S_{zr}}{\partial r} + \frac{S_{zr}}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial S_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \left(\frac{\partial S_{rr}}{\partial r} + \frac{S_{rr}}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial S_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial w}{\partial r} + S_{rr} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \\
&\quad + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S_{\varphi r}}{\partial r} - \frac{S_{\varphi r}}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial S_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{S_{\varphi\varphi}}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{2S_{r\varphi}}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} = 0.
\end{aligned}$$

Теперь необходимо провести осреднение по толщине, в этом случае краевые условия на лицевых поверхностях будут выполнены лишь приближенно, а по-

верхностные внешние силы перейдут из краевых условий в правую часть уравнений равновесия¹⁰:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{T_{rr}}{r} - \frac{T_{\varphi\varphi}}{r^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \varphi} + S_{rz} \Big|_{-h/2}^{h/2} + p_r &= 0, \\
\frac{\partial M_{rr}}{\partial r} + \frac{M_{rr}}{r} - \frac{M_{\varphi\varphi}}{r^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi} + z S_{rz} \Big|_{-h/2}^{h/2} - Q_{rz} + \mathbf{m}_r &= 0, \\
\frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{T_{r\varphi}}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + S_{\varphi z} \Big|_{-h/2}^{h/2} + p_\varphi &= 0, \\
\frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{M_{r\varphi}}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial M_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + z S_{\varphi z} \Big|_{-h/2}^{h/2} - Q_{\varphi z} + \mathbf{m}_\varphi &= 0, \\
\frac{\partial Q_{zr}}{\partial r} + \frac{Q_{zr}}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial Q_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \\
+ \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{T_{rr}}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial w}{\partial r} + T_{rr} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial r} - \frac{T_{r\varphi}}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \\
+ \frac{T_{\varphi\varphi}}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{2T_{r\varphi}}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} + p_z &= 0.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Здесь $p_r, p_\varphi, p_z, \mathbf{m}_r, \mathbf{m}_\varphi$ – компоненты результирующих полей внешних сил и моментов, $T_{rr}, T_{\varphi\varphi}, T_{r\varphi}$ – усилия в плоскости редукции пластины, $M_{rr}, M_{\varphi\varphi}, M_{r\varphi}$ – моменты и $Q_{zr}, Q_{z\varphi}$ – перерезывающие силы. Выражения, связывающие усилия и моменты с перемещениями, удобно записывать через аналогичные выражения для случая бездефектной среды (с модифицированными коэффициентами), которые в рамках этого раздела будем пометать волной:

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{rr} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \nu \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 \right) \right], \\
\tilde{T}_{\varphi\varphi} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ru + r \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 + \nu r^2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right) \right], \\
\tilde{T}_{r\varphi} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right], \\
\tilde{M}_{rr} &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right], \\
\tilde{M}_{\varphi\varphi} &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \nu r^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right), \\
\tilde{M}_{r\varphi} &= -\frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right).
\end{aligned} \tag{1.27}$$

¹⁰В общем случае должно быть еще одно уравнение, отвечающее балансу сверлящих моментов, однако в теории Кармана его обычно опускают

В этих обозначениях имеем:

$$\begin{aligned}
T_{rr} &= \mathbf{a}h\tilde{T}_{rr} + \frac{\mathbf{b}h^3}{12}\tilde{M}_{rr} + \frac{Eh(\mathbf{a}-1)}{2(1-\nu)}, & T_{\varphi\varphi} &= \mathbf{a}h\tilde{T}_{\varphi\varphi} + \frac{\mathbf{b}h^3}{12}\tilde{M}_{\varphi\varphi} + \frac{Ehr^2(\mathbf{a}-1)}{2(1-\nu)}, \\
M_{rr} &= \frac{h^3}{12}\left[\mathbf{b}\tilde{T}_{rr} + \mathbf{a}\tilde{M}_{rr} + \frac{E\mathbf{b}}{2(1-\nu)}\right], & M_{\varphi\varphi} &= \frac{h^3}{12}\left[\mathbf{b}\tilde{T}_{\varphi\varphi} + \mathbf{a}\tilde{M}_{\varphi\varphi} + \frac{Er^2\mathbf{b}}{2(1-\nu)}\right], \\
T_{r\varphi} &= \mathbf{a}h\tilde{T}_{r\varphi} + \frac{\mathbf{b}h^3}{12}\tilde{M}_{r\varphi}, & M_{r\varphi} &= \frac{h^3}{12}\left(\mathbf{b}\tilde{T}_{r\varphi} + \mathbf{a}\tilde{M}_{r\varphi}\right),
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Вернемся к уравнениям равновесия (1.26). Помимо усилий и моментов они также содержат перерезывающие силы, которые нельзя выразить через перемещения из закона состояния. Их можно отыскать из уравнений до осреднения, однако для вывода уравнений этого делать не требуется, так как перерезывающие силы можно исключить из системы уравнений равновесия. Тогда, если предположить, что лицевые поверхности пластины свободны, приведенный момент внешних сил равен нулю и приведенная сила направлена вдоль оси пластины, получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{T_{rr}}{r} - \frac{T_{\varphi\varphi}}{r^3} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial\varphi} &= 0, & \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{T_{r\varphi}}{r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} &= 0, \\
\frac{\partial^2 M_{rr}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial M_{rr}}{\partial r} - \frac{1}{r^3}\frac{\partial M_{\varphi\varphi}}{\partial r} + \frac{2M_{\varphi\varphi}}{r^4} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^2 M_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2 M_{r\varphi}}{\partial r\partial\varphi} + \\
+ T_{rr}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{T_{\varphi\varphi}}{r^3}\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right) - \frac{2T_{r\varphi}}{r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\varphi}\right) + p_z &= 0,
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Первые два уравнения могут быть выполнены тождественно если ввести функцию напряжений Эри, ψ :

$$T_{rr} = \mathbf{a}h\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right), \quad T_{\varphi\varphi} = \mathbf{a}hr^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}, \quad T_{r\varphi} = \mathbf{a}h\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} - \frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\varphi}\right).$$

Однако при этой замене три независимые функции сводятся к одной, следовательно нужно дополнить систему соответствующим уравнением совместности, выполнение которого гарантирует существование функции Эри. Это уравнение можно получить, выразив u и v из выражений для усилий:

$$\nabla^2\nabla^2\psi + \frac{E}{2}L(w, w) = 0.$$

Здесь $\nabla^2\nabla^2$ – бигармонический оператор:

$$\nabla^2\nabla^2 f = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right), \tag{1.30}$$

а L – оператор типа Монжа – Ампера:

$$L(f_1, f_2) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\partial^2 f_2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \varphi^2} \right) - \quad (1.31)$$

$$- 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \right).$$

Хотя полученное уравнение по форме совпадает с одним из уравнений Фепля – фон Кармана, по своему содержанию оно отличается, так оно записано через функцию ψ , в то время как классические уравнения записываются через функцию ϕ такую, что:

$$\tilde{T}_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}, \quad \tilde{T}_{\varphi\varphi} = r^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}, \quad \tilde{T}_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \varphi}. \quad (1.32)$$

Переходя к ϕ , несложно получить:

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi + \frac{E}{2} L(w, w) - \frac{\mathbf{b} E h^2}{12 \mathbf{a} (1 - \nu)} \nabla^2 \nabla^2 w = 0. \quad (1.33)$$

Осталось лишь проделать аналогичные преобразования для третьего уравнения (1.29):

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - h L(\phi, w) + \frac{\mathbf{b} D}{\mathbf{a}} \left[(\nabla^2 w)^2 - (1 - \nu) L(w, w) \right] - \quad (1.34)$$

$$- \frac{E h (\mathbf{a} - 1)}{2 \mathbf{a} (1 - \nu)} \nabla^2 w = \frac{p_z}{\mathbf{a}}.$$

Как видно, левые части полученных уравнений представляют собой комбинации оператора Лапласа:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}, \quad (1.35)$$

и операторов (1.30), (1.31), действующих на функции w и ϕ . Соответственно, чтобы представить эти уравнения в декартовой системе координат нужно лишь преобразовать выражения операторов (1.30) – (1.35):

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \nabla^2 \nabla^2 f = \nabla^2 (\nabla^2 f)$$

$$L(f_1, f_2) = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y}.$$

Полученные уравнения оказываются весьма полезными для практических расчетов. Их решения будут подробно рассмотрены в следующей главе.

1.6 Анализ областей применимости моделей различных асимптотических порядков

Приведенные в предыдущих разделах соотношения могут приводить к моделям разных порядков по толщинному и деформационному параметром. Для того чтобы понять какие порядки требуются для каждого конкретного случая целесообразно исследовать поведение разных моделей на примере одной модельной задачи. В качестве такой задачи рассмотрим осесимметричное деформирование кругового диска толщиной h и радиуса R , выполненного из упругого материала, боковая поверхность которого жестко закреплена, а его основания свободны от напряжений (Рисунок 1.4). Такие краевые условия удобны потому, что они могут быть достаточно просто формализованы как для трехмерного, так и для двумерного случаев.

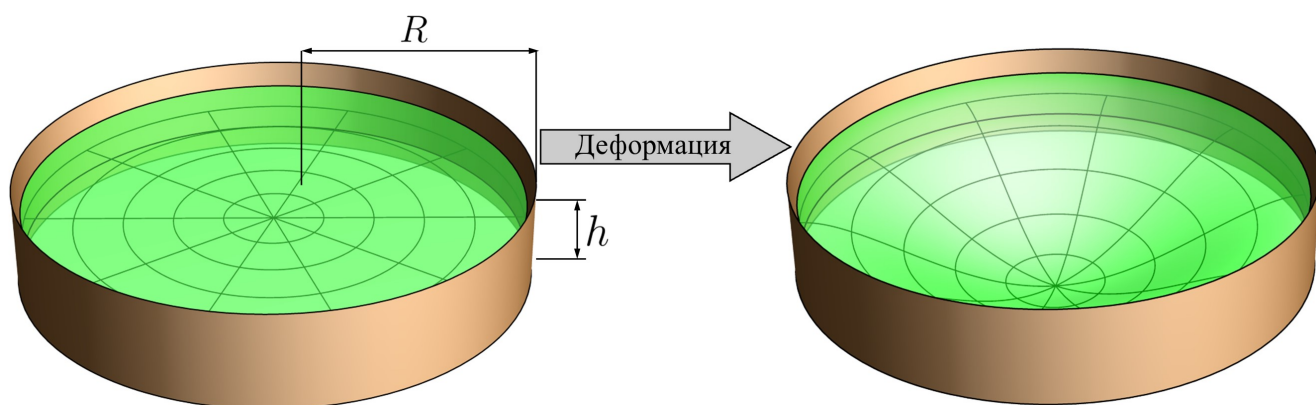


Рисунок 1.4 – Расчетная схема пластины

Нагружение реализуется полем внешних объемных сил, однородным всюду, за исключением узкой кольцевой области в окрестности закрепления. В этой области, ширина которой может быть выбрана достаточно малой, объемная нагрузка направлена в противоположную сторону, а ее интенсивность такова, что весь диск в целом оказывается самоуравновешенным:

$$\mathbf{p} = p\mathbf{e}_z = p_0 \left[1 - \frac{R^2}{R^2 - \delta^2} \theta(r - \delta) \right] \mathbf{e}_z, \quad \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R \mathbf{p} r dr d\varphi dz = \mathbf{0}. \quad (1.36)$$

Здесь p_0 – постоянная объемная плотность внешнего силового поля, δ – граница кольцевой области, θ – функция Хевисайда.

Перед тем как перейти к рассмотрению самих уравнений отметим, что в на-

стоящем разделе используются безразмерные переменные:

$$\begin{aligned}\tilde{h} &= h/R, & \tilde{r} &= r/R, & \tilde{z} &= z/R, & \tilde{U} &= U/R, & \tilde{W} &= W/R, \\ \tilde{u} &= u/R, & \tilde{w} &= w/R, & \tilde{p} &= pR/\mu, & \tilde{D} &= D/(\mu R^3).\end{aligned}$$

Кроме того упругий потенциал и все компоненты тензора напряжений также отнесены к μ . В дальнейшем, для удобства, будем опускать символ волны над безразмерными переменными.

Решение в трехмерной постановке. Сперва предположим, что толщина цилиндра соизмерима с его радиусом а его перемещения малы. Такие предположения приводят к классической задаче линейной теории упругости о коротком цилиндре. Основная сложность в решении таких задач заключается в удовлетворении краевым условиям, форма которых диктуется не изначальной постановкой задачи, а возможностью разделить переменные. В известных решениях Похгаммера и Кри [212, 213] используются краевые условия специального вида, соответствующие гладко-жесткому контакту на основаниях цилиндра, что не позволяет применить их непосредственно к рассматриваемой задаче. Однако их модификация, предложенная Файлоном [214] и развитая Сайто [215], позволяет несколько иначе разделить краевые задачи на две двухточечные задачи, перенеся обременительные гладко-жесткие условия на боковую поверхность и предоставив свободу выбора условий на основаниях. При этом условия на боковой поверхности цилиндра как нельзя лучше соответствуют жесткому закреплению в терминах теории пластин, а возможная неточность его реализации играет исчезающе малую роль при уменьшении относительной толщины в силу принципа Сен-Венана.

Итак, рассмотрим задачу о малых деформациях конечного цилиндра под действием осесимметричного объемного поля сил:

$$\begin{aligned}\nabla^2 U - \frac{U}{r^2} + k \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} \right) &= 0, \\ \nabla^2 W + k \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) &= -p.\end{aligned}\tag{1.37}$$

Здесь k – это безразмерная переменная, выражающаяся через параметры Ламе:

$$k = \frac{\mu + \lambda}{\mu},$$

а U и W – это трехмерные функции радиальных и осевых перемещений точек цилиндра, значения которых, в силу осевой симметрии не меняются в окружном направлении. Будем считать, что основания цилиндра свободны от всех напряжений, а его боковая поверхность закреплена в радиальном направлении, но может свободно перемещаться в осевом:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}|_{z=0,h} &= (k+1) \frac{\partial W}{\partial z} + (k-1) \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} \right) \Big|_{z=0,h} = 0, & (1.38) \\ \sigma_{rz}|_{z=0,h} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r} \Big|_{z=0,h} = 0, & \sigma_{rz}|_{r=1} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0, & U|_{r=1} = 0. \end{aligned}$$

Выписанные дифференциальные уравнения и краевые условия в совокупности определяют дифференциальный оператор, который оказывается вырожденным, т. е. обладает нулевым собственным значением, соответствующая собственная функция которого характеризует движение цилиндра как жесткого целого вдоль его оси. Однако если правая часть (1.37) не проецируется на это собственное подпространство, то решение задачи существует. Самоуравновешенное силовое поле (1.36) удовлетворяет этому условию.

Для построения решения краевой задачи вначале заметим, что однородные уравнения, соответствующие левой части системы (1.37), допускают разделение переменных. Для того чтобы его осуществить нужно представить искомые функции в виде

$$U = f_1(r) g_1(z), \quad W = f_2(r) g_2(z),$$

при соблюдении условий¹¹

$$f_2' = -\alpha f_1, \quad f_1' + \frac{f_1}{r} = \alpha f_2, \quad (1.39)$$

где α – некоторая константа. Тогда система уравнений (1.37) может быть приведена к виду:

$$\begin{aligned} - \left(f_1'' + \frac{f_1'}{r} - \frac{f_1}{r^2} \right) \frac{1}{f_1} &= \frac{g_1''}{g_1} \frac{1}{k+1} - \frac{\alpha k}{k+1} \frac{g_2'}{g_1} = \lambda_1, & (1.40) \\ - \left(f_2'' + \frac{f_2'}{r} \right) \frac{1}{f_2} &= \frac{g_2''}{g_2} (k+1) + \alpha k \frac{g_1'}{g_2} = \lambda_2, \end{aligned}$$

в котором λ_1, λ_2 обозначают константы разделения. В действительности эти константы оказываются равными, поскольку из шести уравнений (1.39), (1.40)

¹¹Здесь и далее в тех случаях когда это не приводит к неоднозначности, производные функций одной переменной обозначены штрихом.

только четыре являются независимыми, и если из системы (1.39) поочередно исключать f_1 , f_2 , тогда получим два уравнения, подобных (1.40):

$$f_1'' + \frac{f_1'}{r} - \frac{f_1}{r^2} = -\alpha^2 f_1, \quad f_2'' + \frac{f_2'}{r} = -\alpha^2 f_2.$$

Следовательно $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha^2$. Таким образом, имеем четыре независимых дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} r^2 f_1'' + r f_1' + (\alpha^2 r^2 - 1) f_1 &= 0, & r^2 f_2'' + r f_2' + \alpha^2 r^2 f_2 &= 0, \\ g_1'' - \alpha^2 (k+1) g_1 - \alpha k g_1' &= 0, & (k+1) g_2'' - \alpha^2 g_2 + \alpha k g_2' &= 0, \end{aligned} \quad (1.41)$$

которым отвечают разделяющиеся краевые условия:

$$\begin{aligned} (k+1) \frac{g_2'}{g_1} + \frac{(k-1)}{f_2} \left(f_1' + \frac{f_1}{r} \right) \Big|_{z=0,h} &= 0, & \frac{g_1'}{g_2} + \frac{f_2'}{f_1} \Big|_{z=0,h} &= 0, \\ f_1|_{r=1} &= 0, & f_2|_{r=1} &= 0, \end{aligned}$$

или, с учетом условий (1.39):

$$\begin{aligned} (k+1) g_2' + \alpha (k-1) g_1|_{z=0,h} &= 0, & g_1' - \alpha g_2|_{z=0,h} &= 0, \\ f_1|_{r=1} &= 0, & f_2|_{r=1} &= 0. \end{aligned}$$

Заметим, что первые два уравнения (1.41) являются уравнениями Бесселя первого и нулевого порядка. Их общие решения могут быть представлены линейными комбинациями функций Бесселя первого и второго рода:

$$f_1 = C_1 J_1(\alpha r) + C_2 Y_1(\alpha r), \quad f_2 = C_3 J_0(\alpha r) + C_4 Y_0(\alpha r), \quad (1.42)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 - неизвестные константы. Из условия регулярности решения в полюсе константы C_2, C_4 следует положить равными нулю. Константы C_1, C_3 равны друг другу в силу (1.39) и для краткости могут быть приняты равными единице, так как при разделении переменных отделенные функции определяются с точностью до множителя.

Поскольку параметр α может принимать любое ненулевое вещественное значение (случай нулевого α будет рассмотрен отдельно), соотношения (1.42) задают континуальное множество решений, элементы которого в общем случае не удовлетворяют краевым условиям, заданным на боковой поверхности диска. Вместе с тем, если ограничить произвол в выборе параметра α только корнями трансцендентного уравнения:

$$J_1(\alpha) = 0, \quad (1.43)$$

то удастся получить счетное семейство решений удовлетворяющих краевым условиям:

$$f_{1n} = J_1(\alpha_n r), \quad f_{2n} = J_0(\alpha_n r), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.44)$$

Корни трансцендентного уравнения (1.43) – нули функции Бесселя первого порядка, достаточно хорошее асимптотическое приближение которых дается формулой:

$$\alpha_n \approx \frac{(\pi + 4n\pi)^2 J_2((1/4 + n)\pi)}{16J_1((1/4 + n)\pi) - 4(\pi + 4n\pi)J_0((1/4 + n)\pi)}.$$

Отдельно рассмотрим случай $\alpha = 0$ (решение для этого случая будем помечать нулевым индексом):

$$r^2 f''_{10} + r f'_{10} - f_{10} = 0, \quad r^2 f''_{20} + r f'_{20} = 0.$$

В этом случае система уравнений существенно упрощается и может быть непосредственно проинтегрирована:

$$f_{10} = \frac{C_5 r}{2} + \frac{C_6}{r}, \quad f_{20} = C_7 + C_8 \ln r.$$

В рамках рассуждений, аналогичных предыдущему случаю, могут быть определены все константы интегрирования:

$$f_{10} = 0, \quad f_{20} = 1. \quad (1.45)$$

Учитывая (1.44) и (1.45), вектор-функцию $\{f_1, f_2\}$ можно представить в виде разложения по системе функций $\{(0, 1), (J_1(\alpha_n r), J_0(\alpha_n r))\}$, и, поскольку оператор, порождаемый уравнениями (1.37) и краевыми условиями (1.38), самосопряженный, то эта система функций составляет базис в гильбертовом пространстве двухкомпонентных вектор-функций, заданных над интервалом $(0, 1)$. Соответственно, будем искать решение исходной неоднородной системы (1.37) в виде разложений:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} g_{1n} J_1(\alpha_n r), \quad W = g_{20} + \sum_{n=1}^{\infty} g_{2n} J_0(\alpha_n r). \quad (1.46)$$

Подстановка этих разложений в уравнения (1.37):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} [g''_{1n} - \alpha^2(k+1)g_{1n} - \alpha k g'_{2n}] J_1(\alpha_n r) &= 0, \\ (k+1)g''_{20} + \sum_{n=1}^{\infty} [(k+1)g''_{2n} - \alpha^2 g_{2n} + \alpha k g'_{1n}] J_0(\alpha_n r) &= -p, \end{aligned}$$

и краевые условия (1.38):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (g'_{1n} - \alpha g_{2n}) J_1(\alpha_n r) \Big|_{z=0, h} &= 0, \\ (k+1) g'_{20} + \sum_{n=1}^{\infty} [(k+1) g'_{2n} + \alpha(k-1) g_{1n}] J_0(\alpha_n r) \Big|_{z=0, h} &= 0. \end{aligned}$$

приводит к уравнениям относительно коэффициентов разложений, которые сами являются функциями переменной z . Для нахождения этих функций подействуем на каждое уравнение системы операторами проецирования:

$$\mathcal{P}_0(\mathbf{f}) = \int_0^1 \mathbf{f} \cdot (0, 1) r dr, \quad \mathcal{P}_n(\mathbf{f}) = \int_0^1 \mathbf{f} \cdot (J_1(\alpha_n r), J_0(\alpha_n r)) r dr.$$

В результате получим счетное множество систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$g''_{1n} - \alpha^2(k+1)g_{1n} - \alpha k g'_{2n} = 0, \quad (k+1)g''_{2n} - \alpha^2 g_{2n} + \alpha k g'_{1n} = -b_n, \quad (1.47)$$

и одно уравнение для g_{20} :

$$(k+1)g''_{20} = -b_0, \quad (1.48)$$

где b_0, b_n – проекции правой части на собственные подпространства, вычисляемые по формулам:

$$b_0 = 2 \int_0^1 p r dr = 0, \quad b_n = \frac{2}{J_0(\alpha_n)^2} \int_0^1 p r J_0(\alpha_n r) dr = \frac{2p_0 \delta J_1(\alpha_n \delta)}{\alpha_n (1 - \delta^2) J_0(\alpha_n)^2}.$$

Аналогично спроецируем на собственные подпространства краевые условия:

$$g'_{1n} - \alpha g_{2n} \Big|_{z=0, h} = 0, \quad (k+1)g'_{2n} + \alpha(k-1)g_{1n} \Big|_{z=0, h} = 0, \quad (1.49)$$

$$(k+1)g'_{20} \Big|_{z=0, h} = 0. \quad (1.50)$$

Заметим, что сходимость (в среднеквадратичном) разложений к правым частям уравнений (1.37) обеспечивается самосопряженностью задачи Штурма – Лиувилля, порождаемой первыми двумя уравнениями (1.41), однородными краевыми условиями при $r = 1$ и тем фактом, что каждое собственное значение этой задачи двукратное.

Рассмотрим решение полученных уравнений относительно функций, зависящих от переменной z . Уравнение для случая $\alpha = 0$ (1.48) может быть сразу проинтегрировано:

$$g_{20} = C_9 + C_{10}z - \frac{b_0 z^2}{2(k+1)}.$$

Из этого соотношения следует, что краевое условие (1.50) для g_{20} не может быть удовлетворено, если b_0 отлично от нуля или, что то же самое, если объемные силы не самоуравновешены. Если же это условие выполнено, то g_{20} равняется произвольной константе, неопределяемой из краевых условий. Эта константа характеризует смещение цилиндра как жесткого целого вдоль его оси. После построения полного решения исходной неоднородной системы мы сможем выбрать эту константу так, чтобы прогиб в какой-нибудь наперед заданной точке, например, на контуре, был равен нулю.

Осталось только построить решения для систем (1.47). Общее решение для каждой системы может быть построено как сумма общего решения однородной системы:

$$\begin{aligned} g_{1n}^0 &= C_{1n}e^{\alpha z} + C_{2n}e^{-\alpha z} - C_{3n}e^{\alpha z}(k + k\alpha z) - C_{4n}e^{-\alpha z}(k - k\alpha z), \\ g_{2n}^0 &= -C_{1n}e^{\alpha z} + C_{2n}e^{-\alpha z} - C_{3n}e^{\alpha z}(2 - k\alpha z) + C_{4n}e^{-\alpha z}(2 + k\alpha z), \end{aligned} \quad (1.51)$$

и частного решения неоднородной системы, определяемого методом Лагранжа:

$$\begin{aligned} g_{1n}^* &= \frac{-b_n}{2(k+1)} \int_0^z [k(z-\zeta) \operatorname{sh} \alpha_n(z-\zeta)] d\zeta = -b_n \frac{k(\alpha_n z \operatorname{ch} \alpha_n z - \operatorname{sh} \alpha_n z)}{2(k+1)\alpha_n^2}, \\ g_{2n}^* &= \frac{-b_n}{2\alpha_n(k+1)} \int_0^z [(k+2) \operatorname{sh} \alpha_n(z-\zeta) - k\alpha_n(z-\zeta) \operatorname{ch} \alpha_n(z-\zeta)] d\zeta = \\ &= b_n \frac{k\alpha_n z \operatorname{sh} \alpha_n z + 2(1+k)(1 - \operatorname{ch} \alpha_n z)}{2(k+1)\alpha_n^2}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Константы интегрирования C_{1n} , C_{2n} , C_{3n} , C_{4n} определяются из краевых условий (1.49):

$$\begin{aligned} C_{1n} &= -\frac{K_n}{k+1} [e^{2\alpha_n h} k^2 - e^{\alpha_n h} (\alpha_n h k^2 - \alpha_n h k + k + 1) - k^2 + k + 1], \\ C_{2n} &= \frac{K_n}{k+1} [e^{2\alpha_n h} (k^2 - k - 1) - e^{\alpha_n h} (\alpha_n h k^2 - \alpha_n h k - k - 1) - k^2], \\ C_{3n} &= -\frac{K_n}{k+1} [e^{2\alpha_n h} k - 2e^{\alpha_n h} (\alpha_n h k - k - 1) - 3k - 2] / 2, \\ C_{4n} &= \frac{K_n}{k+1} [e^{2\alpha_n h} (3k + 2) - 2e^{\alpha_n h} (\alpha_n h k + k + 1) - k] / 2. \end{aligned}$$

Здесь символом K_n обозначено выражение:

$$K_n = \frac{-b_n}{2\alpha_n^2 k (2e^{\alpha_n h} \alpha_n h - e^{2\alpha_n h} + 1)}.$$

Подставляя константы интегрирования в общее решение (1.51) и прибавляя частное решение (1.52), получим общее решение для систем неоднородных уравнений (1.47). После подстановки этого решения в соотношения (1.46), получим решение исходной краевой задачи (1.37), (1.38):

$$U = \sum_{i=1}^{\infty} K_n e^{-\alpha_n z} \left\{ e^{2\alpha_n h} [k(\alpha_n z - 1) - 1] + e^{\alpha_n h} [k(\alpha_n h - \alpha_n z + 1) + 1] - e^{\alpha_n(h+2z)} [k(\alpha_n h - \alpha_n z - 1) - 1] - e^{2\alpha_n z} [k(\alpha_n z + 1) + 1] \right\} J_1(\alpha_n r),$$

$$W = W_0 + \sum_{i=1}^{\infty} K_n e^{-\alpha_n z} \left\{ e^{2\alpha_n h} (\alpha_n z k + 1) + e^{\alpha_n h} [k(\alpha_n h - \alpha_n z) - 1] + e^{\alpha_n(h+2z)} [k(\alpha_n h - \alpha_n z) + 1] - 4e^{\alpha_n(h+z)} \alpha_n h k + 2e^{\alpha_n(2h+z)} k - 2e^{\alpha_n z} k + e^{2\alpha_n z} (\alpha_n z k - 1) \right\} J_0(\alpha_n r),$$

где W_0 – константа, подобранная таким образом, чтобы вертикальное смещение края цилиндра равнялось нулю:

$$W_0 = - \sum_{i=1}^{\infty} K_n [(e^{2\alpha_n h} - 1)(2k + 1) - 2e^{\alpha_n h} \alpha_n h k] J_0(\alpha_n).$$

Для сравнения с другими моделями полезно перейти от трехмерной функции W к функции прогибов w , для этого нужно в полученном выражении положить $z = 0$:

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} K_n [(e^{2\alpha_n h} - 1)(2k + 1) - 2e^{\alpha_n h} \alpha_n h k] [J_0(\alpha_n r) - J_0(\alpha_n)].$$

Полученное решение должно хорошо описывать изгиб цилиндра в широком диапазоне толщин, однако оно перестает работать когда перемещения нельзя считать малыми. Кроме того, видно, что даже линейная трехмерная теория упругости приводит к довольно сложной системе, решение которой удалось получить лишь в виде ряда. Поэтому при малых толщинах целесообразнее пользоваться решением, полученным из модели Кирхгофа, которое при малых толщинах должно быть довольно близко к точному (что показано ниже), но при этом для рассматриваемого случая имеет гораздо более простую форму.

Модель Кирхгофа. Перейдем к постановке задачи в рамках теории пластин Кирхгофа:

$$D\nabla^2\nabla^2w = ph, \quad w|_{r=1} = 0, \quad w'|_{r=1} = 0.$$

Решение этой задачи может быть получено в замкнутом виде. Имея в виду фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения:

$$(1, r^2, \ln r, r^2 \ln r),$$

и используя метод Лагранжа, получим:

$$w = \frac{h}{D} \int_0^r \frac{p(v)}{8} [2(v^2 + r^2) \ln r + (v^2 + 1)(1 - r^2)] v dv + \\ + \frac{h}{D} \int_r^1 \frac{p(v)}{8} [2(r^2 + v^2) \ln v + (r^2 + 1)(1 - \zeta^2)] v dv.$$

Такая форма представления решения оказывается особо удобной в тех случаях, когда функция распределения внешних сил имеет конечный разрыв, как, например, в случае нагрузки, заданной распределением (1.36). В этом случае после интегрирования имеем:

$$w = \begin{cases} \frac{p_0 h}{64D} \left\{ r^4 + \frac{\delta^2}{1-\delta^2} [4(\delta^2 + 2r^2) \ln \delta + (3 + 2r^2)(1 - \delta^2)] \right\} & r \leq \delta \\ -\frac{p_0 h \delta^2}{64D(1-\delta^2)} \left\{ (r^2 - 1)^2 - 4(\delta^2 + 2r^2) \ln r - 2(\delta^2 + 2)(1 - r^2) \right\} & r > \delta \end{cases}.$$

Заметим, что если устремить параметр δ к единице, то, используя правило Лопиталя – Бернулли, в пределе можно получить хорошо известное решение для случая однородного нагружения:

$$w = \lim_{\delta \rightarrow 1} \frac{p_0 h}{64D} \left\{ r^4 + \frac{\delta^2}{1-\delta^2} [4(\delta^2 + 2r^2) \ln \delta + (3 + 2r^2)(1 - \delta^2)] \right\} = \frac{p_0 h}{64D} (r^2 - 1)^2.$$

Как и ожидалось, модель Кирхгофа позволила серьезно упростить процесс построения решения. Однако полученное решение, как и предыдущее, не может использоваться при больших прогибах. Для этих случаев нужно прибегнуть к более сложным моделям.

Упрощенная модель Фешля – фон Кармана. Рассмотрим теперь уравнения изгиба пластин с учетом конечных прогибов (0.38). Как будет показано далее, решения этих уравнений могут быть успешно построены итерационно или в

рядах, однако для исследования областей применимости различных моделей предпочтительнее решения в замкнутой форме. В этой связи в рамках настоящего раздела удобнее рассматривать приближенное уравнение (0.37) (с соответствующими краевыми условиями), допускающее построение такого решения при заданном равномерном давлении T_0 :

$$D\nabla^2\nabla^2w - T_0\nabla^2w = ph, \quad w|_{r=R} = 0, \quad w'|_{r=R} = 0, \quad (1.53)$$

Фундаментальная система решений этого уравнения легко угадывается если заметить, что оно допускает факторизацию:

$$\nabla^2 (\nabla^2w - \chi^2w) = \frac{ph}{D}, \quad (1.54)$$

где $\chi = \sqrt{T_0/D}$. Выражение в скобках представляет собой левую часть уравнения Бесселя нулевого порядка. Следовательно, фундаментальная система решений однородного уравнения, определяемого левой частью (1.54) состоит из модифицированных функций Бесселя и решений уравнения Лапласа:

$$(1, I_0(\chi r), \ln r, K_0(\chi r)).$$

Здесь I_0 – модифицированная функция Бесселя первого рода (функция Инфельда), K_0 – модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда). Частное решение неоднородного уравнения вновь может быть получено методом Лагранжа. Таким образом, общее решение принимает вид:

$$w = C_1 I_0(\chi r) + C_2 \ln r + C_3 K_0(\chi r) + C_4 + \frac{h}{\chi^2 D} \int_0^r p(v) \left\{ \ln \frac{v}{r} + \frac{I_0(\chi r) K_0(\chi v) - K_0(\chi r) I_0(\chi v)}{\chi v [I_0(\chi v) K_1(\chi v) + I_1(\chi v) K_0(\chi v)]} \right\} v dv,$$

Константы интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из краевых условий и условий симметрии и регулярности решения в полюсе. Это выражение можно упростить, если заметить, что в знаменателе одного из подынтегральных слагаемых стоит сумма произведений модифицированных функций Бесселя первого и второго рода, которая может быть сведена к степенной функции [216]:

$$I_0(\chi v) K_1(\chi v) + I_1(\chi v) K_0(\chi v) = \frac{1}{\chi v}.$$

Исключая константы, можно получить общее решение в виде¹²:

$$\begin{aligned}
 w &= \tag{1.55} \\
 &= \frac{h}{\chi^2 D} \int_0^r p v \left[\frac{I_0(\chi v) + I_0(\chi r) - I_0(\chi)}{\chi I_1(\chi)} - I_0(\chi v) \frac{I_1(\chi) K_0(\chi r) + I_0(\chi r) K_1(\chi)}{I_1(\chi)} - \ln r \right] dv \\
 &+ \frac{h}{\chi^2 D} \int_r^1 p v \left[\frac{I_0(\chi r) + I_0(\chi v) - I_0(\chi)}{\chi I_1(\chi)} - I_0(\chi r) \frac{I_1(\chi) K_0(\chi v) + I_0(\chi v) K_1(\chi)}{I_1(\chi)} - \ln v \right] dv.
 \end{aligned}$$

Для случая ступенчатой нагрузки, заданной в виде (1.36), имеем:

$$w = \begin{cases} \frac{ph}{\chi^2 D} \left\{ -\frac{1}{\chi^2} - \frac{r^2}{4} + \frac{\delta}{1-\delta^2} \left[\frac{I_1(\chi\delta)}{\chi^2 I_1(\chi)} - \frac{I_0(\chi r)}{\chi I_1(\chi)} (I_1(\chi\delta) K_1(\chi) - I_1(\chi) K_1(\chi\delta)) - \delta \left(\frac{1}{2} \ln \delta + \frac{1}{\chi^2} \right) \right] \right\} & r \leq \delta \\ \frac{ph\delta}{\chi^2 D(1-\delta^2)} \left\{ \frac{I_1(\chi\delta)}{\chi^2 I_1(\chi)} - \frac{I_1(\chi\delta)}{\chi I_1(\chi)} (I_0(\chi r) K_1(\chi) + I_1(\chi) K_0(\chi r)) - \delta \left(\frac{1}{2} \ln r + \frac{1-r^2}{4} \right) \right\} & r > \delta \end{cases}$$

Заметим, что в результате предельного перехода может быть получена формула для случая однородного нагружения:

$$w = \frac{ph}{\chi^2 D} \left[\frac{I_0(\chi r) - I_0(\chi)}{2\chi I_1(\chi)} + \frac{1-r^2}{4} \right].$$

Как видно, в силу того, что уравнение упрощенной модели Феппля – фон Кармана оказалось линейным, его решение строится аналогично предыдущему случаю, вместе с тем оно должно корректно описывать не только малый изгиб, но и конечный. Однако, при выводе этого уравнения было сделано несколько упрощающих допущений, которые могли внести дополнительные погрешности. Для того чтобы оценить их влияние построенное решение следует сравнить с полностью нелинейной моделью.

Модель мембраны Адкинса – Ривлина – Грина. Рассмотрим нелинейную модель мембраны, т. е. пластины, не сопротивляющийся изгибу. В отличие от трехмерных тел или пластин, решение для конечных деформаций мембраны из гиперупругого материала может быть построено относительно просто, при том что, погрешность, возникающая из-за игнорирования изгибной жесткости мембраны, уменьшается с уменьшением ее относительной толщины.

Одними из первых нелинейную модель мембраны из несжимаемого материала Муни – Ривлина рассматривали Адкинс и Ривлин в работе [217]. Полученная ими система уравнений оказалась довольно громоздкой – она содержала шестнадцать дифференциальных уравнений, что, впрочем, не помешало ее авторам

¹²Аргумент у функции давления опущен

получить численное решение. Позднее, в работе Янга и Фенга [218], было показано, что в случае осевой симметрии эта система может быть сведена к трем дифференциальным уравнениям первого порядка. Приведем кратко их вывод.

Будем рассматривать деформацию мембраны в криволинейной системе координат, ассоциированной с главными направлениями тензора деформаций Коши – Грина. В этих координатах матрица тензора градиента деформации будет диагональной:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Здесь λ_1, λ_2 – главные удлинения, связанные с радиальными и осевыми перемещениями следующими формулами:

$$\lambda_1 = \sqrt{(1 + u')^2 + (w')^2}, \quad \lambda_2 = 1 + \frac{u}{r}. \quad (1.56)$$

Отметим, что, в отличие от моделей пластин, в модели мембран не учитываются слагаемые, зависящие от z , т. е. она имеет нулевой порядок асимптотического разложения по толщине.

В этой модели материал полагается несжимаемым, что приводит к существенному упрощению выражения для потенциала Муни – Ривлина (1.14):

$$\mathcal{W} = \frac{1}{4} [(1 - \beta) (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + (1 + \beta) (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 - 3)], \quad (1.57)$$

и появлению дополнительного соотношения, соответствующего условию несжимаемости:

$$\det(\mathbf{F}) = J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1.$$

Из выражения функции упругого потенциала (1.57) можно сразу получить первый тензор напряжений Пиола – Кирхгофа, воспользовавшись формулой Дойля – Эриксона (1.6), модифицированной для учета несжимаемости:

$$\mathbf{P} = 2 \left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{C}} + s \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \right) \cdot \mathbf{F}^T.$$

Здесь s – реакция идеальных связей, обеспечивающих несжимаемость. Переходя к компонентам и используя условие несжимаемости, получим:

$$P_{ii} = \frac{1 - \beta}{2} \left[\lambda_i + \alpha \lambda_i (\text{tr} \mathbf{C} - \lambda_i^2) + \frac{s}{\lambda_i} \right],$$

где $\alpha = (1 + \beta) / (1 - \beta)$. Отсюда по формуле Нансона можно перейти к компонентам тензора истинных напряжений Коши:

$$S_{11} = \frac{1 - \beta}{2} \left[\lambda_1^2 + \alpha \lambda_1^2 \left(\lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) + s \right], \quad S_{22} = \frac{1 - \beta}{2} \left[\lambda_2^2 + \alpha \lambda_2^2 \left(\lambda_1^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) + s \right],$$

$$S_{33} = \frac{1 - \beta}{2} \left[\frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} + \alpha \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + s \right].$$

Осталось только определить неизвестную реакцию идеальных связей s . Как и в модели Кирхгофа это можно сделать из условия равенства нулю третьей диагональной компоненты тензора напряжений. В этом случае первые две компоненты примут следующий вид:

$$S_{11} = \frac{1 - \beta}{2} \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) (1 + \alpha \lambda_2^2), \quad S_{22} = \frac{1 - \beta}{2} \left(\lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) (1 + \alpha \lambda_1^2).$$

Осредняя полученные напряжения по толщине мембраны в актуальной форме, можно получить усилия:

$$T_{11} = \lambda_3 h S_{11} = \frac{h S_{11}}{\lambda_1 \lambda_2}, \quad T_{22} = \lambda_3 h S_{22} = \frac{h S_{22}}{\lambda_1 \lambda_2},$$

которые должны удовлетворять известным уравнениям равновесия в актуальной конфигурации:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial \rho} + \frac{T_{11} - T_{22}}{\rho} = 0, \quad T_{11} \kappa_1 + T_{22} \kappa_2 = p h. \quad (1.58)$$

Здесь ρ – радиальная координата точек мембраны в актуальной форме:

$$\rho = r + u,$$

а κ_1, κ_2 – главные кривизны деформированной поверхности:

$$\kappa_1 = \frac{\rho' w'' - \rho'' w'}{\lambda_1^3}, \quad \kappa_2 = \frac{w'}{\lambda_1 \rho}.$$

Для получения наиболее компактной системы дифференциальных уравнений выберем следующий набор главных переменных:

$$y_1 = \lambda_1, \quad y_2 = \lambda_2 = \frac{\rho}{r}, \quad y_3 = \rho'. \quad (1.59)$$

В новых обозначения уравнения равновесия (1.58) имеют следующий вид:

$$\frac{T'_{11}}{y_3} + \frac{T_{11} - T_{22}}{y_2 r} = 0, \quad T_{11} \frac{y'_1 y_3 - y_1 y'_3}{y_1^2 \sqrt{y_1^2 - y_3^2}} + T_{22} \frac{\sqrt{y_1^2 - y_3^2}}{y_1 y_2 r} = p h,$$

а входящие в них усилия записываются следующим образом:

$$T_{11} = \frac{h(1-\beta)}{2} \left(\frac{y_1}{y_2} - \frac{1}{y_1^3 y_2^3} \right) (1 + \alpha y_2^2), \quad T_{22} = \frac{h(1-\beta)}{2} \left(\frac{y_2}{y_1} - \frac{1}{y_1^3 y_2^3} \right) (1 + \alpha y_1^2).$$

Подставляя эти выражения в уравнения равновесия, получим систему двух дифференциальных уравнений изгиба мембраны:

$$\begin{aligned} r y_1' \left(\frac{1}{y_2} + \frac{3}{y_1^4 y_2^3} \right) (1 + \alpha y_2^2) + \left(\frac{y_3}{y_2} - 1 \right) \left(\frac{3}{y_1^3 y_2^3} + \alpha y_1 y_2 \right) + \frac{y_1}{y_2} - \frac{y_3}{y_1} + \frac{\alpha}{y_1 y_2} \left(\frac{y_3}{y_2^3} - \frac{1}{y_1^2} \right) &= 0, \\ \frac{(y_1' y_3 - y_1 y_3')}{y_1^2 \sqrt{y_1^2 - y_3^2}} \left(\frac{y_1}{y_2} - \frac{1}{y_1^3 y_2^3} \right) (1 + \alpha y_2^2) + \frac{\sqrt{y_1^2 - y_3^2}}{y_1 y_2 r} \left(\frac{y_2}{y_1} - \frac{1}{y_1^3 y_2^3} \right) (1 + \alpha y_1^2) - \frac{2p}{1-\beta} &= 0, \end{aligned}$$

которые необходимо дополнить уравнением, связывающим y_2 с y_3 :

$$y_2' = \frac{1}{r} (y_3 - y_2).$$

Особенностью этой системы уравнений является то, что она сформулирована в деформациях, а не перемещениях. Соответственно и краевые условия следует формулировать для деформаций. В рассматриваемой задаче окружная деформация на контуре равна нулю и в полюсе имеется особая точка, в которой все направления неразличимы, следовательно в этой точке радиальная и окружная деформации равны. Кроме того, в полюсе первая и вторая главные кривизны равны нулю, тогда из соотношения (1.56) следует, что производная радиальной координаты ρ в полюсе равна первой кратности удлинения. Эти соображения, с учетом (1.59), позволяют записать краевые условия через главные переменные:

$$y_1|_{r=0} = y_2|_{r=0} = y_3|_{r=0}, \quad y_2|_{r=1} = 1.$$

Решение полученной краевой задачи удобно проводить методом пристрелки. Для этого необходимо свести краевую задачу к задаче Коши, задавшись значением главных переменных в начале участка интегрирования, т. е. в полюсе. Из первого краевого условия видно, что это значение одинаково для всех трех главных переменных:

$$y_1|_{r=0} = y_2|_{r=0} = y_3|_{r=0} = \lambda_0.$$

Затем нужно решить полученную задачу Коши, например, методом Рунге – Кутты, после чего следует проверить выполнение краевого условия на контуре и при необходимости скорректировать λ_0 .

Сравнительный анализ. Располагая аналитическими и численно-аналитическим решениями, полученными для кругового диска в предыдущих разделах, произведем сравнительный вычислительный анализ с целью выявления областей их применения на “оси относительных толщин”.

В безразмерных переменных, помимо относительной толщины, используются два безразмерных параметра, характеризующие материал, k и β , и два, характеризующие нагружение, p_0 и δ . Относительную толщину будем варьировать в интервале $(1, 10^{-3})$. Параметр формы нагрузки δ выберем равным 0.99, что соответствует случаю равномерного нагружения и однопроцентной кольцевой опорной зоне.

Поскольку сравнительный анализ ориентирован на элементы МЭМС, будем полагать, что круговой диск изготовлен из химически чистого алюминия. При этом $k = 3$, что соответствует величине 0.33 для коэффициента Пуассона. Выбор значения параметра β не принципиален, так как при малых деформациях он практически не влияет на значение упругой потенциальной энергии материала. Для удобства выберем его равным нулю.

Отдельно следует определиться с величиной p_0 , поскольку при значительном изменении относительных толщин интенсивность нагружения должна подбираться из условий разумных значений максимальных перемещений. По этой причине на каждом участке “оси относительных толщин” будет фиксироваться не нагрузка, а максимальный прогиб. Тогда сравнение перемещений будем проводить опосредовано, по величине нагрузки, потребной для того, чтобы обеспечить заданный прогиб, т. е. будем сравнивать “жесткость” разных моделей.

Было проведено три серии сравнительных расчетов, параметры которых приведены в таблице 1.4, а результаты показаны на рисунках 1.5 – 1.8 (обозначения осей даны в размерных переменных).

Модели	3D и К	К и ФфК			ФфК и ГРА		
		1/10	1/50	1/100	1/10	1/50	1/100
w_{Max}	1/4	1/10	1/50	1/100	1/10	1/50	1/100
h	[0.01, 1]	[0.01, 1]			[0.001, 0.1]		
Результаты	Рисунки 1.5, 1.6	Рисунок 1.7			Рисунок 1.8		
3D – модель линейной теории упругости; К – пластина Кирхгофа; ФфК – пластина Фешля – фон Кармана; ГРА – нелинейная модель мембраны Грина – Ривлина – Адкинса;							

Таблица 1.4 – Параметры расчетов

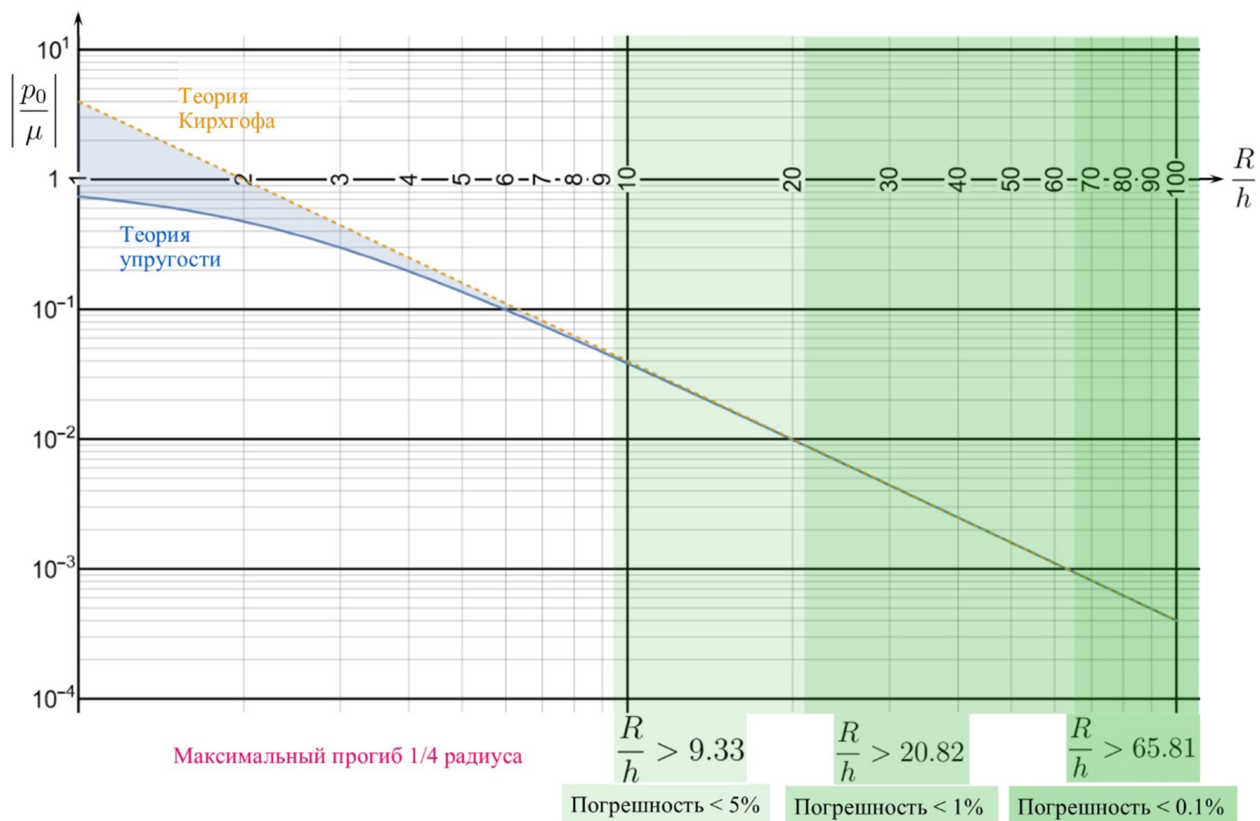


Рисунок 1.5 – Сравнение модели Кирхгофа и решения трехмерной теории упругости

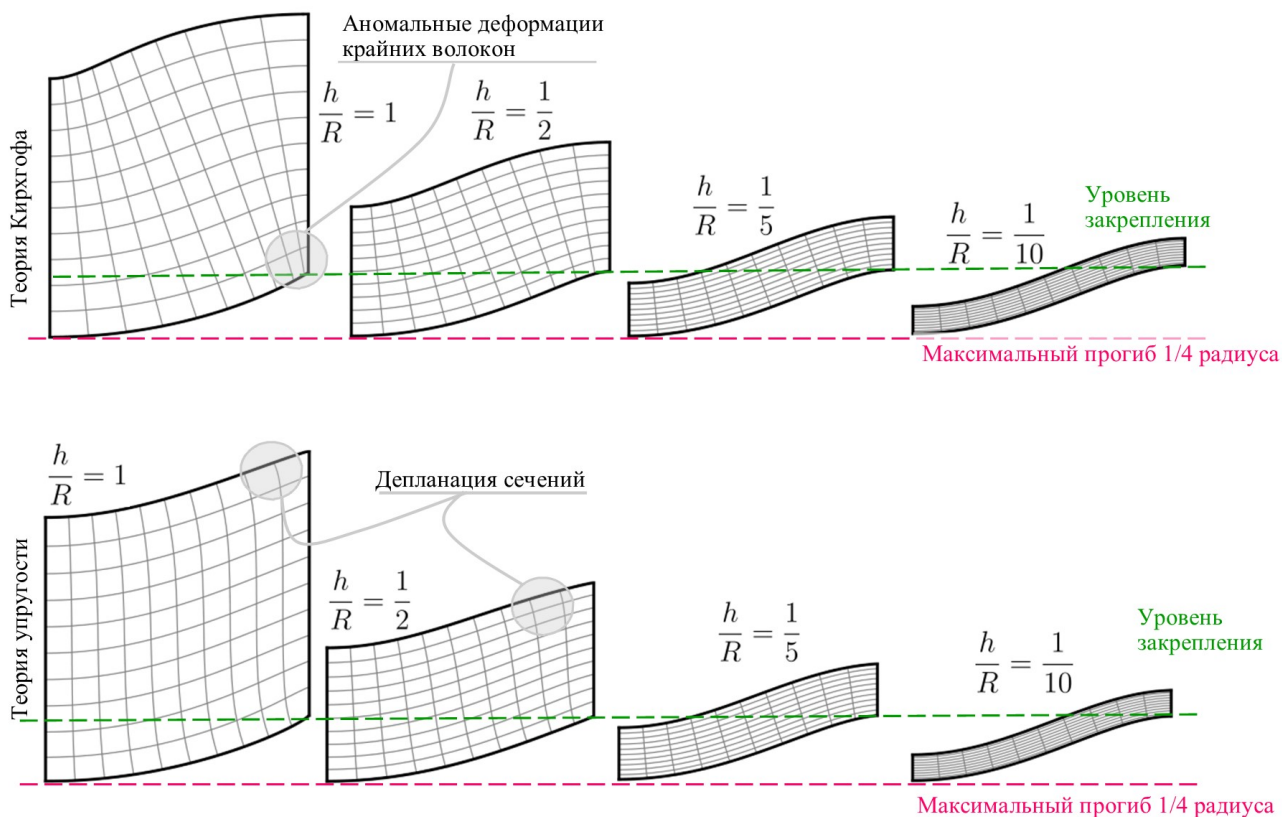


Рисунок 1.6 – Влияние кинематической гипотезы

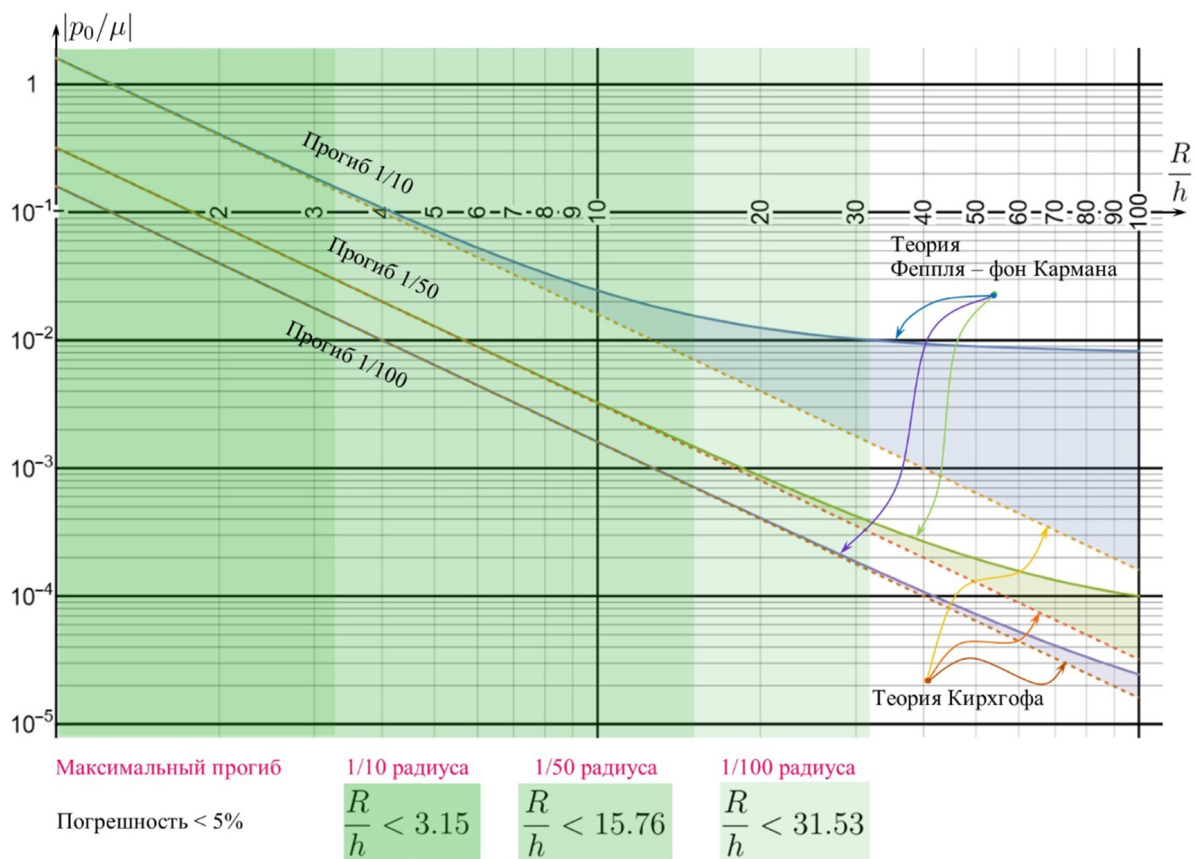


Рисунок 1.7 – Сравнение моделей Кирхгофа и Фешпля – фон Кармана

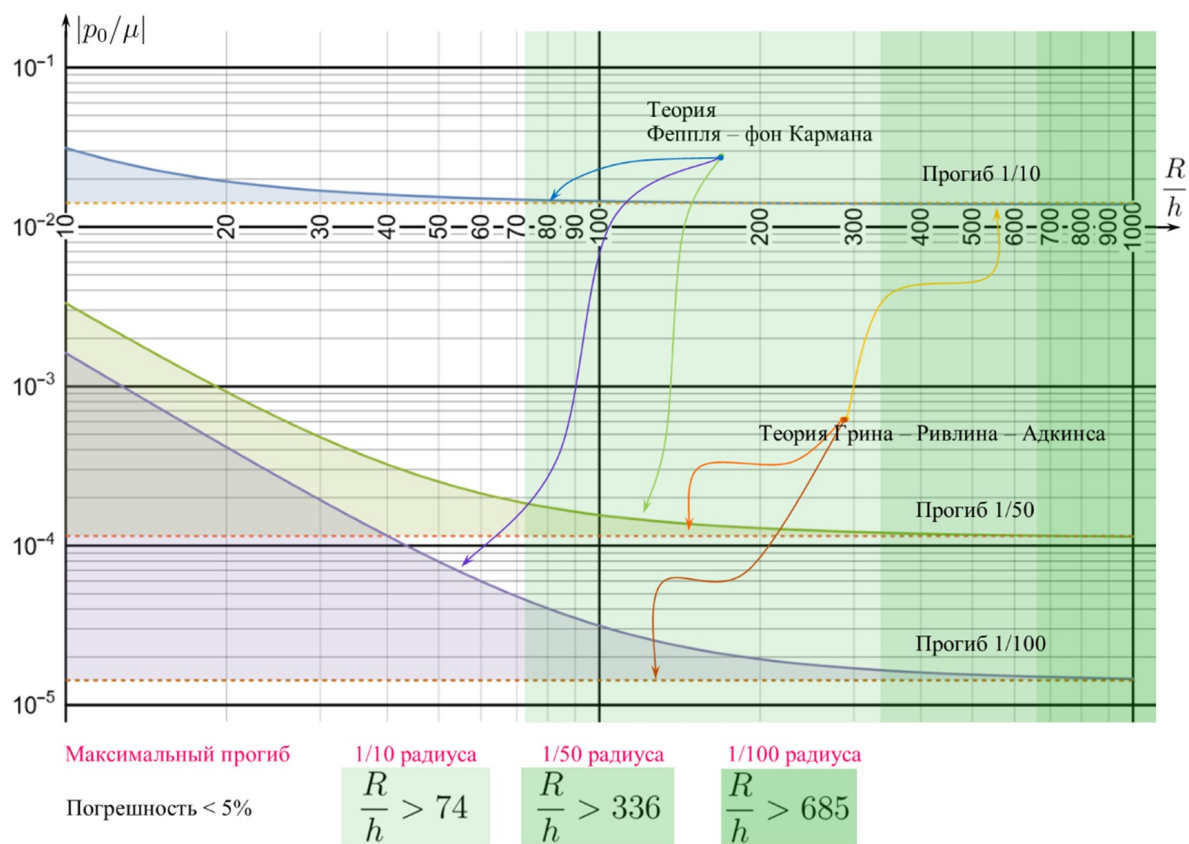


Рисунок 1.8 – Сравнение модели Фешпля – фон Кармана и нелинейной модели мембраны

Сопоставляя результаты, расчетов можно определить области параметров, в которых каждая из рассматриваемых моделей адекватно описывает напряженно-деформированное состояние изгибаемой пластины. Для уровня погрешности 5% относительные толщины, при которых может быть использована теория Кирхгофа, находится в интервале от $1/10$ до $1/30$ (при максимальном прогибе $1/100$ радиуса). При больших толщинах использование модели Кирхгофа нежелательно из-за невозможности учесть деформацию сечений, которая при таких толщинах становится существенной (Рисунок 1.6). В интервале толщин от $1/30$ до $1/70$ наиболее корректные результаты дает модель Фешля – фон Кармана (из рассмотренных), а при меньших значениях отношения толщины к радиусу можно использовать как ее, так и модель мембраны Грина – Ривлина – Адкинса.

Выводы по главе

В рамках первой главы настоящей работы был представлен универсальный подход к построению моделей пластин с несовместными деформациями. В его основу положена идея редукции полных уравнений, описывающих конечные деформации трехмерного континуума с распределенными дефектами, к более простым двумерным уравнениям. Технически редукция осуществляется путем асимптотических разложений тензоров деформаций и напряжений по двум малым параметрам, один из которых ассоциирован с толщиной, а другой – с деформацией.

Для практических расчетов с помощью редукции по деформационному параметру была получена модификация классических уравнений Фешля – фон Кармана, учитывающая несовместные деформации. Показано, что модифицированные уравнения могут быть представлены в двух формах, одна из которых записывается относительно привычных функций, но содержит дополнительные слагаемые, а другая – практически не отличается от классических уравнений, но содержит функцию напряжений, связанную с компонентами тензора напряжений более сложным образом.

В конце Главы проведен сравнительный анализ моделей различных асимптотических порядков. Для одной модельной задачи об изгибе цилиндра “в гладком стакане” были получены решения, соответствующие различным ее формализа-

циям. Цилиндр рассматривался как: трехмерное тело (при малых деформациях), тонкая пластина Кирхгофа, тонкая пластина Феппля – фон Кармана и мембрана Грина – Ривлина – Адкинса. Построенные решения были нанесены на шкалу “относительных толщин цилиндра”, из которой можно оценить границы применимости каждой модели.

Глава 2 Решение нелинейных краевых задач о конечных деформациях ультратонких пластин

В этой главе рассмотрены некоторые методы решения нелинейных уравнений (1.33) – (1.34), описывающих изгиб тонких пластин с учетом несовместных деформаций, полученные в предыдущей главе. Представлены решения для круглой и прямоугольной пластин, контуры которых жестко закреплены. Такой выбор модельных задач обусловлен тем фактом, что именно такие пластины чаще всего используются в МЭМС.

Далее считается, что рассматриваемые пластины имеют толщину h и изготовлены из линейно-упругого материала с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . Нагружение, вызывающее их конечный изгиб, реализуется давлением, приложенным на одной из лицевых поверхностей каждой пластины, распределение которого описывается некоторой гладкой функцией $p(x, y)$. Для круглых пластин считается, что давление распределено осесимметрично, т. е. $p(x, y) = p(r)$, где r – радиальная координата.

2.1 Круглая пластина

Рассмотрим уравнения (1.33) – (1.34) в цилиндрической системе координат, полагая, что все функции, описывающие напряженно-деформированное состояние тела, не зависят от угловой координаты. Учитывая форму уравнений (1.33) – (1.34), естественно сперва построить решение для частного случая бездефектной среды ($\mathbf{a} = 1, \mathbf{b} = 0$)¹:

$$D \left(w'''' + \frac{2w'''}{r} - \frac{w''}{r^2} + \frac{w'}{r^3} \right) - \frac{h}{r} (w''\phi' + w'\phi'') = p,$$

$$\phi'''' + \frac{2\phi'''}{r} - \frac{\phi''}{r^2} + \frac{\phi'}{r^3} + E \frac{w''w'}{r} = 0,$$

¹Здесь и далее штрихом обозначается производная по радиальной координате

а затем обобщить его для произвольных \mathbf{a} и \mathbf{b} . Нетрудно видеть, что эти уравнения допускают непосредственное интегрирование с множителем r :

$$D\left(rw''' + w'' - \frac{1}{r}w'\right) - h w' \phi' = \int_0^r p(v) v dv + C_1, \quad (2.1)$$

$$r\phi''' + \phi'' - \frac{1}{r}\phi' + \frac{E}{2}(w')^2 = C_2.$$

Второе уравнение здесь – это не что иное как дифференциальное уравнение равновесия точек пластины в радиальном направлении, следовательно, в силу отсутствия радиальной компоненты поля внешних сил, константу C_2 следует положить равной нулю. Первое же уравнение выражает условие равновесия в осевом направлении конечного диска радиуса r , вырезанного из пластины. Соответственно правая часть этого уравнения представляет собой суммарную внешнюю силу, действующую на диск в осевом направлении. Так как предполагается, что функция нагрузки непрерывна, т. е. сосредоточенные силы отсутствуют, то при стремлении радиуса диска к нулю правая часть должна обращаться в ноль. Отсюда следует, что константу C_1 также следует принять равной нулю.

Как было сказано выше, рассматривается жестко защемленная по всему контуру пластина, т. е. для того чтобы сформулировать краевую задачу, дифференциальные уравнения (2.1) следует дополнить условиями на контуре пластины $r = R$:

$$w|_{r=R} = 0, \quad w'|_{r=R} = 0, \quad u|_{r=R} = 0. \quad (2.2)$$

Кроме того, в перечень краевых условий также необходимо включить условия симметричности решения:

$$u|_{r=0} = 0, \quad w'|_{r=0} = 0. \quad (2.3)$$

Система дифференциальных уравнений (2.1) имеет шестой порядок, в то время как имеется лишь пять краевых условий (2.2) – (2.3). Это объясняется тем фактом, что функция напряжений Эри определяется с точностью до константы. Таким образом, недостающее краевое условие накладывается на значение функции Эри, для определенности, примем однородное условие на контуре:

$$\phi|_{r=R} = 0.$$

Для того чтобы сформулировать краевую систему в терминах лишь двух искоемых функций w и ϕ следует переформулировать краевые условия, накладываемые на радиальные перемещения, через функцию напряжений Эри. Для этого необходимо выразить радиальные перемещения через компоненты нелинейного тензора деформации (1.24), используемого в модели Фешля – фон Кармана. В случае осевой симметрии ненулевыми оказываются лишь первые две диагональных компоненты этого тензора (третью считаем пренебрежимо малой), они имеют следующий вид (здесь и далее речь идет о функциях, определенных в плоскости редукции пластины, т. е. при $z = 0$):

$$E_r^r = u' + \frac{1}{2} (w')^2, \quad E_\varphi^\varphi = \frac{u}{r}.$$

Эти деформации связаны с усилиями в бездефектной среде (1.27):

$$\tilde{T}_r^r = \frac{E}{1 - \nu^2} (E_r^r + \nu E_\varphi^\varphi), \quad \tilde{T}_\varphi^\varphi = \frac{E}{1 - \nu^2} (E_\varphi^\varphi + \nu E_r^r),$$

которые, в свою очередь, выражаются через функцию Эри по формулам аналогичным (1.32):

$$\tilde{T}_r^r = \frac{\phi'}{r}, \quad \tilde{T}_\varphi^\varphi = \phi''.$$

Исключая из выписанных соотношений компоненту E_r^r и подставляя выражения для напряжений и E_φ^φ , можно связать функцию Эри с радиальной компонентой поля перемещений:

$$u = \frac{1}{E} (r\phi'' - \nu\phi'). \quad (2.4)$$

С учетом полученного соотношения (2.4) можно полностью сформулировать краевую задачу:

$$\begin{aligned} D r \frac{d}{dr} \nabla^2 w - h w' \phi' &= \int_0^r p(v) v dv, & r \frac{d}{dr} \nabla^2 \phi + \frac{E}{2} (w')^2 &= 0, \\ w'|_{r=0} &= 0, & w|_{r=R} &= 0, & w'|_{r=R} &= 0, \\ \phi'|_{r=0} &= 0, & \phi|_{r=R} &= 0, & (r\phi'' - \nu\phi')|_{r=R} &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Перед построением решения задачи целесообразно перейти к безразмерным переменным:

$$\tilde{r} := \frac{r}{R}, \quad \tilde{w} := \frac{w}{h}, \quad \tilde{\phi} := \frac{\phi h}{D}, \quad \tilde{p} := \frac{p R^4}{D h}. \quad (2.6)$$

В этих обозначения краевая задача (2.5) примет сокращенный вид:

$$\tilde{r} \frac{d}{d\tilde{r}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{w} - \tilde{w}' \tilde{\phi}' = \int_0^{\tilde{r}} \tilde{p}(v) v dv, \quad \tilde{r} \frac{d}{d\tilde{r}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\phi} + \kappa (\tilde{w}')^2 = 0, \quad (2.7)$$

$$\tilde{w}'|_{\tilde{r}=0} = 0, \quad \tilde{w}|_{\tilde{r}=1} = 0, \quad \tilde{w}'|_{\tilde{r}=1} = 0, \quad (2.8)$$

$$\tilde{\phi}'|_{\tilde{r}=0} = 0, \quad \tilde{\phi}|_{\tilde{r}=1} = 0, \quad \left(\tilde{r} \tilde{\phi}'' - \nu \tilde{\phi}' \right) |_{\tilde{r}=1} = 0, \quad (2.9)$$

где $\kappa = 6(1 - \nu^2)$ – безразмерный коэффициент. В рамках настоящего раздела (до раздела 2.2) все выкладки будут проводиться в безразмерных переменных (2.6), имея это ввиду, далее для краткости будем опускать символ \sim над обозначениями.

Симметричная форма уравнений (2.7) позволяет достаточно эффективно получить решение краевой задачи (2.7) – (2.9) с помощью метода последовательных приближений. Для этого рассмотрим две вспомогательные краевые задачи, задающиеся одним неоднородным дифференциальным уравнением:

$$\frac{d}{dr} \nabla^2 f = f''' + \frac{1}{r} f'' - \frac{1}{r^2} f' = F(r), \quad (2.10)$$

но с разными краевыми условиями: первой вспомогательной задаче соответствуют условия аналогичные (2.8), а второй – (2.9). Пусть для каждой из этих краевых задач найдено решение в виде обратного оператора, действующего на правую часть (2.10), решения краевых задач с условиями типа (2.8) и (2.9) обозначим соответственно $\mathcal{G}_w(F)$ и $\mathcal{G}_\phi(F)$. Также пусть найдено некоторое начальное приближение функции прогиба w_0 , например, решение соответствующее линейному случаю. Тогда если дополнить w_0 начальным приближением функции Эри, вычисленным так чтобы второе уравнение (2.7) выполнялось точно:

$$\phi_0 = -\kappa \mathcal{G}_\phi \left(\frac{(w_0')^2}{r} \right),$$

то уточненное решение (2.7) – (2.9) может быть получено в следующем виде:

$$w_1 = \mathcal{G}_w \left(\frac{1}{r} \int_0^r p(v) v dv + \frac{w_0' \phi_0'}{r} \right), \quad \phi_1 = -\kappa \mathcal{G}_\phi \left(\frac{(w_1')^2}{r} \right).$$

Процесс уточнения можно продолжать сколь угодно долго. Решение на i -ой итерации отыскивается по этим же формулам если заменить индекс 0 на $i - 1$

и 1 на i :

$$w_i = w_L(p) + \mathcal{G}_w \left(\frac{w'_{i-1} \phi'_{i-1}}{r} \right), \quad \phi_i = -\kappa \mathcal{G}_\phi \left(\frac{(w'_i)^2}{r} \right), \quad (2.11)$$

или по формуле:

$$w_i = \mathfrak{R}_p(w_{i-1}) := w_L(p) - \kappa \mathcal{G}_w \left(\frac{w'_{i-1}}{r} \mathcal{G}'_\phi \left(\frac{(w'_{i-1})^2}{r} \right) \right). \quad (2.12)$$

Здесь символом w_L обозначено решение линейной задачи:

$$w_L(p) = \mathcal{G}_w \left(\frac{1}{r} \int_0^r p(v) v dv \right). \quad (2.13)$$

2.1.1 Построение обратных операторов

Для реализации итерационного алгоритма поиска решения краевой задачи (2.7) – (2.9), изложенного выше, необходимо определить явный вид операторов \mathcal{G}_w и \mathcal{G}_ϕ . Для этого рассмотрим уравнение (2.10). Фундаментальная система его решений легко угадывается:

$$\Phi = \{1, \ln r, r^2\}.$$

Соответственно его общее решение следует искать в виде:

$$f = A + B \ln r + Cr^2 + f_0, \quad (2.14)$$

где A, B, C – константы, определяемые из краевых условий, а f_0 – некоторое частное решение.

Частное решение можно отыскать методом Лагранжа в виде (2.14) если предположить, что A, B, C – функции r . Тогда нетрудно показать, что их первые производные могут быть найдены из следующей системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & \ln r & r^2 \\ 0 & r^{-1} & 2r \\ 0 & -r^{-2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F(r) \end{pmatrix}.$$

Матрица в левой части легко обращается:

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -r(2 \ln r + 1) & r^2(2 \ln r - 1) \\ 0 & 2r & -2r^2 \\ 0 & r^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F(r) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \end{pmatrix} = \frac{F(r)}{4} \begin{pmatrix} r^2(2 \ln r - 1) \\ -2r^2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Интегрируя эту систему и подставляя результат в (2.14), можно получить общее решение вспомогательного уравнения (2.10):

$$f = \frac{1}{4} \int_0^r F(v) \left[2v^2 \ln \frac{v}{r} - (v^2 - r^2) \right] dv + A + B \ln r + Cr^2.$$

Неизвестные константы A , B , C следует находить из краевых условий.

Для построения двух обратных операторов $\mathcal{G}_w(F)$, $\mathcal{G}_\phi(F)$ нужно использовать два набора краевых условий (2.8), (2.9), однако первые два условия в этих наборах одинаковые, поэтому можно определить две константы сразу для обоих операторов. Нетрудно видеть, что первое краевое условие будет выполнено тогда и только тогда когда константа B тождественно равно нулю. Для выполнения второго условия требуется положить:

$$A = -C - \frac{1}{4} \int_0^1 F(v) [2v^2 \ln v - (v^2 - 1)] dv.$$

Таким образом оба оператора $\mathcal{G}_w(F)$, $\mathcal{G}_\phi(F)$ определены с точностью до константы C :

$$f = \frac{1}{4} \int_0^r F(v) [(r^2 - 1) - 2v^2 \ln r] dv + \tag{2.15}$$

$$+ \frac{1}{4} \int_r^1 F(v) [(v^2 - 1) - 2v^2 \ln v] dv + C(r^2 - 1),$$

которую следует отыскивать для каждого оператора отдельно.

Для того чтобы найти последнюю неизвестную константу удобно выписать выражения для первой и второй производных (2.15) на контуре:

$$f'|_{r=1} = \frac{1}{2} \int_0^1 F(v) (1 - v^2) dv + 2C, \quad f''|_{r=1} = \frac{1}{2} \int_0^1 F(v) (1 + v^2) dv + 2C.$$

Подставляя эти соотношения в последние краевые условия из (2.2), (2.3), удается выразить последнюю константу:

– для оператора $\mathcal{G}_w(F)$:

$$C_w = -\frac{1}{4} \int_0^1 F(v) (1 - v^2) dv;$$

– для оператора $\mathcal{G}_\phi(F)$:

$$C_\phi = -\frac{1}{4} \int_0^1 F(v) \left(1 + \frac{1+\nu}{1-\nu} v^2\right) dv.$$

После подстановки этих констант в (2.15) получим искомые обратные операторы:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_w(F) &= \frac{1}{4} \int_0^r F(v) [v^2 (r^2 - 1) - 2v^2 \ln r] dv + & (2.16) \\ &+ \frac{1}{4} \int_r^1 F(v) [r^2 (v^2 - 1) - 2v^2 \ln v] dv, \\ \mathcal{G}_\phi(F) &= \frac{1}{4} \int_0^r F(v) \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} v^2 (1 - r^2) - 2v^2 \ln r \right] dv + \\ &+ \frac{1}{4} \int_r^1 F(v) \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} v^2 (1 - r^2) + (v^2 - r^2) - 2v^2 \ln v \right] dv. \end{aligned}$$

Замечательное свойство этих операторов состоит в том, что результат их действия на полиномиальную функцию также будет являться полиномом. Это можно показать если положить $F(r) = r^k$, где k – целое неотрицательное число:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_w(r^k) &= \frac{2r^{3+k} - (3+k)r^2 + 1 + k}{2(1+k)(3+k)^2}, & (2.17) \\ \mathcal{G}_\phi(r^k) &= \frac{1}{4} \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1-r^2}{3+k} + \frac{(5+k)(1-r^{3+k})}{(3+k)^2} - \frac{r^2(1-r^{1+k})}{1+k} \right]. \end{aligned}$$

Такое свойство обратных операторов позволяет переписать (2.12) в виде определенной рекуррентной формулы. Для того чтобы ее получить предположим,

что на некоторой итерации получено приближение функции w :

$$w_i(r) = \sum_{l=0}^N \omega_{2l}^i r^{2l}.$$

Тогда, согласно второй формуле из (2.11), этой функции прогибов соответствует функция Эри:

$$\begin{aligned} \phi_i &= -\kappa \mathcal{G}_\phi \left(\frac{(w'_i)^2}{r} \right) = -4\kappa \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N l m \omega_{2l}^i \omega_{2m}^i \mathcal{G}_\phi \left(r^{2(l+m)-3} \right) = \\ &= -\frac{\kappa}{2} \sum_{l,m=1}^N l m \omega_{2l}^i \omega_{2m}^i \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1-r^2}{l+m} + \frac{(1+l+m)(1-r^{2(l+m)})}{(l+m)^2} - \frac{r^2 - r^{2(l+m)}}{l+m-1} \right] \end{aligned}$$

Теперь можно найти следующее уточнение функции прогибов, для этого необходимо проделать вспомогательное преобразование:

$$\begin{aligned} \frac{w'_i \phi'_i}{r} &= 2\kappa \sum_{l,m,q=1}^N l m q \omega_{2l}^i \omega_{2m}^i \omega_{2q}^i \times \\ &\quad \times \left[\left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{l+m} + \frac{1}{l+m-1} \right) r^{2q-1} - \frac{r^{2(l+m+q-1)-1}}{(l+m)(l+m-1)} \right] \end{aligned}$$

Результат действия оператора \mathcal{G}_w на это выражение несложно получить с помощью формул (2.17):

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_w \left(\frac{w'_i \phi'_i}{r} \right) &= \frac{\kappa}{4} \sum_{l,m,q=1}^N l m q \omega_{2l}^i \omega_{2m}^i \omega_{2q}^i \times \\ &\quad \times \left[\left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{l+m} + \frac{1}{l+m-1} \right) \frac{r^{2(q+1)} - (q+1)r^2 + q}{q(q+1)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{r^{2(l+m+q)} - (l+m+q)r^2 + l+m+q-1}{(l+m)(l+m-1)(l+m+q-1)(l+m+q)^2} \right] \end{aligned}$$

Теперь для того чтобы получить явную формулу оператора \mathfrak{R} осталось лишь добавить к полученному выражению решение линейной задачи (2.13):

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(w_i) &= w_L(p) + \frac{\kappa}{4} \sum_{l,m,q=1}^N l m q \omega_{2l}^i \omega_{2m}^i \omega_{2q}^i \times \\ &\quad \times \left[\left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{l+m} + \frac{1}{l+m-1} \right) \frac{r^{2(q+1)} - (q+1)r^2 + q}{q(q+1)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{r^{2(l+m+q)} - (l+m+q)r^2 + l+m+q-1}{(l+m)(l+m-1)(l+m+q-1)(l+m+q)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.1.2 Замечание о теоретической сходимости решения

Рассмотрим вопрос о теоретической сходимости итерационного алгоритма (2.12) решения краевой задачи (2.7) – (2.9). Можно показать, что сходимость может быть обеспечена если оператор \mathfrak{R} будет сжимающим в некоторой проколотовой δ -окрестности искомого решения w , т. е. если

$$\exists \delta > 0 : \forall w_0 \in \mathring{V}(w, \delta) : \frac{\|w - w_0\|}{\|\mathfrak{R}_p(w) - \mathfrak{R}_p(w_0)\|} = \lambda > 1.$$

Тогда для сходимости процесса необходимо и достаточно чтобы на некотором его шаге было получено приближение, лежащее в этой δ -окрестности, т. е. некоторая функция w_0 такая, что:

$$\|w - w_0\| > \|\mathfrak{R}_p(w) - \mathfrak{R}_p(w_0)\|,$$

С учетом того, что точное решение является неподвижной точкой оператора \mathfrak{R} , последнее условие можно переписать в виде:

$$\|w - w_0\| > \|w - \mathfrak{R}_p(w_0)\|. \quad (2.19)$$

Таким образом, вопрос о сходимости итерационного процесса сводится к определению условий существования δ -окрестности решения, для всех функций которой выполнялось бы условие (2.19).

Как видно из (2.12), оператор $\mathfrak{R}_p(w_0)$ представляет собой сумму решения линейной задачи $w_L(p)$ и результата действия на w_0 композиции обратных операторов (2.16), поэтому прежде всего необходимо исследовать свойства этих операторов. Покажем, что для (2.16) справедливо следующее

Утверждение 2.1. *Если некоторая функция $f(r)$, определенная на отрезке $r \in [0, 1]$, строго положительна (отрицательна) на нем, за исключением, быть может, концов отрезка где она может принимать нулевые значения, то функции $\mathcal{G}_w(f)$, $\mathcal{G}_\phi(f)$:*

1. строго убывают (возрастают) на $r \in (0, 1)$;
2. принимают нулевое значение при $r = 1$;
3. принимают строго положительные (отрицательные) значения на $r \in [0, 1)$.

Докажем это утверждение по пунктам. Справедливость первого пункта можно установить, проанализировав производные:

$$\mathcal{G}'_w(f) = \frac{1}{2} \int_0^r f(v) v^2 \left(r - \frac{1}{r} \right) dv + \frac{1}{2} \int_r^1 f(v) r (v^2 - 1) dv,$$

$$\mathcal{G}'_\phi(f) = \frac{1}{2} \int_0^r f(v) v^2 \left(-\frac{1+\nu}{1-\nu} r - \frac{1}{r} \right) dv + \frac{1}{2} \int_r^1 f(v) \left(-\frac{1+\nu}{1-\nu} v^2 r - r \right) dv.$$

Здесь все выражения в скобках принимают на интервале $r \in (0, 1)$ строго отрицательные значения, отсюда следует строгое убывание (возрастание) $\mathcal{G}_w(f), \mathcal{G}_\phi(f)$. Вторым пунктом непосредственно следует из того факта, что результат действия рассматриваемых операторов по определению должен удовлетворять краевым условиям (2.8), (2.9). Последний же пункт является прямым следствием первых двух. Таким образом Утверждение 2.1 полностью доказано. Используя последовательно это утверждение можно доказать несколько важных следствий:

Следствие 2.1. *Если w – строго убывающая (возрастающая) на отрезке $r \in (0, 1)$ функция, то функция $\mathcal{G}_w \left(\frac{w'}{r} \mathcal{G}'_\phi \left(\frac{(w')^2}{r} \right) \right)$ также будет строго убывающей (возрастающей) на этом отрезке.*

Следствие 2.2. *Если w_2, w_1 – некоторые строго убывающие (возрастающие) на отрезке $r \in (0, 1)$ функции, удовлетворяющие краевым условиям (2.8), такие что на всем интервале $w'_2 < w'_1 < 0$ ($w'_2 > w'_1 > 0$) то для функций $\mathfrak{R}_p(w_1), \mathfrak{R}_p(w_2)$ справедливо аналогичное неравенство:*

$$\mathfrak{R}'_p(w_2) > \mathfrak{R}'_p(w_1) > w'_L(p) \quad (\mathfrak{R}'_p(w_2) < \mathfrak{R}'_p(w_1) < w'_L(p)).$$

В дальнейшем будет считать, что все рассматриваемые функции, в том числе и p , принимают строго положительные значения, а функции прогибов, кроме того, монотонно убывают на интервале $r \in (0, 1)$.

Если в последнем следствии в качестве одной из функций w_1, w_2 выбрать неподвижную точку оператора \mathfrak{R}_p , тогда полученные неравенства могут быть модифицированы. Если w_2 – неподвижная точка, тогда имеем:

$$0 > w'_2 > \mathfrak{R}'_p(w_1) > w'_L(p)$$

В противном случае возможны два варианта. Первый из них:

$$\mathfrak{R}'_p(w_2) > 0 > w'_1 > w'_L(p),$$

очевидно, соответствует случаю когда итерационный алгоритм расходится, его рассматривать не будем. Второму случаю соответствует неравенство:

$$0 > \mathfrak{R}'_p(w_2) > w'_1 > w'_L(p).$$

Важно отметить, что и в этом случае сходимость не гарантирована и требует дальнейшего исследования. Перейдем к нему.

Из рассмотренных следствий вытекает, что если некоторое начальное приближение расположено полностью ниже или выше искомого решения (за исключением конца отрезка $r = 1$), максимально удаляясь от него при $r = 0$, то это же будет верно и для всех последующих приближений. Отсюда следует, что о близости к точному решению некоторого приближенного, полученного в ходе итерационного процесса, можно судить не по функциональной норме, а по разности значений этих функций при $r = 0$, то есть по близости их максимумов на отрезке $r \in [0, 1]$. Таким образом, условие (2.19) можно заменить на более простое:

$$\|w(0) - w_0(0)\| > \|w(0) - \mathfrak{R}_p(w_0)(0)\|.$$

Если, для определенности, предположить, что начальное приближение расположено ниже точного решения, то в этом неравенстве можно раскрыть модули:

$$w(0) - w_0(0) > \mathfrak{R}_p(w_0)(0) - w(0). \quad (2.20)$$

Из структуры оператора \mathfrak{R}_p (2.12) видно, что функция w_0 является неподвижной точкой аналогичного оператора \mathfrak{R}_{p_0} , который может быть выражен через \mathfrak{R}_p следующим образом:

$$\mathfrak{R}_{p_0}(w_0) = \mathfrak{R}_p(w_0) - w_L(p) + w_L(p_0) = \mathfrak{R}_p(w_0) - w_L(p - p_0).$$

Это соотношение позволяет переписать условие (2.20) в следующем виде:

$$2(w(0) - w_0(0)) > w_L(p - p_0)(0). \quad (2.21)$$

Выполнение полученного условия гарантирует, что если в качестве начального приближения выбрать функцию w_0 , то следующий шаг итерационного процесса приведет к функции более близкой к искомому решению в смысле

значения при $r = 0$, однако нет никаких гарантий, что для последующих приближений условие аналогичное (2.21) также будет выполняться, т. е. что процесс будет сходиться.

Пример 2.1. *Попытаемся отыскать решение при $p = 100$, используя в качестве начального приближения решение линейной задачи при $p = 1$, которое, как известно, имеет вид: $w_0 = \frac{1}{64} (1 - r^2)^2$. Согласно зависимости, установленной Вэем [31], максимальный прогиб при $p = 100$ примерно равен 1.03846. Начальное же приближение при $r = 0$ принимает значение 0.015625. По формуле (2.18) легко рассчитать, что в центре пластины функция $\mathfrak{R}_p(w_0)$ принимает значение 1.5625, т. е. в этом случае оператор \mathfrak{R}_p сжимающий. Однако через несколько итераций, максимальный прогиб промежуточного решения превосходит 10^{11} , таким образом, алгоритм, очевидно, расходится.*

Однако если помимо некоторой функции w_0 , удовлетворяющей (2.21), существует другая функция w_1 , такая что $\mathfrak{R}'(w_0) > w'_1$, $\mathfrak{R}'(w_1) < w'_0$ при $r \in (0, 1)$ и удовлетворяющая условию аналогичному (2.21):

$$2(w_1(0) - w(0)) > w_L(p_1 - p)(0), \quad (2.22)$$

то все функции, расположенные между ними, как бы “поджимаются” ими к точному решению. Анализ условий (2.21) и (2.22) показывает, что сходимость итерационного процесса при некоторой функции давления p будет обеспечена если при малом приращении давления удвоенное приращение точного решения превосходит приращение, рассчитанное по линейной модели.

Так как p – функция, то вопрос о том как посчитать приращение давления является достаточно нетривиальным. Для простоты предположим, что функция давления представляет собой произведение параметра и некоторой функции радиальной координаты $p(r) = p_c q(r)$. Тогда приращение давления может быть оценено по приращению параметра p_c . В этом случае условие сходимости итерационного процесса может быть записано в следующем виде:

$$2 \frac{\partial w}{\partial p_c} - w_L(q(r)) \Big|_{r=0} > 0. \quad (2.23)$$

Замечание 2.1. *Здесь предполагается, что функция, полученная при малом приращении давления, в паре с точным решением будут удовлетворять условиям Следствия 2.2. Этот факт, вообще говоря, требует доказательства, однако оно выходит за рамки настоящей работы.*

Пример 2.2. Оценим сходимость итерационного процесса при постоянном давлении $p = \text{const}$. Согласно Вэю [31], максимальный прогиб связан со значением давления следующей формулой²:

$$32.4542 (w(0))^3 + 62.0474 (w(0)) = p.$$

Для того чтобы использовать формулу (2.23) нужно из формулы Вэя выразить максимальный прогиб в явном виде, что можно сделать с помощью формулы Кардано для единственного вещественного корня:

$$w(0) = \sqrt[3]{\frac{p}{2a} + \sqrt{\frac{p^2}{4a^2} + \frac{b^3}{27a^3}}} + \sqrt[3]{\frac{p}{2a} - \sqrt{\frac{p^2}{4a^2} + \frac{b^3}{27a^3}}},$$

где $a = 32.4542$, $b = 62.0474$. Линейное же решение при равномерном давлении имеет следующий вид:

$$w_L = \frac{p}{64} (1 - r^2)^2.$$

Подстановка полученных выражений в левую часть (2.23), приводит к некоторой функции $f(p)$, график которой изображен на Рисунке 2.1. Как видно из графика, итерационный процесс будет сходящимся при величине равномерного давления не более 69^3 . Эта оценка подтверждается тестовыми расчетами, приведенными в следующем подразделе.

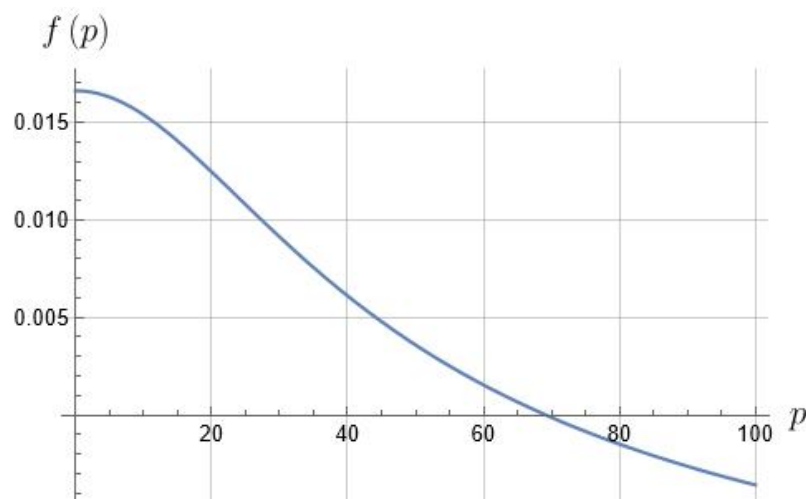


Рисунок 2.1 – К примеру 2.2

²Коэффициенты несколько отличаются от, указанных Вэем, так как в его статье используется безразмерное отличие от (2.6)

³Формула Вэя получена для пластины из материала с коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$

2.1.3 Регуляризация итерационного процесса

Для тестирования итерационного алгоритма, рассмотрим изгиб пластины, нагруженной равномерным давлением $p(r) = p_0$. Перед тем как перейти к конкретной численной реализации необходимо условиться о критерии останова итерационного процесса.

Пусть на i -ом шаге итерационного процесса получено некоторое решение w_i, ϕ_i , тогда при подстановке этого решения в краевую задачу (2.7) – (2.9) все уравнения будут удовлетворены тождественно за исключением первого уравнения (2.7):

$$r \frac{d}{dr} \nabla^2 w_i - w_i' \phi_i' - \frac{p_0 r^2}{2} = \mathfrak{F},$$

где \mathfrak{F} – неуравновешенная сила. Будем считать, что полученное решение приемлемо если работа неуравновешенной силы на перемещениях w_i составляет не более десятой доли процента от работы приложенных сил на тех же перемещениях, т. е. когда выполнено неравенство:

$$\frac{\int \mathfrak{F}' w_i dr}{p_0 \int w_i r dr} := \varepsilon \leq 0.001. \quad (2.24)$$

Замечание 2.2. *Столь малая допустимая погрешность выбрана для того чтобы избежать случая когда начальное приближение, полученное для меньшего значения давления, удовлетворяет (2.24) и не уточняется.*

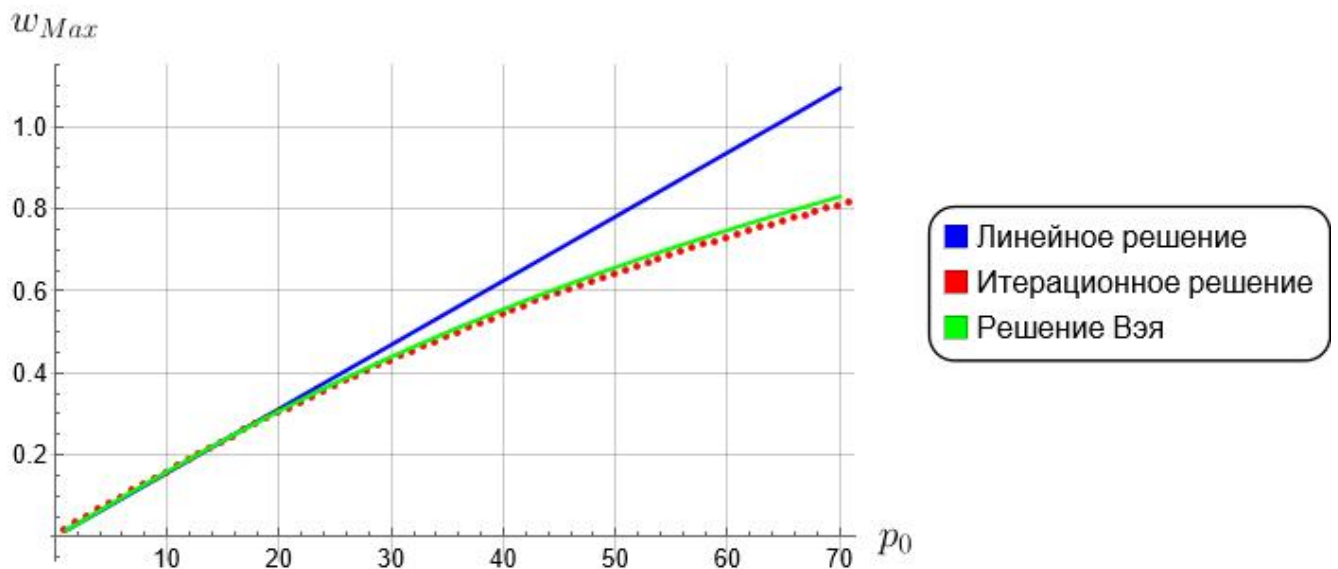
В рамках настоящей работы был реализован итерационный алгоритм, в котором начальное приближение w_0 подбиралось методом продолжения по параметру p_0 , в рамках которого вся нагрузка была разделена на участки и для каждого из них проводился расчет с новым начальным приближением. Результаты работы алгоритма приведены в Таблице 2.1. Видно, что при увеличении давления приходится уменьшать шаг по нагрузке, что связано с уменьшением радиуса сходимости алгоритма при приближении p_0 к критическому значению, определенному ранее. Но даже при уменьшенном шаге число требуемых итераций быстро растет. Это происходит из-за того, что начальное приближение оказывается на самой границе области сходимости где коэффициент сжатия оператора \mathfrak{K} близок к единице.

Сравнение полученной зависимости максимального прогиба от давления, с линейным решением и зависимостью Вэя [31] приведено на Рисунке 2.2. Как

Шаг по давлению	Давление, p_0	$w_0(0)$	$w(0)$	Число итераций	Погрешность, ε (2.24)
1	10	0.139140	0.154226	2	0.000115
	20	0.284074	0.297741	2	0.000863
	30	0.414421	0.426563	3	0.000688
	40	0.527823	0.539144	5	0.000490
	50	0.628972	0.638418	7	0.000841
	60	0.716854	0.726334	17	0.000910
	65	0.758850	0.765532	44	0.000996
	66	0.765532	0.774595	73	0.000967
	67	0.774595	0.781097	150	0.000986
0.5	67.5	0.781097	0.784931	298	0.000995
0.125	67.625	0.784931	0.785887	224	0.000996
0.125	67.750	Приемлемое решение за 500 итераций не достигнуто			

Таблица 2.1 – Модельные расчеты, $\nu = 0.3$

видно, результаты расчета итерационным методом довольно точно совпадают с результатами Взя, но в отличие от них позволяют восстановить полный профиль пластины, а не только значение прогиба в полюса. Однако область применения алгоритма оказывается невелика.

Рисунок 2.2 – Зависимость максимального прогиба от величины давления, $\nu = 0.3$

Для того чтобы иметь возможность строить решения при больших значениях давления, итерационный алгоритм следует модифицировать. Это можно сделать с помощью подхода, представленного в работе [3]. Для иллюстрации идеи этого метода предположим, что при некотором значении давления условие схо-

димости (2.23) не выполняется, т. е. оператор \mathfrak{R} не является сжимающим, но справедливо более слабое условие:

$$3 \frac{\partial w}{\partial p_c} - w_L(q(r)) \Big|_{r=0} > 0, \quad (2.25)$$

которое гарантирует, что если начальное приближение w_0 меньше (в смысле значения при $r = 0$) чем точное решение w на a , то функция $\mathfrak{R}(w_0)$ будет больше w не более чем на $2a$. Хотя следующее приближение и удалилось от точного, но среднее между w_0 и $\mathfrak{R}(w_0)$ оказалось ближе к нему чем начальное приближение. Таким образом, можно существенно улучшить сходимость алгоритма если в качестве очередного приближенного решения на каждой итерации брать не результат действия \mathfrak{R} на предыдущее, а некоторое среднее нескольких предыдущих итераций.

Впрочем условие (2.25) не так уж и сильно расширяет область применения алгоритма. Если построить график левой части (2.25), аналогично тому как это сделано выше для (2.23), то видно (Рисунок 2.3), что давление, при котором модифицированный алгоритм сходится, не превышает 178. Однако идею модификации алгоритма можно распространить на большее число слагаемых.

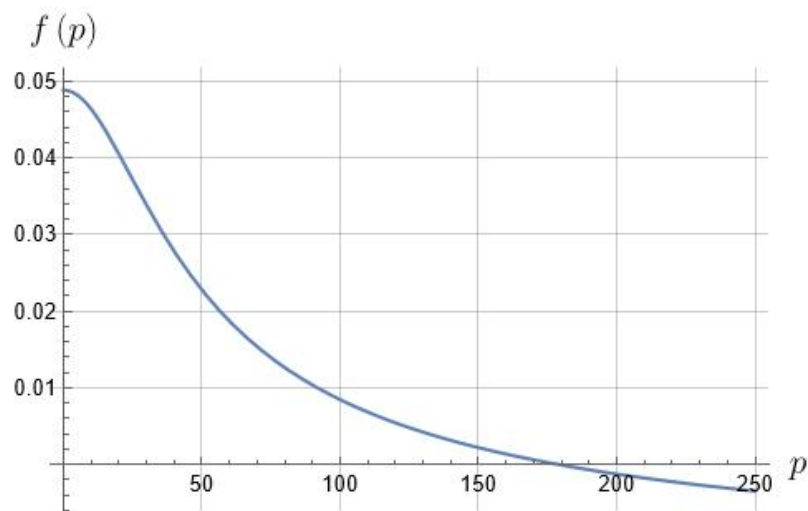


Рисунок 2.3 – К условию 2.25

Пусть в некоторой достаточно широкой области гарантировано, что решение близкое к точному в смысле максимального прогиба на a , после применения оператора \mathfrak{R} удалиться от него не более чем на λa , т. е.:

$$w - w_0 < a \rightarrow \mathfrak{R}(w_0) - w < \lambda a.$$

Тогда рассмотрим следующую последовательность приближений точного решения:

$$\begin{aligned} w_1 &= \mathfrak{R}(w_0), & w_2 &= \mathfrak{R}\left(\frac{w_0 + w_1}{2}\right), & w_3 &= \mathfrak{R}\left(\frac{w_0 + w_1 + w_2}{3}\right), \\ w_4 &= \mathfrak{R}\left(\frac{w_0 + w_1 + w_2 + w_3}{4}\right), & \dots, & & w_i &= \mathfrak{R}\left(\frac{1}{i} \sum_{j=0}^{i-1} w_j\right). \end{aligned}$$

Легко видеть, что сумма S_n первых n слагаемых этой последовательности вычисляется через сумму предыдущих S_{n-1} по формуле:

$$S_n = \mathfrak{R}\left(\frac{S_{n-1} + w_0}{n}\right) + S_{n-1}.$$

Пусть аргумент оператора \mathfrak{R} в последнем выражении меньше точного решения (в смысле максимального прогиба) на некоторую величину A_{n-1} :

$$\frac{S_{n-1} + w_0}{n}(0) = w(0) - A_{n-1},$$

тогда для следующего аналогичного выражения можно сделать следующую оценку (все функции от нуля):

$$A_n = \frac{S_n + w_0}{n+1} - w = \frac{1}{n+1} \left(\mathfrak{R}\left(\frac{S_{n-1} + w_0}{n}\right) + S_{n-1} + w_0 \right) - w < \frac{A_{n-1}}{n+1} (\lambda - n)$$

Таким образом, начиная с некоторого достаточно большого $N > \lambda$, отклонение сумм вида $\frac{S_n + w_0}{n+1}$ от точного решения будет уменьшаться по абсолютному значению с ростом n , т. е. сходимость будет обеспечена.

Преимущество регуляризованного метода при больших прогибах наглядно показано в Таблице 2.2. Расчеты выполнены с единичным шагом по нагрузке. Графики искомых функций и напряжений при $p = 1000$ приведены на Рисунке 2.4. Сравнение максимальных прогибов с прогнозами по формуле Вэя [31] показано на Рисунке 2.5. Видно, что при больших давлениях решение по Вэю дает несколько завышенные значения.

Замечание 2.3. Для того чтобы описанное решение можно было воспроизвести без необходимости последовательного построения решений для всех значений p , в Приложении В приведены первые 10 членов разложений, некоторых из полученных решений. Эти функции могут быть использованы как начальные приближения для восстановления построенных решений и поиска новых

при больших давлениях. Отметим, что, на практике, удобно перед каждой итерацией усекаать текущее приближение до слагаемых порядка r^{20} , так как это позволяет существенно ускорить алгоритм, без потери точности.

Давление, p_0	$w_0(0)$	$w(0)$	Число итераций	Погрешность, ε (2.24)
100	0.994471	1.00026	3	0.000511
200	1.42980	1.43313	4	0.000724
300	1.71799	1.72046	6	0.000087
400	1.93920	1.94119	7	0.000182
500	2.12158	2.12324	8	0.000087
600	2.27937	2.28085	9	0.000386
700	2.41746	2.41874	10	0.000399
800	2.54344	2.54464	11	0.000182
900	2.65704	2.65812	12	0.000568
1000	2.76313	2.76415	13	0.000255

Таблица 2.2 – Модельные расчеты по регуляризованному методу, $\nu = 0.3$

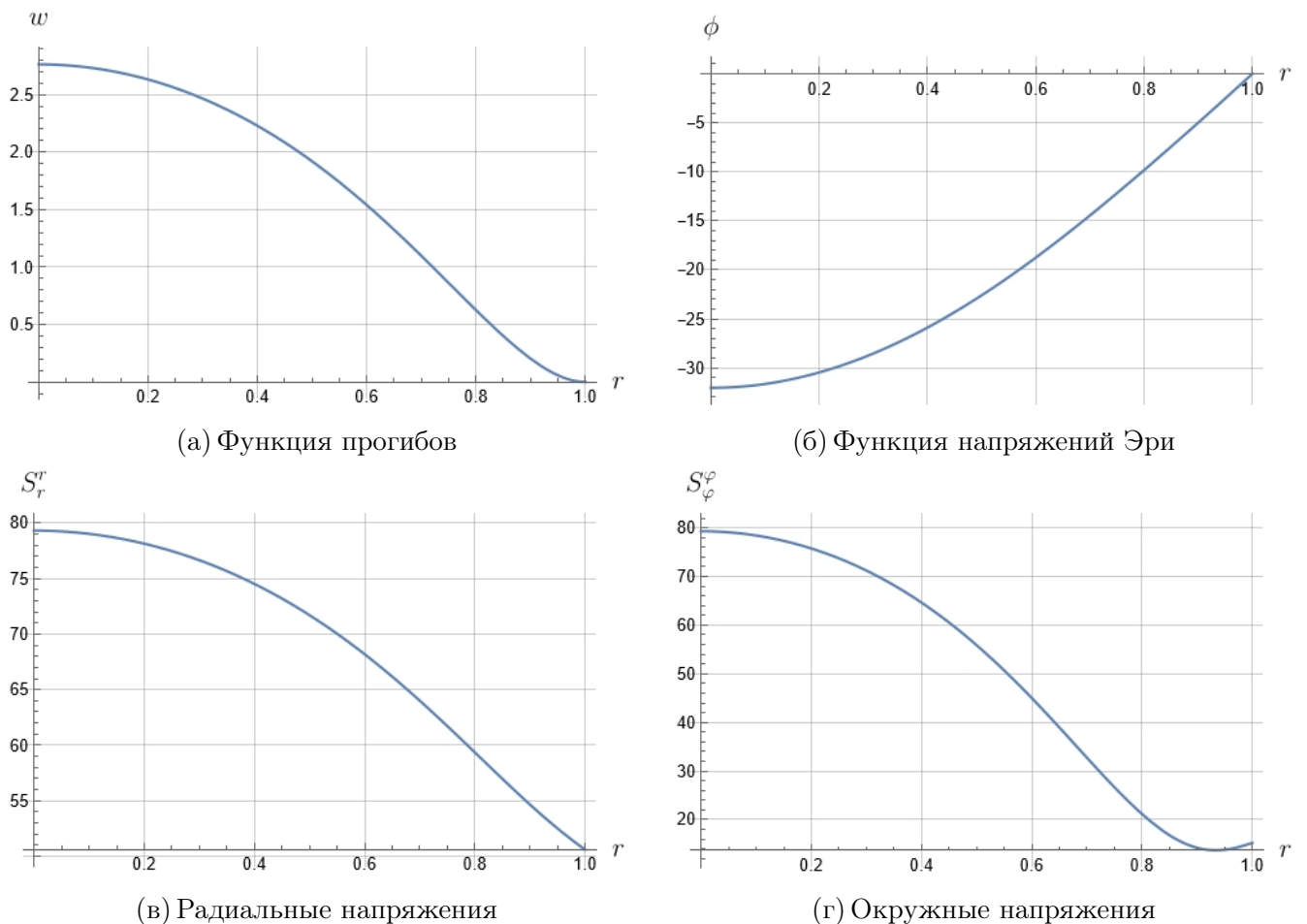


Рисунок 2.4 – Результаты расчета при $p = 1000, \nu = 0.3$

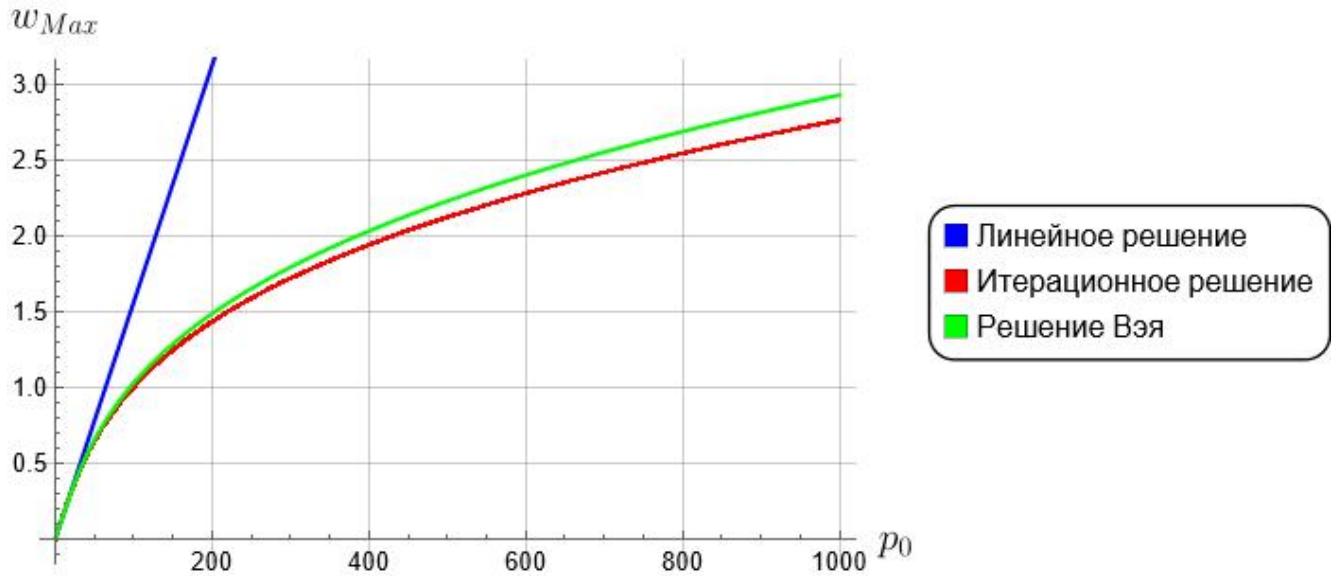


Рисунок 2.5 – Зависимость максимального прогиба от величины давления, $\nu = 0.3$

2.1.4 Итерационный процесс с эквивалентным оператором

Описанный алгоритм позволяет получать решения практически при любом давлении, однако из-за особенностей метода продолжения по параметру суммарное количество итераций, требуемых для одного расчета, достаточно велико. Например, для расчета при $p_0 = 1000$ с единичным шагом всего потребовалось 7838 итераций. И хотя машинное время, затрачиваемое на одну итерацию, не превосходит одной секунды, суммарное время расчета все же значительно. Между тем, как показано выше, здесь мы вынуждены применять продолжение по параметру, ввиду того, что при больших давлениях оператор, действующий на начальное приближение, перестает быть сжимающим. Действительно, мы задаемся некоторым начальным приближением, по нему рассчитываем фиктивное давление и отыскиваем решение линейной задачи соответствующее этому давлению. Однако решение линейной задачи быстро меняется с изменением давления, поэтому даже если мы подобрали начальное приближение достаточно близкое к искомому решению, приращение линейного решения на разности между посчитанным фиктивным давлением и давлением, приводящим к решению, может сильно уводить нас от искомого решения.

При этом решение исходных уравнений Фешля – фон Кармана, напротив, мало меняется при малых приращениях давления, что легко объясняется с точки зрения механики тем, что при некотором значении прогиба натяжение пластины в плоскости становится настолько велико, что начинает серьезно препят-

ствовать дальнейшему изгибу. Поэтому для построения итерационного процесса разумнее отталкиваться от обратного оператора, результат действия которого мало меняется при действии на близкие элементы функционального пространства. В качестве такого оператора можно выбрать обратный к (1.53), как видно из диаграмм 1.7 и 1.8, он как раз обладает требуемым свойством.

Итак, рассмотрим краевую задачу эквивалентную (2.7) – (2.9):

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 w - \chi^2 \nabla^2 w &= p + L(\phi, w) - \chi^2 \nabla^2 w, & r \frac{d}{dr} \nabla^2 \phi + \kappa (w')^2 &= 0, \\ w'|_{r=0} &= 0, & w|_{r=1} &= 0, & w'|_{r=1} &= 0, \\ \phi'|_{r=0} &= 0, & \phi|_{r=1} &= 0, & (r\phi'' - \nu\phi')|_{r=1} &= 0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

Для ее решения организуем итерационный процесс аналогичный (2.11):

$$w_i = w_{\text{СВ}}(p) + \mathcal{G}_w^* (L(\phi_{i-1}, w_{i-1}) - \chi^2 \nabla^2 w_{i-1}), \quad \phi_i = -\kappa \mathcal{G}_\phi \left(\frac{(w'_i)^2}{r} \right), \quad (2.27)$$

где $w_{\text{СВ}}$ – решение (1.55) краевой задачи (1.53), а \mathcal{G}_w^* – ее обратный оператор.

Прежде чем использовать эти формулы необходимо идентифицировать, входящую в них неизвестную константу χ . По своему физическому смыслу она представляет среднее натяжение пластины в плоскости, которое можно отыскать из упрощенного уравнения равновесия, полученного Г. Бергером [40]:

$$u' + \frac{u}{r} + \frac{1}{2} (w')^2 = \frac{\chi^2}{12},$$

решение которого отыскивается непосредственным интегрированием:

$$ru = \frac{\chi^2 r^2}{24} - \frac{1}{2} \int_0^r v_1 (w')^2 dv_1 + C.$$

Полученное решение должно удовлетворять двум однородным краевым условиям на границах участка интегрирования:

$$u|_{r=0} = 0, \quad u|_{r=1} = 0,$$

первое из которых определяет значение константы интегрирования $C = 0$, а второе – искомое натяжение χ :

$$\chi^2 - 12 \int_0^1 v_1 (w')^2 dv_1 = 0. \quad (2.28)$$

Для того чтобы переписать это уравнение в удобном для решения виде необходимо выписать выражение для первой производной (1.55):

$$w' = \frac{1}{\chi^2} \int_0^r pv \left[\frac{I_1(\chi r)}{I_1(\chi)} + \chi I_0(\chi v) \frac{I_1(\chi) K_1(\chi r) - I_1(\chi r) K_1(\chi)}{I_1(\chi)} - \frac{1}{r} \right] dv \\ + \frac{1}{\chi^2} \int_r^1 pv \left[\frac{I_1(\chi r)}{I_1(\chi)} - \chi I_1(\chi r) \frac{I_1(\chi) K_0(\chi v) + I_0(\chi v) K_1(\chi)}{I_1(\chi)} \right] dv.$$

Прежде чем переходить к определению подынтегральной функции в (2.28) целесообразно упростить полученное выражение, определив функцию давления. Как и ранее, тестовые расчеты будем проводить для случая постоянного давления $p = p_0$. Тогда если воспользоваться соотношениями, связывающими функции Бесселя нулевого порядка с производными функций первого порядка [219]:

$$v I_0(\chi v) = \frac{(v I_1(\chi v))'}{\chi}, \quad v K_0(\chi v) = -\frac{(v K_1(\chi v))'}{\chi}, \quad (2.29)$$

нетрудно получить простое выражение:

$$w' = \frac{p_0}{2\chi^2} \left(\frac{I_1(\chi r)}{I_1(\chi)} - r \right),$$

подстановка которого в (2.28) приводит к следующему уравнению:

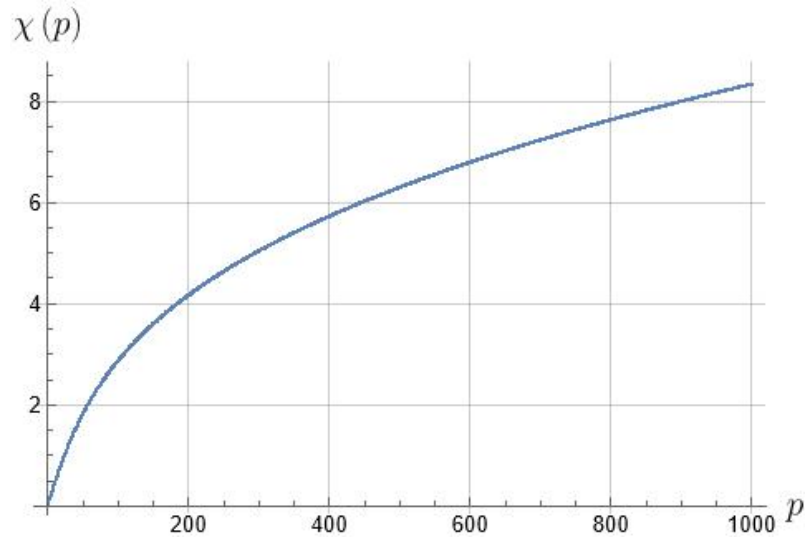
$$\chi^2 - \frac{3p_0^2}{\chi^4} \int_0^1 \left(\frac{I_1^2(\chi v)}{I_1^2(\chi)} v - 2 \frac{I_1(\chi v)}{I_1(\chi)} v^2 + v^3 \right) dv = 0. \quad (2.30)$$

Если учесть, что производная функции Инфельда нулевого порядка пропорциональна этой же функции первого порядка, то последние два слагаемых подынтегрального выражения легко интегрируются с помощью (2.29):

$$\int_0^1 \left(-2 \frac{I_1(\chi v)}{I_1(\chi)} v^2 + v^3 \right) dv = \frac{2}{\chi} \left(\frac{2}{\chi} - \frac{I_0(\chi)}{I_1(\chi)} \right) + \frac{1}{4},$$

а для интегрирования первого слагаемого удобно воспользоваться результатом Ломмеля [216] для цилиндрических функций:

$$\int_0^1 J_1^2(i\chi v) v dv = \frac{1}{2} \left[J_1^2(i\chi) + J_0^2(i\chi) - \frac{2}{i\chi} J_0(i\chi) J_1(i\chi) \right],$$

Рисунок 2.6 – Зависимость $\chi(p_0)$

который с учетом связи между функцией Бесселя первого рода и функцией Инфельда:

$$I_n(v) = i^{-n} J_n(iv),$$

представляется в следующем виде:

$$\int_0^1 I_1^2(\chi v) v dv = \frac{1}{2} \left[I_1^2(\chi) - I_0^2(\chi) + \frac{2}{\chi} I_0(\chi) I_1(\chi) \right].$$

Подставляя полученные выражения в исходное уравнение (2.30), удается получить трансцендентное уравнение для определения константы χ в зависимости от величины давления p_0 :

$$\chi^2 - \frac{3p_0^2}{\chi^4} \left[\frac{3}{4} + \frac{4}{\chi^2} - \frac{I_0^2(\chi)}{2I_1^2(\chi)} - \frac{I_0(\chi)}{\chi I_1(\chi)} \right] = 0. \quad (2.31)$$

Оно может быть решено численно, например, методом касательных Ньютона. Зависимость его решений от величины давления p_0 приведена на Рисунке 2.6.

Теперь можно вернуться к итерационному процессу (2.27). Результаты модельных расчетов при больших давлениях приведены в Таблице 2.3 (см. Замечание 2.4). В качестве начальных приближений выбирались соответствующие решения (1.53). Отдельно отметим, что здесь не использовалось продолжение по нагрузке, т. е. указанное число итераций для каждого расчета дает полное представление о скорости построения решения. Таким образом, видно, что формулы (2.27) позволяют строить решение на порядки быстрее (2.11). Для сравнения, решение при $p_0 = 1000$ по этому алгоритму строится за 10 итераций, против 7838 по алгоритму, описанному выше. Однако нужно отметить,

что время расчета одной итерации несколько увеличилось из-за того, что в этом алгоритме уже не удается использовать аналитические выражения для интегралов и приходится прибегать к квадратурному интегрированию с последующей интерполяцией.

Давление, $p_0 \cdot 10^{-3}$	$w_0(0)$	$w(0)$	Число итераций	Погрешность, ε (2.24)
1	2.68305	2.76242	6	0.000566
5	4.67780	4.88799	6	0.000850
10	5.90849	6.20352	6	0.000888
50	10.1271	10.7153	6	0.000818
100	12.7642	13.5361	6	0.000724
500	21.8352	23.2401	6	0.000358
1000	27.5126	29.3155	6	0.000150
5000	47.0494	50.2079	5	0.000756
10000	59.2793	63.3072	5	0.000744
50000	137.690	108.635	10	0.000888

Таблица 2.3 – Модельные расчеты по алгоритму с эквивалентным оператором, $\nu = 0.3$

Замечание 2.4. *Выбранные для модельных расчетов значения давлений, конечно, являются завышенными. В реальности едва ли можно представить пластину из линейно-упругого материала способную столь сильно деформироваться без появления неупругих деформаций. Однако в этом разделе нас, главным образом, интересовала стабильность построенной численной схемы решения. Расчеты реальных, экспериментально исследованных, пластин будут приведены в Главе 3.*

В заключение этого раздела приведем график функции прогибов при $p_0 = 5 \cdot 10^7$ и график изменения погрешности в ходе итерационного процесса для этого расчета (Рисунок (2.7)). Отметим, что из-за больших прогибов точка перегиба функции w практически сливается с границей пластины, что приводит к тому, что в окрестности границы напряжения существенно увеличиваются. Интересно также рассмотреть профиль деформированной поверхности пластины при таком нагружении. Для того чтобы его построить необходимо выбрать конкретное соотношение между радиусом и толщиной пластины. На Рисунке 2.8 приведен профиль поверхности (отнесенный к R) для пластины с $R/h = 100$. Как видно из рисунка, при заданном давлении перемещения точек поверхности

такой пластины становятся настолько велики, что ее поверхность выходит за граничный контур. На практике такая картина нередко наблюдается для мембран, выполненных из эластомерных материалов, например, похожий профиль приведен в [220].

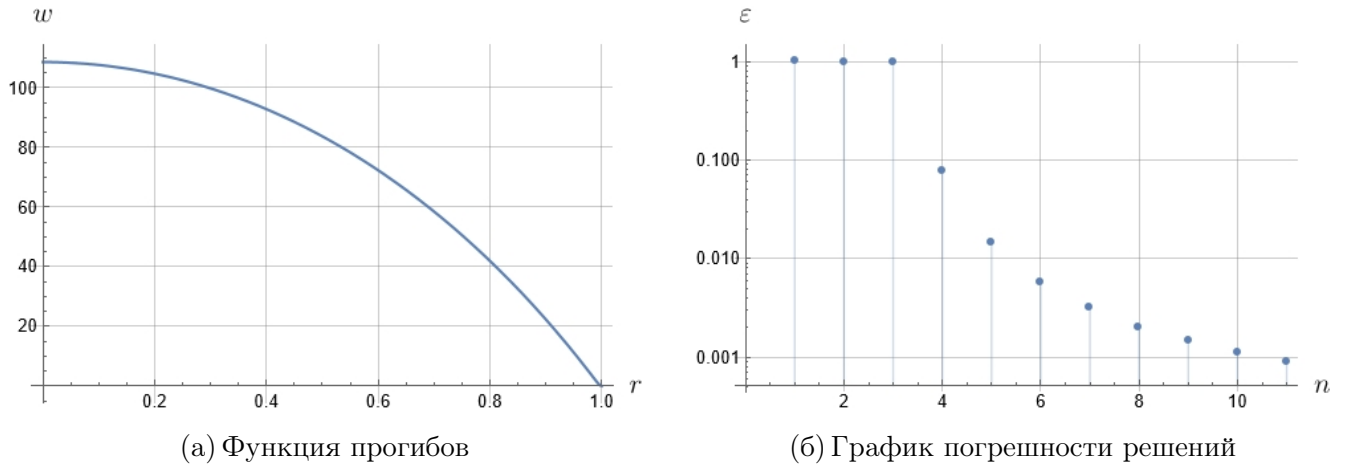


Рисунок 2.7 – К расчету при $p = 5 \cdot 10^7$, $\nu = 0.3$

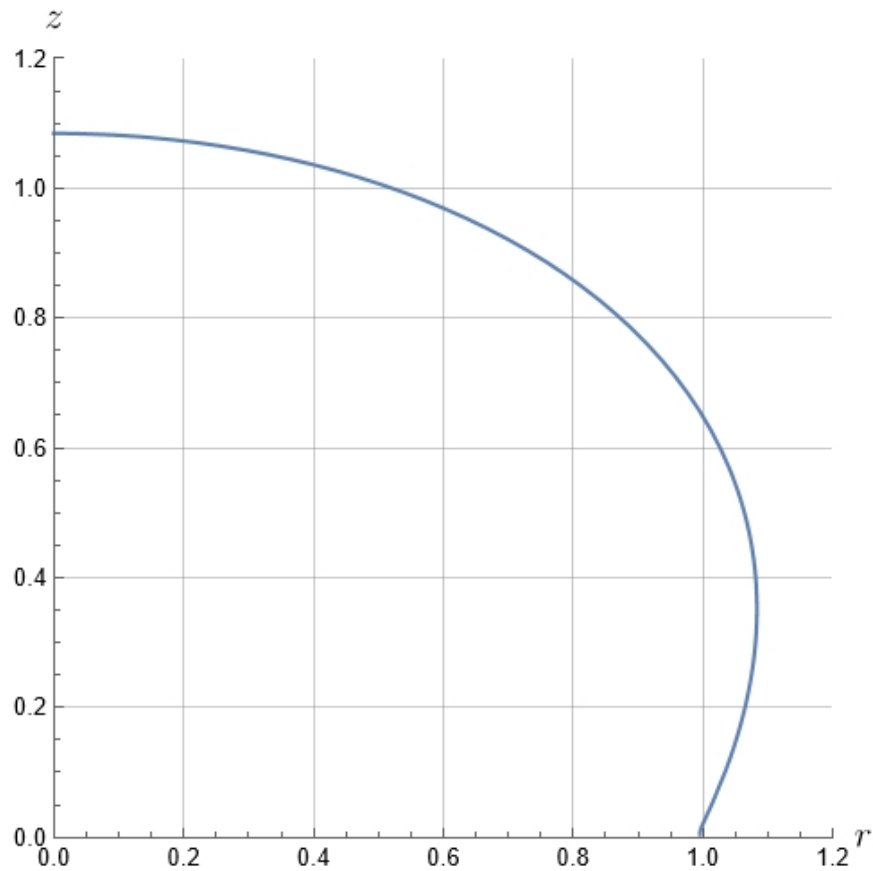


Рисунок 2.8 – Профиль деформированной поверхности пластины, отнесенный к ее радиусу ($R/h = 100$)

2.1.5 Учет несовместных деформаций

Рассмотрим теперь уравнения изгиба пластины с несовместными деформациями (1.33) – (1.34). В безразмерных переменных они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 w - L(\phi, w) + \frac{\mathfrak{b}h}{\mathfrak{a}} \left[(\nabla^2 w)^2 - (1 - \nu) L(w, w) \right] - \\ - \frac{6(1 + \nu)(\mathfrak{a} - 1)R^2}{\mathfrak{a}h^2} \nabla^2 w = \frac{p}{\mathfrak{a}}, \\ \nabla^2 \nabla^2 \phi + \kappa L(w, w) - \frac{\mathfrak{b}h(1 + \nu)}{\mathfrak{a}} \nabla^2 \nabla^2 w = 0. \end{aligned}$$

Как и ранее, второе уравнение допускает интегрирование с множителем r :

$$r \frac{d}{dr} \nabla^2 \phi + \kappa (w')^2 - \frac{\mathfrak{b}h(1 + \nu)}{\mathfrak{a}} r \frac{d}{dr} \nabla^2 w = 0.$$

Отметим, что при формулировке краевых условий (2.8), (2.9) мы нигде не использовали предположение об отсутствии несовместных деформаций, что позволяет перенести их на рассматриваемый случай без изменений и представить краевую задачу в виде аналогичном (2.26):

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 w - \left(\chi_0^2 + \frac{6(1 + \nu)(\mathfrak{a} - 1)R^2}{\mathfrak{a}h^2} \right) \nabla^2 w = \\ = \frac{p}{\mathfrak{a}} + L(\phi, w) - \frac{\mathfrak{b}h}{\mathfrak{a}} \left[(\nabla^2 w)^2 - (1 - \nu) L(w, w) \right] - \chi_0^2 \nabla^2 w, \\ r \frac{d}{dr} \nabla^2 \phi + \kappa (w')^2 - \frac{\mathfrak{b}h(1 + \nu)}{\mathfrak{a}} r \frac{d}{dr} \nabla^2 w = 0, \\ w'|_{r=0} = 0, \quad w|_{r=1} = 0, \quad w'|_{r=1} = 0, \\ \phi'|_{r=0} = 0, \quad \phi|_{r=1} = 0, \quad (r\phi'' - \nu\phi')|_{r=1} = 0, \end{aligned}$$

где χ_0 – как и ранее χ , коэффициент, ассоциированный с равномерным натяжением пластины. Если пластина значительно натянута в силу несовместных деформаций, то его можно положить равным нулю в силу того, что отпадает необходимость в “фиктивном” натяжении пластины, которое мы вводили для улучшения сходимости итерационного процесса. В противном случае χ_0 определяется из уравнения (2.31) (в случае постоянного давления) или аналогичного уравнения, полученного из (2.28).

Как и ранее, решение краевой задачи будем отыскивать методом последова-

тельных приближений, по формулам:

$$w_i = w_{\text{CB}} \left(\frac{p}{\mathbf{a}} \right) + \mathcal{G}_w^* \left(L(\phi_{i-1}, w_{i-1}) - \frac{\mathbf{b}h}{\mathbf{a}} \left[(\nabla^2 w_{i-1})^2 - (1 - \nu) L(w_{i-1}, w_{i-1}) \right] - \chi_0^2 \nabla^2 w \right),$$

$$\phi_i = -\mathcal{G}_\phi \left(\kappa \frac{(w'_i)^2}{r} - \frac{\mathbf{b}h(1 + \nu)}{\mathbf{a}} \frac{d}{dr} \nabla^2 w_i \right).$$

Здесь при определении решения $w_{\text{CB}}(p)$ и выражения оператора \mathcal{G}_w^* , считаем, что $\chi^2 = \chi_0^2 + \frac{6(1+\nu)(\mathbf{a}-1)R^2}{\mathbf{a}h^2}$. Кроме того, используется модифицированная мера погрешности решения:

$$\varepsilon^* := \frac{\int \tilde{\mathfrak{F}} w_i r dr}{\int p w_i r dr}. \quad (2.32)$$

где $\tilde{\mathfrak{F}}$ – неуравновешенное давление, вычисляемое по формуле:

$$\tilde{\mathfrak{F}} = \nabla^2 \nabla^2 w - L(\phi, w) + \frac{\mathbf{b}h}{\mathbf{a}} \left[(\nabla^2 w)^2 - (1 - \nu) L(w, w) \right] - \frac{6(1 + \nu)(\mathbf{a} - 1)R^2}{\mathbf{a}h^2} \nabla^2 w - \frac{p}{\mathbf{a}}.$$

Из представленных уравнений видно, что влияние параметров \mathbf{a}, \mathbf{b} на деформацию пластины зависит от ее геометрических параметров. Поэтому при проведении модельных расчетов разумно варьировать не сами параметры \mathbf{a}, \mathbf{b} , а вспомогательные параметры, учитывающие размеры пластины:

$$\tilde{\mathbf{a}} = (\mathbf{a} - 1) \frac{R^2}{h^2}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}h. \quad (2.33)$$

Результаты расчетов при постоянном давлении $p = p_0 = 1000$ и различных $\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}$ приведены в Таблице 2.4. Для предельных случаев – $\tilde{\mathbf{a}} = 2, \tilde{\mathbf{b}} = -0.5$ и $\tilde{\mathbf{a}} = -2, \tilde{\mathbf{b}} = 0.5$, на Рисунке 2.9 приведены графики искомых функций.

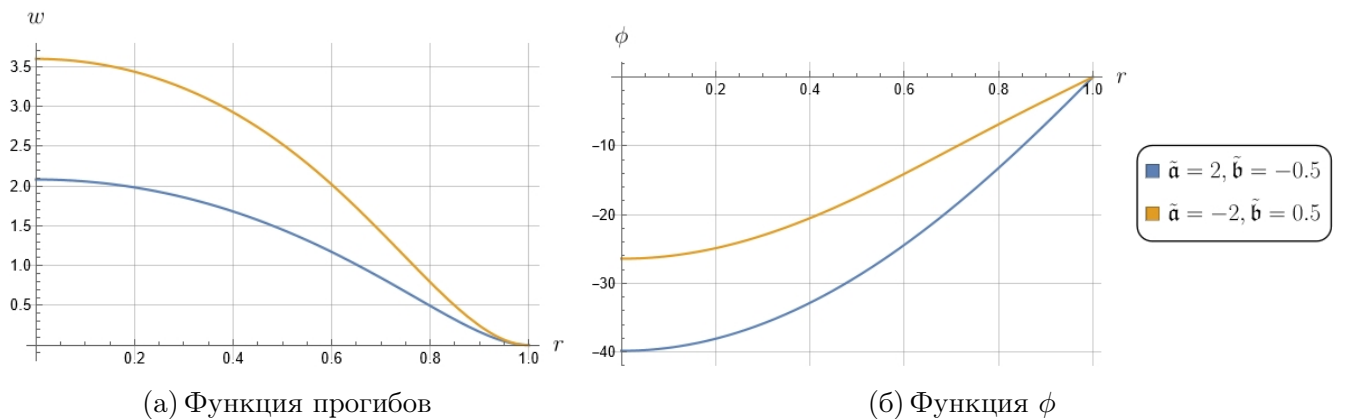


Рисунок 2.9 – Результаты расчета при $p_0 = 1000, \nu = 0.3$

$\tilde{\mathbf{a}}$	$\tilde{\mathbf{b}}$	$w(0)$	Число итераций	Погрешность, ε^* (2.32)
-2	-0.5	2.41304	6	0.000898
-2	-0.1	2.83835	4	0.000273
-2	0	2.95850	5	0.000552
-2	0.1	3.08288	5	0.000312
-2	0.5	3.59779	12	0.000990
-1	-0.5	2.32492	10	0.000777
-1	-0.1	2.74403	6	0.000839
-1	0	2.86081	4	0.000837
-1	0.1	2.98142	4	0.000509
-1	0.5	3.49395	11	0.000941
0	-0.5	2.24333	9	0.000828
0	-0.1	2.64451	3	0.000766
0	0	2.76242	6	0.000566
0	0.1	2.88252	7	0.000736
0	0.5	3.38704	6	0.000966
1	-0.5	2.16312	6	0.000711
1	-0.1	2.55160	4	0.000735
1	0	2.66427	5	0.000794
1	0.1	2.78176	6	0.000789
1	0.5	3.28271	5	0.000283
2	-0.5	2.08176	3	0.000844
2	-0.1	2.46100	6	0.000831
2	0	2.56971	7	0.000817
2	0.1	2.68358	8	0.000773
2	0.5	3.17362	15	0.000949
Расчет проведен при $p_0 = 1000$, $\nu = 0.3$, $R = 1$, $h = 0.001$				

Таблица 2.4 – Модельные расчеты с учетом несовместных деформаций

Анализ результатов модельных расчетов показывает, что параметр $\tilde{\mathbf{a}}$, ассоциированный с предварительным натяжением, серьезно влияет на жесткость пластины. Отметим случаи $\tilde{\mathbf{a}} < 0$, отвечающие важным для практики случаям, когда до начала подачи давления пластина “смята”, что приводит к тому, что она начинает сопротивляться деформации не сразу, а после того как “расправится”. Параметр $\tilde{\mathbf{b}}$ влияет несколько более сложным образом – и как дополнительный изгибающий момент и как дополнительное натяжение. В случае круглой пластины увеличение этого параметра приводит к увеличению ее прогиба, однако, как показано далее, при деформировании пластины с иной геометрией

может наблюдаться противоположная картина. Впрочем, если параметры \mathbf{a} , \mathbf{b} сопоставимы между собой, то влияние параметра $\tilde{\mathbf{b}}$ оказывается пренебрежимо малым по сравнению с $\tilde{\mathbf{a}}$ ввиду того, что толщина пластины полагается малой. В этой связи для практических расчетов можно предложить более простую модель с одним параметром, который нетрудно определить из эксперимента:

$$\nabla^2 \nabla^2 w - L(\phi, w) - 6(1 + \nu) \epsilon \frac{R^2}{h^2} \nabla^2 w = p, \quad \nabla^2 \nabla^2 \phi + \kappa L(w, w) = 0. \quad (2.34)$$

Здесь предполагается, что \mathbf{a} отличается от единицы на малую величину ϵ .

2.2 Прямоугольная пластина

Рассмотрим теперь уравнения изгиба (1.33) – (1.34), определенные в прямоугольной области:

$$\Omega = \{ \mathbf{X} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}, \quad x \in (-a, a), \quad y \in (-b, b) \},$$

с границей:

$$\partial\Omega = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2,$$

$$\mathcal{E}_1 = \{ \mathbf{X} = \pm a \mathbf{i} + y \mathbf{j}, \quad y \in (-b, b) \}, \quad \mathcal{E}_2 = \{ \mathbf{X} = x \mathbf{i} + \pm b \mathbf{j}, \quad x \in (-a, a) \}.$$

На всей границе области заданы условия жесткой заделки, которые в этом случае удобно разбивать на два типа:

– Условия жесткой заделки (в смысле изгиба):

$$w|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}|_{\mathcal{E}_1} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y}|_{\mathcal{E}_2} = 0. \quad (2.35)$$

– Условия на перемещения в плоскости пластины:

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.36)$$

Последняя группа условий создает некоторые трудности при решении краевой задачи, поэтому ее иногда заменяют на упрощенные условия, при которых края пластины не смещаются в поперечных направлениях, но могут свободно деформироваться в продольном:

$$u|_{\mathcal{E}_1} = 0, \quad v|_{\mathcal{E}_2} = 0, \quad T_{xy}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.37)$$

В настоящем исследовании рассмотрены оба варианта краевых условий.

Перед тем как переходить к построению решения, краевые условия (2.36), (2.37) необходимо переформулировать в терминах искомым функций w и ϕ . Для этого нужно выразить перемещения в плоскости пластины через усилия (1.27), т. е. через производные функции ϕ , что можно сделать с помощью формулы Чезаро. Кратко напомним ее смысл. Пусть требуется найти перемещения некоторой точки M трехмерного континуума если известно перемещение некоторой опорной точки M_0 и тензорное поле какой-нибудь меры деформации. Очевидно, что если в каждой точке континуума задан тензор градиента перемещений $\nabla \mathbf{u}$, то задача не представляет никаких трудностей:

$$\mathbf{u}_M = \mathbf{u}_{M_0} + \int_{M_0}^M \nabla \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}.$$

Однако меры деформации содержат не всю информацию о перемещениях точек континуума в силу того, что при их построении, в соответствии с принципом материальной индифферентности, обычно отбрасывают часть, ассоциированную с поворотами точек континуума как жесткого целого. Таким образом задача определения поля перемещений сводится к задаче восстановления тензора градиента перемещений по заданной мере деформации. В случае малых деформаций эта задача решается достаточно просто, соответствующая формула приведена в любом руководстве по линейной теории упругости, например в [221]:

$$\mathbf{u}_M = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \int_{M_0}^M [\boldsymbol{\varepsilon} + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_M) \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon})] \cdot d\mathbf{x}, \quad (2.38)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор инфинитезимальных деформаций, а $\boldsymbol{\omega}_0$ – сопутствующий вектор матрицы поворота как жесткого целого.

В случае когда задана мера конечной деформации, задача восстановления градиента перемещений достаточно сложна и требует некоторых специальных подходов, с которыми можно ознакомиться, например, в работах [222–224]. Однако модель Фешля – фон Кармана не является полностью нелинейной, она учитывает лишь конечные повороты, связанные с прогибом, в то время как деформации в плоскости пластины полагаются инфинитезимальными. Это легко

увидеть если переписать компоненты тензора деформаций \mathbf{E} (1.24) в декартовых координатах⁴ (при $z = 0$) и выделить в них линейные и нелинейные части:

$$E_{xx} = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\varepsilon_{xx}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad E_{yy} = \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\varepsilon_{yy}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad E_{xy} = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)}_{\varepsilon_{xy}} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Эти деформации в свою очередь выражаются через производные ϕ теми же соотношениями, которые связывают напряжения и деформации в плоской задаче линейной теории упругости:

$$E_{xx} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right), \quad E_{yy} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right), \quad E_{xy} = -\frac{1}{G} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}. \quad (2.39)$$

Несмотря на то, что из-за наличия несовместных деформаций напряжения в пластине уже не выражаются напрямую через ϕ , эти формулы остаются верными. В этом можно убедиться, переписав усилия из (1.27) в декартовых координатах:

$$\tilde{T}_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2} (E_{xx} + \nu E_{yy}), \quad \tilde{T}_{yy} = \frac{E}{1 - \nu^2} (E_{yy} + \nu E_{xx}), \quad \tilde{T}_{xy} = \frac{E}{1 + \nu} E_{xy}.$$

Из соотношений (2.39) можно выразить слагаемые, ассоциированные с инфинитезимальными деформациями, через искомые функции w , ϕ :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \varepsilon_{xy} = -\frac{2}{G} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Таким образом, перемещения в плоскости пластины можно определить, воспользовавшись классической формулой Чезаро (2.38) заменив формулы связи деформаций и напряжений выписанными модифицированными соотношениями:

$$u_M = u_0 - \omega_{0z} \times (y - y_0) + \int_{M_0}^M \left[\left(E_{xx} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \mathbf{i} + E_{xy} \mathbf{j} \right] \cdot d\mathbf{x}, \\ v_M = v_0 + \omega_{0z} \times (x - x_0) + \int_{M_0}^M \left[\left(E_{yy} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \mathbf{j} + E_{xy} \mathbf{i} \right] \cdot d\mathbf{x}.$$

⁴В рамках этого раздела мы не будем различать ко- и контравариантные компоненты векторов и будем записывать все компоненты полей с нижними индексами

Эти соотношения могут быть существенно упрощены за счет удачного выбора путей интегрирования, например, в случае когда пути параллельны координатным осям формулы приобретут следующий вид:

$$u_M = u_0 - \omega_{0z} \times (y - y_0) + \int_{x_{M_0}}^{x_M} \left[E_{xx} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx,$$

$$v_M = v_0 + \omega_{0z} \times (x - x_0) + \int_{y_{M_0}}^{y_M} \left[E_{yy} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy.$$

Кроме того, в случае когда функция распределения давления p , а значит и искомые функции w , ϕ , четные по обеим координатам, то центр пластины не будет перемещаться в ее плоскости, поэтому интегрирование в формулах выше удобно вести из центра:

$$u(x, 0) = \int_0^x \left[E_{xx} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx, \quad v(0, y) = \int_0^y \left[E_{yy} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy.$$

В дальнейшем, для сокращения выкладок, будем считать, что все рассматриваемые функции четные по обеим координатам⁵:

$$\{w, \phi, p\} \subset \mathcal{F}_s = \{f \in \mathcal{L}^2(\Omega) : f(x, y) = f(-x, y), f(x, y) = f(x, -y)\}.$$

С учетом полученных соотношений краевые условия на перемещения (2.37) могут сразу же быть записаны через искомые функции:

$$u(a, 0) = -u(-a, 0) = \int_0^a \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx = 0,$$

$$v(0, b) = -v(0, -b) = \int_0^b \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy = 0.$$

Однако, для определения части краевых условий (2.36), а именно условий для u на \mathcal{E}_2 и v на \mathcal{E}_1 , удобнее вести интегрирование не из центра, а от одного из

⁵В случае нагрузки общего вида представленный алгоритм также может успешно быть использован, однако выражения станут более громоздкими

смежных краев:

$$u(x, b) = u(x, -b) = \int_{-a}^x \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \Big|_{y=\pm b} = 0,$$

$$v(a, y) = v(a, -y) = \int_{-b}^y \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \Big|_{x=\pm a} = 0.$$

В силу краевых условий (2.35) и того, что функции u , v нечетные, эти соотношения могут быть упрощены:

$$u(x, b) = u(x, -b) = \int_0^x \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \right] dx \Big|_{y=\pm b} = 0,$$

$$v(a, y) = v(a, -y) = \int_0^y \left[\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \right] dy \Big|_{x=\pm a} = 0.$$

Замечание 2.5. Эти условия могут быть не очень удобны для применения, так как координаты входят в них как пределы интегрирования, однако они могут быть заменены на эквивалентные, учитывая тот факт, что любая непрерывная функция тождественно равна нулю тогда и только тогда когда то же верно для ее производной и, кроме того, существует хотя бы одна точка где эта функция обращается в ноль:

$$\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \Big|_{y=\pm b} = 0, \quad \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=\pm a} = 0.$$

Вместе с тем, в этом случае придется использовать менее удобный набор проекторов.

Полученные соотношения позволяют сформулировать краевую задачу (1.33) – (1.34), (2.35) – (2.36) в терминах только лишь двух функций w и ϕ , однако в случае второй задачи, с условиями (2.37), требуется перейти от усилий T_{xy} к ϕ . В случае бездефектной среды связь между этими функциями очевидна и заложена на уровне определения ϕ , однако в нашем случае имеет место более сложная связь, которую можно получить из выражений (1.28) и (1.32), записанных в декартовых координатах:

$$T_{xy} = -\mathbf{a}h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\mathbf{b}h^3}{12} \widetilde{M}_{xy}, \quad \text{где} \quad \widetilde{M}_{xy} = -\frac{E}{1 + \nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Заметим, что из условий (2.35) следует, что смешанная производная функции w , а значит и момент \widetilde{M}_{xy} , равны нулю на всем контуре (за исключением угловых точек). Таким образом, условия (2.37) записываются в таком же виде, как и для пластины без несовместных деформаций:

$$u|_{\mathcal{E}_1} = 0, \quad v|_{\mathcal{E}_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \Big|_{\partial \Omega} = 0.$$

Перейдем к построению решений. Как и ранее, сперва рассмотрим частный случай без несовместных деформаций, когда $\mathbf{a} = \mathbf{1}$, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Прежде чем выписать краевые задачи целесообразно ввести безразмерные переменные:

$$\tilde{x} := \frac{x}{a}, \quad \tilde{y} := \frac{y}{b}, \quad \tilde{z} := \frac{z}{h}, \quad \tilde{w} := \frac{w}{h}, \quad \tilde{\phi} := \frac{\phi h}{D}, \quad \tilde{p} := \frac{pa^2 b^2}{Dh}. \quad (2.40)$$

В этих переменных общие уравнения двух краевых задач принимают вид:

$$\tilde{\nabla}^2 \tilde{\nabla}^2 \tilde{w} - L(\tilde{w}, \tilde{\phi}) = \tilde{p}, \quad \tilde{\nabla}^2 \tilde{\nabla}^2 \tilde{\phi} + \kappa L(\tilde{w}, \tilde{w}) = 0, \quad (2.41)$$

$$\tilde{w}|_{\partial \Omega} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\mathcal{E}_1} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \Big|_{\mathcal{E}_2} = 0, \quad (2.42)$$

$$\int_0^1 \left[\alpha \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}^2} - \nu \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}^2} - \kappa \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 \right] d\tilde{x} = 0, \quad (2.43)$$

$$\int_0^1 \left[\beta \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}^2} - \nu \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}^2} - \kappa \left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right] d\tilde{y} = 0, \quad (2.44)$$

где $\kappa = 6(1 - \nu^2)$, $\alpha = \beta^{-1} = \frac{a^2}{b^2}$, а $\tilde{\nabla}^2 \tilde{\nabla}^2$ – модифицированный бигармонический оператор:

$$\tilde{\nabla}^2 \tilde{\nabla}^2 f = \beta \frac{\partial^4 f}{\partial \tilde{x}^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{y}^2} + \alpha \frac{\partial^4 f}{\partial \tilde{y}^4}. \quad (2.45)$$

Для формулировки краевой задачи к этим уравнениям следует добавить один из двух наборов краевых условий в зависимости от предположения о деформировании краев пластины:

– подвижные края:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \Big|_{\partial \Omega} = 0; \quad (2.46)$$

– неподвижные края:

$$\int_0^{\tilde{x}} \left[\alpha \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}^2} - \nu \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}^2} \right] d\tilde{x} \Big|_{\tilde{y}=\pm 1} = 0, \quad \int_0^{\tilde{y}} \left[\beta \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}^2} - \nu \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}^2} \right] d\tilde{y} \Big|_{\tilde{x}=\pm 1} = 0. \quad (2.47)$$

До конца главы все выкладки проводятся в безразмерных переменных (2.40), а под бигармоническим оператором понимается (2.45), поэтому далее будем опускать символ \sim , за исключением отдельных случаев, в которых даны соответствующие пояснения.

2.2.1 Построение базиса функционального пространства

Идея решения состоит в разложении искомых функций по некоторому базису гильбертового пространства $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Согласно теореме фон Неймана [225] система собственных функций любого самосопряженного регулярного оператора образует базис, поэтому для решения рассматриваемой краевой задачи разумно выбрать такой оператор, и соответственно базис, чтобы хотя бы часть краевых условий была заведомо выполнена, например:

$$\mathcal{L}(f) = \beta \frac{\partial^4 f}{dx^4} + \alpha \frac{\partial^4 f}{dy^4}, \quad f \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial f}{dx} \Big|_{\mathcal{E}_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{dy} \Big|_{\mathcal{E}_2} = 0. \quad (2.48)$$

Кроме того, этот оператор удобен тем, что он является составной частью (2.45) и его собственные функции, f_k , легко находятся как всевозможные произведения вида:

$$f_k(x, y) = h_i(x) h_j(y),$$

где h_i – собственные функции одномерного оператора \mathcal{L}_v , действующего на функции $f(v)$, определенные на отрезке $(-1, 1) \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}_v(f) = \frac{\partial^4 f(v)}{dv^4}, \quad f \Big|_{v=\pm 1} = 0, \quad \frac{\partial f}{dv} \Big|_{v=\pm 1} = 0. \quad (2.49)$$

Для определения собственных функций \mathcal{L}_v рассмотрим вспомогательную задачу Штурма – Лиувилля:

$$\frac{\partial^4 f}{dv^4} - \eta^4 f = 0, \quad f \Big|_{v=\pm 1} = 0, \quad \frac{\partial f}{dv} \Big|_{v=\pm 1} = 0.$$

Фундаментальная система ее решений имеет вид:

$$\Psi = \{ \sin(\eta v), \cos(\eta v), \sinh(\eta v), \cosh(\eta v) \}.$$

Линейная комбинация этих функций может удовлетворять краевым условиям только если выполнено условие:

$$[\sinh(\eta) \cos(\eta) - \sin(\eta) \cosh(\eta)] [\sinh(\eta) \cos(\eta) + \sin(\eta) \cosh(\eta)] = 0,$$

которое, в свою очередь, распадается на два:

$$\operatorname{th}(\lambda) + \operatorname{tg}(\lambda) = 0, \quad \operatorname{th}(\mu) - \operatorname{tg}(\mu) = 0. \quad (2.50)$$

Соответственно множество собственных чисел оператора (2.49) состоит из двух последовательностей:

$$\{\eta_m\}_{m=1}^{\infty} = \{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty} \cup \{\mu_m\}_{m=1}^{\infty},$$

корней трансцендентных уравнений (2.50). Эти корни могут быть найдены численно, однако в силу того, что при возрастании аргумента гиперболический тангенс асимптотически стремится к единице, старшие корни могут с достаточной точностью быть найдены по формулам:

$$\lambda_m = \pi m - \frac{\pi}{4}, \quad \mu_m = \pi m + \frac{\pi}{4}.$$

Значения корней, вычисленные численно и по формулам выше, приведены в таблицах 2.5, 2.6. Видно, что за исключением первых корней, точность асимптотических формул более чем достаточна.

Номер корня	Численное решение	Асимптотическая формула	Относительная погрешность
1	2.36502	2.35619	0.00372
2	5.49780	5.49779	$3.05126 \cdot 10^{-6}$
3	8.63938	8.63938	$3.62616 \cdot 10^{-6}$
4	11.7810	11.7810	$4.96600 \cdot 10^{-12}$
5	14.9226	14.9226	$7.38037 \cdot 10^{-15}$

Таблица 2.5 – Собственные числа λ

Номер корня	Численное решение	Асимптотическая формула	Относительная погрешность
1	3.92660	3.92699	0.00010
2	7.06858	7.06858	$1.02559 \cdot 10^{-7}$
3	10.2102	10.2102	$1.32593 \cdot 10^{-10}$
4	13.3518	13.3518	$1.89320 \cdot 10^{-13}$
5	16.4934	16.4934	$2.15403 \cdot 10^{-16}$

Таблица 2.6 – Собственные числа μ

Каждой из двух последовательностей собственных чисел соответствует последовательность собственных функций, определяемых с точностью до некоторых констант A_m, B_m :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m(v) &= A_m [\cos(\lambda_m v) \cosh(\lambda_m) - \cos(\lambda_m) \cosh(\lambda_m v)], \\ \mathbf{v}_m(v) &= B_m [\sin(\mu_m v) \cosh(\mu_m) - \cos(\mu_m) \sinh(\mu_m v)]. \end{aligned}$$

Для удобства дальнейших расчетов удобно эти константы выбирать так, чтобы норма каждой собственной функции была равна единице:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m(v) &= \frac{\cos(\lambda_m v) \cosh(\lambda_m) - \cos(\lambda_m) \cosh(\lambda_m v)}{\sqrt{\cos(\lambda_m)^2 + \cosh(\lambda_m)^2}}, \\ \mathbf{v}_m(v) &= \frac{\sin(\mu_m v) \cosh(\mu_m) - \cos(\mu_m) \sinh(\mu_m v)}{\sqrt{\cos(\lambda_m)^2 - \cosh(\lambda_m)^2}}. \end{aligned}$$

Собственные функции исходного оператора (2.48) могут быть получены как произведения \mathbf{u}, \mathbf{v} . Соответственно всего имеется четыре последовательности собственных функций (2.48):

$$\{\mathbf{u}_i(x) \mathbf{u}_j(y), \mathbf{u}_i(x) \mathbf{v}_j(y), \mathbf{v}_i(x) \mathbf{u}_j(y), \mathbf{v}_i(x) \mathbf{v}_j(y)\}.$$

Поскольку при сделанных предположениях о симметрии нас интересует лишь подпространство четных по обоим переменным функций, в дальнейшем будем рассматривать лишь первое семейство базисных функций:

$$f_k(x, y) := \mathbf{u}_i(x) \mathbf{u}_j(y). \quad (2.51)$$

Для того чтобы пользоваться полученными функциям необходимо задать одно-однозначное соответствие между парой индексов (i, j) и индексом k . Это

можно сделать с помощью диагональной нумерации Кантора, предложенной им в работе [226] (подробный вывод приведен в Приложении Г):

$$k = \frac{1}{2}(i+j)(i+j-1) - j + 1.$$

Наглядная иллюстрация нумерации, реализуемой этой функцией, приведена на Рисунке 2.10а. Обратная функция, восстанавливающая пару (i, j) по индексу k , задается соотношениями:

$$i = k - \frac{N(N-1)}{2} =: S(k), \quad j = \frac{N(N+1)}{2} - k + 1 =: C(k). \quad (2.52)$$

Здесь N – номер диагонали, в которой расположен элемент с индексом k , который определяется по формуле:

$$N = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{1 + 8(k-1)}}{2} \right\rfloor,$$

где символом $\lfloor \dots \rfloor$ обозначена операция округления до меньшего целого.

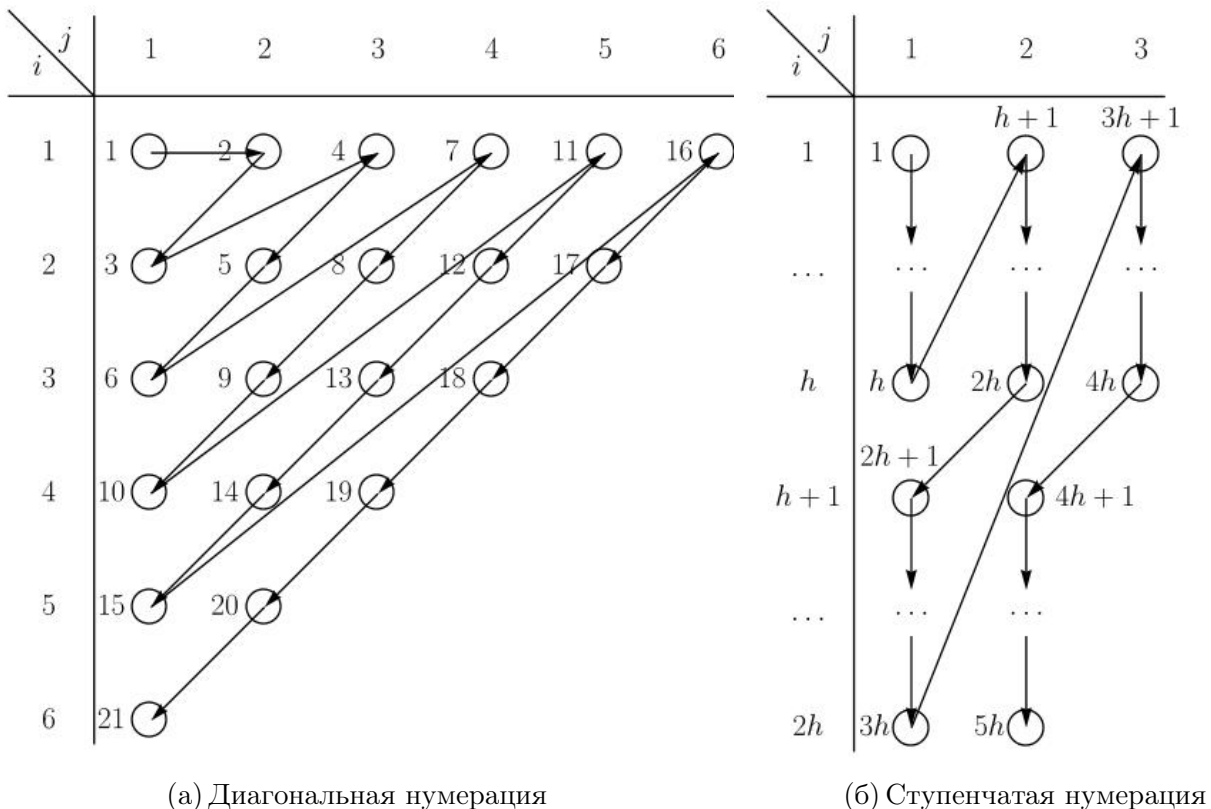


Рисунок 2.10 – Функция Кантора

Преимущество диагональной нумерации Кантора состоит в том, что при суммировании по индексу k она обеспечивает равномерный учет слагаемых. Так,

для того чтобы наравне с каждым слагаемым с индексом ij учесть слагаемое с симметричным индексом ji достаточно суммировать по полным диагоналям, т. е. так чтобы общее число слагаемых было равно $\frac{N(N+1)}{2}$ для некоторого целого N .

В случаях когда прямоугольная пластина сильно вытянута в одном из направлений, скажем вдоль оси абсцисс, целесообразно учитывать больше слагаемых ассоциированных с этим направлением. Для этого можно применить ступенчатую нумерацию с некоторой высотой ступеньки h , как показано на Рисунке 2.10б. В этом случае ячейке с индексами i и j соответствует номер

$$k = i + h \frac{(\lceil i/h \rceil + j - 1)(\lceil i/h \rceil + j - 2)}{2}.$$

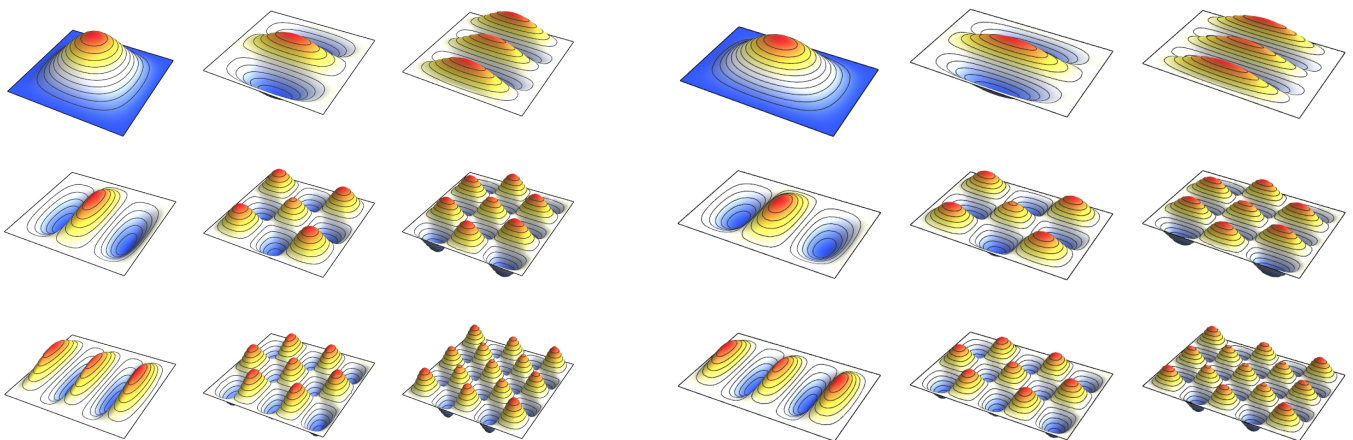
Здесь скобками $\lceil \dots \rceil$ обозначена операция округления до большего целого. Обратный переход можно осуществить по формулам аналогичным (2.52):

$$i = k - h \frac{N(N-1)}{2} =: S(k), \quad j = \frac{N(N+1)}{2} - \lceil k/h \rceil + 1 =: C(k), \quad (2.53)$$

где

$$N = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{1 + 8(k-1)/h}}{2} \right\rfloor.$$

Полезность этой нумерации становится очевидной, если рассмотреть собственные функции для разных областей, приведенные на Рисунке 2.11. Видно, что при изменении размеров пластины количество экстремумов не меняется, при том что их распределение остается равномерным.



(а) Квадратная область

(б) Прямоугольная область

Рисунок 2.11 – Собственные функции оператора (2.48)

Поэтому в случае прямоугольной области при равномерном учете собственных функций “пространственные периоды” – минимальные (среди учитываемых функций) расстояния между узловыми линиями – вдоль координатных осей отличаются, что может приводить к ухудшению сходимости разложений. Модифицированная нумерация дает возможность исправить эту ситуацию за счет выбора соответствующего шага ступеньки h , который позволяет учесть старшие собственные функции, и тем самым уменьшить “пространственный период” вдоль одного из направлений.

2.2.2 Решение линейной задачи

Прежде чем переходить к решению (2.41) – (2.47), для иллюстрации метода решения и построения начального приближения рассмотрим линейную краевую задачу:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = p, \quad w|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{\mathcal{E}_1} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{\mathcal{E}_2} = 0. \quad (2.54)$$

В рамках рассматриваемого подхода ее решение представляется в виде разложения по базисным функциям (2.51):

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} g_k f_k, \quad (2.55)$$

где g_k – коэффициенты Фурье, подлежащие определению. Как было сказано выше, выбор в качестве базиса функций (2.51) позволяет заведомо удовлетворить краевым условиям. Таким образом для решения задачи необходимо лишь определить неизвестные коэффициенты разложения из неоднородного уравнения Софи Жермен:

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k \nabla^2 \nabla^2 f_k = p.$$

Учитывая, что функции f_k являются собственными функциями (2.48), полученное выражение может быть упрощено:

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k \left(\beta \lambda_{S(k)}^4 f_k + 2 \frac{\partial^4 f_k}{\partial x^2 \partial y^2} + \alpha \lambda_{C(k)}^4 f_k \right) = p.$$

Для определения коэффициентов g_k это уравнение можно свести к бесконечной системе линейных уравнений, подействовав на него оператором

проектирования:

$$\mathcal{P}_q(F(x, y)) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F f_q dx dy, \quad q = 1, \dots, \infty. \quad (2.56)$$

Таким образом g_k определяются из бесконечномерной системы:

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k \left[\left(\beta \lambda_{S(k)}^4 + \alpha \lambda_{C(k)}^4 \right) \delta_{kq} + \right. \\ \left. + 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^4 f_k}{\partial x^2 \partial y^2} f_q dx dy \right] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p f_q dx dy, \quad q = 1, \dots, \infty,$$

которую можно компактно представить в матричном виде:

$$\mathbf{G} \mathbf{g} = \mathbf{b}.$$

Здесь \mathbf{g} – вектор коэффициентов разложения решения, \mathbf{b} – вектор коэффициентов разложения функции давления:

$$[\mathbf{b}]_q = b_q = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p f_q dx dy,$$

а \mathbf{G} – матрица Галеркина:

$$[\mathbf{G}]_{qk} = G_{qk} = \left(\beta \lambda_{S(k)}^4 + \alpha \lambda_{C(k)}^4 \right) \delta_{qk} + 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^4 f_k}{\partial x^2 \partial y^2} f_q dx dy,$$

компоненты которой могут быть вычислены по формуле:

$$G_{qk} = \left(\beta \lambda_{S(k)}^4 + \alpha \lambda_{C(k)}^4 \right) \delta_{qk} + \frac{2 \lambda_{S(k)}^2 \lambda_{C(k)}^2}{\mathbf{n}_k \mathbf{n}_q} I_G(\lambda_{S(q)}, \lambda_{S(k)}) I_G(\lambda_{C(q)}, \lambda_{C(k)}). \quad (2.57)$$

Здесь I_G – вспомогательный интеграл, выражение которого (как и остальных вспомогательных интегралов) приведено в Приложении Д, а символом \mathbf{n}_k обозначено произведение:

$$\mathbf{n}_k = \sqrt{\cosh^2(\lambda_{S(k)}) + \cos^2(\lambda_{S(k)})} \sqrt{\cosh^2(\lambda_{C(k)}) + \cos^2(\lambda_{C(k)})}$$

Разрешить полученную конечномерную систему относительно неизвестных коэффициентов достаточно сложно, поэтому на практике обычно прибегают к

методу редукции [113, 227], согласно которому решается не вся бесконечномерная система, а только первые ее n уравнений с таким же числом неизвестных. Такая редуцированная система легко может быть решена различными вычислительными методами алгебры, но для общих теоретических представлений более удобны формулы Крамера:

$$g_k = \frac{\det \mathbf{G}_k}{\det \mathbf{G}}, \quad \mathbf{G}_k = \mathbf{G} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{E}_{kk}) + \sum_{i=1}^n b_i \mathbf{E}_{ik}.$$

Здесь \mathbf{E} – единичная матрица, а \mathbf{E}_{ij} – матричная единица, т. е. матрица все компоненты которой нули за исключением единичного компонента с индексами ij .

Если подставить найденные коэффициенты в разложение (2.55) то будет получено искомое решение. Однако для того чтобы обеспечить гладкость производных решения целесообразно суммировать члены ряда с некоторым сглаживающим ядром. В настоящей работе использован метод суммирования Фейера [228]:

$$w = \sum_{k=1}^n \frac{n+1-k}{n} g_k f_k,$$

который позволяет существенно сгладить решение ценой незначительного ухудшения сходимости ряда.

Полученное безразмерное решение может быть легко преобразовано к размерному по формулам (2.40). Однако для иллюстрации построенного решения размерный вариант неудобен, впрочем и безразмерный тоже нельзя назвать оптимальным, по той причине, что обезразмеривание приводит изначально прямоугольную область к квадрату. Наиболее приемлемого представления можно добиться если перейти к размерным координатам, оставляя безразмерными функции w и p . Тогда можно получить решение в прямоугольной области, не зависящее от модуля Юнга материала и толщины пластины.

Для тестовых расчетов рассмотрены два варианта функции безразмерного давления: постоянное давление $p = 100 a^2 b^2$ и достаточно гладкая функция, обеспечивающая быструю сходимость решения $p = 100 a^2 b^2 (1 - x^2)^2 (1 - y^2)^2$. Здесь коэффициент $a^2 b^2$ необходим для того чтобы при расчетах пластин с разными размерами значение размерного давления не менялось. Решения тестовых задач для пластин с $\nu = 0.3$ при 105 членах разложения приведены на Рисунке 2.12.

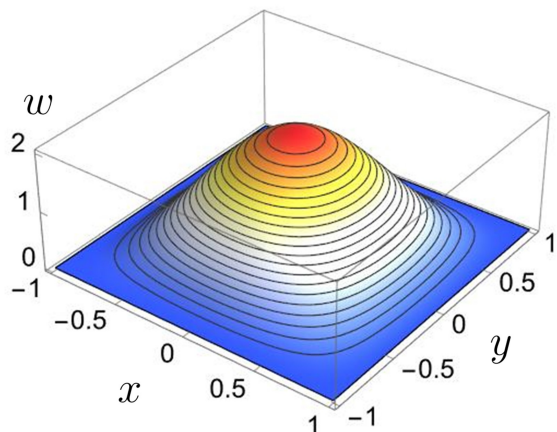
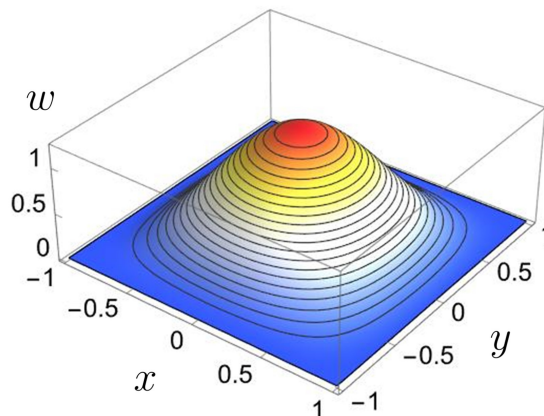
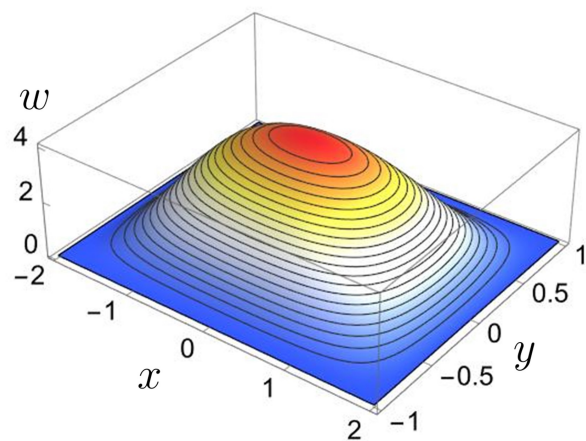
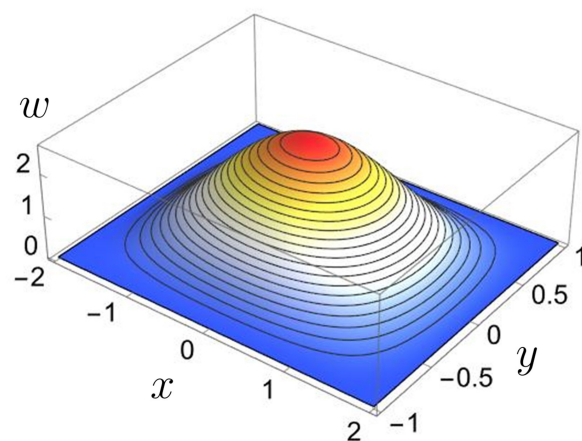
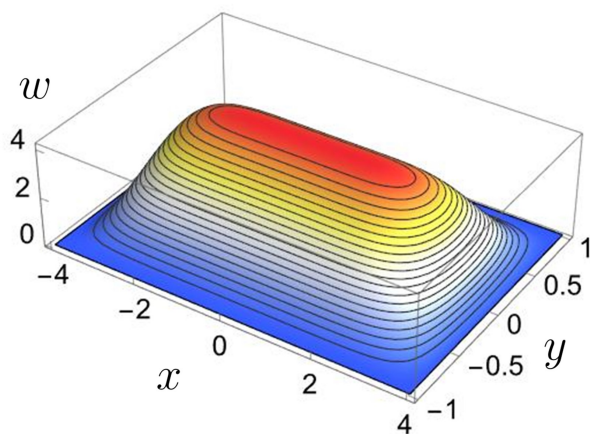
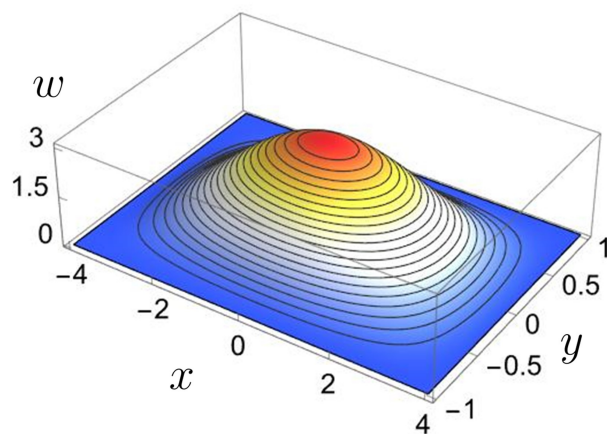
(a) $\alpha = 1$ (б) $\alpha = 1$ (в) $\alpha = 4$ (г) $\alpha = 4$ (д) $\alpha = 16$ (е) $\alpha = 16$

Рисунок 2.12 – Решения линейной задачи, $n = 105$. Слева приведены поверхности при $p = 100 a^2 b^2$, справа – при $p = 100 a^2 b^2 (1 - x^2)^2 (1 - y^2)^2$

Погрешность построенного решения можно оценить подставив его в исходное уравнение и получив распределение неуравновешенного давления:

$$\delta_n = \frac{p - \sum_{k=1}^n g_k \nabla^2 \nabla^2 f_k}{\text{Max}(p)}.$$

Это распределение для пластины с $\alpha = 4$ при $n = 105$ показано на Рисунке 2.13. На этом же рисунке приведено сравнение сечений поверхностей $\delta_n(x, y)$ при нескольких значениях n .

2.2.3 Решение вспомогательной граничной задачи

Для решения нелинейных задач (2.41) – (2.47) помимо функции прогибов необходимо также разложить функцию ϕ в ряд по базисным функциям, но в этом случае разложение аналогичное (2.55) уже не будет удовлетворять краевым условиям. Однако в силу того, что нелинейные уравнения Фешля – фон Кармана линейны по каждой из искомым функций в отдельности, можно скорректировать краевые условия, налагаемые на функцию ϕ , с помощью решения граничной задачи:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \phi &= 0, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_{y=\pm 1} &= \psi_1(x), \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \Big|_{x=\pm 1} = \psi_2(y), \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \Big|_{y=1} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \Big|_{y=-1} = \chi_1(x), \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \Big|_{x=1} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \Big|_{x=-1} = \chi_2(y), \end{aligned} \quad (2.58)$$

где $\psi_1, \psi_2, \chi_1, \chi_2$ – некоторые функции, интегрируемые с квадратом, причем функции ψ – четные, а χ – нечетные.

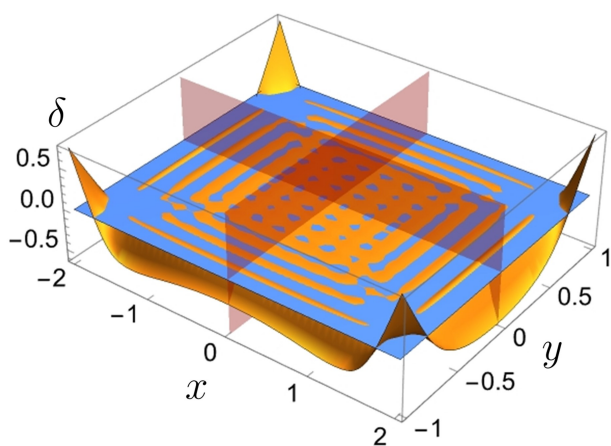
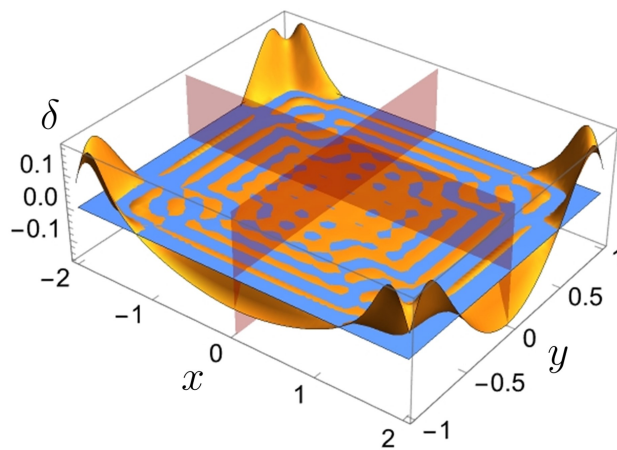
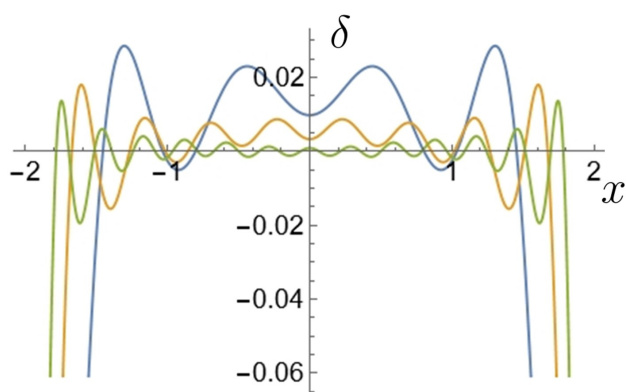
Решение этой краевой задачи можно искать в виде суммы двух функций:

$$\phi = \phi_0 + \phi^*, \quad (2.59)$$

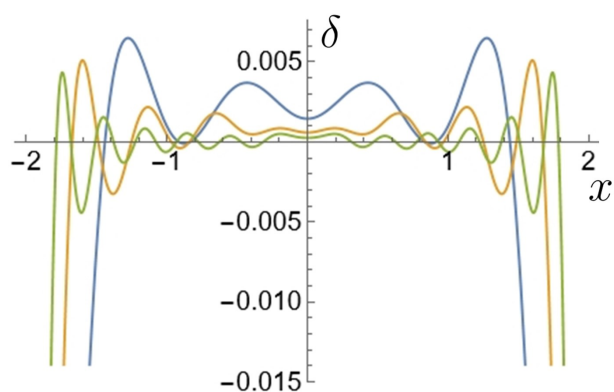
одна из которых ϕ^* удовлетворяет неоднородным краевым условиям (2.58), а вторая ϕ_0 удовлетворяет однородным условиям на контуре и является решением уравнения:

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi_0 = -\nabla^2 \nabla^2 \phi^*. \quad (2.60)$$

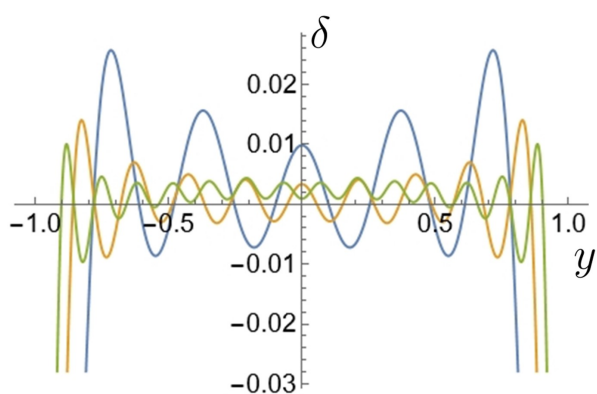
Таким образом, сумма (2.59) представляет точное решение краевой задачи (2.58).

(a) $\delta_n, n = 105$ (б) $\delta_n, n = 105$ 

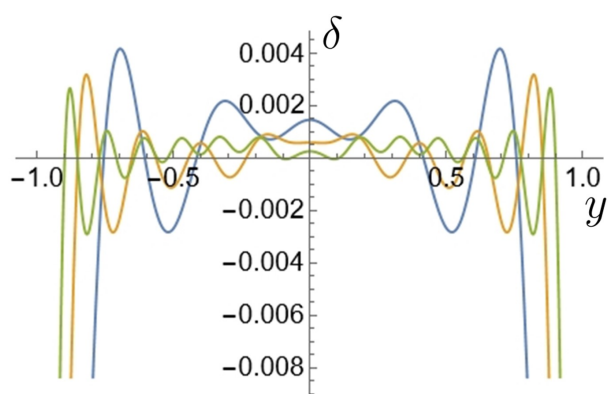
— $n = 15$ — $n = 45$ — $n = 105$

(в) Сечение $y = 0$ 

— $n = 15$ — $n = 45$ — $n = 105$

(г) Сечение $y = 0$ 

— $n = 15$ — $n = 45$ — $n = 105$

(д) Сечение $x = 0$ 

— $n = 15$ — $n = 45$ — $n = 105$

(е) Сечение $x = 0$

Рисунок 2.13 – Погрешность полученного решения

Функцию ϕ^* можно искать в виде ряда:

$$\begin{aligned} \phi^* = & a_0 \frac{x^2}{4} + b_0 \frac{y^2}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 k^2} [a_k \cos(\pi kx) + b_k \cos(\pi ky)] - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 k^2} \left\{ c_k f_k^c(y) [\cos(\pi kx) - (-1)^k] + d_k f_k^d(x) [\cos(\pi ky) - (-1)^k] \right\}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

где f_k^c, f_k^d – произвольные четные функции, первые производные которых принимают ненулевые значения на концах отрезка $[-1, 1]$. Для того чтобы это продемонстрировать достаточно подставить это выражение в неоднородные краевые условия (2.58):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x^2} \right|_{y=\pm 1} &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k + f_k^c(1) c_k] \cos(\pi kx), \\ \left. \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial y^2} \right|_{x=\pm 1} &= \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [b_k + f_k^d(1) d_k] \cos(\pi ky), \\ \left. \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x \partial y} \right|_{y=1} &= - \left. \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x \partial y} \right|_{y=-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} c_k \sin(\pi kx) \left. \frac{df_k^c}{dy} \right|_{y=1}, \\ \left. \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x \partial y} \right|_{x=1} &= - \left. \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x \partial y} \right|_{x=-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} d_k \sin(\pi ky) \left. \frac{df_k^d}{dx} \right|_{x=1}. \end{aligned}$$

Видно, что результат подстановки есть не что иное как разложения некоторых четных и нечетных функций в ряды Фурье, т. е. подходящим подбором коэффициентов можно добиться того чтобы функция ϕ^* удовлетворяла любым неоднородным краевым условиям (при условии, что функции $\psi_1, \psi_2, \chi_1, \chi_2$ могут быть представлены тригонометрическими рядами Фурье).

Замечание 2.6. Для случая пластины с неподвижными краями выбор вида функций f_k^c, f_k^d крайне важен, так как они влияют на скорость сходимости решения. В случае же подвижных краев все коэффициенты при этих функциях равны нулю и необходимость выбора отпадает.

Функцию ϕ_0 можно представить в виде разложения по базисным функциям:

$$\phi_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k f_k, \quad (2.62)$$

определив коэффициенты разложения так чтобы выполнялось равенство (2.60):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \nabla^2 \nabla^2 f_k &= \sum_{k=1}^{\infty} \pi^2 k^2 [a_k \beta \cos(\pi k x) + b_k \alpha \cos(\pi k y)] + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\beta \pi^2 k^2 f_k^c - 2 \frac{d^2 f_k^c}{dy^2} + \frac{\alpha}{\pi^2 k^2} \frac{d^4 f_k^c}{dy^4} \right) \cos(\pi k x) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} d_k \left(\alpha \pi^2 k^2 f_k^d - 2 \frac{d^2 f_k^d}{dx^2} + \frac{\beta}{\pi^2 k^2} \frac{d^4 f_k^d}{dx^4} \right) \cos(\pi k y) - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi^2 k^2} \left(\alpha \frac{d^4 f_k^c}{dy^4} c_k + \beta \frac{d^4 f_k^d}{dx^4} d_k \right). \end{aligned}$$

Для этого необходимо подействовать на это уравнение оператором (2.56):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \iint_{-1-1}^{1 1} \nabla^2 \nabla^2 f_k f_q dx dy &= \sum_{k=1}^{\infty} \pi^2 k^2 \iint_{-1-1}^{1 1} [a_k \beta \cos(\pi k x) + b_k \alpha \cos(\pi k y)] f_q dx dy + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} c_k \iint_{-1-1}^{1 1} \left(\beta \pi^2 k^2 f_k^c - 2 \frac{d^2 f_k^c}{dy^2} + \frac{\alpha}{\pi^2 k^2} \frac{d^4 f_k^c}{dy^4} \right) \cos(\pi k x) f_q dx dy + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} d_k \iint_{-1-1}^{1 1} \left(\alpha \pi^2 k^2 f_k^d - 2 \frac{d^2 f_k^d}{dx^2} + \frac{\beta}{\pi^2 k^2} \frac{d^4 f_k^d}{dx^4} \right) \cos(\pi k y) f_q dx dy - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi^2 k^2} \iint_{-1-1}^{1 1} \left(\alpha \frac{d^4 f_k^c}{dy^4} c_k + \beta \frac{d^4 f_k^d}{dx^4} d_k \right) f_q dx dy, \end{aligned}$$

и редуцировать полученную бесконечномерную систему к конечной, из которой можно получить выражение вектора коэффициентов ζ :

$$\zeta = \mathbf{G}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{d}).$$

Здесь \mathbf{G} – это матрица Галеркина, компоненты которой выражаются (2.57), а компоненты матрицы \mathbf{A} могут быть вычислены через вспомогательные интегралы I_0, I_4, I_5 по формуле:

$$A_{qk} = \frac{\pi^2 k^2}{\mathbf{n}_q} \beta [I_4(\lambda_{S(q)}, k) - I_5(\lambda_{S(q)}, k)] I_0(\lambda_{C(q)}).$$

Компоненты матрицы \mathbf{B} записываются так же как с точностью до замен:

$$\lambda_{S(q)} \leftrightarrow \lambda_{C(q)}, \quad \beta \leftrightarrow \alpha. \quad (2.63)$$

Оставшиеся две матрицы \mathbf{C} и \mathbf{D} можно получить аналогично после выбора функций f_k^c, f_k^d .

Замечание 2.7. Запись вида $x \leftrightarrow y$ не является общепринятой, поэтому здесь требуется дополнительное пояснение. Здесь и далее когда говорится, что выражение A получается из B заменой вида $x \leftrightarrow y$, подразумевается, что для того чтобы получить выражение A нужно в B одновременно заменить каждое вхождение x на y , а y на x .

Для примера можно рассмотреть следующую граничную задачу:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \phi &= 0, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_{y=\pm 1} &= \psi_1(x) = (1-x^4)^2, & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \Big|_{x=\pm 1} &= \psi_2(y) = (1-y^2)^2, & (2.64) \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \Big|_{y=1} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \Big|_{y=-1} = \chi_1(x) = x(1-x^4)^2, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \Big|_{x=1} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \Big|_{x=-1} = \chi_2(y) = y(1-y^2)^2. \end{aligned}$$

То есть необходимо найти такое решение однородного бигармонического уравнения чтобы распределение вторых производных на границе соответствовало, приведенным на Рисунке (2.14).

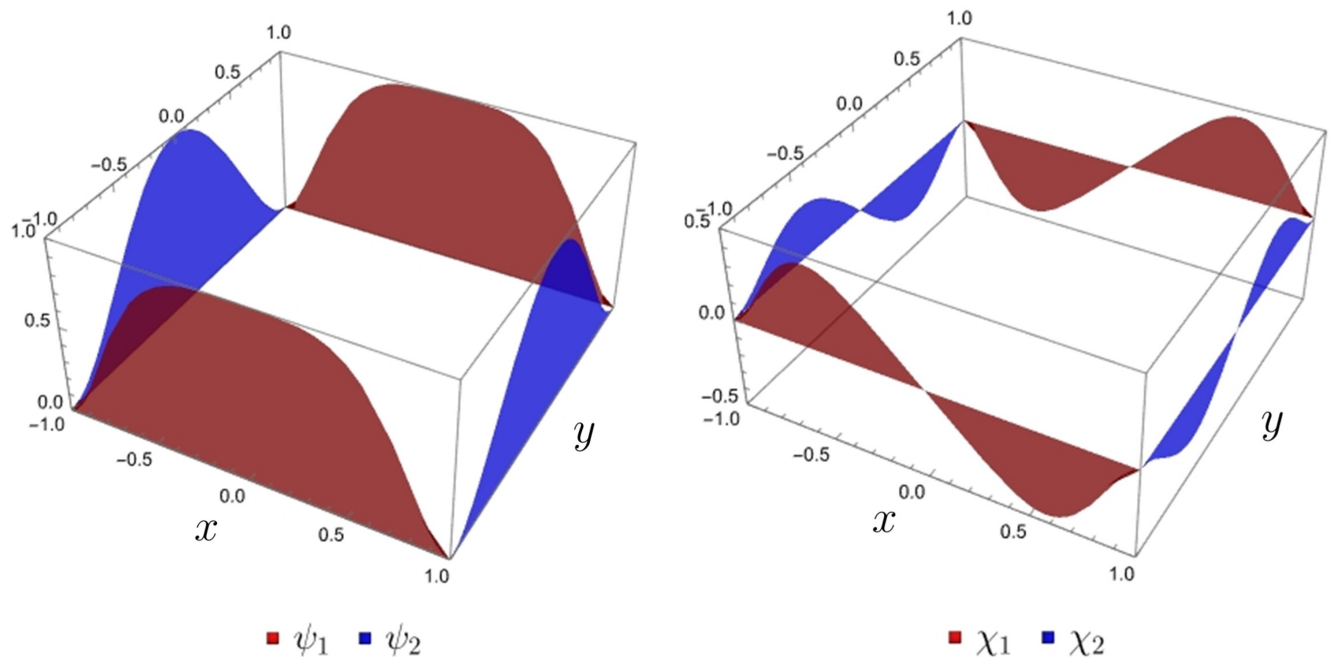


Рисунок 2.14 – Вторые производные на контуре

Для решения этой задачи необходимо выбрать функции f_k^c , f_k^d , для сокращения выкладок выберем наиболее простой их вариант:

$$f_k^c = y^2, \quad f_k^d = x^2.$$

Замечание 2.8. Решение граничной задачи (2.64) определено с точностью до константы, поэтому вид функций f_k^c , f_k^d , вообще говоря, влияет на функцию ϕ .

В этом случае компоненты матрицы \mathbf{C} определяются следующим выражением:

$$C_{qk} = \frac{1}{\mathbf{n}_q} [I_4(\lambda_{S(q)}, k) - I_5(\lambda_{S(q)}, k)] [\beta\pi^2 k^2 I_s(\lambda_{C(q)}) - 4I_0(\lambda_{C(q)})],$$

где вспомогательный интеграл I_s вычисляется по формуле:

$$I_s(\rho) = \int_{-1}^1 (\cos(\rho v) \cosh(\rho) - \cos(\rho) \cosh(\rho v)) v^2 dv = \frac{4 \cosh(\rho) (\rho \sin(\rho) + 2 \cos(\rho))}{\rho^2},$$

а выражения для остальных интегралов приведены в Приложении Д. Как и в случае матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} , компоненты матрицы \mathbf{D} записываются аналогично с точностью до замен (2.63).

Раскладывая граничные условия (2.64) в тригонометрические ряды Фурье, можно вычислить коэффициенты в (2.61) и, таким образом, определить решение удовлетворяющее краевым условиям (Рисунок 2.15). Напомним, что это решение не удовлетворяет бигармоническому уравнению. Корректирующая добавка (2.62) позволяет модифицировать полученное решение так чтобы краевые условия по-прежнему выполнялись (Рисунок 2.16) и при этом решение удовлетворяло бы бигармоническому уравнению⁶.

Приведенный алгоритм построения граничного решения позволяет получить решение нелинейных уравнений (2.41) аналогично тому, как это было сделано ранее для уравнений (2.54). Эти решения представлены в следующих разделах.

⁶Здесь подразумевается уравнение с модифицированным оператором (2.45), поэтому решение зависит от соотношения сторон пластины α . На рисунках 2.16, ?? приведены результаты, полученные для пластины с $\alpha = 4$

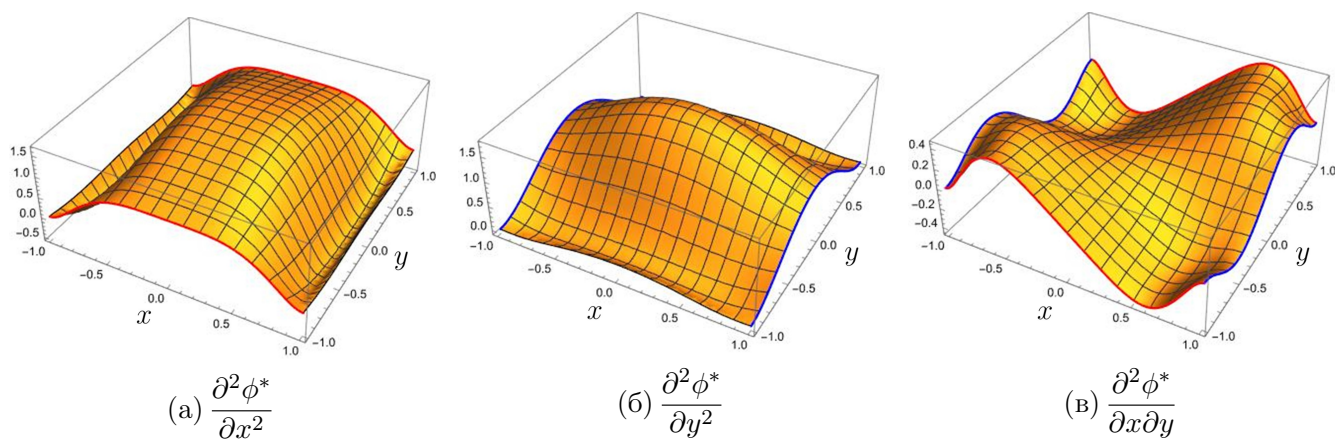


Рисунок 2.15 – Вторые производные граничного решения

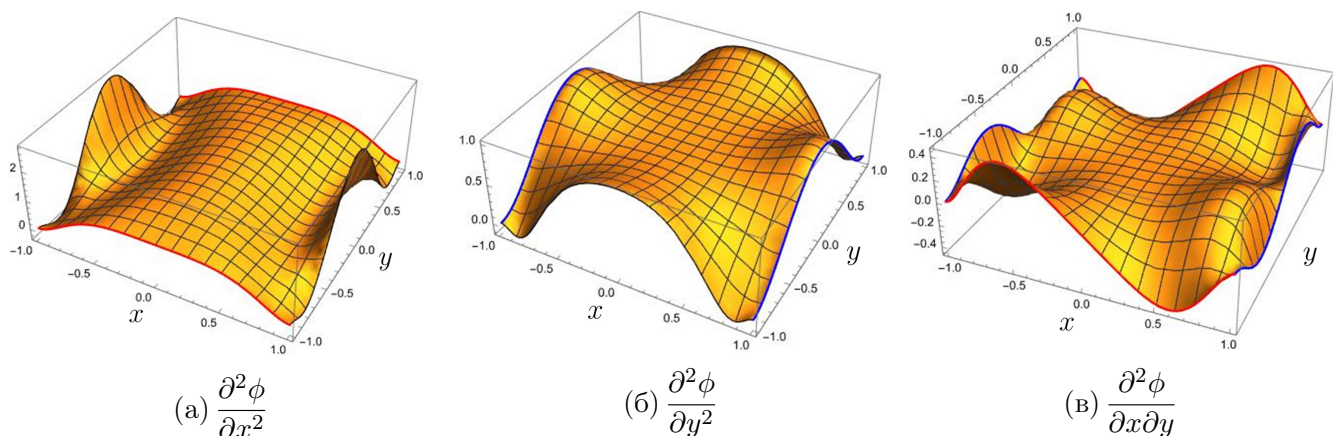


Рисунок 2.16 – Вторые производные скорректированного решения

2.2.4 Решение для случая деформируемых краев

Сперва рассмотрим более простой случай заземленной пластины, края которой могут деформироваться в продольном направлении. Этому случаю соответствуют уравнения (2.41) – (2.44), (2.46). Как и в линейном случае, решение этой задачи можно искать в виде разложений по базисным функциям (2.51):

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} g_k f_k, \quad \phi = \sum_{k=1}^{\infty} (s_k + \zeta_k) f_k + \phi^*. \quad (2.65)$$

Такое представление позволяет автоматически удовлетворить краевым условиям (2.42) и (2.46) если положить коэффициенты s_k , d_k в граничном решении ϕ^* равными нулю:

$$\phi^* = a_0 \frac{x^2}{4} + b_0 \frac{y^2}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 k^2} [a_k \cos(\pi k x) + b_k \cos(\pi k y)]. \quad (2.66)$$

Соответственно коэффициенты ζ_k будут выражаться через a_k, b_k по сокращенной формуле:

$$\zeta = \mathbf{G}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{b}). \quad (2.67)$$

Таким образом решение определено с точностью до четырех последовательностей коэффициентов g_k, s_k, a_k, b_k , которые могут быть определены из четырех уравнений (2.41), (2.43), (2.44). Для этого нужно подставить разложения искомым функций в эти уравнения, но прежде, для краткости, целесообразно ввести сокращенные обозначения:

$$\phi_{ak}^* := -\frac{1}{\pi^2 k^2} \cos(\pi k x), \quad \phi_{bk}^* := -\frac{1}{\pi^2 k^2} \cos(\pi k y).$$

Тогда подстановка w, ϕ в (2.41) приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left\{ \nabla^2 \nabla^2 f_k - \frac{a_0}{2} \frac{\partial^2 f_k}{\partial y^2} - \frac{b_0}{2} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2} - \right. & \quad (2.68) \\ \left. - \sum_{r=1}^{\infty} [(s_r + \zeta_r) L(f_k, f_r) + L(f_k, a_r \phi_{ar}^* + b_r \phi_{br}^*)] \right\} = p, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ s_k \nabla^2 \nabla^2 f_k + \kappa g_k \sum_{r=1}^{\infty} g_r L(f_k, f_r) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Аналогичные уравнение получаются при подстановке в краевые условия (2.43), (2.44):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_0^1 \left[\alpha \frac{\partial^2}{\partial y^2} ((s_k + \zeta_k) f_k + b_k \phi_{bk}^*) - \kappa g_k \sum_{r=1}^{\infty} g_r \frac{\partial f_k}{\partial x} \frac{\partial f_r}{\partial x} \right] dx \right\} + \frac{1}{2} (\alpha b_0 - \nu a_0) = 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_0^1 \left[\beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} ((s_k + \zeta_k) f_k + a_k \phi_{ak}^*) - \kappa g_k \sum_{r=1}^{\infty} g_r \frac{\partial f_k}{\partial y} \frac{\partial f_r}{\partial y} \right] dy \right\} + \frac{1}{2} (\beta a_0 - \nu b_0) = 0. \end{aligned}$$

Для того чтобы иметь возможность отыскать четыре последовательности коэффициентов из четырех уравнений необходимо спроецировать их на базисные

подпространства. Для этого подействуем на уравнения (2.68) оператором (2.56):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_q g_k \left\{ \nabla^2 \nabla^2 f_k - \frac{a_0}{2} \frac{\partial^2 f_k}{\partial y^2} - \frac{b_0}{2} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2} - \right. \\ \left. - \sum_{r=1}^{\infty} [(s_r + \zeta_r) L(f_k, f_r) + L(f_k, a_r \phi_{ar}^* + b_r \phi_{br}^*)] \right\} dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p f_q dx dy, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_q \left\{ s_k \nabla^2 \nabla^2 f_k + \kappa g_k \sum_{r=1}^{\infty} g_r L(f_k, f_r) \right\} dx dy = 0. \end{aligned}$$

Оставшиеся уравнения необходимо спроецировать на одномерные функции, например на функции тригонометрического базиса Фурье, что можно сделать с помощью соответствующих операторов:

$$\mathcal{F}_0(F(v)) = \int_{-1}^1 F dv, \quad \mathcal{F}_q^c(F(v)) = \int_{-1}^1 F \cos(\pi qv) dv, \quad q = 1 \dots \infty.$$

Результат их действия на краевые условия приводит к уравнениям, замыкающим систему:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\kappa \int_{-1}^1 \int_0^1 g_k g_r \frac{\partial f_k}{\partial x} \frac{\partial f_r}{\partial x} dx dy \right) - (\alpha b_0 - \nu a_0) = 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\kappa \int_{-1}^1 \int_0^1 g_k g_r \frac{\partial f_k}{\partial y} \frac{\partial f_r}{\partial y} dy dx \right) - (\beta a_0 - \nu b_0) = 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_{-1}^1 \int_0^1 \left[\alpha (s_k + \zeta_k) \frac{\partial^2 f_k}{\partial y^2} - \kappa g_k \sum_{r=1}^{\infty} g_r \frac{\partial f_k}{\partial x} \frac{\partial f_r}{\partial x} \right] \cos(\pi qy) dx dy \right\} + \alpha b_k \delta_{qk} = 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_{-1}^1 \int_0^1 \left[\beta (s_k + \zeta_k) \frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2} - \kappa g_k \sum_{r=1}^{\infty} g_r \frac{\partial f_k}{\partial y} \frac{\partial f_r}{\partial y} \right] \cos(\pi qx) dy dx \right\} + \beta a_k \delta_{qk} = 0. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае, разрешить эту систему можно редуцировав ее к конечному числу уравнений относительно конечного числа неизвестных, ко-

Структура	Выражение для компонент
M^{a0}	$M_{qk}^{a0} = -\frac{\lambda_{C(k)}^2 I_G(\lambda_{C(q)}, \lambda_{C(k)})}{\mathbf{n}_k \mathbf{n}_q} (\cos^2(\lambda_{S(k)}) + \cosh^2(\lambda_{S(k)})) \delta_{S(q)S(k)}$
U^{w0}	$U_{qk}^{w0} = \frac{\lambda_{S(k)} \lambda_{S(q)} I_U(\lambda_{S(q)}, \lambda_{S(k)})}{2 \mathbf{n}_k \mathbf{n}_q} (\cos^2(\lambda_{C(k)}) + \cosh^2(\lambda_{C(k)})) \delta_{C(q)C(k)}$
U	$U_{qk} = -\frac{\lambda_{C(k)}^2 (I_4(\lambda_{C(k)}, q) + I_5(\lambda_{C(k)}, q)) I_0(\lambda_{S(k)})}{2 \mathbf{n}_k}$
M	$M_{qkr} = \frac{I_M(\lambda_{S(q)}, \lambda_{S(k)}, \lambda_{S(r)}, \lambda_{C(q)}, \lambda_{C(k)}, \lambda_{C(r)})}{\mathbf{n}_k \mathbf{n}_r \mathbf{n}_q}$
M^a	$M_{qkr}^a = -\frac{\lambda_{C(k)}^2 I_{M3}(\lambda_{S(q)}, \lambda_{S(k)}, \pi r) I_G(\lambda_{C(q)}, \lambda_{C(k)})}{\mathbf{n}_k \mathbf{n}_q \cosh(\pi r)}$
U^w	$U_{qkr}^w = \frac{\lambda_{S(k)} \lambda_{S(r)} I_{M3}(\lambda_{C(k)}, \lambda_{C(r)}, \pi q) I_U(\lambda_{S(k)}, \lambda_{S(r)})}{2 \mathbf{n}_k \mathbf{n}_r \cosh(\pi q)}$

Таблица 2.7 – Компоненты вспомогательных матриц

торые могут быть компактно представлены в следующем матричном виде:

$$\left[\mathbf{G} - \frac{a_0}{2} \mathbf{M}^{a0} - \frac{b_0}{2} \mathbf{M}^{b0} - \mathbf{M} \cdot (\mathbf{s} + \boldsymbol{\zeta}) - \mathbf{M}^a \cdot \mathbf{a} - \mathbf{M}^b \cdot \mathbf{b} \right] \cdot \mathbf{g} = \mathbf{b},$$

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{s} + \kappa (\mathbf{M} \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad (2.69)$$

$$\kappa (\mathbf{U}^{w0} \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} - (\alpha b_0 - \nu a_0) = 0, \quad \alpha [\mathbf{U} \cdot (\mathbf{s} + \boldsymbol{\zeta}) + \mathbf{b}] - \kappa (\mathbf{U}^w \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} = \mathbf{0},$$

$$\kappa (\mathbf{V}^{w0} \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} - (\beta a_0 - \nu b_0) = 0, \quad \beta [\mathbf{V} \cdot (\mathbf{s} + \boldsymbol{\zeta}) + \mathbf{a}] - \kappa (\mathbf{V}^w \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} = \mathbf{0}.$$

Здесь \mathbf{M}^{a0} , \mathbf{M}^{b0} , \mathbf{U}^{w0} , \mathbf{V}^{w0} , \mathbf{U} , \mathbf{V} – матрицы $n \times n$, а \mathbf{M}^a , \mathbf{M}^b , \mathbf{U}^w , \mathbf{V}^w , \mathbf{M} – кубические матрицы $n \times n \times n$. Выражения для компонент некоторых матриц, записанные через вспомогательные интегралы приведены в Таблице 2.7. Выражения для компоненты остальных матриц могут быть получены с помощью замен символов⁷:

$$\lambda_{S(q)} \leftrightarrow \lambda_{C(q)}, \quad \beta \leftrightarrow \alpha, \quad \mathbf{U} \leftrightarrow \mathbf{V}, \quad a \leftrightarrow b. \quad (2.70)$$

Полученную систему матричных уравнений (2.69) можно свести к одному кубическому матричному уравнению, для этого нужно выразить вектора

⁷Здесь и далее подразумевается замена всех вхождений символов, т. е. не только матрица \mathbf{U} заменяется на \mathbf{V} , но и кубическая матрица \mathbf{U}^w на \mathbf{V}^w

\mathbf{s} , $\boldsymbol{\zeta}$, \mathbf{a} , \mathbf{b} и константы a_0 , b_0 через вектор \mathbf{g} . Для вектора \mathbf{s} и констант это можно сделать сразу же:

$$\begin{aligned}\mathbf{s} &= -\kappa (\mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g}, \\ a_0 &= 6 [(\nu \mathbf{U}^{w0} + \alpha \mathbf{V}^{w0}) \cdot \mathbf{g}] \cdot \mathbf{g}, \quad b_0 = 6 [(\beta \mathbf{U}^{w0} + \nu \mathbf{V}^{w0}) \cdot \mathbf{g}] \cdot \mathbf{g}.\end{aligned}$$

Остальные векторы можно выразить из других краевых условий, используя (2.67):

$$\mathbf{a} = \kappa (\mathbf{R}_a \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g}, \quad \mathbf{b} = \kappa (\mathbf{R}_b \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g},$$

где \mathbf{R}_a , \mathbf{R}_b вспомогательные матрицы, первая из которых определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_a &= \left[\mathbf{V} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{E} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{A} \right]^{-1} \times (2.71) \\ &\times \left[\mathbf{V} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{M} + \frac{1}{\beta} \mathbf{V}^w - \mathbf{V} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E})^{-1} \cdot \left(\mathbf{U} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{M} + \frac{1}{\alpha} \mathbf{U}^w \right) \right],\end{aligned}$$

а вторая выражается через первую с помощью замен символов:

$$\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}, \quad \mathbf{U} \leftrightarrow \mathbf{V}, \quad \beta \leftrightarrow \alpha. \quad (2.72)$$

Замечание 2.9. Можно получить и более простое выражение для матрицы \mathbf{R}_a , однако для его использования необходимо обратить плохо обусловленную матрицу, что может привести к значительным погрешностям.

Теперь искомую систему кубических уравнений можно получить, подставив полученные выражения в оставшееся уравнение (2.69):

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{g} - \kappa ((\mathcal{S} \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} - 3 [(\mathbf{g} \cdot \mathcal{T}^a \cdot \mathbf{g}) (\mathbf{M}^{a0} \cdot \mathbf{g}) + (\mathbf{g} \cdot \mathcal{T}^b \cdot \mathbf{g}) (\mathbf{M}^{b0} \cdot \mathbf{g})] = \mathbf{b}, \quad (2.73)$$

где \mathcal{S} – вспомогательная матрица четвертого порядка:

$$\mathcal{S} = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{M} + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{M}^a) \cdot \mathbf{R}_a + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{M}^b) \cdot \mathbf{R}_b,$$

а \mathcal{T}^a , \mathcal{T}^b – квадратные матрицы:

$$\mathcal{T}^a = \nu \mathbf{U}^{w0} + \alpha \mathbf{V}^{w0}, \quad \mathcal{T}^b = \beta \mathbf{U}^{w0} + \nu \mathbf{V}^{w0}. \quad (2.74)$$

Для того чтобы эффективно решить полученное кубическое уравнение его можно линеаризовать в окрестности некоторого начального приближения. Для этого обозначим его левую часть как \mathcal{A} :

$$\mathcal{A}(\mathbf{g}) := \mathbf{G} \cdot \mathbf{g} - \kappa ((\mathcal{S} \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} - 3 [(\mathbf{g} \cdot \mathcal{T}^a \cdot \mathbf{g}) (\mathbf{M}^{a0} \cdot \mathbf{g}) + (\mathbf{g} \cdot \mathcal{T}^b \cdot \mathbf{g}) (\mathbf{M}^{b0} \cdot \mathbf{g})].$$

Тогда если имеется некоторое начальное приближение \mathbf{g}_0 (например, решение линейной задачи), то в его окрестности \mathcal{A} можно представить в следующем виде:

$$\mathcal{A}(\mathbf{g}) = \mathcal{A}(\mathbf{g}_0) + \left. \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathbf{g}} \right|_{\mathbf{g}=\mathbf{g}_0} \cdot (\mathbf{g} - \mathbf{g}_0) + o(\mathbf{g} - \mathbf{g}_0). \quad (2.75)$$

где производная \mathcal{A} при $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0$ вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathbf{g}} \right|_{\mathbf{g}=\mathbf{g}_0} = & \mathbf{G} - \kappa \sum_{k=1}^n \{ [(\mathcal{S} \cdot \mathbf{E}_k) \cdot \mathbf{g}_0] \cdot \mathbf{g}_0 + [(\mathcal{S} \cdot \mathbf{g}_0) \cdot \mathbf{E}_k] \cdot \mathbf{g}_0 + [(\mathcal{S} \cdot \mathbf{g}_0) \cdot \mathbf{g}_0] \cdot \mathbf{E}_k \} \otimes \mathbf{E}_k - \\ & - 3 \left\{ [(M^{a0} \cdot \mathbf{g}_0) \otimes (\mathcal{T}^a \cdot \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_0 \cdot \mathcal{T}^a)] + [(M^{b0} \cdot \mathbf{g}_0) \otimes (\mathcal{T}^b \cdot \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_0 \cdot \mathcal{T}^b)] + \right. \\ & \left. + (\mathbf{g}_0 \cdot \mathcal{T}^a \cdot \mathbf{g}_0) M^{a0} + (\mathbf{g}_0 \cdot \mathcal{T}^b \cdot \mathbf{g}_0) M^{b0} \right\}. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{E}_k – это вектор, все компоненты которого равны нулю за исключением k -ого равного единице, а символом \otimes обозначена операция умножения по Кронекеру, ставящая в соответствие двум векторам \mathbf{a} , \mathbf{b} , матрицу, компоненты которой получаются перемножением компонент исходных векторов:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} := \mathbf{M}, \quad M_{ij} = a_i b_j.$$

Деформированные поверхности, полученные в ходе тестовых расчетов при $p = 100 a^2 b^2$ и $p = 100 a^2 b^2 (1 - x^2)^2 (1 - y^2)^2$ показаны на Рисунке 2.17 (коэффициент Пуассона принят равным 0.3). Видно, что учет взаимного влияния натяжения и изгиба сильно снижает прогнозируемую гибкость пластины по сравнению с результатами линейной модели, приведенными на Рисунке 2.12. Ниже, на рисунках 2.18 и 2.19 приведены остальные функции напряженно-деформированного состояния, полученные при тех же давлениях для пластины с $\alpha = 4$. Интересно отметить, что при рассмотренных нагружениях распределение нормальных напряжений близко к равномерному в большей части области. Кроме того, были проведены расчеты при больших давлениях. Значения полученных функций прогибов в трех точках приведены в таблицах 2.8 и 2.9, а для максимальных из рассмотренных давлений на Рисунке 2.20 представлены функции прогибов. Для расчетов удлиненных пластин при больших давлениях использована ступенчатая схема нумерации (2.53), а в остальных случаях – (2.52).

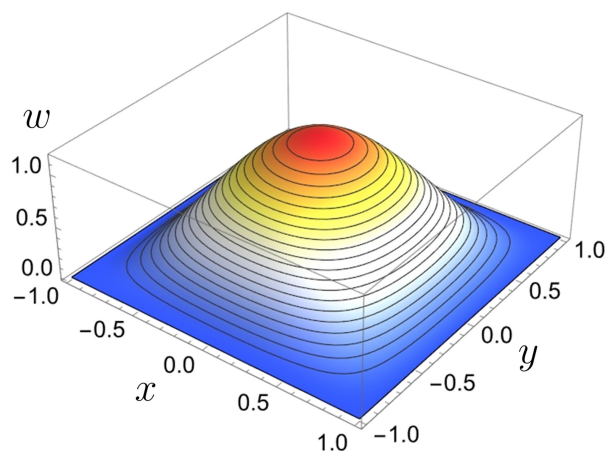
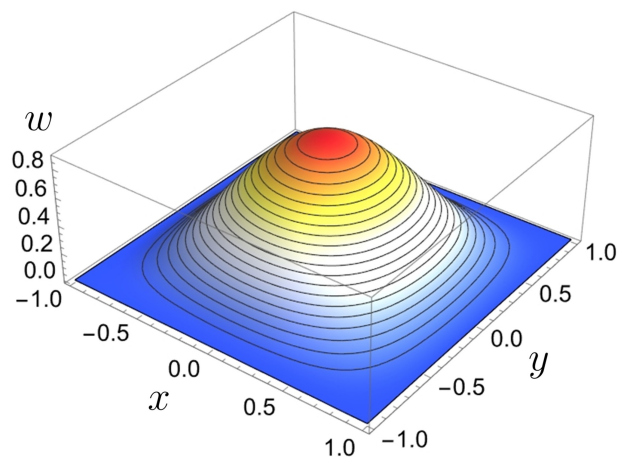
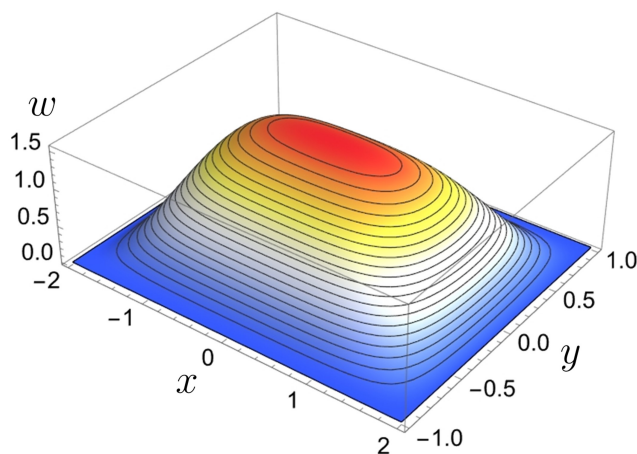
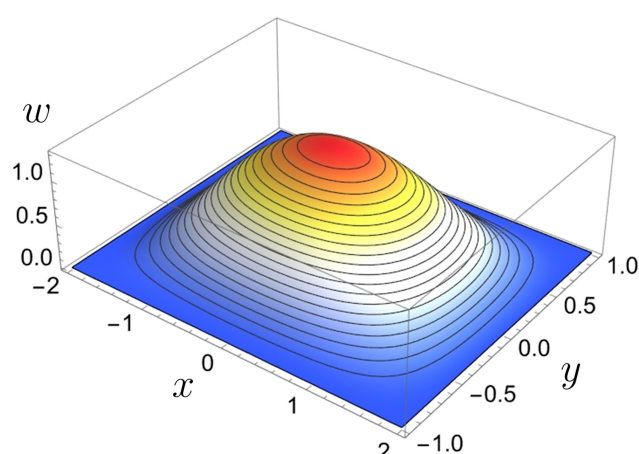
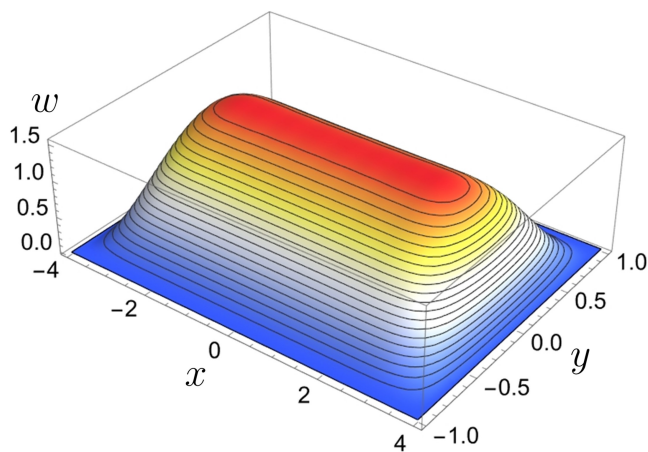
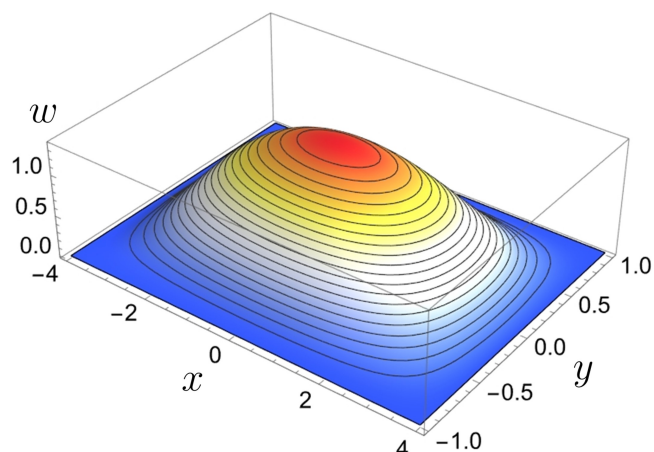
(а) $\alpha = 1$ (б) $\alpha = 1$ (в) $\alpha = 4$ (г) $\alpha = 4$ (д) $\alpha = 16$ (е) $\alpha = 16$

Рисунок 2.17 – Решения нелинейной задачи для случая подвижных краев. Слева приведены функции прогибов при $p = 100 a^2 b^2$ ($n = 105$), справа – при $p = 100 a^2 b^2 (1 - x^2)^2 (1 - y^2)^2$ ($n = 45$)

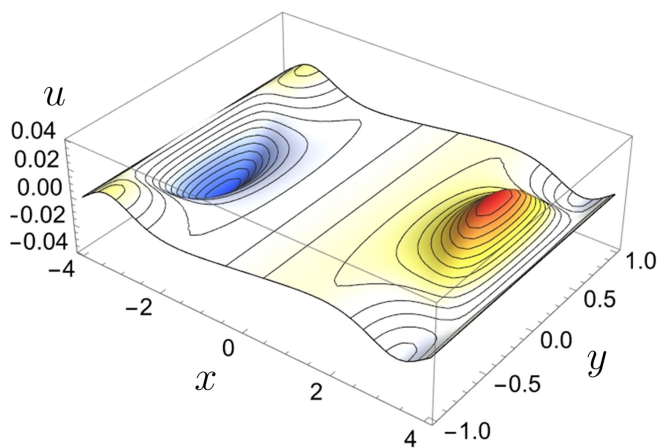
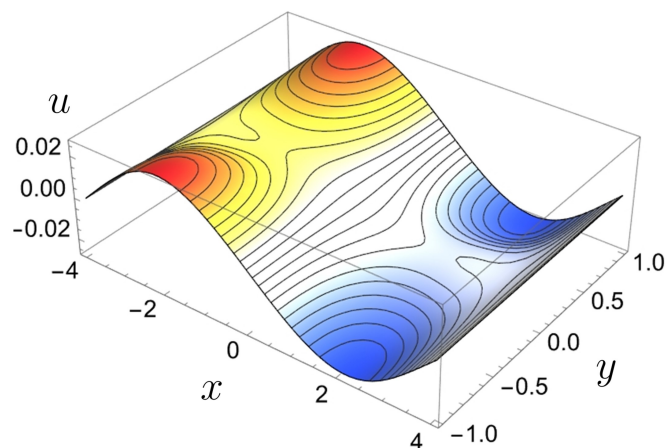
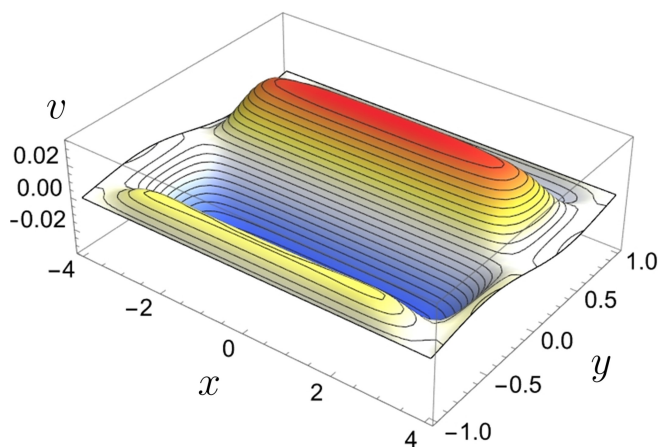
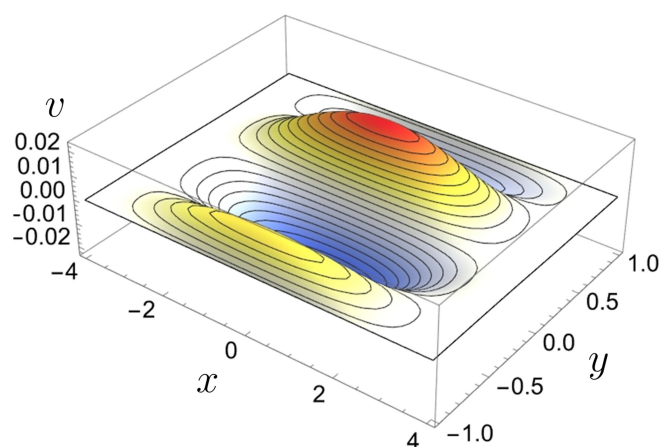
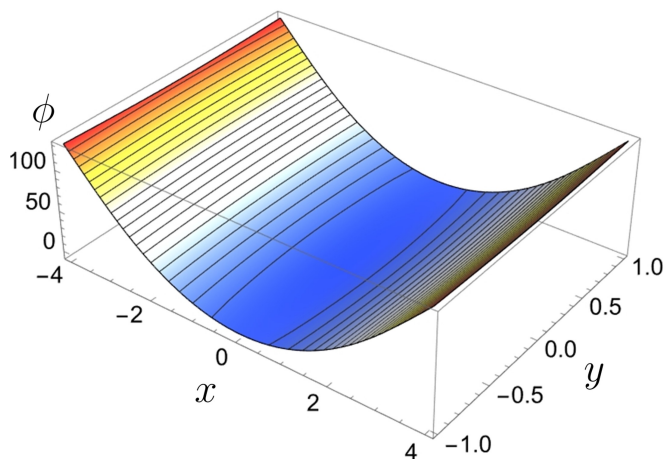
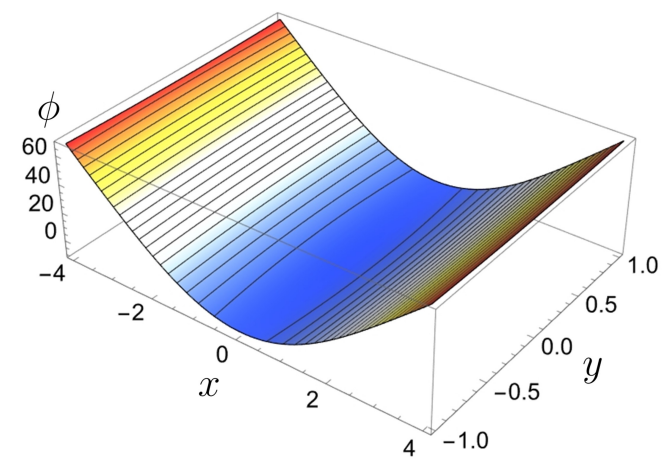
(а) Перемещения u (б) Перемещения u (в) Перемещения v (г) Перемещения v (д) Функция ϕ (е) Функция ϕ

Рисунок 2.18 – Функции перемещений в плоскости и функция ϕ пластины с $\alpha = 4$. Слева при $p = 100 a^2 b^2$ ($n = 105$), справа – при $p = 100 a^2 b^2 (1 - x^2)^2 (1 - y^2)^2$ ($n = 45$)

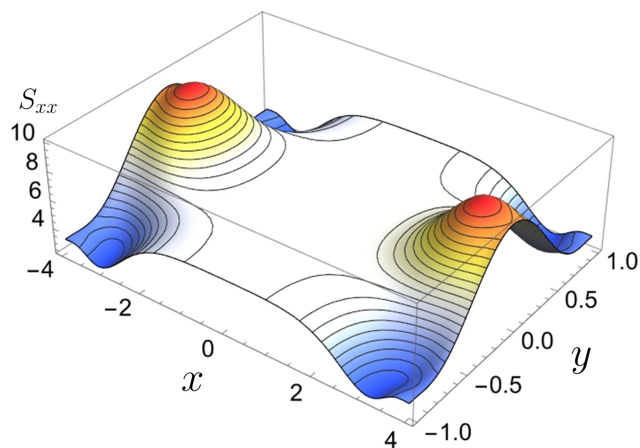
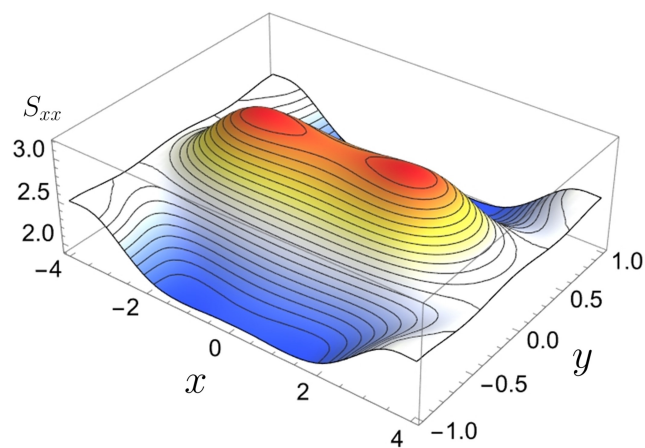
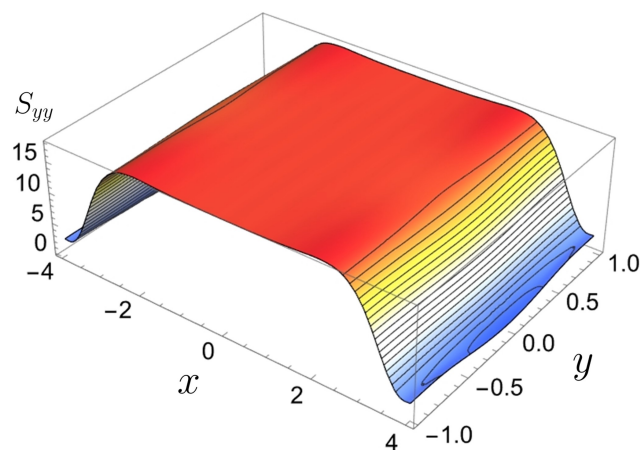
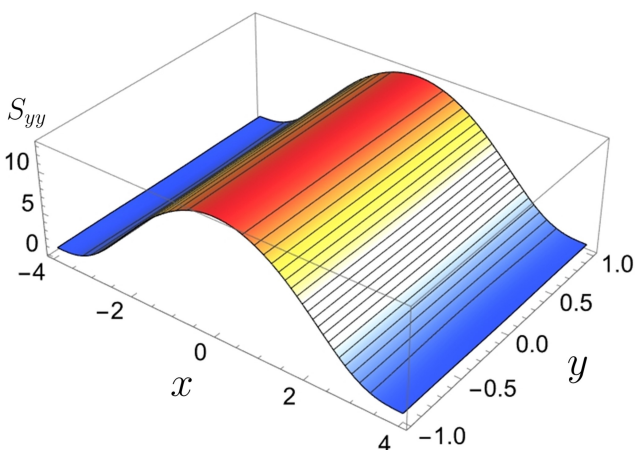
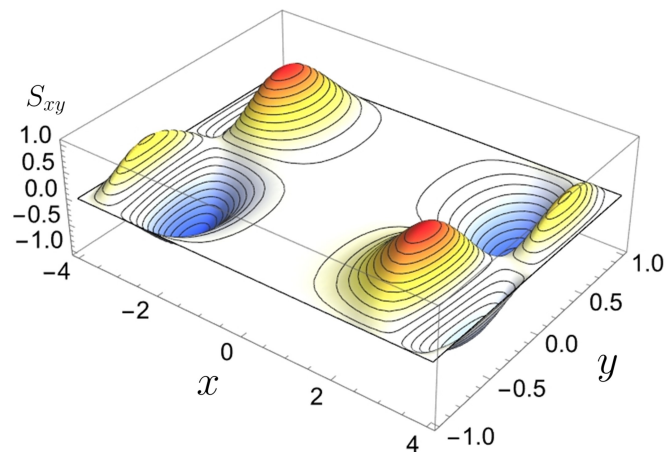
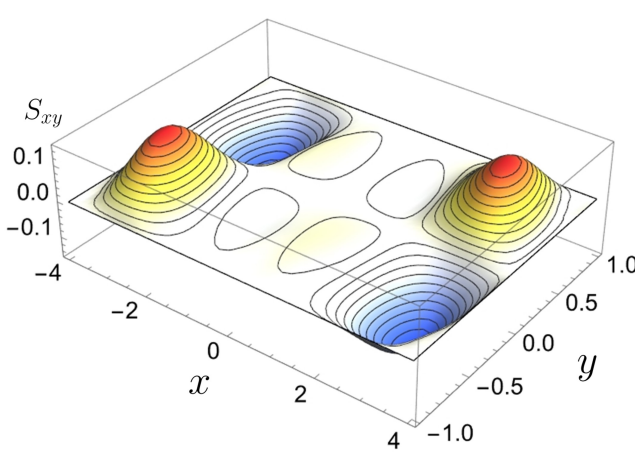
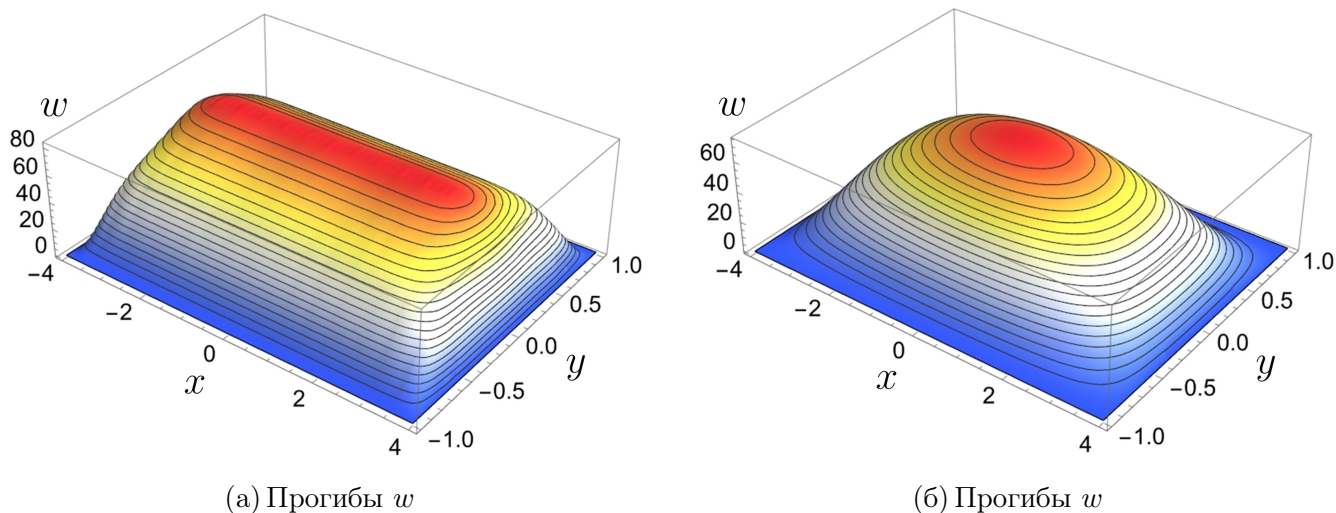
(а) Напряжения S_{xx} (б) Напряжения S_{xx} (в) Напряжения S_{yy} (г) Напряжения S_{yy} (д) Напряжения S_{xy} (е) Напряжения S_{xy}

Рисунок 2.19 – Функции напряжений пластины с $\alpha = 4$. Слева при $p = 100 a^2 b^2$ ($n = 105$), справа – при $p = 100 a^2 b^2 (1 - x^2)^2 (1 - y^2)^2$ ($n = 45$)

Давление p/a^2b^2	Прогиб w		
	$x = 0, y = 0$	$x = 2, y = 0$	$x = 0, y = 0.5$
10^2	1.53287	1.54101	0.94834
10^3	3.71584	3.72636	2.56534
10^4	8.19129	8.20600	5.88930
10^5	17.7326	17.7502	12.8587
10^6	38.2469	38.2609	27.7756
10^7	82.4231	82.4341	59.8726

Таблица 2.8 – Прогибы пластины, нагруженной равномерным давлением ($n = 90$)

Давление $p/a^2b^2 (1 - x^2)^2 (1 - y^2)^2$	Прогиб w		
	$x = 0, y = 0$	$x = 2, y = 0$	$x = 0, y = 0.5$
10^2	1.36553	0.995191	0.793101
10^3	3.37438	2.26568	2.17236
10^4	7.40258	6.00228	5.02144
10^5	15.9857	12.9908	11.0020
10^6	34.4508	28.0127	23.7903
10^7	74.2241	60.3644	51.2945

Таблица 2.9 – Прогибы пластины, нагруженной давлением пропорциональным $(1 - x^2)^2 (1 - y^2)^2$ ($n = 45$)Рисунок 2.20 – Слева функция прогибов при $p = 10^7 a^2 b^2$ ($n = 90$), справа – при $p = 10^7 a^2 b^2 (1 - x^2)^2 (1 - y^2)^2$ ($n = 45$)

2.2.5 Решение для случая абсолютно жестких краев

Рассмотрим вторую краевую задачу, определяемую граничными условиями (2.47). В этом случае дополнительный член появляется в правой части (2.66):

$$\phi^* = [\dots] + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \phi_{ck}^* + d_k \phi_{dk}^*),$$

где:

$$\phi_{ck}^* = -\frac{y^2}{\pi^2 k^2} \left[\cos(\pi k x) - (-1)^k \right], \quad \phi_{dk}^* = -\frac{x^2}{\pi^2 k^2} \left[\cos(\pi k y) - (-1)^k \right].$$

Здесь и далее символом $[\dots]$ обозначены слагаемые, содержащиеся в соответствующих выражениях в предыдущем случае. Первое уравнение системы (2.68) изменяется следующим образом:

$$[\dots] - \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left[\sum_{r=1}^{\infty} c_r L(f_k, \phi_{cr}^*) + \sum_{r=1}^{\infty} d_r L(f_k, \phi_{dr}^*) \right] = p,$$

в то время как второе уравнение остается неизменным. Краевые условия также модифицируются:

$$[\dots] + \int_0^1 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\alpha \frac{\partial^2}{\partial y^2} (c_k \phi_{ck}^* + d_k \phi_{dk}^*) - \nu d_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_{dk}^* \right] \right\} dx = 0,$$

$$[\dots] + \int_0^1 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} (c_k \phi_{ck}^* + d_k \phi_{dk}^*) - \nu c_k \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi_{ck}^* \right] \right\} dy = 0.$$

Кроме того, эта система должна быть дополнена еще двумя краевыми условиями:

$$\int_0^y \left[\frac{1}{2} (\beta a_0 - \nu b_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\beta (s_k + \zeta_k) \frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} (a_k \phi_{ak}^* + c_k \phi_{ck}^* + d_k \phi_{dk}^*) - \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} (b_k \phi_{bk}^* + d_k \phi_{dk}^*) \right) \right] dy \Big|_{x=1} = 0,$$

$$\int_0^x \left[\frac{1}{2} (\alpha b_0 - \nu a_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha (s_k + \zeta_k) \frac{\partial^2 f_k}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial^2}{\partial y^2} (b_k \phi_{bk}^* + c_k \phi_{ck}^* + d_k \phi_{dk}^*) - \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} (a_k \phi_{ak}^* + c_k \phi_{ck}^*) \right) \right] dx \Big|_{y=1} = 0.$$

Как и в предыдущем случае, проецирование на базисные функции с последующей редукцией позволяет получить конечную систему алгебраических уравнений. Первые шесть уравнений получаются аналогично:

$$\left[\mathbf{G} - \frac{a_0}{2} \mathbf{M}^{a0} - \frac{b_0}{2} \mathbf{M}^{b0} - \mathbf{M} \cdot (\mathbf{s} + \boldsymbol{\zeta}) - \mathbf{M}^a \cdot \mathbf{a} - \mathbf{M}^b \cdot \mathbf{b} - \mathbf{M}^c \cdot \mathbf{c} - \mathbf{M}^d \cdot \mathbf{d} \right] \cdot \mathbf{g} = \mathbf{b},$$

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{s} + \kappa (\mathbf{M} \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} = \mathbf{0},$$

$$\kappa (\mathbf{U}^{w0} \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} - (\alpha b_0 - \nu a_0) - (\alpha \mathbf{u}^{cd} \cdot \mathbf{c} - \nu \mathbf{u}^{cd} \cdot \mathbf{d}) = 0,$$

$$\kappa (\mathbf{V}^{w0} \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} - (\beta a_0 - \nu b_0) - (\beta \mathbf{v}^{cd} \cdot \mathbf{d} - \nu \mathbf{v}^{cd} \cdot \mathbf{c}) = 0,$$

$$\alpha \left[\mathbf{U} \cdot (\mathbf{s} + \boldsymbol{\zeta}) + \mathbf{b} + \frac{1}{3} \mathbf{d} \right] - \nu \mathbf{U}^{cd} \cdot \mathbf{d} - \kappa (\mathbf{U}^w \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} = 0,$$

$$\beta \left[\mathbf{V} \cdot (\mathbf{s} + \boldsymbol{\zeta}) + \mathbf{a} + \frac{1}{3} \mathbf{c} \right] - \nu \mathbf{V}^{cd} \cdot \mathbf{c} - \kappa (\mathbf{V}^w \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} = 0,$$

Кроме того, эту систему нужно дополнить еще двумя уравнениями, подействовав на оставшиеся два краевых условия проектором:

$$\mathcal{F}_q^s (F(v)) = \int_{-1}^1 F \sin(\pi qv) dv, \quad q = 1 \dots \infty.$$

Результат будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{v}^0 (\beta a_0 - \nu b_0) + \beta \mathbf{V}^t \cdot (\mathbf{s} + \boldsymbol{\zeta}) + \beta (\mathbf{V}^a \cdot \mathbf{a} + \mathbf{V}^c \cdot \mathbf{c} + \mathbf{V}^d \cdot \mathbf{d}) - \nu \mathbf{V}^{bd} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{d}) = 0,$$

$$\mathbf{u}^0 (\alpha b_0 - \nu a_0) + \alpha \mathbf{U}^t \cdot (\mathbf{s} + \boldsymbol{\zeta}) + \alpha (\mathbf{U}^b \cdot \mathbf{b} + \mathbf{U}^c \cdot \mathbf{c} + \mathbf{U}^d \cdot \mathbf{d}) - \nu \mathbf{U}^{ac} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c}) = 0.$$

Здесь используется дополнительный набор вспомогательных векторов, матриц и кубических матриц. Выражения для компонент части из них представлены в Таблице 2.10, а остальные получаются с помощью замен аналогичных (2.70):

$$\lambda_{S(q)} \leftrightarrow \lambda_{C(q)}, \quad \beta \leftrightarrow \alpha, \quad \mathbf{U} \leftrightarrow \mathbf{V}, \quad a \leftrightarrow b \quad c \leftrightarrow d.$$

Чтобы свести полученные уравнения к системе кубических уравнений относительно компонент \mathbf{g} необходимо, как и ранее, последовательно исключить остальные неизвестные. Начнем со скаляров a_0 , b_0 :

$$a_0 = 6 [(\alpha \mathbf{V}^{w0} + \nu \mathbf{U}^{w0}) \cdot \mathbf{g}] \cdot \mathbf{g} - \mathbf{u}^{cd} \cdot \mathbf{d}, \quad b_0 = 6 [(\beta \mathbf{U}^{w0} + \nu \mathbf{V}^{w0}) \cdot \mathbf{g}] \cdot \mathbf{g} - \mathbf{v}^{cd} \cdot \mathbf{c}.$$

Эти выражения могут быть записаны более компактно с помощью обозначений (2.74):

$$a_0 = 6 \mathbf{g} \cdot \mathcal{T}^a \cdot \mathbf{g} - \mathbf{u}^{cd} \cdot \mathbf{d}, \quad b_0 = 6 \mathbf{g} \cdot \mathcal{T}^b \cdot \mathbf{g} - \mathbf{v}^{cd} \cdot \mathbf{c}.$$

Структура	Выражение для компонент
$\mathbf{u}^{cd}, \mathbf{v}^{cd}$	$u_k^{cd} = v_k^{cd} = \frac{4(-1)^k}{\pi^2 k^2}$
$\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0$	$u_q^0 = v_q^0 = -\frac{(-1)^q}{\pi q}$
$\mathbf{U}^{cd}, \mathbf{V}^{cd}$	$U_{qk}^{cd} = V_{qk}^{cd} = -\frac{2}{\pi^2 k^2} \delta_{qk}$
\mathbf{U}^t	$U_{qk}^t = -\frac{8\pi^3 q^3 (-1)^q \lambda_{C(k)}^2 \sin(\lambda_{S(k)}) \cos(\lambda_{C(k)}) \cosh(\lambda_{S(k)}) \cosh(\lambda_{C(k)})}{\lambda_{S(k)} (\lambda_{S(k)}^4 - \pi^4 q^4)} \mathbf{n}_k$
$\mathbf{U}^b, \mathbf{V}^a$	$U_{qk}^b = V_{qk}^a = -\frac{2(-1)^{q+k}}{\pi q}$
$\mathbf{U}^c, \mathbf{V}^d$	$U_{qk}^c = V_{qk}^d = -\frac{2}{\pi^2 k^2} \left(\frac{2(-1)^{q+k}}{\pi q} + \frac{1}{\pi k} \delta_{qk} \right)$
$\mathbf{U}^d, \mathbf{V}^c$	$U_{qk}^d = V_{qk}^c = \frac{2(6 - \pi^2 q^2)(-1)^{q+k}}{3\pi^3 q^3}$
$\mathbf{U}^{ac}, \mathbf{V}^{bd}$	$U_{qk}^{ac} = V_{qk}^{bd} = \frac{1}{\pi k} \delta_{qk}$
\mathbf{M}^c	$M_{qkr}^c = \frac{1}{\mathbf{n}_k \mathbf{n}_q} \left[\frac{2\lambda_{S(k)}^2}{\pi^2 r^2} \left(\frac{I_{M4}(\lambda_{S(k)}, \lambda_{S(q)}, \pi r)}{\cosh(\pi r)} - (-1)^r I_G(\lambda_{S(q)}, \lambda_{S(k)}) \right) \times \right. \\ \times \delta_{S(q)S(k)} \sqrt{\cos^2(\lambda_{C(k)}) + \cosh^2(\lambda_{C(k)})} + 2\lambda_{C(k)}^2 \frac{I_{M3}(\lambda_{S(k)}, \lambda_{S(q)}, \pi r)}{\cosh(\pi r)} \times \\ \left. \times I_{N1}(\lambda_{C(k)}, \lambda_{C(q)}) - \frac{4\lambda_{S(k)}\lambda_{C(k)}}{\pi r} \frac{I_{M5}(\lambda_{S(q)}, \lambda_{S(k)}, \pi r)}{\cosh(\pi r)} \frac{I_{N2}(\lambda_{C(q)}, \lambda_{C(k)})}{\cosh(\pi r)} \right]$

Таблица 2.10 – Компоненты вспомогательных матриц

Аналогично можно выразить искомые векторы. Чтобы избежать длинных выражений, которые сложно проверять, будем выражать векторы последовательно, перезаписывая промежуточные результаты через вспомогательные обозначения:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= (\mathbf{V} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1} \cdot \left[\frac{\nu}{\beta} \mathbf{V}^{cd} \cdot \mathbf{C} - \frac{1}{3} \mathbf{C} + \frac{\kappa}{\beta} (\mathbf{V}^w \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} - \right. \\
&\quad \left. - \mathbf{V} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{d} - \kappa (\mathbf{M} \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} \right) \right] \\
&= \mathcal{S}_a^{-1} \cdot (\mathcal{S}_b^a \cdot \mathbf{b} + \mathcal{S}_c^a \cdot \mathbf{c} + \mathcal{S}_d^a \cdot \mathbf{d} + (\mathcal{S}_g^a \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g}),
\end{aligned}$$

где:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_a &= \mathbf{V} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{E}, \\
\mathcal{S}_b^a &= -\mathbf{V} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{B}, \\
\mathcal{S}_d^a &= -\mathbf{V} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{D}, \\
\mathcal{S}_c^a &= \frac{\nu}{\beta} \mathbf{V}^{cd} - \frac{1}{3} \mathbf{E} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{C}, \\
\mathcal{S}_g^a &= \frac{\kappa}{\beta} \mathbf{V}^w + \kappa \mathbf{V} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{M}.
\end{aligned}$$

Остальные векторы представим аналогично:

$$\begin{aligned}
\mathbf{b} &= \mathcal{S}_b^{-1} \cdot (\mathcal{S}_c^b \cdot \mathbf{c} + \mathcal{S}_d^b \cdot \mathbf{d} + (\mathcal{S}_g^b \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g}), \\
\mathbf{c} &= \mathcal{S}_c^{-1} \cdot (\mathcal{S}_d^c \cdot \mathbf{d} + (\mathcal{S}_g^c \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} + \mathbf{u}^0 \mathbf{g} \cdot \mathcal{T}^c \cdot \mathbf{g}), \\
\mathbf{d} &= \mathcal{S}_d^{-1} \cdot ((\mathcal{S}_g^d \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} + \mathbf{v}^0 \mathbf{g} \cdot \mathcal{T}^d \cdot \mathbf{g} + \mathcal{S}^{cd} \cdot \mathbf{u}^0 \mathbf{g} \cdot \mathcal{T}^c \cdot \mathbf{g}).
\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_b &= \mathbf{U} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathcal{S}_a^{-1} \cdot \mathcal{S}_b^a) + \mathbf{E}, \\
\mathcal{S}_c^b &= -\mathbf{U} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot (\mathbf{C} + \mathbf{A} \cdot \mathcal{S}_a^{-1} \cdot \mathcal{S}_c^a), \\
\mathcal{S}_d^b &= \frac{\nu}{\alpha} \mathbf{U}^{cd} - \frac{1}{3} \mathbf{E} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot (\mathbf{D} + \mathbf{A} \cdot \mathcal{S}_a^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^a), \\
\mathcal{S}_g^b &= \frac{\kappa}{\alpha} \mathbf{U}^w - \mathbf{U} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathcal{S}_a^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^a - \kappa \mathbf{M}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_c &= \mathbf{u}^0 \otimes \mathbf{v}^{cd} - \mathbf{U}^t \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathcal{S}_a^{-1} \cdot \mathcal{S}_c^a + \mathbf{A} \cdot \mathcal{S}_a^{-1} \cdot \mathcal{S}_b^a \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_c^b + \mathbf{B} \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_c^b + \mathbf{C}) - \\
&\quad - \mathbf{U}^b \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_c^b - \mathbf{U}^c + \frac{\nu}{\alpha} \mathbf{U}^{ac} \cdot (\mathcal{S}_a^{-1} \cdot \mathcal{S}_c^a + \mathcal{S}_a^{-1} \cdot \mathcal{S}_b^a \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_c^b + \mathbf{E}), \\
\mathcal{S}_d^c &= \frac{\nu}{\alpha} \mathbf{u}^0 \otimes \mathbf{u}^{cd} + \mathbf{U}^t \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathcal{S}_a^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^a + \mathbf{A} \cdot \mathcal{S}_a^{-1} \cdot \mathcal{S}_b^a \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^b + \mathbf{B} \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^b + \mathbf{D}) + \\
&\quad + \mathbf{U}^b \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^b + \mathbf{U}^d - \frac{\nu}{\alpha} \mathbf{U}^{ac} \cdot (\mathcal{S}_a^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^a + \mathcal{S}_a^{-1} \cdot \mathcal{S}_b^a \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^b), \\
\mathcal{S}_g^c &= \mathbf{U}^t \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathcal{S}_a^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^a + \mathbf{A} \cdot \mathcal{S}_a^{-1} \cdot \mathcal{S}_b^a \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^b + \mathbf{B} \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^b - \kappa \mathbf{M}) + \\
&\quad + \mathbf{U}^b \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^b - \frac{\nu}{\alpha} \mathbf{U}^{ac} \cdot (\mathcal{S}_a^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^a + \mathcal{S}_a^{-1} \cdot \mathcal{S}_b^a \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^b), \\
\mathcal{T}^c &= 6 \left(\mathcal{T}^b - \frac{\nu}{\alpha} \mathcal{T}^a \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_d &= \mathbf{v}^0 \otimes \mathbf{u}^{cd} - \mathbf{V}^t \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{V}^d + \frac{\nu}{\beta} \mathbf{V}^{bd} - (\mathbf{V}^t \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{V}^a) \times \\
&\times (\mathcal{S}_a^{-1} \cdot \mathcal{S}_b^a \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_c^b \cdot \mathcal{S}_c^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^c + \mathcal{S}_a^{-1} \cdot \mathcal{S}_b^a \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^b + \mathcal{S}_a^{-1} \cdot \mathcal{S}_c^a \cdot \mathcal{S}_c^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^c + \mathcal{S}_a^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^a) - \\
&- \left(\mathbf{V}^t \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{B} - \frac{\nu}{\beta} \mathbf{V}^{bd} \right) \cdot (\mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_c^b \cdot \mathcal{S}_c^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^c + \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^b) - \\
&- \left(\mathbf{V}^t \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{V}^c + \frac{\nu}{\beta} \mathbf{v}^0 \otimes \mathbf{v}^{cd} \right) \cdot \mathcal{S}_c^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^c, \\
\mathcal{S}_g^d &= -\kappa \mathbf{V}^t \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{M} + (\mathbf{V}^t \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{V}^a) \times \\
&\times (\mathcal{S}_a^{-1} \cdot \mathcal{S}_b^a \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_c^b \cdot \mathcal{S}_c^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^c + \mathcal{S}_a^{-1} \cdot \mathcal{S}_b^a \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^b + \mathcal{S}_a^{-1} \cdot \mathcal{S}_c^a \cdot \mathcal{S}_c^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^c + \mathcal{S}_a^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^a) + \\
&+ \left(\mathbf{V}^t \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{B} - \frac{\nu}{\beta} \mathbf{V}^{bd} \right) \cdot (\mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_c^b \cdot \mathcal{S}_c^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^c + \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^b) + \\
&+ \left(\mathbf{V}^t \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{V}^c + \frac{\nu}{\beta} \mathbf{v}^0 \otimes \mathbf{v}^{cd} \right) \cdot \mathcal{S}_c^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^c, \\
\mathcal{S}^{cd} &= (\mathbf{V}^t \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{V}^a) \cdot (\mathcal{S}_a^{-1} \cdot \mathcal{S}_b^a \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_c^b \cdot \mathcal{S}_c^{-1} + \mathcal{S}_a^{-1} \cdot \mathcal{S}_c^a \cdot \mathcal{S}_c^{-1}) + \\
&+ \left(\mathbf{V}^t \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{B} - \frac{\nu}{\beta} \mathbf{V}^{bd} \right) \cdot (\mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_c^b \cdot \mathcal{S}_c^{-1}) + \left(\mathbf{V}^t \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{V}^c + \frac{\nu}{\beta} \mathbf{v}^0 \otimes \mathbf{v}^{cd} \right) \cdot \mathcal{S}_c^{-1}, \\
\mathcal{T}^d &= 6 \left(\mathcal{T}^a - \frac{\nu}{\beta} \mathcal{T}^b \right).
\end{aligned}$$

Полученные соотношения позволяют свести, полученные уравнения к системе кубических уравнений подобной (2.73):

$$\begin{aligned}
\mathbf{G} \cdot \mathbf{g} - ((\mathcal{S}' \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} - 3 [(\mathbf{g} \cdot \mathcal{T}^a \cdot \mathbf{g}) (\mathbf{M}^{a0} \cdot \mathbf{g}) + (\mathbf{g} \cdot \mathcal{T}^b \cdot \mathbf{g}) (\mathbf{M}^{b0} \cdot \mathbf{g})] - \quad (2.76) \\
- (\mathbf{g} \cdot \mathcal{T}^c \cdot \mathbf{g}) (\mathbf{g} \cdot \mathcal{S}'_c \cdot \mathbf{u}^0) - (\mathbf{g} \cdot \mathcal{T}^d \cdot \mathbf{g}) (\mathbf{g} \cdot \mathcal{S}'_d \cdot \mathbf{v}^0) = \mathbf{b}.
\end{aligned}$$

Здесь матрицы \mathcal{T}^a , \mathcal{T}^b выражаются через вспомогательные матрицы по (2.74), а \mathcal{S}'_c , \mathcal{S}'_d и матрица четвертого порядка \mathcal{S}' – следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}'_c &= (\mathbf{M} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{M}^a) \cdot \mathcal{S}_a^{-1} \cdot (\mathcal{S}_b^a \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_c^b \cdot \mathcal{S}_c^{-1} + \mathcal{S}_c^a \cdot \mathcal{S}_c^{-1} + \\
&+ \mathcal{S}_b^a \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_c^b \cdot \mathcal{S}_c^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^c \cdot \mathcal{S}_d^{-1} \cdot \mathcal{S}^{cd} + \mathcal{S}_b^a \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^b \cdot \mathcal{S}_d^{-1} \cdot \mathcal{S}^{cd} + \mathcal{S}_c^a \cdot \mathcal{S}_c^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^c \cdot \mathcal{S}_d^{-1} \cdot \mathcal{S}^{cd} + \\
&+ \mathcal{S}_d^a \cdot \mathcal{S}_d^{-1} \cdot \mathcal{S}^{cd}) + \\
&+ (\mathbf{M} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{M}^b) \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot (\mathcal{S}_c^b \cdot \mathcal{S}_c^{-1} + \mathcal{S}_c^b \cdot \mathcal{S}_c^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^c \cdot \mathcal{S}_d^{-1} \cdot \mathcal{S}^{cd} + \mathcal{S}_d^b \cdot \mathcal{S}_d^{-1} \cdot \mathcal{S}^{cd}) + \\
&+ (\mathbf{M} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{M}^c) \cdot \mathcal{S}_c^{-1} \cdot (\mathbf{E} + \mathcal{S}_d^c \cdot \mathcal{S}_d^{-1} \cdot \mathcal{S}^{cd}) + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{M}^d) \cdot \mathcal{S}_d^{-1} \cdot \mathcal{S}^{cd} - \\
&- \frac{1}{2} \left[\mathbf{M}^{a0} \otimes (\mathbf{u}^{cd} \cdot \mathcal{S}_d^{-1} \cdot \mathcal{S}^{cd}) + \mathbf{M}^{b0} \otimes (\mathbf{v}^{cd} \cdot \mathcal{S}_c^{-1} + \mathbf{v}^{cd} \cdot \mathcal{S}_c^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^c \cdot \mathcal{S}_d^{-1} \cdot \mathcal{S}^{cd}) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'_d = & (\mathbf{M} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{M}^a) \cdot \mathcal{S}_a^{-1} \cdot (\mathcal{S}_b^a \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_c^b \cdot \mathcal{S}_c^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^c + \mathcal{S}_c^a \cdot \mathcal{S}_c^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^c + \mathcal{S}_b^a \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^b + \\ & + \mathcal{S}_d^a) \cdot \mathcal{S}_d^{-1} + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{M}^b) \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot (\mathcal{S}_c^b \cdot \mathcal{S}_c^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^c + \mathcal{S}_d^b) \cdot \mathcal{S}_d^{-1} + \\ & + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{M}^c) \cdot \mathcal{S}_c^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^c \cdot \mathcal{S}_d^{-1} + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{M}^d) \cdot \mathcal{S}_d^{-1} - \\ & - \frac{1}{2} \left[\mathbf{M}^{a0} \otimes (\mathbf{u}^{cd} \cdot \mathcal{S}_d^{-1}) + \mathbf{M}^{b0} \otimes (\mathbf{v}^{cd} \cdot \mathcal{S}_c^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^c \cdot \mathcal{S}_d^{-1}) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}' = & -\kappa \mathbf{M} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{M} + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{M}^a) \cdot \mathcal{S}_a^{-1} \cdot (\mathcal{S}_g^a + \mathcal{S}_b^a \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^b + \\ & + \mathcal{S}_b^a \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_c^b \cdot \mathcal{S}_c^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^c + \mathcal{S}_b^a \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^b \cdot \mathcal{S}_d^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^d + \mathcal{S}_b^a \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot \mathcal{S}_c^b \cdot \mathcal{S}_c^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^c \cdot \mathcal{S}_d^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^d + \\ & + \mathcal{S}_c^a \cdot \mathcal{S}_c^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^c + \mathcal{S}_c^a \cdot \mathcal{S}_c^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^c \cdot \mathcal{S}_d^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^d + \mathcal{S}_d^a \cdot \mathcal{S}_d^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^d) + \\ & + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{M}^b) \cdot \mathcal{S}_b^{-1} \cdot (\mathcal{S}_g^b + \mathcal{S}_c^b \cdot \mathcal{S}_c^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^c + \mathcal{S}_d^b \cdot \mathcal{S}_d^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^d + \\ & + \mathcal{S}_c^b \cdot \mathcal{S}_c^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^c \cdot \mathcal{S}_d^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^d) + \\ & + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{M}^c) \cdot \mathcal{S}_c^{-1} \cdot (\mathcal{S}_g^c + \mathcal{S}_d^c \cdot \mathcal{S}_d^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^d) + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{M}^d) \cdot \mathcal{S}_d^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^d - \\ & - \frac{1}{2} \left[\mathbf{M}^{a0} \otimes (\mathbf{u}^{cd} \cdot \mathcal{S}_d^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^d) + \mathbf{M}^{b0} \otimes (\mathbf{v}^{cd} \cdot \mathcal{S}_c^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^c + \mathbf{v}^{cd} \cdot \mathcal{S}_c^{-1} \cdot \mathcal{S}_d^c \cdot \mathcal{S}_d^{-1} \cdot \mathcal{S}_g^d) \right], \end{aligned}$$

Полученное матричное уравнение (2.76) также можно линеаризовать. Если обозначить правую часть (2.76) как \mathcal{A}' , то производная этой функции по \mathbf{g} при $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0$ будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{A}'}{\partial \mathbf{g}} \right|_{\mathbf{g}=\mathbf{g}_0} = & \mathbf{G} - \sum_{k=1}^n \{ [(\mathcal{S}' \cdot \mathbf{E}_k) \cdot \mathbf{g}_0] \cdot \mathbf{g}_0 + [(\mathcal{S} \cdot \mathbf{g}_0) \cdot \mathbf{E}_k] \cdot \mathbf{g}_0 + [(\mathcal{S} \cdot \mathbf{g}_0) \cdot \mathbf{g}_0] \cdot \mathbf{E}_k \} \otimes \mathbf{E}_k - \\ & - 3 \left\{ [(\mathbf{M}^{a0} \cdot \mathbf{g}_0) \otimes (\mathcal{T}^a \cdot \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_0 \cdot \mathcal{T}^a)] + [(\mathbf{M}^{b0} \cdot \mathbf{g}_0) \otimes (\mathcal{T}^b \cdot \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_0 \cdot \mathcal{T}^b)] + \right. \\ & \left. + (\mathbf{g}_0 \cdot \mathcal{T}^a \cdot \mathbf{g}_0) \mathbf{M}^{a0} + (\mathbf{g}_0 \cdot \mathcal{T}^b \cdot \mathbf{g}_0) \mathbf{M}^{b0} \right\} - \\ & - \left\{ [(\mathbf{g}_0 \cdot \mathcal{S}'_c \cdot \mathbf{u}^0) \otimes (\mathcal{T}^c \cdot \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_0 \cdot \mathcal{T}^c)] + [(\mathbf{g}_0 \cdot \mathcal{S}'_d \cdot \mathbf{v}^0) \otimes (\mathcal{T}^d \cdot \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_0 \cdot \mathcal{T}^d)] + \right. \\ & \left. + (\mathbf{g}_0 \cdot \mathcal{T}^c \cdot \mathbf{g}_0) (\mathcal{S}'_c \cdot \mathbf{u}^0) + (\mathbf{g}_0 \cdot \mathcal{T}^d \cdot \mathbf{g}_0) (\mathcal{S}'_d \cdot \mathbf{v}^0) \right\}. \end{aligned}$$

Для этого случая были проведены расчеты аналогичные предыдущему. Полученные уравнения были решены при $p = 100 a^2 b^2$ и $p = 100 a^2 b^2 (1 - x^2)^2 (1 - y^2)^2$ для пластин с разными соотношениями сторон (2.21), для пластины с соотношением 4 : 1 приведен расширенный набор результатов (рисунки 2.22 и 2.23). Для последней рассмотрены случаи больших прогибов (таблицы 2.11, 2.12 и Рисунок 2.24). Во всех расчетах принято $\nu = 0.3$. Видно, что хотя функции прогибов практически не отличаются от полученных ранее, распределения напряжений могут серьезно меняться, что необходимо учитывать при анализе прочности пластины.

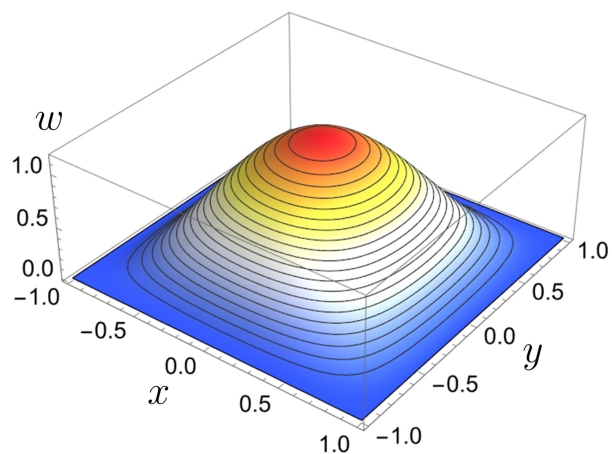
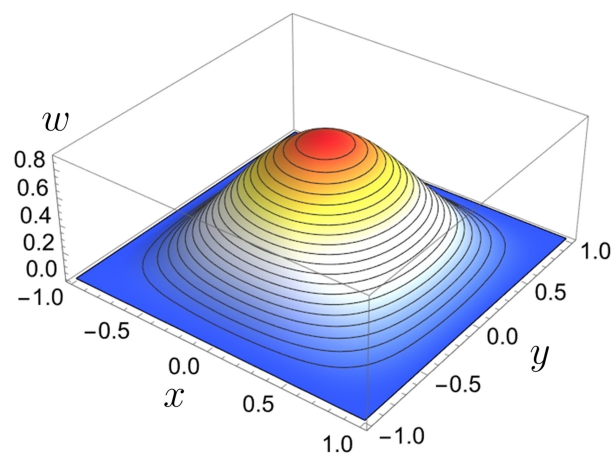
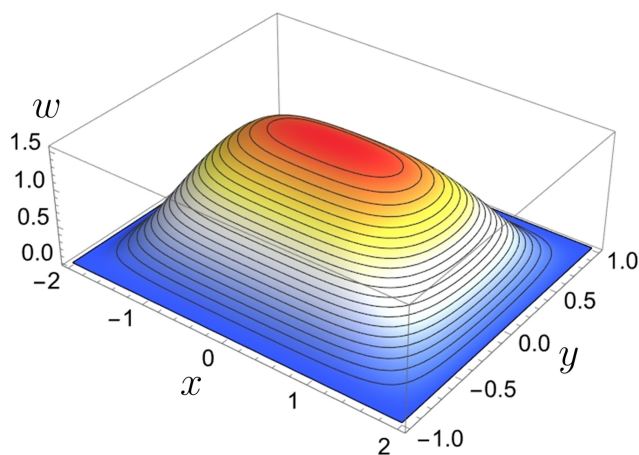
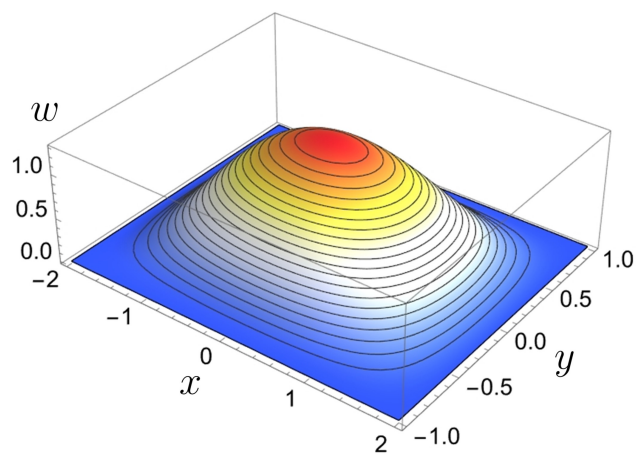
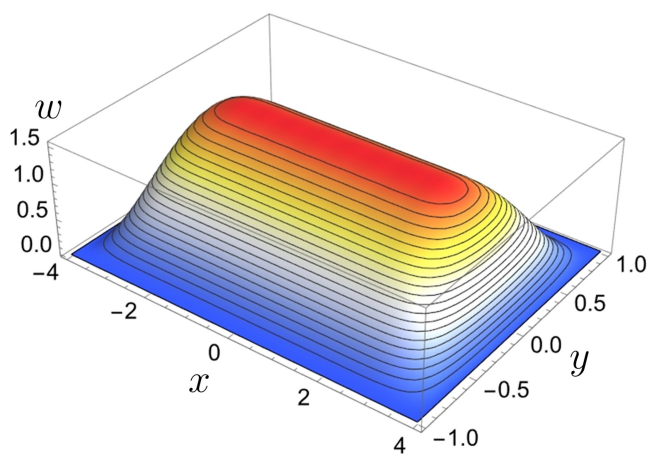
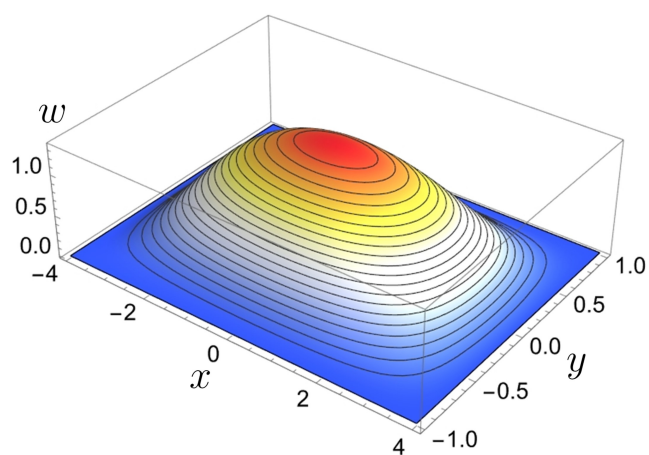
(a) $\alpha = 1$ (б) $\alpha = 1$ (в) $\alpha = 4$ (г) $\alpha = 4$ (д) $\alpha = 16$ (е) $\alpha = 16$

Рисунок 2.21 – Решения нелинейной задачи для случая подвижных краев. Слева приведены функции прогибов при $p = 100 a^2 b^2$ ($n = 105$), справа – при $p = 100 a^2 b^2 (1 - x^2)^2 (1 - y^2)^2$ ($n = 45$)

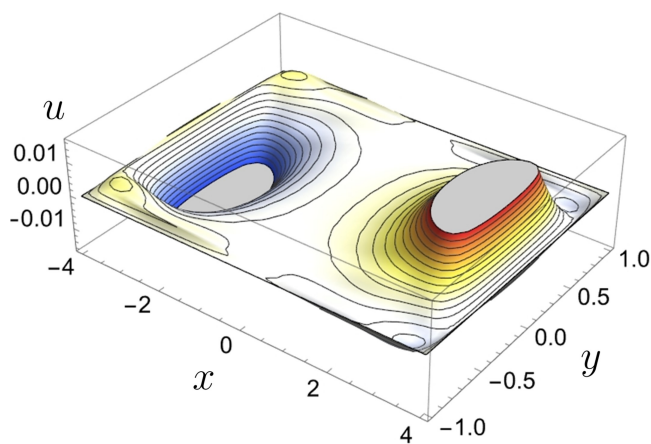
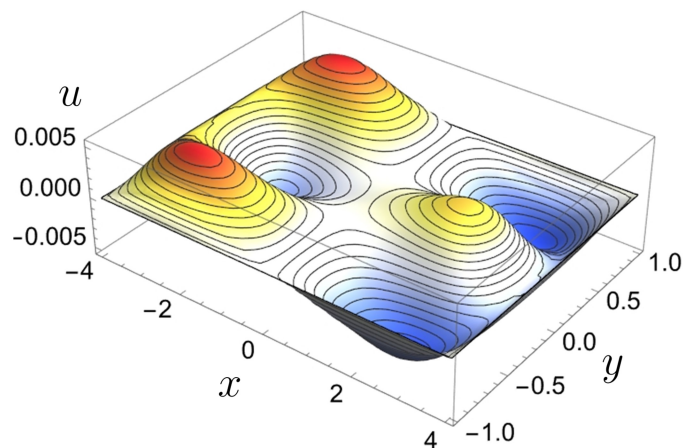
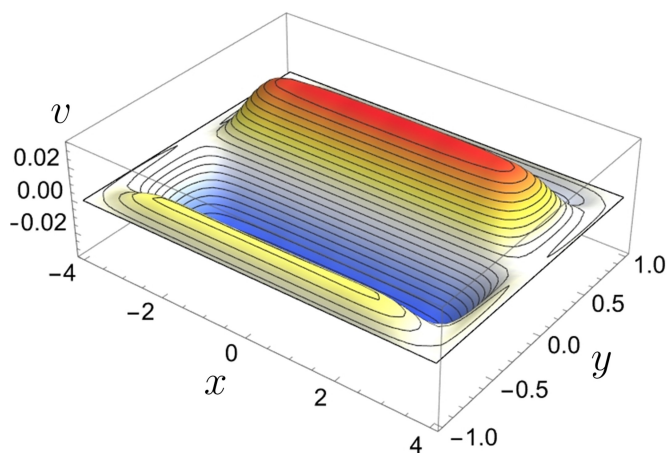
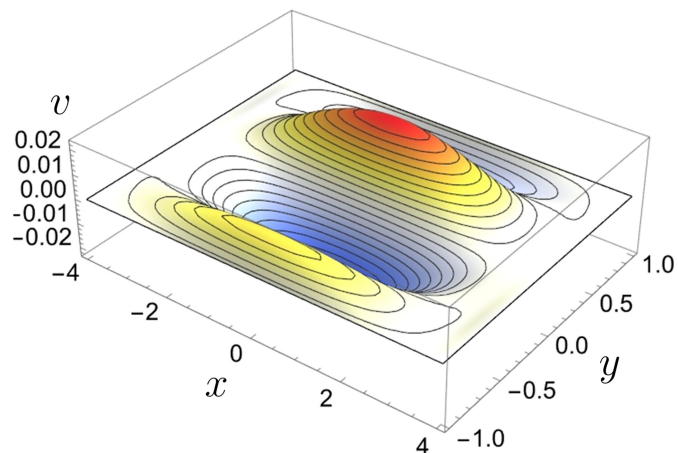
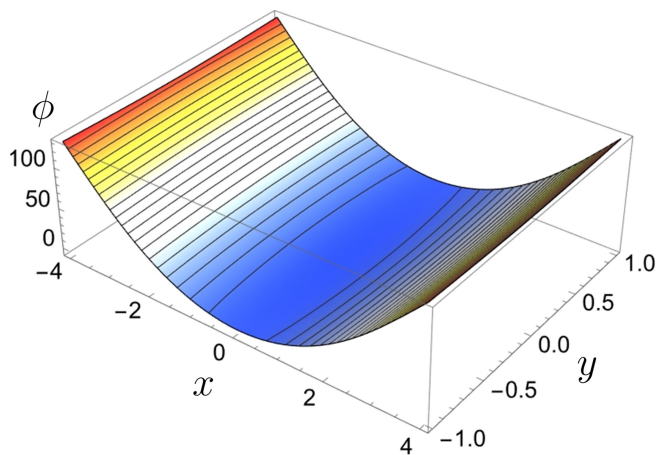
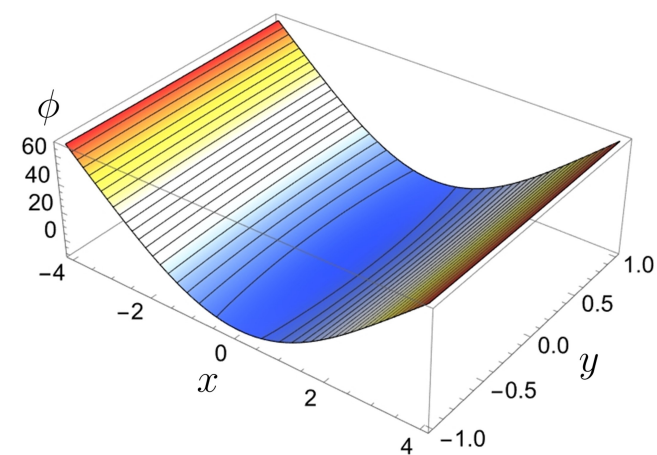
(а) Перемещения u (б) Перемещения u (в) Перемещения v (г) Перемещения v (д) Функция ϕ (е) Функция ϕ

Рисунок 2.22 – Функции перемещений в плоскости и функция ϕ пластины с $\alpha = 4$. Слева при $p = 100 a^2 b^2$ ($n = 105$), справа – при $p = 100 a^2 b^2 (1 - x^2)^2 (1 - y^2)^2$ ($n = 45$)

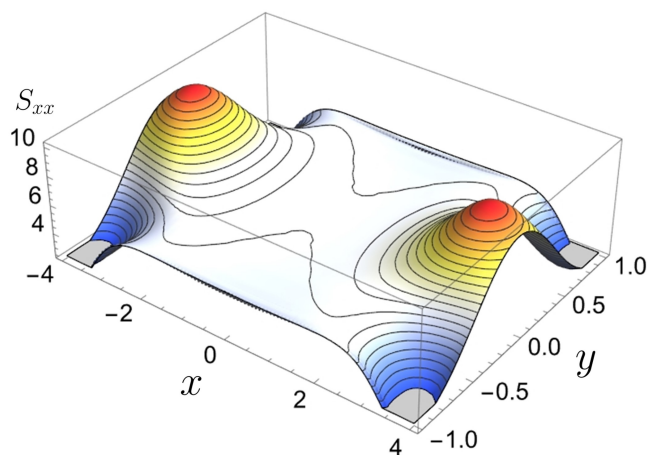
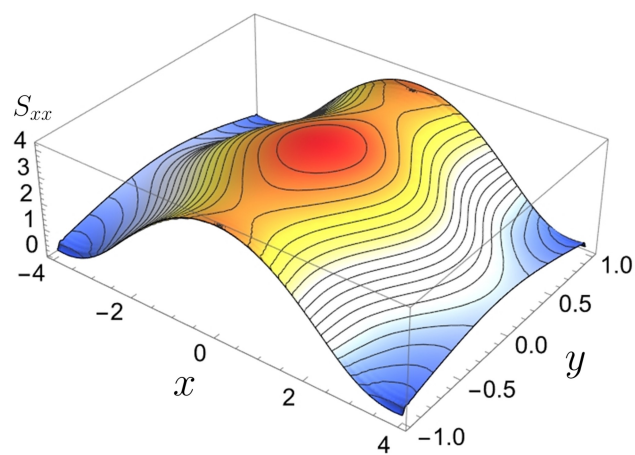
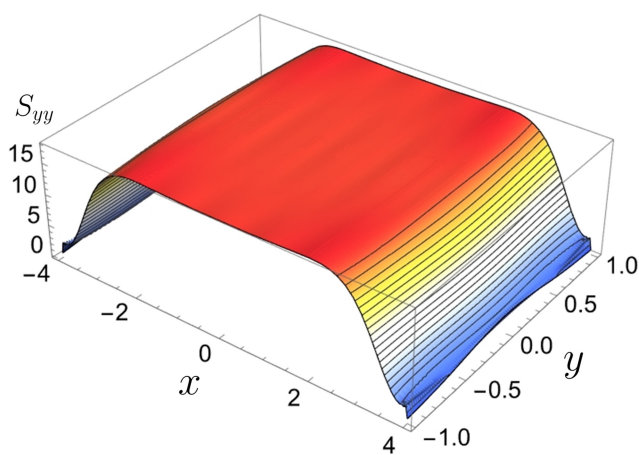
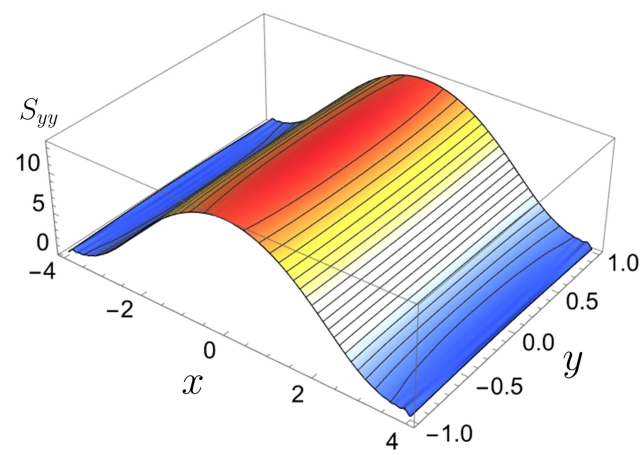
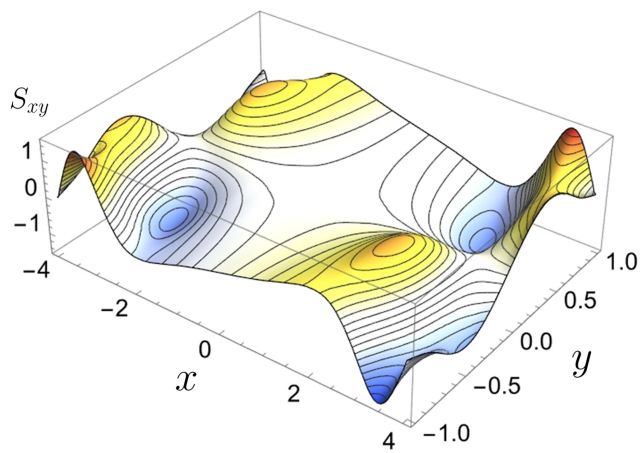
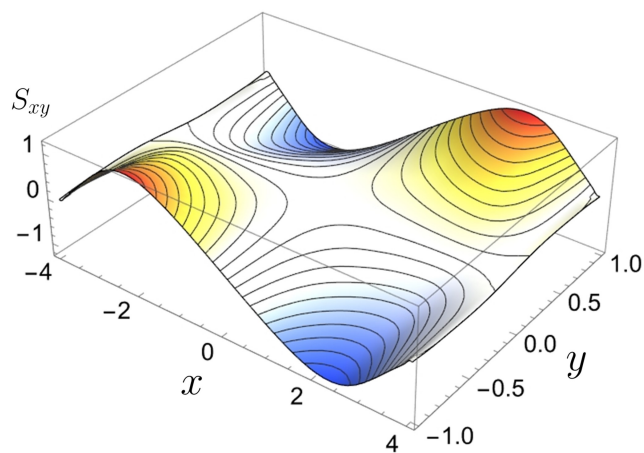
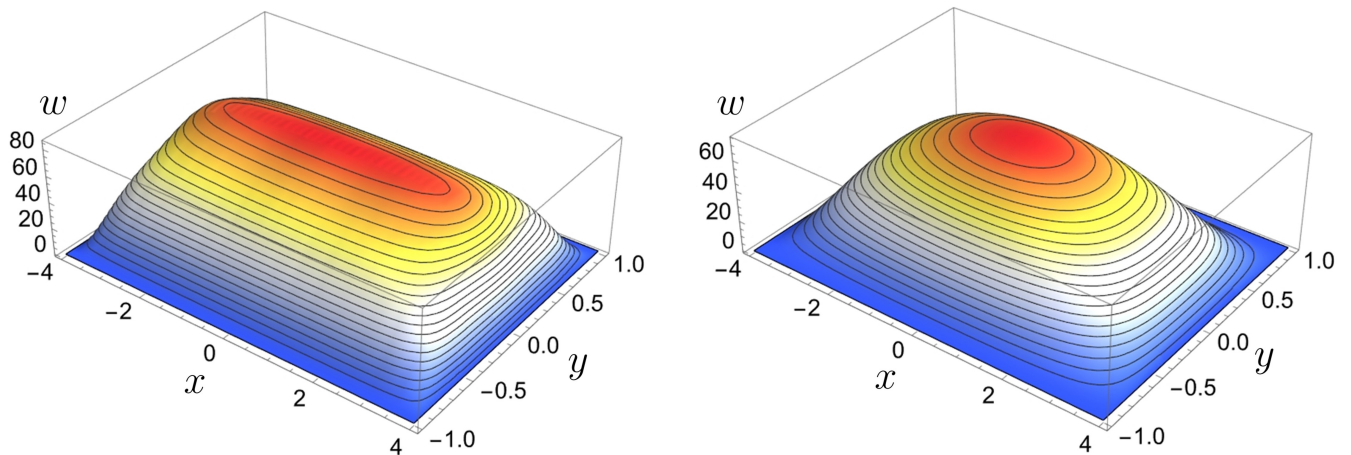
(а) Напряжения S_{xx} (б) Напряжения S_{xx} (в) Напряжения S_{yy} (г) Напряжения S_{yy} (д) Напряжения S_{xy} (е) Напряжения S_{xy}

Рисунок 2.23 – Функции напряжений пластины с $\alpha = 4$. Слева при $p = 100 a^2 b^2$ ($n = 105$), справа – при $p = 100 a^2 b^2 (1 - x^2)^2 (1 - y^2)^2$ ($n = 45$)

Давление p/a^2b^2	Прогиб w		
	$x = 0, y = 0$	$x = 2, y = 0$	$x = 0, y = 0.5$
10^2	1.54412	1.53806	0.954701
10^3	3.75108	3.73069	2.58778
10^4	8.37952	8.24811	6.01574
10^5	18.2714	17.8749	13.2256
10^6	39.4903	38.5569	28.6246
10^7	85.1496	83.0914	61.7342

Таблица 2.11 – Прогибы пластины, нагруженной равномерным давлением ($n = 90$)

Давление $p/a^2b^2 (1-x^2)^2 (1-y^2)^2$	Прогиб w		
	$x = 0, y = 0$	$x = 2, y = 0$	$x = 0, y = 0.5$
10^2	1.35428	0.997709	0.786809
10^3	3.35366	2.69629	2.15909
10^4	7.36523	6.00133	4.99543
10^5	15.9207	12.9902	10.9557
10^6	34.3275	28.0134	23.7023
10^7	73.9690	60.3671	51.1124

Таблица 2.12 – Прогибы пластины, нагруженной давлением пропорциональным $(1-x^2)^2 (1-y^2)^2$ ($n = 45$)(а) Прогибы w (б) Прогибы w Рисунок 2.24 – Слева функция прогибов при $p = 10^7 a^2 b^2$ ($n = 90$), справа – при $p = 10^7 a^2 b^2 (1-x^2)^2 (1-y^2)^2$ ($n = 45$)

2.2.6 Учет несовместных деформаций

Теперь можно обобщить построенные решения для пластин с несовместными деформациями, т. е. для случаев когда $\mathbf{a} \neq 1$, $\mathbf{b} \neq 0$. Для начала необходи-

мо представить соответствующие уравнения (1.33) – (1.34) через безразмерные переменные (2.40):

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 w - L(\phi, w) + \frac{\mathfrak{b}h}{\mathfrak{a}} \left[\left(\tilde{\nabla}^2 w \right)^2 - (1 - \nu) L(w, w) \right] - \\ - \frac{6(1 + \nu)(\mathfrak{a} - 1)ab}{\mathfrak{a} h^2} \nabla^2 w = \frac{p}{\mathfrak{a}}, \\ \nabla^2 \nabla^2 \phi + \kappa L(w, w) - \frac{\mathfrak{b}h(1 + \nu)}{\mathfrak{a}} \nabla^2 \nabla^2 w = 0. \end{aligned}$$

где $\tilde{\nabla}^2$ – оператор Лапласа модифицированный по аналогии с (2.45):

$$\tilde{\nabla}^2 f = \sqrt{\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{x}^2} + \sqrt{\alpha} \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{y}^2}.$$

Как и всюду в этой главе, знак \sim в дальнейшем будем опускать.

Все рассмотренные выше краевые условия (2.42) – (2.44), (2.46), (2.47) получены до того, как было сделано предположение об отсутствии несовместных деформаций, следовательно они справедливы и при $\mathfrak{a} \neq 1$, $\mathfrak{b} \neq 0$. В настоящем разделе, для простоты, будем рассматривать набор краевых условий (2.42) – (2.44), (2.46), соответствующий случаю подвижных краев. Здесь необходимо пояснить, что “сложность” расчета пластин с несовместными деформациями при краевых условиях (2.42) – (2.44), (2.47) не носит принципиального характера и заключается лишь в том, что последние, как было показано выше, приводят к более громоздким выражениям.

Как и ранее, будем последовательно повторять выкладки раздела 2.2.4, явно выписывая лишь новые слагаемые, а старые обозначая символом [...]. Начнем с подстановки разложений (2.65) в основные уравнения:

$$\begin{aligned} [\dots] - \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left\{ \frac{6(1 + \nu)(\mathfrak{a} - 1)ab}{\mathfrak{a} h^2} \nabla^2 f_k - \right. \\ \left. - \frac{\mathfrak{b}h}{\mathfrak{a}} \sum_{r=1}^{\infty} g_r [\nabla^2 f_k \cdot \nabla^2 f_r - (1 - \nu) L(f_k, f_r)] \right\} = \frac{p}{\mathfrak{a}}, \\ [\dots] - \frac{\mathfrak{b}h(1 + \nu)}{\mathfrak{a}} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \nabla^2 \nabla^2 f_k = 0. \end{aligned}$$

В краевых условиях новых слагаемых не появляется поэтому их повторять не будем.

Если спроецировать дополнительные слагаемые на базисные подпространства:

$$[\dots] - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_q g_k \left\{ \frac{6(1+\nu)(\mathbf{a}-1)ab}{\mathbf{a}} \frac{1}{h^2} \nabla^2 f_k - \right. \\ \left. - \frac{\mathbf{b}h}{\mathbf{a}} \sum_{r=1}^{\infty} g_r [\nabla^2 f_k \cdot \nabla^2 f_r - (1-\nu)L(f_k, f_r)] \right\} dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{p}{\mathbf{a}} f_q dx dy, \\ [\dots] - \frac{\mathbf{b}h(1+\nu)}{\mathbf{a}} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_q g_k \nabla^2 \nabla^2 f_k dx dy = 0,$$

то можно заметить, что практически все слагаемые подынтегральных выражений уже встречались ранее. Это позволяет свести краевую задачу к системе алгебраических уравнений, матричная запись которой будет содержать лишь одну новую матрицу, \mathbf{M}^s , по сравнению с (2.69):

$$\left[\mathbf{G} - \frac{a_0}{2} \mathbf{M}^{a0} - \frac{b_0}{2} \mathbf{M}^{b0} - \mathbf{M} \cdot (\mathbf{s} + \boldsymbol{\zeta}) - \mathbf{M}^a \cdot \mathbf{a} - \mathbf{M}^b \cdot \mathbf{b} - \right. \\ \left. - \frac{6(1+\nu)(\mathbf{a}-1)ab}{\mathbf{a}} \frac{1}{h^2} \left(\sqrt{\beta} \mathbf{M}^{b0} + \sqrt{\alpha} \mathbf{M}^{a0} \right) + \frac{\mathbf{b}h}{\mathbf{a}} (\mathbf{M}^s - (1-\nu) \mathbf{M}) \cdot \mathbf{g} \right] \cdot \mathbf{g} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}, \\ \mathbf{G} \cdot \mathbf{s} + \kappa (\mathbf{M} \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} - \frac{\mathbf{b}h(1+\nu)}{\mathbf{a}} \mathbf{G} \cdot \mathbf{g} = 0, \\ \kappa (\mathbf{U}^{w0} \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} - (\alpha b_0 - \nu a_0) = 0, \quad \alpha [\mathbf{U} \cdot (\mathbf{s} + \boldsymbol{\zeta}) + \mathbf{b}] - \kappa (\mathbf{U}^w \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} = 0, \\ \kappa (\mathbf{V}^{w0} \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} - (\beta a_0 - \nu b_0) = 0, \quad \beta [\mathbf{V} \cdot (\mathbf{s} + \boldsymbol{\zeta}) + \mathbf{a}] - \kappa (\mathbf{V}^w \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} = 0.$$

Эту матрицу удобно разбить на три матрицы, не зависящие от параметров пластины:

$$\mathbf{M}^s = \beta \mathbf{M}^{sb} + \mathbf{M}^{s0} + \alpha \mathbf{M}^{sa},$$

компоненты двух из которых определяются по формулам:

$$M_{qkr}^{s0} = \frac{\lambda_{S(k)}^2 \lambda_{C(r)}^2 I_{M1}(\lambda_{S(q)}, \lambda_{S(k)}, \lambda_{S(r)}) I_{M1}(\lambda_{C(q)}, \lambda_{C(r)}, \lambda_{C(k)})}{\mathbf{n}_k \mathbf{n}_r \mathbf{n}_q} + \\ + \frac{\lambda_{S(r)}^2 \lambda_{C(k)}^2 I_{M1}(\lambda_{S(q)}, \lambda_{S(r)}, \lambda_{S(k)}) I_{M1}(\lambda_{C(q)}, \lambda_{C(k)}, \lambda_{C(r)})}{\mathbf{n}_k \mathbf{n}_r \mathbf{n}_q}, \\ M_{qkr}^{sb} = \frac{\lambda_{S(k)}^2 \lambda_{S(r)}^2 I_{M6}(\lambda_{S(q)}, \lambda_{S(k)}, \lambda_{S(r)}) I_{M7}(\lambda_{C(q)}, \lambda_{C(r)}, \lambda_{C(k)})}{\mathbf{n}_k \mathbf{n}_r \mathbf{n}_q},$$

где I_{M6} , I_{M7} – вспомогательные интегралы, приведенные в Приложении Д. Выражения для компонент оставшейся матрицы, \mathbf{M}^{sa} , совпадают с M_{qkr}^{sb} с точностью до замены 2.63.

Структура полученных матричных уравнений позволяет сразу преобразовать их к одному уравнению, аналогичному (2.73), минуя промежуточные выкладки:

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{G} - \frac{6(1+\nu)(\mathbf{a}-1)ab}{\mathbf{a}} \frac{1}{h^2} \left(\sqrt{\beta} \mathbf{M}^{b0} + \sqrt{\alpha} \mathbf{M}^{a0} \right) \right] \cdot \mathbf{g} + \\ & + \frac{\mathbf{b}h}{\mathbf{a}} \left[(\beta \mathbf{M}^{sb} + \mathbf{M}^{s0} + \alpha \mathbf{M}^{sa} - (1-\nu) \mathbf{M} + (1+\nu) \mathcal{R}) \cdot \mathbf{g} \right] \cdot \mathbf{g} - \\ & - \kappa \left((\mathcal{S} \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{g} - 3 \left[(\mathbf{g} \cdot \mathcal{T}^a \cdot \mathbf{g}) (\mathbf{M}^{a0} \cdot \mathbf{g}) + (\mathbf{g} \cdot \mathcal{T}^b \cdot \mathbf{g}) (\mathbf{M}^{b0} \cdot \mathbf{g}) \right] = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Здесь \mathcal{R} – вспомогательная кубическая матрица:

$$\mathcal{R} = -\mathbf{M} + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{M}^a) \cdot \mathbf{R}_a^* + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{M}^b) \cdot \mathbf{R}_b^*,$$

которая, по аналогии с \mathcal{S} , выражается через вспомогательные матрицы \mathbf{R}_a^* , \mathbf{R}_b^* , первая из которых может быть получена упрощением (2.71):

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_a^* &= \left[\mathbf{V} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{E} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{A} \right]^{-1} \times \\ & \times \left[\mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{U} \right], \end{aligned}$$

а вторая, \mathbf{R}_b^* , получается из первой заменой (2.72).

Для решения полученной системы кубических уравнений, как и ранее, линеаризуем их в окрестности некоторого начального приближение \mathbf{g}_0 . Это можно сделать по формуле (2.75). Выражение для свободного члена получается сразу же: заменой \mathbf{g} в левой части (2.77) на \mathbf{g}_0 . Производная \mathcal{A} в этом случае будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathbf{g}} \Big|_{\mathbf{g}=\mathbf{g}_0} &= \mathbf{G} - \frac{6(1+\nu)(\mathbf{a}-1)ab}{\mathbf{a}} \frac{1}{h^2} \left(\sqrt{\beta} \mathbf{M}^{b0} + \sqrt{\alpha} \mathbf{M}^{a0} \right) + \\ & + \frac{\mathbf{b}h}{\mathbf{a}} \sum_{k=1}^n \left[(\beta \mathbf{M}^{sb} + \mathbf{M}^{s0} + \alpha \mathbf{M}^{sa} - (1-\nu) \mathbf{M} + (1+\nu) \mathcal{R}) \cdot (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{g} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{E}_k) \right] \otimes \mathbf{E}_k - \\ & - \kappa \sum_{k=1}^n \left\{ [(\mathcal{S} \cdot \mathbf{E}_k) \cdot \mathbf{g}_0] \cdot \mathbf{g}_0 + [(\mathcal{S} \cdot \mathbf{g}_0) \cdot \mathbf{E}_k] \cdot \mathbf{g}_0 + [(\mathcal{S} \cdot \mathbf{g}_0) \cdot \mathbf{g}_0] \cdot \mathbf{E}_k \right\} \otimes \mathbf{E}_k - \\ & - 3 \left\{ [(\mathbf{M}^{a0} \cdot \mathbf{g}_0) \otimes (\mathcal{T}^a \cdot \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_0 \cdot \mathcal{T}^a)] + [(\mathbf{M}^{b0} \cdot \mathbf{g}_0) \otimes (\mathcal{T}^b \cdot \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_0 \cdot \mathcal{T}^b)] + \right. \\ & \left. + (\mathbf{g}_0 \cdot \mathcal{T}^a \cdot \mathbf{g}_0) \mathbf{M}^{a0} + (\mathbf{g}_0 \cdot \mathcal{T}^b \cdot \mathbf{g}_0) \mathbf{M}^{b0} \right\}. \end{aligned}$$

Для оценки влияния несовместных деформаций на изгиб прямоугольной пластины была проведена серия расчетов вытянутой пластины ($\alpha = 16$) при умеренном равномерном давлении ($p = 100 a^2 b^2$) и различных значениях параметров $\tilde{\mathbf{a}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$, связанных с \mathbf{a} , \mathbf{b} формулами аналогичными (2.33):

$$\tilde{\mathbf{a}} = (\mathbf{a} - 1) \frac{ab}{h^2}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}h.$$

Результаты приведены в Таблице 2.13. Видно, что роль параметра $\tilde{\mathbf{a}}$ такая же как и в случае круглой пластины – он создает дополнительное натяжение и уменьшает прогибы пластины. По-другому обстоит дело с параметром $\tilde{\mathbf{b}}$: в отличие от предыдущего случая, здесь его увеличение приводит к уменьшению прогиба. Это объясняется тем, что в случае прямоугольной пластины решающим оказывается увеличение натяжения, а не дополнительный изгибающий момент от $\tilde{\mathbf{b}}$. Еще одно важное отличие по сравнению со случаем круглой пластины состоит в том, что здесь несовместные деформации существенно влияют не только на максимальный прогиб, но и на форму поверхности прогибов, что можно видеть на Рисунке 2.25. При малом $\tilde{\mathbf{a}}$ и большом $\tilde{\mathbf{b}}$ она принимает гантелеобразную форму, оказываясь поджатой в центральной области. В обратном случае функция прогибов в этой области становится ближе к равномерной.

Выводы по главе

В рамках второй главы работы построены решения модифицированных уравнений Фешля – фон Кармана, выведенных в первой главе. Решения получены для круглой и прямоугольной областей.

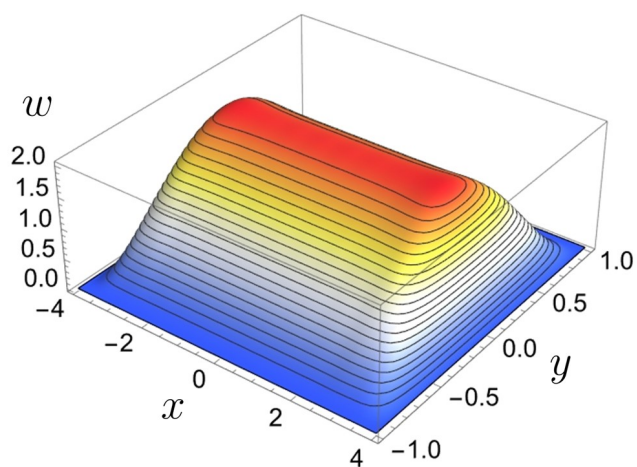
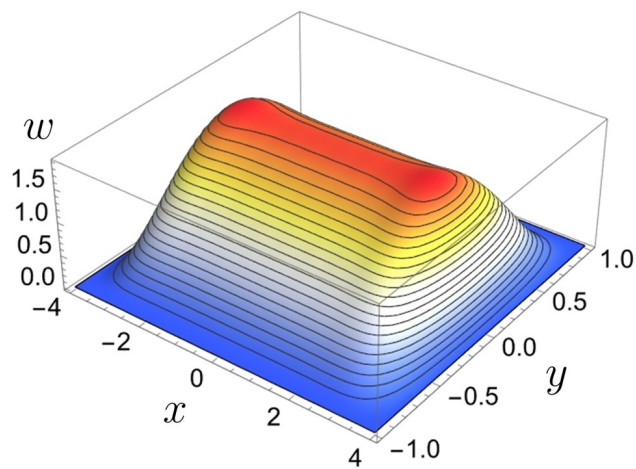
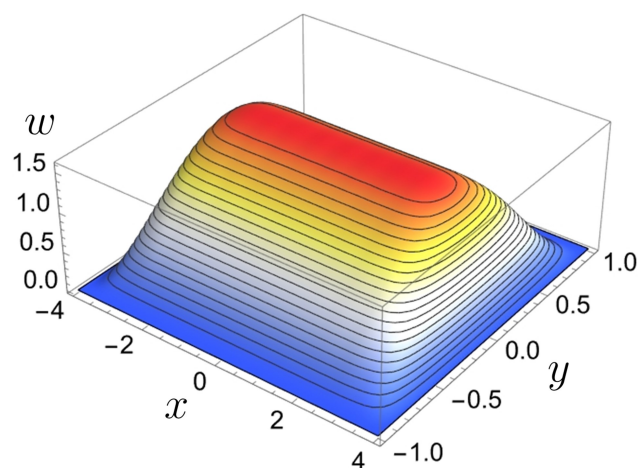
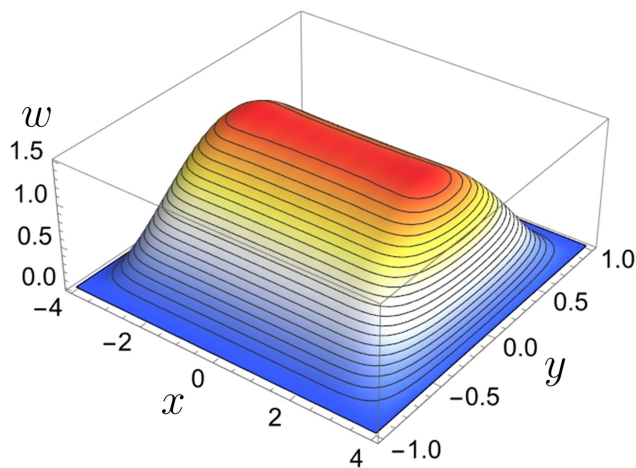
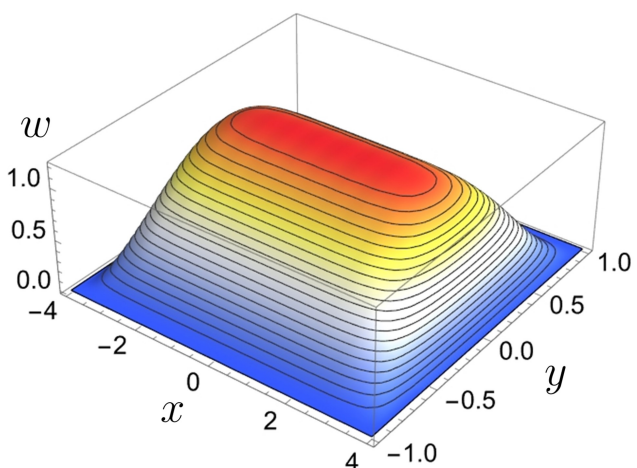
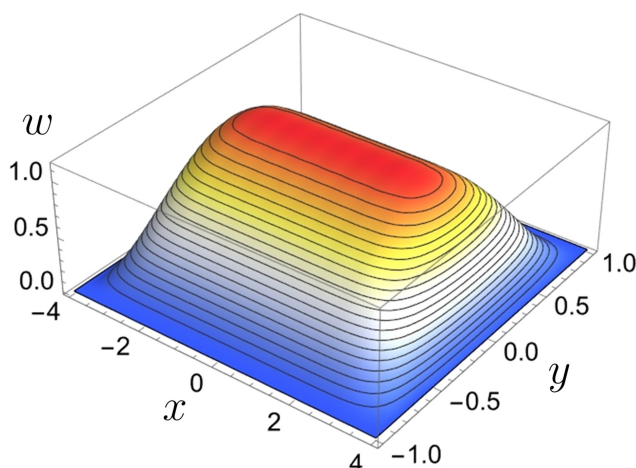
Для круглой области предложен итерационный алгоритм построения решения, позволяющий получать решения в широком диапазоне нагрузений с малыми затратами вычислительных ресурсов. Проведена серия модельных расчетов, позволяющая оценить влияние несовместных деформаций на жесткость круглой пластины.

Для прямоугольной области построено решение методом Галеркина, модифицированным для нелинейных систем. Рассмотрены пластины с двумя вариантами краевых условий: жесткая заделка, допускающая продольные деформации краев, и абсолютно жесткая заделка. Показано, что учет недеформируемости краев может быть важен при анализе прочности пластины. Для прямоугольной

\tilde{a}	\tilde{b}	Прогиб w		
		$x = 0, y = 0$	$x = 2, y = 0$	$x = 0, y = 0.5$
-8	-0.5	1.99767	2.00865	1.21194
-8	-0.1	1.93358	1.95289	1.17014
-8	0	1.91755	1.93889	1.15979
-8	0.1	1.90158	1.92492	1.1495
-8	0.5	1.83876	1.86958	1.10921
-4	-0.5	1.79637	1.80450	1.09997
-4	-0.1	1.73810	1.75283	1.06291
-4	0	1.72378	1.74015	1.05386
-4	0.1	1.70961	1.72758	1.04490
-4	0.5	1.65447	1.67851	1.01017
0	-0.5	1.59434	1.59641	0.986792
0	-0.1	1.54392	1.55089	0.955215
0	0	1.53170	1.53990	0.947587
0	0.1	1.51966	1.52907	0.940069
0	0.5	1.47318	1.48727	0.911100
4	-0.5	1.39853	1.39263	0.876031
4	-0.1	1.35737	1.35512	0.850415
4	0	1.34749	1.34616	0.844269
4	0.1	1.33777	1.33735	0.838224
4	0.5	1.30043	1.30359	0.815018
8	-0.5	1.21724	1.20403	0.772217
8	-0.1	1.18561	1.17520	0.752489
8	0	1.17803	1.16833	0.747762
8	0.1	1.17057	1.16159	0.743115
8	0.5	1.14197	1.13576	0.725276
Расчет проведен при $p = 100a^2b^2$, $\nu = 0.3$, $a = 4$, $b = 1$, $h = 0.001$, $n = 78$				

Таблица 2.13 – Модельные расчеты с учетом несовместных деформаций

пластины также проведена серия модельных расчетов, с учетом несовместных деформаций. Показано, что влияние несовместных деформаций может существенно зависеть от геометрии пластины.

(a) $\tilde{\alpha} = -8, \tilde{\beta} = -0.5$ (б) $\tilde{\alpha} = -8, \tilde{\beta} = 0.5$ (в) $\tilde{\alpha} = 0, \tilde{\beta} = -0.5$ (г) $\tilde{\alpha} = 0, \tilde{\beta} = 0.5$ (д) $\tilde{\alpha} = 8, \tilde{\beta} = -0.5$ (е) $\tilde{\alpha} = 8, \tilde{\beta} = 0.5$ Рисунок 2.25 – Функции прогибов при $p = 100 a^2 b^2, \nu = 0.3$

Глава 3 Экспериментальное исследование деформаций тонких пластин

При выборе конкретного асимптотического приближения следует соблюдать баланс между разумной точностью теоретических представлений и их громоздкостью. При этом нелинейные эффекты, в одних случаях, могут проявляться даже при незначительных изменениях формы, например если при этом возникает значительное натяжение в плоскости пластины, а в других могут оказаться слабо выраженными при больших перемещениях (например, в консольной пластине). Кроме того, конечным деформациям могут сопутствовать более сложные нелинейные эффекты, такие, как эволюция несовместных деформаций, отрыв пластины от подложки и прочие. В связи с этим, для того чтобы убедиться в адекватности выбранной модели, требуется ее экспериментальная валидация и, возможно, идентификация входящих в нее параметров.

3.1 Исследования методом голографической интерферометрии

Для рассматриваемых в диссертационной работе гибких элементов МЭМС удобной экспериментальной методикой является голографическая интерферометрия. Эта методика позволяет определить форму деформированной границы тела, что для тонкостенной конструкции означает определение формы ее срединной поверхности. Кроме того, инкрементальная методология голографической интерферометрии (определение приращений смещения по отношению к голограмме отсчетного состояния) как нельзя лучше подходит для исследования конечных деформаций, поскольку экспериментально определяются малые деформации, наложенные на конечные в духе классической инкрементальной интерпретации конечных деформаций в терминах касательных состояний.

3.1.1 Методика проведения эксперимента

Для экспериментального определения деформаций круглых и прямоугольных пластин разработан специализированный экспериментальный стенд, показанный на Рисунке 3.1.

Оптическая схема установки для голографической интерферометрии ультратонких мембран

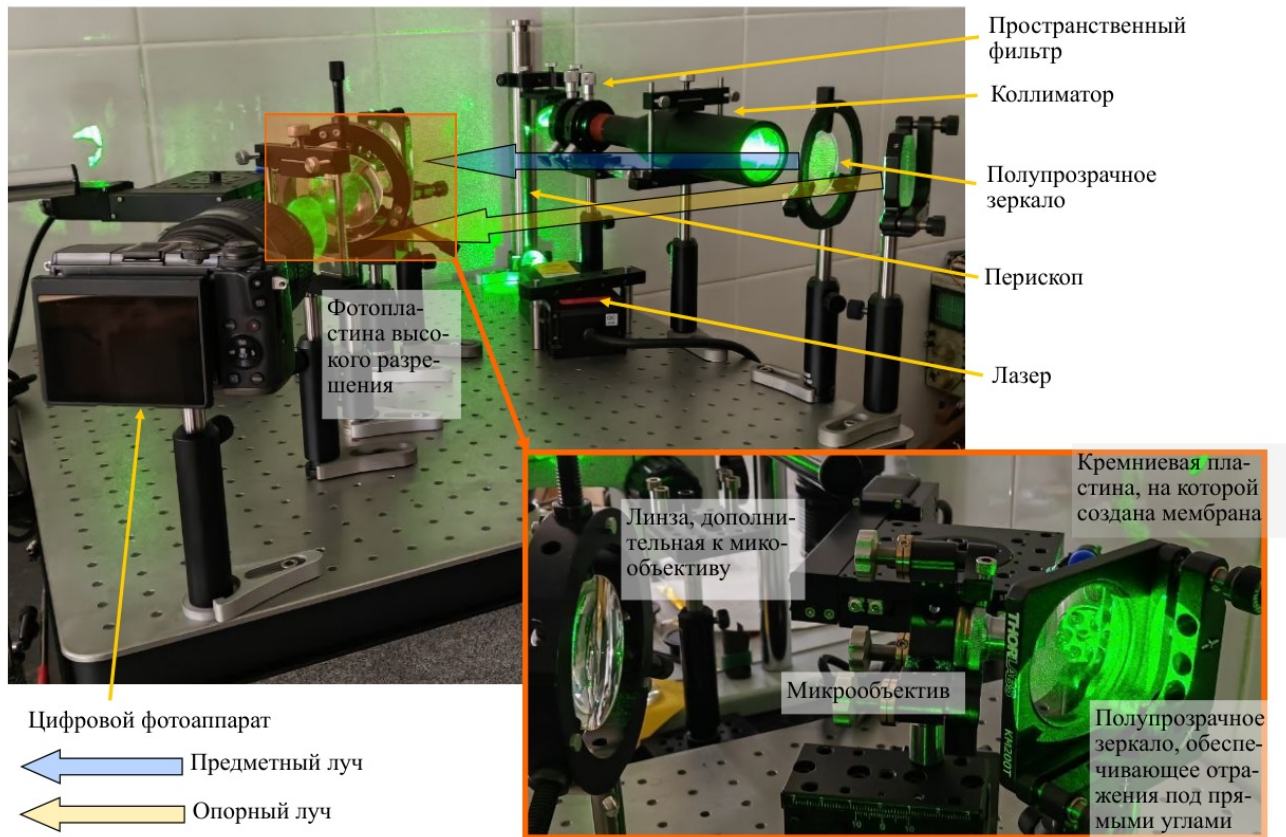


Рисунок 3.1 – Экспериментальный стенд

Оптическая схема, построенная по классической внеосевой схеме Лейта – Упатниекса [229], дополнена оптическими элементами, увеличивающими изображение наблюдаемого поля. Это позволяет фиксировать изолинии поля прогибов пластин, характерный размер, которых меньше одного миллиметра. Результатом эксперимента являются полосы вторичной интерференции, которые характеризуют смещение поверхности мембраны по оси предметного пучка на половину длины волны лазера (в нашем случае использовался лазер с длиной волны $\lambda = 532$ нм). Таким образом, совокупность линий вторичной интерференции дает полное описание поля смещений в направлении, которое выбирается по нормали к плоскости недеформированной пластины.

Для оценки влияния конечных деформаций на жесткость пластин было про-

ведено две серии измерений. В рамках первой серии исследовались деформации квадратной медной пластины, толщиной 184 мкм и стороной 6 см. Столь “толстая” пластина была выбрана для того чтобы минимизировать влияние нелинейных эффектов не связанных с конечностью деформаций, таких как поверхностные эффекты и начальное натяжение. В рамках второй серии исследовалась структура микронного масштаба, подобная тем, которые используются в качестве упругих элементов МЭМС¹. Она представляет собой толстую кремниевую подложку, на которую нанесена тонкая алюминиевая пленка толщиной 750 нм. Часть кремниевой подложки в круговой области диаметром 1 мм под алюминиевой пленкой была удалена методом ионного травления, так чтобы пленка могла свободно провисать.

Каждое измерение проводилось в 2 этапа: сперва образец нагружался значительным давлением p_0 , а затем донагружался малым давлением δp . Соответственно, интерференционный узор, зафиксированный в результате измерения, содержит информацию о дополнительных прогибах лицевой поверхности образца в результате донагружения, т. е. о поле w_{exp} :

$$w_{\text{exp}}(p_0, \delta p) = w(p_0 + \delta p) - w(p_0).$$

Такая методика нагружения позволяет наглядно оценить влияние предварительного натяжения пластины на ее изгибную жесткость.

3.1.2 Исследование квадратных образцов

В первом исследовании образец в виде квадратной медной пластины закреплялся в камере давления, так что условия на его контуре соответствовали условиям жесткой заделки с неподвижными краями, т. е. условиям (2.42) – (2.44), (2.47). Параметры образца приведены в Таблице 3.1, а программа нагружения в Таблице 3.2. В последней каждая пара “базовое давление” + “инкремент давления” соответствует одному измерению приращений прогибов пластины при увеличении давления от p_0 до $p_0 + \delta p$. В результате измерений был получен набор цифровых изображений интерференционных узоров, часть из которых показана на Рисунке 3.2.

Из полученных картин интерференционных полос хорошо видно, что при больших преднагрузках малый инкремент давления приводит к гораздо мень-

¹Структура изготовлены и предоставлена сотрудниками ЦКП МИЭТ

Длина a , см	Толщина h , мкм	Модуль Юнга E , ГПа	Коэффициент Пуассона ν
6	184	129.8	0.343

Механические параметры меди приняты по [200]

Таблица 3.1 – Параметры квадратного образца

Базовое давление p_0 , кПа	Инкремент давления δp , Па									
0										
3	10	20	30	40	50	60	70	80	90	
6										

Таблица 3.2 – Нагружение квадратной пластины

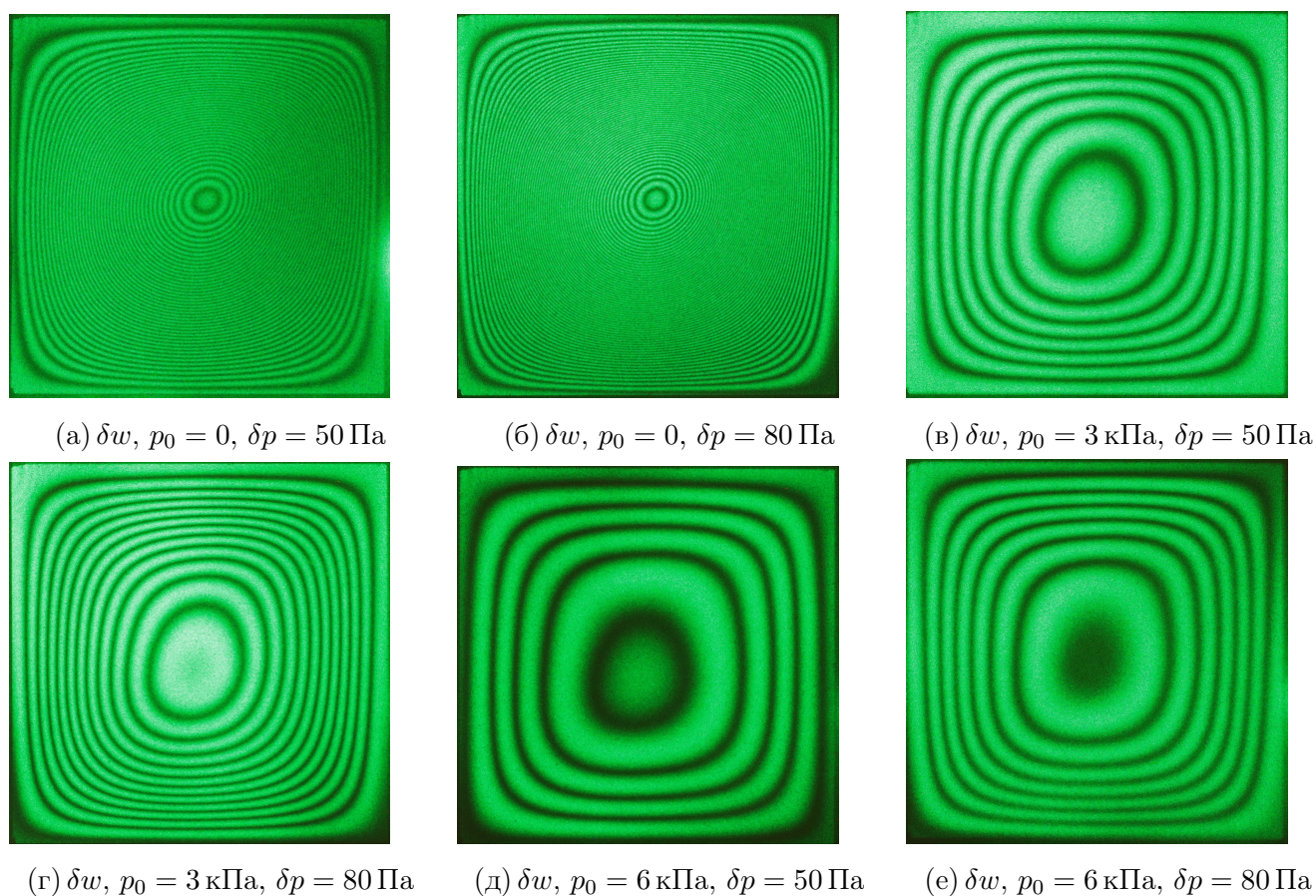


Рисунок 3.2 – Голограммы квадратной пластины

шей добавочной деформации, что согласуется с теоретическим прогнозом. Для более детального сравнения с теорией были также построены решения краевой задачи (2.41) – (2.44), (2.47) при различных правых частях. Результаты теоретического моделирования, для удобства сравнения, также представлены в виде изолиний поверхности прогибов (Рисунок 3.3). Видно, что, теоретическое предсказание, в целом, адекватно описывает поле изолиний поверхности прогибов.

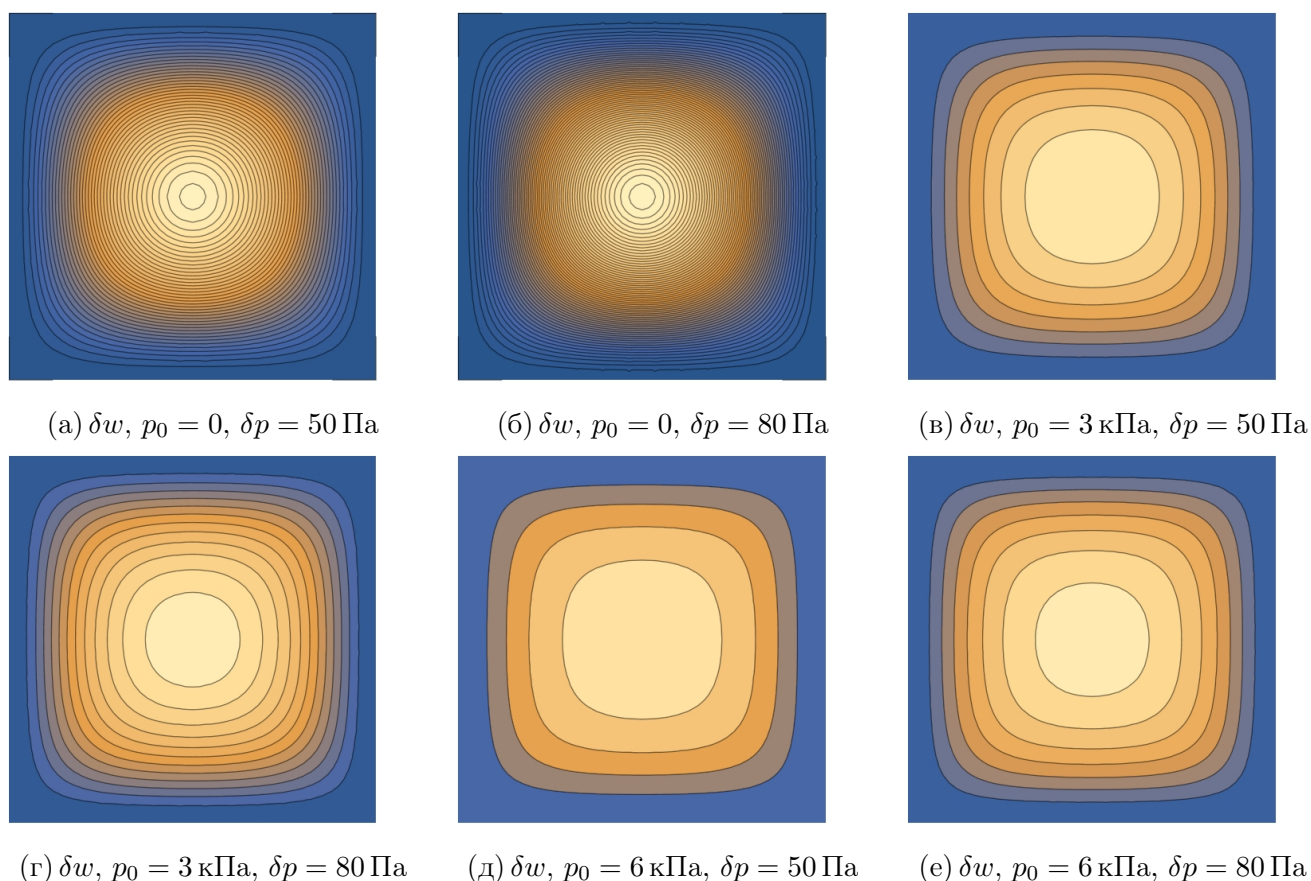


Рисунок 3.3 – Изолинии расчетных поверхностей прогибов

Соответствие абсолютных величин прогибов можно оценить, сравнив число пар светлых и темных полос на полученных голограммах² и отношение прогнозируемого максимального прогиба к длине волны измерительного лазера (с округлением до ближайшего целого). Такое сравнение представлено для всех измерений на Рисунке 3.4 в виде столбчатых диаграмм. Здесь также наблюдается хорошая согласованность измерений и прогнозов, особенно в областях больших прогибов, когда влияние случайных ошибок измерения нивелируется значительным натяжением пластины.

3.1.3 Исследование круглых образцов

Во втором исследовании испытывалась круглая алюминиевая пластина, закрепленная в специальном держателе, изготовленном для испытаний пластин малых диаметров (1 мм). Условия на контуре пластины также соответствовали (2.42) – (2.44), (2.47). Параметры пластины и программа ее нагружения приве-

²При подсчете числа пар полос на голограммах учитывались только те пары, где есть полная светлая полоса и хотя бы часть темной

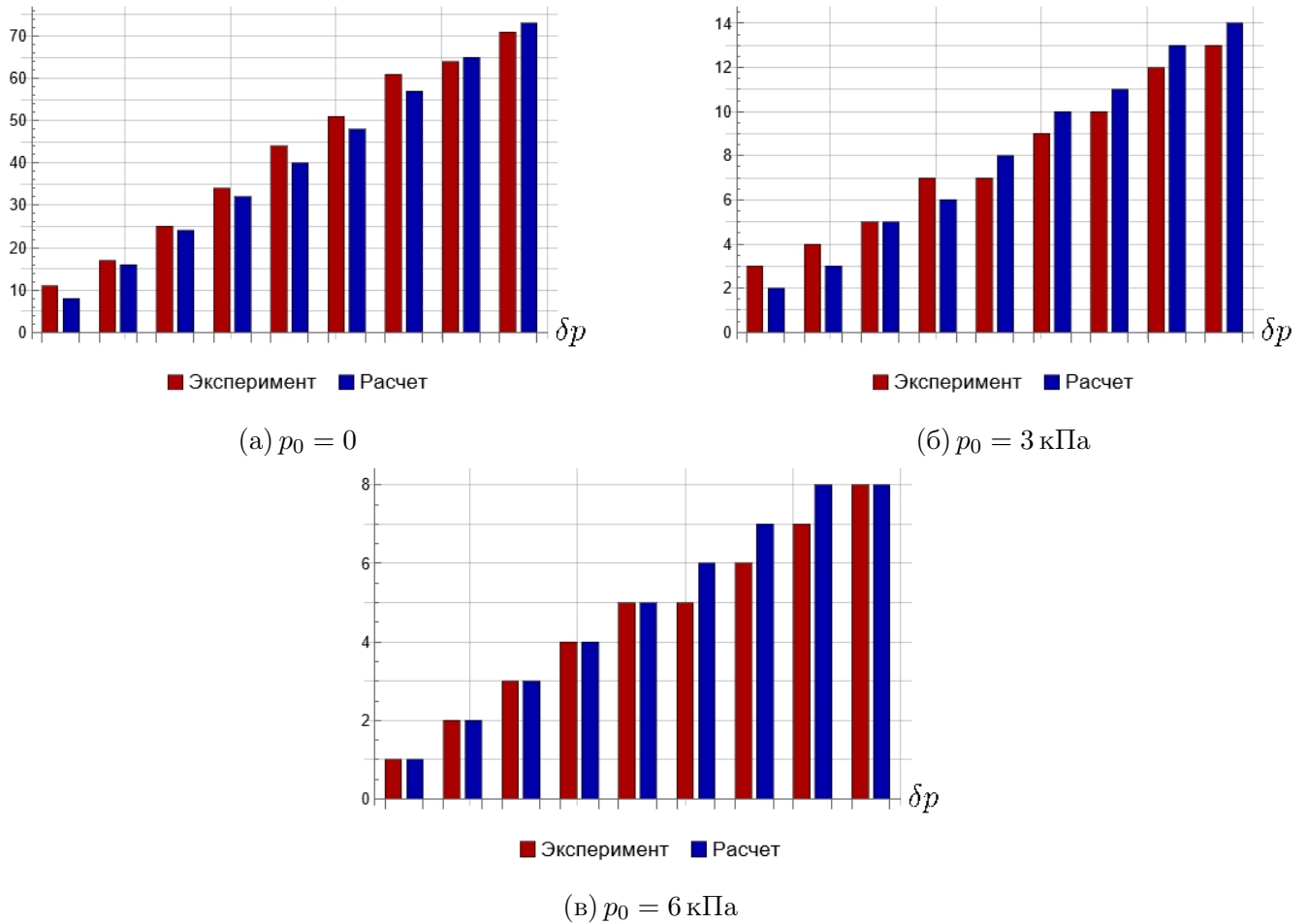


Рисунок 3.4 – Сравнение числа полос

дены в таблицах 3.3 и 3.4. Полученные интерференционные узоры представлены на Рисунке 3.5. Здесь также наблюдается существенный рост изгибной жесткости при нагружении, однако он оказывается заметно меньше прогнозируемого из решения краевой задачи (2.7) – (2.9), что видно при сравнении с расчетными изолиниями (Рисунок 3.6) и из диаграммы на Рисунке 3.7.

Радиус R , мм	Толщина h , нм	Модуль Юнга E , ГПа	Коэффициент Пуассона ν
0.5	750	70.6	0.345

Механические параметры алюминия приняты по [200]

Таблица 3.3 – Параметры круглого образца

Базовое давление p_0 , Па							Инкремент давления δp , Па
2666	3999	5332	6665	7998	9331	10664	1333
0							5332

Таблица 3.4 – Нагружение круглой пластины

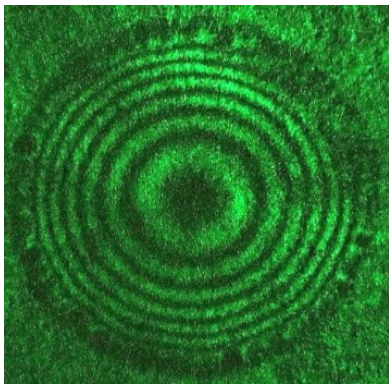
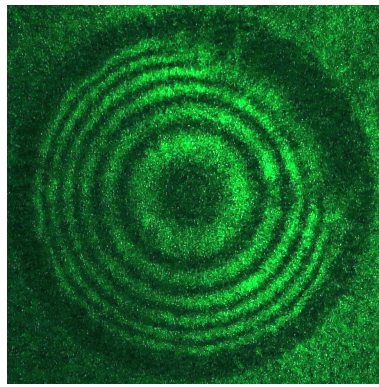
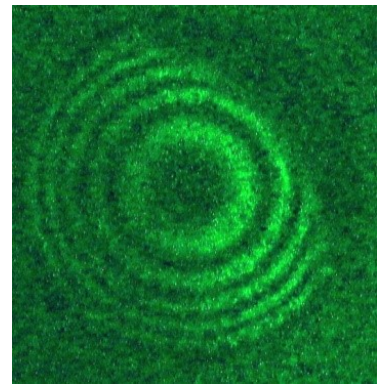
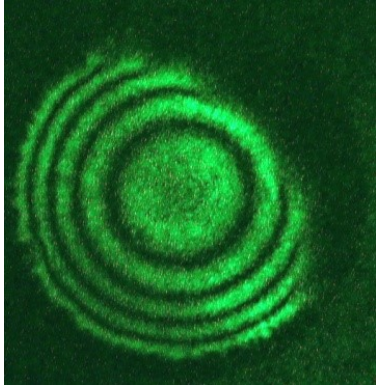
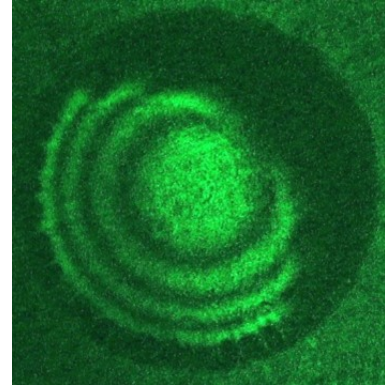
(a) $p_0 = 2666 \text{ Па}$, $\delta p = 1333 \text{ Па}$ (б) $p_0 = 3999 \text{ Па}$, $\delta p = 1333 \text{ Па}$ (в) $p_0 = 5332 \text{ Па}$, $\delta p = 1333 \text{ Па}$ (г) $p_0 = 6665 \text{ Па}$, $\delta p = 1333 \text{ Па}$ (д) $p_0 = 7998 \text{ Па}$, $\delta p = 1333 \text{ Па}$ (е) $p_0 = 9331 \text{ Па}$, $\delta p = 1333 \text{ Па}$

Рисунок 3.5 – Голограммы круглой пластины

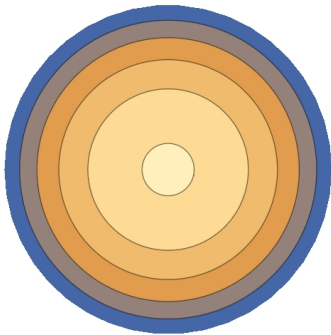
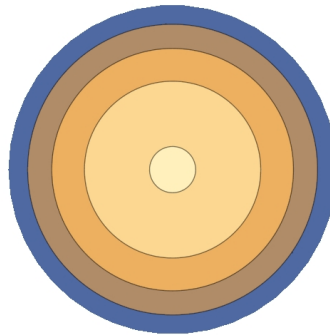
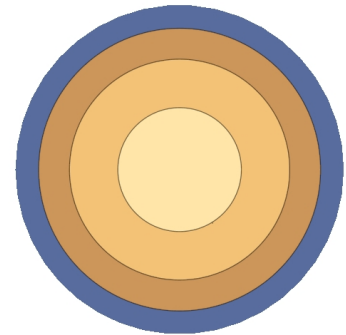
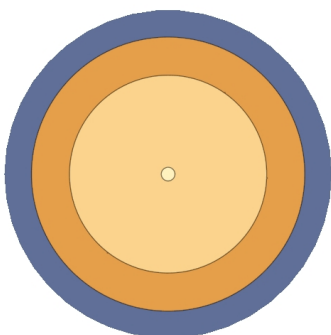
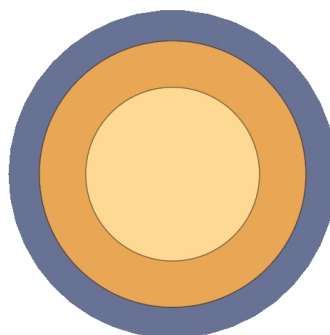
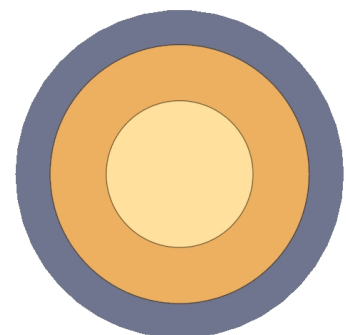
(a) $p_0 = 2666 \text{ Па}$, $\delta p = 1333 \text{ Па}$ (б) $p_0 = 3999 \text{ Па}$, $\delta p = 1333 \text{ Па}$ (в) $p_0 = 5332 \text{ Па}$, $\delta p = 1333 \text{ Па}$ (г) $p_0 = 6665 \text{ Па}$, $\delta p = 1333 \text{ Па}$ (д) $p_0 = 7998 \text{ Па}$, $\delta p = 1333 \text{ Па}$ (е) $p_0 = 9331 \text{ Па}$, $\delta p = 1333 \text{ Па}$

Рисунок 3.6 – Изолинии расчетных поверхностей прогибов

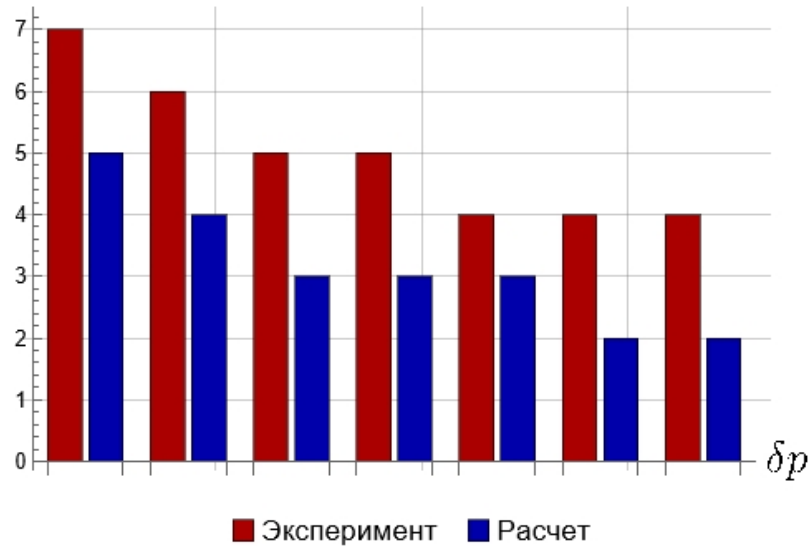
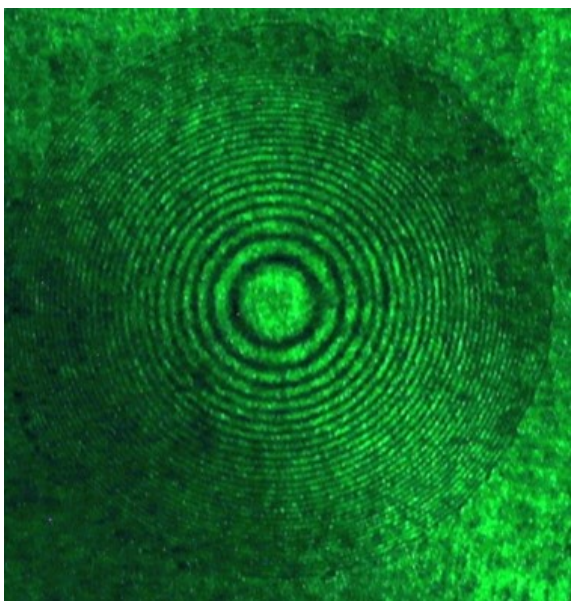
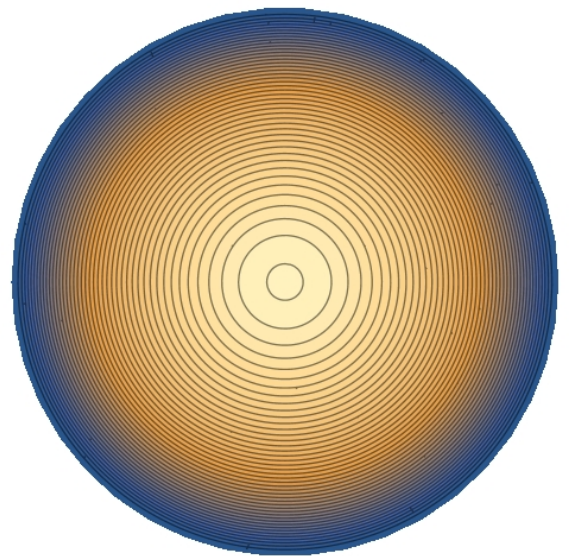


Рисунок 3.7 – Сравнение числа полос

Если в случае “толстой” квадратной пластины отклонения результатов измерений от прогноза носили случайный характер, то в этом случае речь идет о систематической погрешности. В этой связи можно предположить, что в пластине изначально присутствуют значительные деформации. Чтобы понять какого они знака необходимо сравнить картину изолиний прогибов пластины при нагружении от нуля с теоретическим прогнозом (Рисунок 3.8). Видно, что реальная жесткость образца оказалась гораздо больше чем теоретическая (на голограмме 31 полоса, а теория предсказывает 44 полосы), т. е. можно предположить, что до нагружения образец уже был значительно натянут.



(а) Голограмма реального образца



(б) Теоретический прогноз

Рисунок 3.8 – Сравнение полей изолиний при нагружении от нуля до $p = 5332$ Па

Если это предположение верно, тогда переход к уравнениям (2.34), учитывающим несовместные деформации, с константой ϵ , выбранной из условия улучшения прогноза для какого-нибудь одного измерения, должен привести к тому, что прогноз для других измерений также улучшится. Примем $\epsilon = 0.0006525$, так чтобы теоретическое число полос при нагружении от нуля до $p = 5332$ Па было равно числу полос, наблюдаемых в эксперименте (31). Тогда теоретические картины изолиний для других измерений будут иметь вид, показанный на Рисунке 3.9. Видно, что в этом случае для каждого измерения прогнозируемое число полос³ (Рисунок 3.10) и их распределение гораздо лучше соответствуют наблюдениям, что может служить косвенным подтверждением исходной гипотезы.

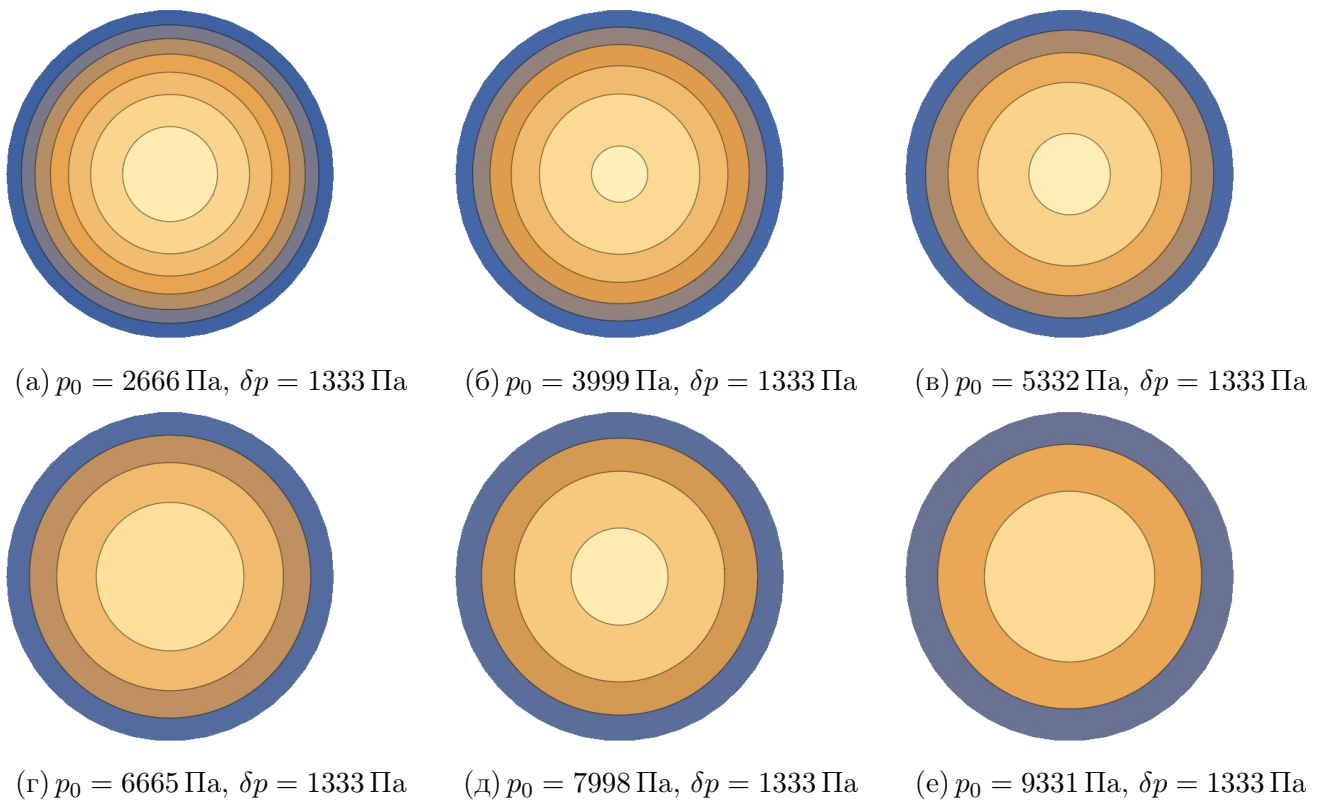


Рисунок 3.9 – Изолинии расчетных поверхностей прогибов (с учетом несовместных деформаций)

В общем случае, несовместные деформации в пластине это не единственная возможная причина отклонений результатов от прогноза. Из-за особенностей технологического процесса изготовления образца существует вероятность, что слой алюминия будет отслаиваться от кремниевой подложки в процессе нагружения (этот случай рассмотрен в конце главы). Кроме того, здесь могут

³Напомним, что число полос вычисляется с округлением до ближайшего целого, т. е. количество полос на рисунках может отличаться от указанного на диаграммах

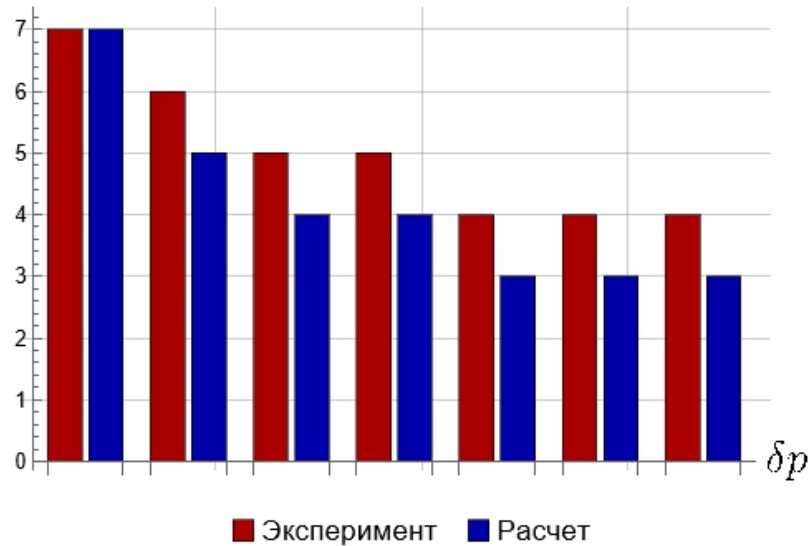


Рисунок 3.10 – Сравнение числа полос (с учетом несовместных деформаций)

влиять иные факторы, начинающие проявляться из-за масштабного фактора, например, поверхностные натяжения. Для того чтобы внести ясность в этот вопрос необходимо провести более масштабные экспериментальные исследования и более детально проанализировать их результаты, отслеживая не только число полос, но и их расположение и форму. Последнее весьма затруднено ввиду того, что непосредственные экспериментальные результаты представляют собой цифровые фотографии картин вторичной интерференции, из которых достаточно сложно выделить объективную информацию помимо числа полос, которое обычно подсчитывается вручную. Однако для этой проблемы можно предложить эффективное решение, представленное далее.

3.1.4 Идентификация изолиний смещений

Для детального анализа результатов измерений методом голографической интерферометрии желательно представить все линии узора некоторыми аналитическими выражениями. Эта задача является разновидностью задачи идентификации краев на цифровом изображении, для которой в литературе предложено множество эффективных алгоритмов решения (детальный обзор приведен в [7]). Однако учет специфики интерференционных узоров позволяет предложить более эффективный алгоритм их идентификации.

Главная особенность линий интерференционных картин заключается в том, что соседние линии мало отличаются друг от друга. Соответственно, если аппроксимировать начальную линию узора некоторой базовой кривой, например,

окружностью или эллипсом, то следующая линия может быть получена малым возмущением базовой кривой. Это возмущение можно определить, принимая во внимание физическую природу интерференционных линий – каждая такая линия представляет собой геометрическое место точек локального максимума (или минимума) интенсивности светового потока. Главная трудность здесь состоит в решении задачи отыскания экстремали на зашумленном растровом изображении. Решение этой задачи приведено ниже, однако перед этим следует сделать небольшой комментарий о структуре растрового изображения.

В простейшем случае (монохром) растровое цифровое изображение представляет собой прямоугольную матрицу, характеризующую интенсивность цвета по отдельным пикселям положительным числом из диапазона $(0, 1)$. Обычно матрица содержит достаточно много – несколько миллионов элементов. Для работы с ней прежде всего необходимо установить соответствие между матричной адресацией отдельного пикселя и координатами точек, попадающих в область пикселя. При этом следует учесть, что адресация пикселей идет в порядке “строка, столбец”, что соответствует вертикальному и горизонтальному положению в матрице, а в стандартном координатном представлении сначала указывается горизонтальная координата x , а затем вертикальная y . Кроме того, в декартовых координатах ось y направлена вверх, в то время как приращение номера строки происходит при смещении по изображению вниз. Из этих соображений определяются правила соответствия между нумерацией пикселей и координатами их внутренних точек, которые иллюстрируются на Рисунке 3.11.

Конкретные формулы, связывающие матричную нумерацию пикселей и их координаты, зависят от принимаемого размера пикселя (стороны занимаемого им квадрата). Без потери общности эту величину можно принять равной единице, что уменьшит громоздкость получаемых соотношений. Тогда соответствие между индексами пикселя \mathcal{P}_{rc} и декартовыми координатами (x, y) , с началом, помещенным в центр пикселя, находящегося на пересечении выбранной заранее отсчетной строки r_0 и отсчетного столбца c_0 , можно определить следующим отношением:

$$((x, y) \in \mathcal{P}_{rc}) \Leftrightarrow (r = r_0 - \lfloor y + 1/2 \rfloor, c = c_0 + \lfloor x + 1/2 \rfloor).$$

Координаты угловых точек и центра пикселя (они указаны на Рисунке 3.11)

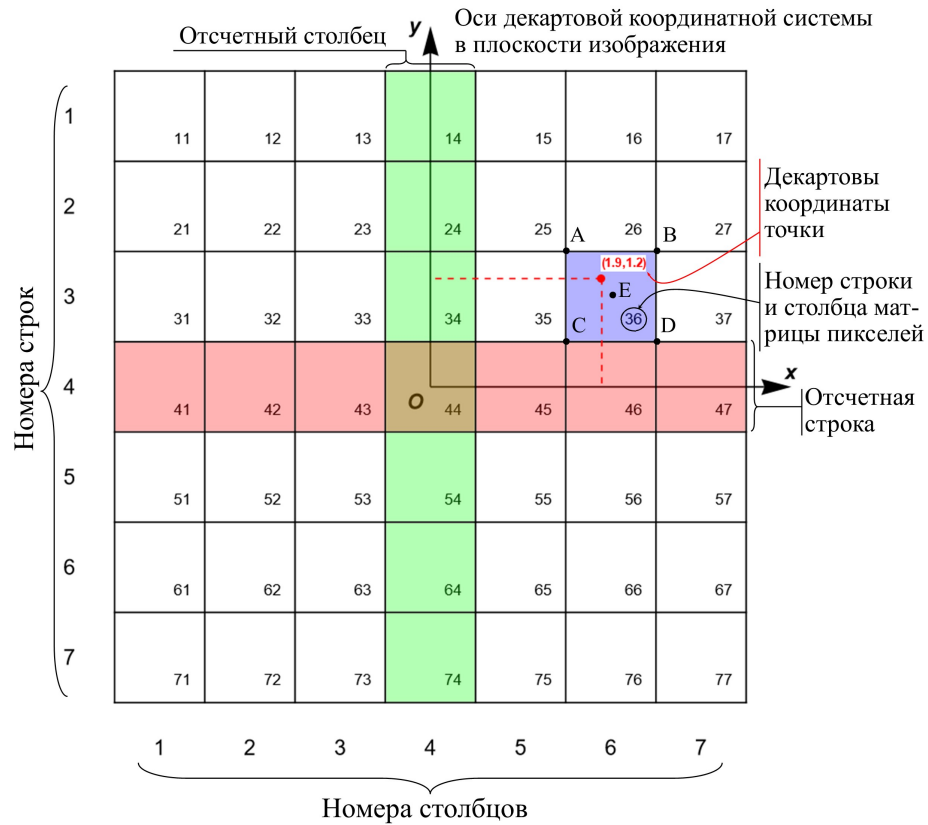


Рисунок 3.11 – Схема индексации пикселей

могут быть найдены по номеру строки r и столбца c по формулам:

$$\begin{aligned}
 A &= (c - c_0 - 1/2, r_0 - r + 1/2), & B &= (c - c_0 + 1/2, r_0 - r + 1/2), \\
 C &= (c - c_0 + 1/2, r_0 - r - 1/2), & D &= (c - c_0 - 1/2, r_0 - r - 1/2), \\
 E &= (c - c_0, r_0 - r).
 \end{aligned}$$

Подготовка и коррекция матрицы интенсивности

Оптическая схема эксперимента никогда не может быть отстроена идеально, следовательно всегда будет присутствовать некоторая неравномерность засветки, и, кроме того, на изображение будет наложен спекл шум, удалить который инструментально невозможно. Наиболее простым (но вместе с тем эффективным) способом борьбы с зашумленностью изображения является процесс выравнивания средней и пиковых интенсивностей по всей области изображения. Для этой цели матрица интенсивности \mathcal{M} разбивается на блоки, размер которых превышает несколько дистанций между изолиниями (каждый блок пересекается несколькими изолиниями). Затем для каждого блока строится распределение

(гистограмма) интенсивности и определяется квантили порядка ν и $1 - \nu$:

$$a[[r_b, c_b]] = Q_\nu(M_{r_b, c_b, b}), \quad b[[r_b, c_b]] = Q_{1-\nu}(M_{r_b, c_b, b}).$$

Здесь $M_{r_b, c_b, b}$ — блок размерностью $b \times b$ с центром на пересечении строки r_b и столбца c_b основной матрицы, а двойными прямоугольными скобками $[[\cdot]]$ обозначена операция выделения элемента прямоугольной матрицы. Если границы блока выходят за границы основной матрицы, то выходящие элементы определяются симметричным отражением относительно границы:

$$M_{r_b, c_b, b}[[i, j]] = \mathcal{M}[[R(r_b + i - \lfloor b/2 \rfloor), C(c_b + j - \lfloor b/2 \rfloor)]],$$

где

$$R(k) = \begin{cases} k, & 1 \leq k \leq r_{max} \\ 1 - k, & k < 1 \\ 2r_{max} - k, & k > r_{max} \end{cases}, \quad C(k) = \begin{cases} k, & 1 \leq k \leq c_{max} \\ 1 - k, & k < 1 \\ 2c_{max} - k, & k > c_{max} \end{cases}.$$

По этим величинам строится корректировка интенсивности

$$\tilde{\mathcal{M}}[[i, j]] = \frac{\mathcal{M}[[i, j]] - a[[i, j]]}{b[[i, j]] - a[[i, j]]}.$$

Для снижения вычислительной сложности алгоритма центральные точки блоков можно выбирать с некоторым шагом, большим единицы. Тогда значения a , b для промежуточных значений индексов вычисляются по интерполяционным формулам:

$$\tilde{\mathcal{M}}[[i, j]] = \frac{\mathcal{M}[[i, j]] - \hat{a}(i, j)}{\hat{b}(i, j) - \hat{a}(i, j)},$$

$$\hat{a}(i, j) = \text{Int} \begin{pmatrix} a[[1, 1]] & a[[1, d+1]] & \dots & a[[1, c_{max}]] \\ a[[d+1, 1]] & a[[d+1, d+1]] & \dots & a[[d+1, c_{max}]] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a[[r_{max}, 1]] & a[[r_{max}, d+1]] & \dots & a[[r_{max}, c_{max}]] \end{pmatrix},$$

$$\hat{b}(i, j) = \text{Int} \begin{pmatrix} b[[1, 1]] & b[[1, d+1]] & \dots & b[[1, c_{max}]] \\ b[[d+1, 1]] & b[[d+1, d+1]] & \dots & b[[d+1, c_{max}]] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b[[r_{max}, 1]] & b[[r_{max}, d+1]] & \dots & b[[r_{max}, c_{max}]] \end{pmatrix}.$$

Аппроксимация линий голографического узора

После проведения эксперимента информация о линиях вторичной интерференции представлена в формате растрового описания. Однако для реконструкции поля смещений в аналитической форме полосы необходимо задать аналитически. Наиболее просто это можно сделать если представить искомые полосы в виде возмущенных окружностей, заменив постоянный радиус функцией, представленной тригонометрическим рядом Фурье:

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= r \left(a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\varphi) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(k\varphi) \right) \cos \varphi, \\ y(\varphi) &= r \left(a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\varphi) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(k\varphi) \right) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ясно, что если $a_0 = 1$, а все остальные коэффициенты a_k, b_k равны нулю, то эти уравнения определяют окружность радиуса r . При этом параметрические уравнения кривой могут быть записаны непосредственно как ряды Фурье:

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= A_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \left(A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi) \right), \\ y(\varphi) &= C_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \left(C_k \cos(k\varphi) + D_k \sin(k\varphi) \right), \end{aligned}$$

коэффициенты которых пересчитываются из заданных a_k, b_k по формулам, приведенным в Таблице 3.5.

k	0	1	[2, n - 1]	n	n + 1
A_k	$\frac{r}{2}a_1$	$\frac{r}{2}(2a_0 + a_2)$	$\frac{r}{2}(a_{k-1} + a_{k+1})$	$\frac{r}{2}a_{n-1}$	$\frac{r}{2}a_n$
B_k	0	$\frac{r}{2}b_2$	$\frac{r}{2}(b_{k-1} + b_{k+1})$	$\frac{r}{2}b_{n-1}$	$\frac{r}{2}b_n$
C_k	$\frac{r}{2}b_1$	$\frac{r}{2}b_2$	$\frac{r}{2}(-b_{k-1} + b_{k+1})$	$-\frac{r}{2}b_{n-1}$	$-\frac{r}{2}b_n$
D_k	0	$\frac{r}{2}(2a_0 - a_2)$	$\frac{r}{2}(a_{k-1} - a_{k+1})$	$\frac{r}{2}a_{n-1}$	$\frac{r}{2}a_n$

Таблица 3.5 – Формулы пересчета коэффициентов

Интерференционные узоры на реальных голограммах часто бывают симметричными относительно центра изображения, в окрестности которого и будут находиться центры возмущенных окружностей, наилучшим образом описывающих

полосы. Поэтому поиск коэффициентов Фурье разложения (3.1) целесообразно осуществлять в два этапа: сперва уточнить положение центра, а затем подбирать оставшиеся коэффициенты. Для этого следует явно выделить слагаемые, изменение которых сдвигает окружность как жесткое целое:

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= r \left(1 + \sum_{k=2}^n \tilde{a}_k \cos(k\varphi) + \sum_{k=2}^n \tilde{b}_k \sin(k\varphi) \right) \cos\varphi + p_x, \\ y(\varphi) &= r \left(1 + \sum_{k=2}^n \tilde{a}_k \cos(k\varphi) + \sum_{k=2}^n \tilde{b}_k \sin(k\varphi) \right) \sin\varphi + p_y. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Более точной аппроксимации можно добиться, используя кривые с большим числом варьируемых параметров, например, эллипсы. Используя каноническое уравнение, несложно показать, что в полярной системе координат, центр которой совпадает с центром эллипса, его уравнение имеет следующий вид:

$$r = \frac{ab}{\sqrt{(b^2 - a^2) \cos^2(\varphi - \psi) + a^2}}, \quad (3.3)$$

где a , b – длины соответственно большой и малой полуосей эллипса, а ψ – угол между большой полуосью и осью абсцисс. Раскладывая эту функцию в ряд и переходя к декартовым координатам, можно прийти к уравнениям возмущенного эллипса, которые совпадают с (3.2) с точностью до замены параметра r на правую часть (3.3) и угла φ на разность $\varphi - \psi$.

Простая растеризация

Как было сказано выше, коэффициенты аппроксимирующих кривых подбираются из условия экстремальности интеграла интенсивности. Однако из-за дискретности функции интенсивности вычисление интеграла вдоль кривой с последующим поиском экстремума не удастся выполнить методами классического анализа.

Наиболее простой способ вычисления интеграла дискретной функции предполагает его замену конечной суммой. В анализируемом случае берется сумма значений функции интенсивности в пикселях, некоторым образом выбранных в окрестности аппроксимирующей кривой:

$$I = \sum_{\mathcal{P}_{rc} \in P} \mathcal{M}[r, c], \quad (3.4)$$

где P — множество выбранных пикселей. Процесс построения этого множества называется растеризацией. Обычно ее проводят так чтобы при сплошной закраске выбранных пикселей полученное изображение визуально напоминало исходную кривую. Этому можно добиться если отбирать пиксели вдоль кривой так, чтобы каждый выбранный пиксель соприкасался ребрами с двумя другими.

Простейшая растеризация параметризованной кривой реализуется следующим образом:

1. Вычисляются декартовы координаты точки, соответствующей нулевому значению параметра, и содержащий ее пиксель добавляется в множество P ;
2. Параметр кривой получает некоторое приращение, а затем определяется пиксель содержащий новую точку;
3. Вычисляется дискретное расстояние d между текущим пикселем и последним добавленным в P , а затем если:
 - $d^2 = 0$ — приращение параметра увеличивается;
 - $d^2 = 1$ — в множество P добавляется текущий пиксель;
 - $d^2 = 2$ — помимо текущего пикселя в множество P добавляется один из пикселей, касающихся ребрами текущего и предыдущего выбранного;
 - $d^2 > 2$ — приращение параметра уменьшается;
4. Шаги 2 и 3 повторяются до тех пор пока текущее значение параметра кривой не превысит максимальное.

Наглядно схема включения пикселей приведена на Рисунке 3.12. Цифрами обозначен квадрат расстояния от центрального пикселя, а цветом действие при попадании точки кривой в пиксель.

Интерполяция

Простая растеризация дает возможность быстро вычислить интеграл вдоль заданной кривой, однако в общем случае она не позволяет эффективно осуществить поиск ее параметров, доставляющих экстремум этому интегралу. Проблема заключается в том, что большинство стандартных методов многопара-



Рисунок 3.12 – Схема включения пикселей

метрической оптимизации предназначено для задач, в которых при малом изменении параметров целевая функция также меняется незначительно. В нашем же случае даже едва заметное искажение формы аппроксимирующей кривой способно привести к тому, что набор пикселей, входящих в растр, будет существенно изменен, что повлечет за собой скачкообразное изменение значения целевой функции (3.4).

На практике перед тем как приступить к поиску параметров аппроксимирующих кривых целесообразно перейти к непрерывной функции интенсивности с помощью интерполяции на прямоугольной сетке, узлы которой расположены в центрах пикселей (Рисунок 3.13i). Здесь важно чтобы у построенной интерполяции не только первые производные были бы непрерывными, но и смешанные, что позволит обеспечить гладкость функции и в общих ребрах соседних ячеек сетки и в их вершинах. Требуемой гладкости можно добиться с помощью бикубической интерполяции (Рисунок 3.13ii), т. е. последовательной интерполяции кубическими сплайнами в двух направлениях:

$$m(x, y) = \left(1 \ \Delta(x) \ (\Delta(x))^2 \ (\Delta(x))^3 \right) \cdot A^T \cdot M \cdot A \cdot \left(1 \ \Delta(y) \ (\Delta(y))^2 \ (\Delta(y))^3 \right)^T.$$

Здесь Δ – оператор перехода к локальным координатам ячейки:

$$\Delta(z) = z + \frac{1}{2} - \left\lfloor z + \frac{1}{2} \right\rfloor,$$

A – матрица с постоянными компонентами, а M состоит из производных функ-

ции интенсивности:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} f_{ij}^{00} & f_{ij}^{01} & h_{ij}^{00} & h_{ij}^{01} \\ f_{ij}^{10} & f_{ij}^{11} & h_{ij}^{10} & h_{ij}^{11} \\ g_{ij}^{00} & g_{ij}^{01} & q_{ij}^{00} & q_{ij}^{01} \\ g_{ij}^{10} & g_{ij}^{11} & q_{ij}^{10} & q_{ij}^{11} \end{pmatrix},$$

которые, в свою очередь, вычисляются с помощью конечных разностей интенсивности по пикселям:

$$\begin{aligned} f_{ij}^{pk} &= \mathcal{M}[[i - k, j + p]], & g_{ij}^{pk} &= \frac{1}{2} (\mathcal{M}[[i - k, j + p + 1]] - \mathcal{M}[[i - k, j + p - 1]]), \\ h_{ij}^{pk} &= \frac{1}{2} (\mathcal{M}[[i - k - 1, j + p]] - \mathcal{M}[[i - k + 1, j + p]]), \\ q_{ij}^{pk} &= \frac{1}{4} (\mathcal{M}[[i - k - 1, j + p + 1]] - \mathcal{M}[[i - k + 1, j + p + 1]] - \\ &\quad - \mathcal{M}[[i - k - 1, j + p - 1]] + \mathcal{M}[[i - k + 1, j + p - 1]]). \end{aligned}$$

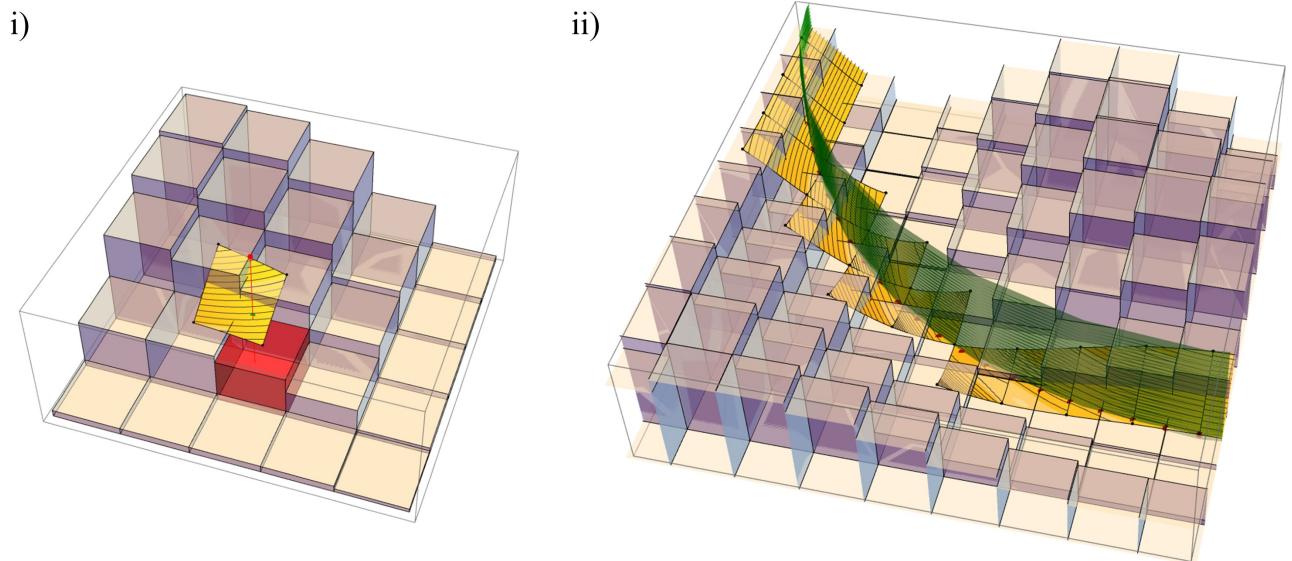


Рисунок 3.13 – Бикубическая интерполяция функции интенсивности

После построения интерполяционной функции искомый интеграл интенсивности можно вычислить непосредственно:

$$I = \frac{\int_0^{2\pi} m(x(\varphi), y(\varphi)) \sqrt{\dot{x}(\varphi)^2 + \dot{y}(\varphi)^2} d\varphi}{\int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}(\varphi)^2 + \dot{y}(\varphi)^2} d\varphi},$$

однако для быстрого действия алгоритма лучше воспользоваться численным интегрированием, например, формулой трапеций

$$I \approx \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (m(x_{i+1}, y_{i+1}) + m(x_i, y_i)) \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}{2 \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}. \quad (3.5)$$

Учитывая, что при построении функции $m(x, y)$ интерполяционная сетка была сдвинута относительно сетки пикселей, при вычислении интеграла по формуле (3.5) целесообразно сдвинуть аргументы на ту же величину:

$$x_k = x(\varphi_k) + 1/2, \quad y_k = y(\varphi_k) - 1/2.$$

Кроме того, шаг по параметру кривой следует выбирать весьма крупным, чтобы каждая точка разбиения попадала в свой пиксель, но при этом разбиение должно быть достаточно частым, чтобы пиксели, содержащие две соседние точки разбиения, касались друг друга. В рамках первого приближения можно выбрать шаг обратный скорости приращения длины кривой при изменении ее параметра:

$$\Delta = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-1/2}.$$

Например, для возмущенной окружности, заданной формулами (3.2), это выражение имеет следующий вид:

$$\Delta = r^{-1} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + 2S_1S_2)^{-1/2},$$

где

$$S_1 = \sum_{k=2}^n \tilde{a}_k \cos(k\varphi), \quad S_2 = \sum_{k=2}^n \tilde{b}_k \sin(k\varphi) + 1, \quad S_3 = \sum_{k=2}^n k (\tilde{b}_k \cos(k\varphi) - \tilde{a}_k \sin(k\varphi)).$$

Пример идентификации линий голографического узора

Описанные алгоритмы могут быть реализованы в виде эффективного программного комплекса, позволяющего аналитически описывать линии интерференционных узоров. Пример такого комплекса – программа “Анализ интерферограмм”, разработанная С. А. Лычевым. Результат работы этой программы представлен на Рисунке 3.14. В левом верхнем углу приведен сектор исходной интерферограммы, под ней – идентифицированные линии (справа сверху

они же в увеличенном виде). В нижнем правом углу представлены расчетные изолинии поверхности прогибов, аналогичные, представленным на Рисунке 3.3. Ценность программы заключается в том, что идентифицированные линии представляются в ней в виде наборов параметров, позволяющих восстановить аппроксимирующие аналитические выражения. Последние, в свою очередь, позволяют реконструировать всю поверхность прогибов.

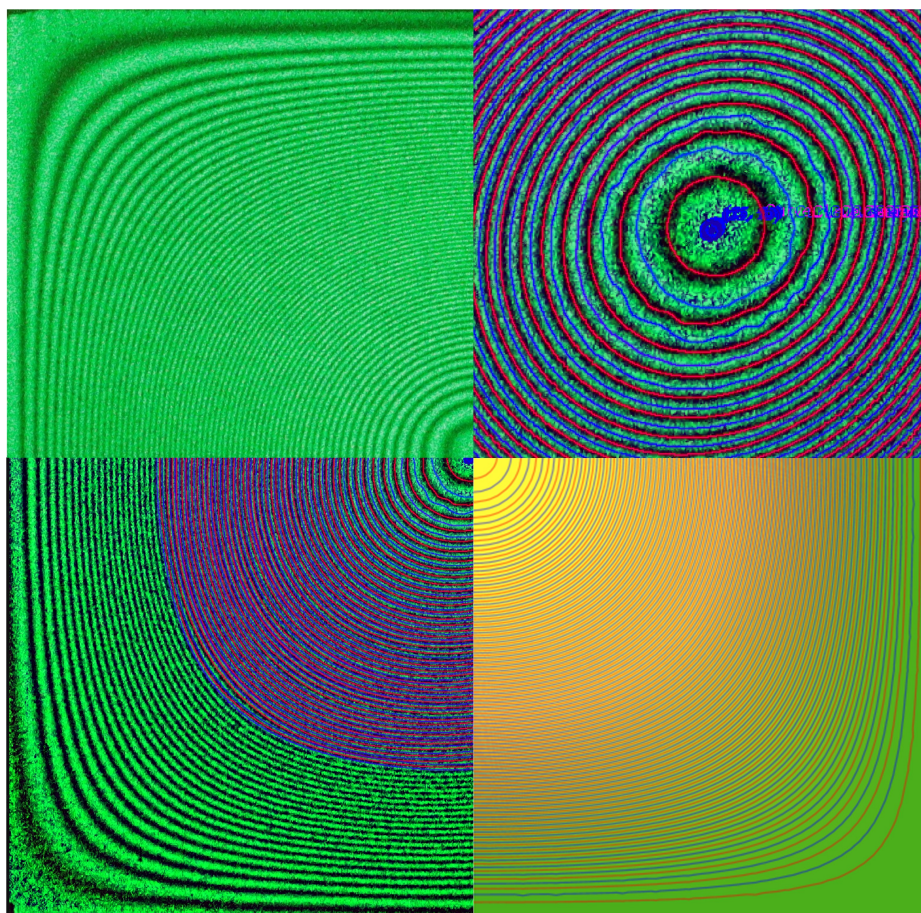


Рисунок 3.14 – Распознавание интерференционных полос

3.2 Влияние нарушения адгезионного контакта

В заключение рассмотрим случай отрыва мембраны от кремневой подложки в процессе испытаний. Этот эффект можно наблюдать на оптическом профилометре, сравнивая фотографии мембраны⁴ до (Рисунок 3.15i) и после нагружения (Рисунок 3.15ii).

Сравнивая фотографии можно визуально заметить отслоение мембраны, однако более явно оно проявляется по влиянию на упругую характеристику

⁴Фотографии выполнены в ЦКП МИЭТ на оптическом профилометре Veeco Wyko NT9300

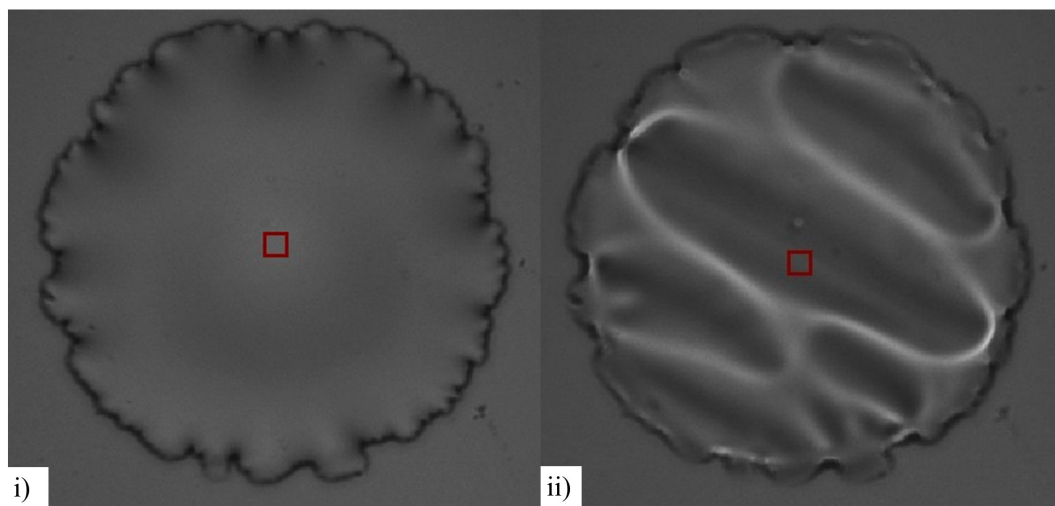


Рисунок 3.15 – Отслоение мембраны от подложки

мембраны. На Рисунке 3.16 приведено сравнение упругой характеристики мембраны, полученной из модели Грина – Ривлина – Адкинса, рассмотренной в Главе 1, с экспериментальными данными для тонкой алюминиевой мембраны, полученными на оптическом профилометре (параметры мембраны приведены в Таблице 3.6).

Радиус R , мкм	Толщина h , нм	Модуль Юнга E , ГПа	Коэффициент Пуассона ν
175	300	70.6	0.345

Механические параметры алюминия приняты по [200]

Таблица 3.6 – Параметры круглой мембраны

Видно, что с ростом нагрузки экспериментальные точки удаляются от теоретической кривой. Однако если построить не одну теоретическую кривую, а семейство кривых для мембран различного диаметра (Рисунок 3.17), то становится видно, что в процессе деформирования мембрана меняет свой диаметр, переходя с одной теоретической кривой на другую.

Выводы по главе

В заключительной главе работы представлено экспериментальное исследование тонких пластин методом голографической интерферометрии. Показано, что в случае пластины с размерами приближенными к стандартным, используемым в технике, построенное в предыдущей главе решение уравнений Фешля – фон Кармана для прямоугольных пластин в целом соответствует измерениям.

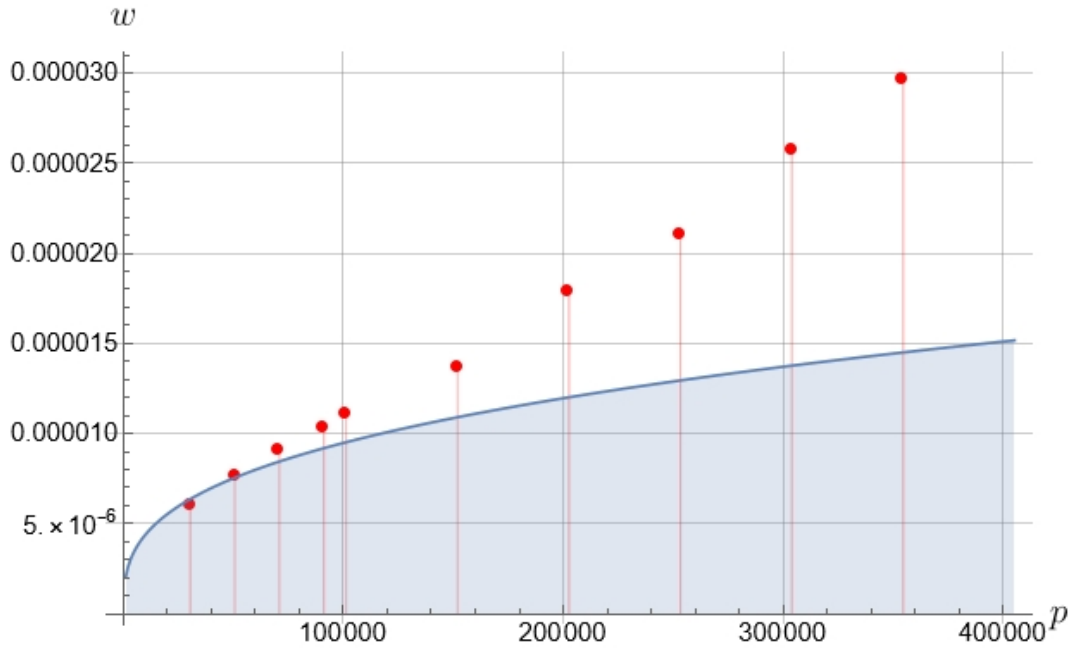


Рисунок 3.16 – Сравнение с теоретической кривой

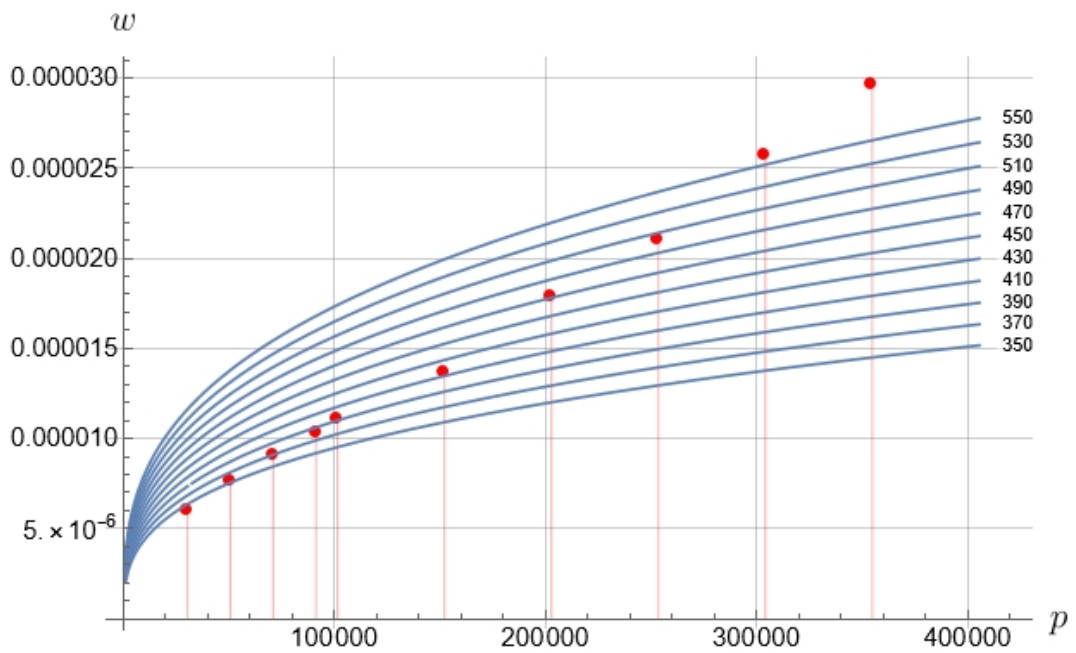


Рисунок 3.17 – Сравнение с семейством теоретических кривых

В то же время, при рассмотрении пластин с размерами типичными для МЭМС наблюдается серьезное отклонение результатов измерений от теоретического прогноза. Это отклонение может быть объяснено наличием предварительного натяжения в пластине. Расчеты по модели, учитывающей несовместные деформации, полученной в первой главе, с помощью итерационного алгоритма, представленного во второй, показали, что при оптимальном подборе параметра, ассоциированного с предварительным натяжением, теоретический прогноз

оказывается гораздо ближе к экспериментальным результатам.

Для более детального анализа результатов эксперимента представлен алгоритм автоматической идентификации интерференционных полос на цифровом изображении. Ценность предложенного алгоритма заключается в том, что он позволяет представить интерференционные полосы в аналитическом виде, допускающем последующую реконструкцию всей поверхности прогибов, что, в свою очередь, позволит более детально сопоставлять результаты экспериментов с теоретическим прогнозом и идентифицировать детальную структуру поля перемещений в окрестностях особых точек.

Заключение

В рамках диссертационного исследования были подробно рассмотрены вопросы построения различных моделей пластин, учитывающих несовместные деформации, а также методы решения порождаемых ими краевых задач. Кроме того, были затронуты вопросы экспериментального исследования деформаций пластинчатых элементов и валидации построенных теоретических решений. В ходе работы было сделано следующее:

1. Развита новая аналитическая теория самонапряженных тонкостенных элементов. Показано, что она может быть использована для разработки новых моделей тонкостенных элементов, учитывающих конечные несовместные деформации, возникающие в пластинах нанометрового масштаба.
2. Получена модификация уравнений Фешля – фон Кармана, учитывающая несовместные деформации.
3. Получены асимптотические формулы, представляющие первый тензор напряжений Пиола и тензор истинных напряжений Коши в виде рядов по малому параметру, ассоциированному с абсолютной величиной деформации.
4. Установлены области применимости классических моделей при анализе деформирования короткого цилиндрического тела. Рассмотрены следующие модели: трехмерное тело (в рамках линейной теории упругости), пластина Кирхгофа, пластина Фешля – фон Кармана, мембрана Грина – Ривлина – Адкинса.
5. Построено новое решение задачи об изгибе круглой пластины Фешля – фон Кармана, защемленной на контуре и нагруженной на лицевой поверхности давлением распределенным по произвольному закону.

6. Получено условие сходимости построенного итерационного решения и показан способ модификации итерационной процедуры, улучшающий сходимость. Улучшение сходимости продемонстрировано отдельно.
7. Построено новое решение задачи об изгибе прямоугольной пластины Фепля – фон Кармана, нагруженной давлением, функция распределения которого является четной по обеим координатам. Рассмотрены два вида краевых условий: а) все стороны абсолютно жестко защемлены; б) все стороны закреплены от смещений в трансверсальном направлении, но могут деформироваться в продольном. Указан способ обобщения построенного решения для случая функции распределения давления общего вида.
8. Построенные решения обобщены на случай пластин с несовместными деформациями, уравнения для которого были получены ранее в работе.
9. Развита экспериментальная методика идентификации перемещений пластин нанометрового масштаба методом голографической интерферометрии. Представлен алгоритм автоматической идентификации полос вторичной интерференции на цифровом изображении, позволяющий более детально анализировать результаты экспериментов.
10. Проведены экспериментальные исследования “толстой” квадратной пластины и круглой пластины нанометровой толщины методом голографической интерферометрии. Проведена валидация построенных решений.

К основным выводам работы можно отнести следующие:

1. Вариационная техника на основе принципа наименьшего действия и нетеровых симметрий представляет собой мощный инструмент для построения новых моделей пластин с учетом несовместных деформаций.
2. Несовместные деформации могут оказывать значительное влияние на жесткость пластинчатого элемента, в разы увеличивая (или уменьшая) его упругий отклик.
3. Задача о конечном изгибе круглых пластин может быть эффективно решена с помощью итерационного алгоритма с эквивалентным оператором. Попытка построения аналогичного алгоритма с оператором линейной задачи приводит к быстро расходящемуся процессу.

4. Классический метод Галеркина может быть эффективно обобщен для нелинейных уравнений Феппля – фон Кармана. Он позволяет свести их к системе кубических уравнений относительно коэффициентов разложения функции прогибов.
5. При анализе напряженно-деформированного состояния защемленной прямоугольной пластины важно учитывать особенности закрепления ее краев в продольном направлении, так как они могут оказывать существенное влияние на распределение напряжений в пластине, а значит и на ее прочность.
6. Нелинейная модель Феппля – фон Кармана позволяет эффективно описывать конечные деформации стандартных пластин, используемых в технике. Однако при анализе пластинчатых элементов МЭМС необходимо переходить к моделям, учитывающим несовместные деформации. Например, к полученной в работе модификации модели Феппля – фон Кармана.
7. При определенных режимах на деформирование пластины оказывает существенное влияние ее отслоение от подложки, которое при простых (монотонных) нагружениях может быть учтено зависимостью параметра опорного контура (например, радиуса) от параметра нагружения.

Литература

- 1 Lychev S. A., Koifman K. G., Digilov A. V. Nonlinear dynamic equations for elastic micromorphic solids and shells. Part I // *Вестник Самарского университета. Естественная серия.* — 2021. — Т. 27, № 1. — С. 81–103.
- 2 Лычев С. А., Дигилов А. В., Пивоваров Н. А. Изгиб кругового диска: от цилиндра к ультратонкой мембране // *Вестник Самарского университета. Естественная серия.* — 2023. — Т. 29, № 4. — С. 77–105.
- 3 Deformations of Single-Crystal Silicon Circular Plate: Theory and Experiment / S. Lychev, A. Digilov, G. Demin et al. // *Symmetry.* — 2024. — Vol. 16, no. 2. — P. 137.
- 4 Incompatible Deformations in Hyperelastic Plates / S. Lychev, A. Digilov, V. Bepalov, N. Djuzhev // *Mathematics.* — 2024. — Vol. 12, no. 4. — P. 596.
- 5 Lychev S., Digilov A., Djuzhev N. Galerkin-Type Solution of the Föppl–von Kármán Equations for Square Plates // *Symmetry.* — 2024. — Vol. 17, no. 1. — P. 32.
- 6 Дигилов А. В., Лычев С. А. Решение уравнений Фешля–фон Кармана для квадратных пластин // *Вестник Самарского университета. Естественная серия.* — 2024. — Т. 30, № 4. — С. 26–45.
- 7 О скелетизации интерференционного узора / С. А. Лычев, А. В. Дигилов, П. С. Бычков, И. И. Матвеев // *Вестник Самарского университета. Естественная серия.* — 2025. — Т. 31, № 3. — С. 87–112.
- 8 Lychev S., Digilov A. A Robust Skeletonization Method for High-Density Fringe Patterns in Holographic Interferometry Based on Parametric Modeling and Strip Integration // *J. Imaging.* — 2026. — Vol. 12, no. 2.

- 9 *De Teresa J. M.* Nanofabrication: Nanolithography techniques and their applications. — IOP Publishing, 2020.
- 10 *Mattox D. M.* Handbook of physical vapor deposition (PVD) processing. — William Andrew, 2010.
- 11 *Truesdell C., Noll W.* The non-linear field theories of mechanics. — Springer, 2004.
- 12 *Maugin G. A.* Material inhomogeneities in elasticity. — CRC Press, 2020.
- 13 *Lychev S. A., Koifman K. G.* Geometry of incompatible deformations: differential geometry in continuum mechanics. — De Gruyter, 2018.
- 14 *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. — ГИТТЛ, 1956.
- 15 *Kirchhoff G.* Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. // *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*. — 1850. — no. 40. — p. 51–88.
- 16 *Mindlin R. D.* Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. — 1951.
- 17 *Reissner E.* On tranverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation. — 1974.
- 18 *Кильчевский Н. А.* Основы аналитической механики оболочек. — АН УССР, 1963.
- 19 *Векуа И. Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. — Наука, 1982.
- 20 *Ciarlet P. G.* Mathematical Elasticity: Theory of Plates. — Elsevier, 1997.
- 21 *Ciarlet P. G.* A justification of the von Kármán equations // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. — 1980. — Vol. 73, no. 4. — p. 349–389.
- 22 *Тимошенко С. П.* О больших прогибах круглых пластинок // *Сборник института инженеров путей сообщения*. — 1915.

- 23 *Панов Д. Ю.* Применение метода акад. Б. Г. Галеркина для решения некоторых нелинейных задач теории упругости // *Прикл. матем. и мех.* — 1939. — Т. 3, № 2.
- 24 *Андреева Л. Е.* Упругие элементы приборов. — Машгиз, 1962.
- 25 *Григолюк Э. И. Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. — ВИНТИ, 1973.
- 26 *Ворович И. И.* Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. — 1989.
- 27 *Морозов Н. Ф.* К нелинейной теории тонких пластин // *Докл. АН СССР.* — 1957. — Т. 5, № 114. — С. 968–971.
- 28 *Исанбаева Ф. С., Корнишин М. С.* Большие прогибы пластин со свободно смещающимися краями // *Исследования по теории пластин и оболочек.* — 1965. — Т. 3. — С. 3–17.
- 29 *Nádai A.* Die elastischen Platten. — Springer, 1925.
- 30 *Kaiser R.* Rechnerische und experimentelle Ermittlung der Durchbiegungen und Spannungen von quadratischen Platten bei freier Auflagerung an den Rändern, gleichmäßig verteilter Last und großen Ausbiegungen // *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik.* — 1936. — Vol. 16, no. 2. — p. 73–98.
- 31 *Way S.* Bending of circular plates with large deflection // *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers.* — 1934. — Vol. 56, no. 7. — p. 627–633.
- 32 *Levy S.* Bending of rectangular plates with large deflections. — NACA Technical notes No. 846, 1942.
- 33 *Levy S.* Square plate with clamped edges under normal pressure producing large deflections. — NACA Technical notes No. 847, 1942.
- 34 *Wang C.-T.* Nonlinear large-deflection boundary-value problems of rectangular plates. — NACA Technical note No. 1425, 1948.

- 35 *Wang C.-T.* Bending of rectangular plates with large deflections. — NACA Technical note No. 1462, 1948.
- 36 *Friedrichs K. O., Stoker J. J.* The non-linear boundary value problem of the buckled plate // *Proceedings of the National Academy of Sciences.* — 1939. — Vol. 25, no. 10. — p. 535–540.
- 37 *Friedrichs K. O., Stoker J. J.* The non-linear boundary value problem of the buckled plate // *American Journal of Mathematics.* — 1941. — Vol. 63, no. 4. — p. 839–888.
- 38 *Southwell R. V., Green J. R.* Relaxation Methods Applied to Engineering Problems, VIII A. Problems Relating to Large Transverse Displacements of Thin Elastic Plates // *Phil. Tran. Roy. Soc.* — 1944. — Vol. 1. — p. 137–176.
- 39 Bending of Rectangular Plates With Finite Deflections¹ / F. Bauer, L. Bauer, W. Becker, E. L. Reiss. — Courant Institute of Mathematical Sciences, 1964.
- 40 *Berger H. M.* A New Approach to the Analysis of Large Deflections of Plates: Ph.D. thesis / California Institute of Technology. — 1954.
- 41 *Yamaki N.* Influence of large amplitudes on flexural vibrations of elastic plates // *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik.* — 1961. — Vol. 41, no. 12. — p. 501–510.
- 42 *Berger M. S., Fife P. C.* On von Kármán's equations and the buckling of a thin elastic plate // *Bulletin of the American Mathematical Society.* — 1966. — Vol. 72, no. 6. — p. 1006–1011.
- 43 *Knightly G. H.* An existence theorem for the von Kármán equations // *Archive for Rational Mechanics and Analysis.* — 1967. — Vol. 27, no. 3. — p. 233–242.
- 44 *Hlaváček I., Naumann J.* Inhomogeneous boundary value problems for the von Kármán equations. I // *Applications of Mathematics.* — 1974. — Vol. 19, no. 4. — p. 253–269.
- 45 *Hlaváček I., Naumann J.* Inhomogeneous boundary value problems for the von Kármán equations. II // *Applications of Mathematics.* — 1975. — Vol. 20, no. 4. — p. 280–297.

- 46 *Miyoshi T.* A mixed finite element method for the solution of the von Kármán equations // *Numerische Mathematik*. — 1976. — Vol. 26, no. 3. — p. 255–269.
- 47 *Antman S. S.* Buckled states of nonlinearly elastic plates // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. — 1978. — Vol. 67. — p. 111–149.
- 48 *Gorder R. A. Van.* Analytical method for the construction of solutions to the Föppl–von Kármán equations governing deflections of a thin flat plate // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. — 2012. — Vol. 47, no. 3. — p. 1–6.
- 49 *Gorder R. A. Van.* Asymptotic solutions for the Föppl–von Kármán equations governing deflections of thin axisymmetric annular plates // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. — 2017. — Vol. 91. — p. 8–21.
- 50 *Э Кренер.* Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. — Мир, 1965.
- 51 *Эшелби Д.* Континуальная теория дислокаций. — Иностранной литературы, 1963.
- 52 *P. Де Вум.* Континуальная теория дисклинаций. — Мир, 1977.
- 53 *Lurie S. A., Belov P. A., Kharchenko K. D.* The theory of media with defect fields and models of deformation of functional layers in isotropic materials // *Nanoscience and Technology: An International Journal*. — 2015. — Vol. 6, no. 1.
- 54 *Мясников В. П., Гузев М. А.* Неевклидова модель деформирования материалов на различных структурных уровнях // *Физическая мезомеханика*. — 2000. — Т. 3, № 1. — С. 5–16.
- 55 *Yavari A.* A geometric theory of growth mechanics // *Journal of Nonlinear Science*. — 2010. — Vol. 20, no. 6. — p. 781–830.
- 56 *Marsden J. E., Hughes T. J. R.* Mathematical foundations of elasticity. — Courier Corporation, 1994.
- 57 *Kreis T.* Handbook of holographic interferometry: optical and digital methods. — John Wiley & Sons, 2006.

- 58 Design and simulation of piezoresistive polymer accelerometer / IOP Publishing. — Vol. 561, 2019.
- 59 Measurement system for wide-range flow evaluation and thermal characterization of MEMS-based thermoresistive flow-rate sensors / N.A. Djuzhev, V.T. Ryabov, G.D. Demin et al. // *Sensors and Actuators A: Physical*. — 2021. — Vol. 330.
- 60 Design and fabrication of an absolute pressure MEMS capacitance vacuum sensor based on silicon bonding technology / M. Xu, Y. Feng, X. Han et al. // *Vacuum*. — 2021. — Vol. 186. — P. 110065.
- 61 A high-sensitive ultra-thin MEMS capacitive pressure sensor / Y. Zhang, R. Howver, B. Gogoi, N. Yazdi // 2011 16th International Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems Conference / IEEE. — 2011. — p. 112–115.
- 62 Low-cost microbolometer type infrared detectors / L. Yu, Y. Guo, H. Zhu et al. // *Micromachines*. — 2020. — Vol. 11, no. 9. — P. 800.
- 63 Magnetostrictive resonators as sensors and actuators / K. Zhang, L. Zhang, L. Fu et al. // *Sensors and Actuators A: Physical*. — 2013. — Vol. 200. — p. 2–10.
- 64 Verma G., Mondal K., Gupta A. Si-based MEMS resonant sensor: A review from microfabrication perspective // *Microelectronics Journal*. — 2021. — Vol. 118. — P. 105210.
- 65 Piezoelectric thin films and their applications in MEMS: A review / J. Liu, H. Tan, X. Zhou et al. // *Journal of Applied Physics*. — 2025. — Vol. 137, no. 2.
- 66 Ultrathin TiN membranes as a technology platform for CMOS-integrated MEMS and BioMEMS devices / M. Birkholz, K. Ehwald, P. Kulse et al. // *Advanced Functional Materials*. — 2011. — Vol. 21, no. 9. — p. 1652–1656.
- 67 Novel MEMS stiffness sensor for force and elasticity measurements / P. Peng, A.S. Sezen, R. Rajamani, A.G. Erdman // *Sensors and Actuators A: Physical*. — 2010. — Vol. 158, no. 1. — p. 10–17.

- 68 *Singh J., Kumar A., Chelvane J. A.* Stress compensated MEMS magnetic actuator based on magnetostrictive Fe₆₅Co₃₅ thin films // *Sensors and Actuators A: Physical*. — 2019. — Vol. 294. — p. 54–60.
- 69 EUV lithography imaging using novel pellicle membranes / I. Pollentier, J. Vanpaemel, J. Lee et al. // *Extreme Ultraviolet (EUV) Lithography VII* / SPIE. — Vol. 9776. — 2016. — p. 587–600.
- 70 Investigation of the Resistivity and Emissivity of a Pellicle Membrane for EUV Lithography / S. Wi, Y. Jang, H. Kim et al. // *Membranes*. — 2022. — Vol. 12, no. 4. — P. 367.
- 71 *Pacheco-Sanjuán A., Batra R.* Accuracy of Föppl–von Karman membrane theory for determining elastic constants of monolayer graphene // *International Journal of Mechanical Sciences*. — 2019. — Vol. 163. — P. 105154.
- 72 *Ciarletta P., Pozzi G., Riccobelli D.* The Föppl–von Kármán equations of elastic plates with initial stress // *Royal Society Open Science*. — 2022. — Vol. 9, no. 5. — P. 220421.
- 73 Modeling Graphene–Polymer Heterostructure MEMS Membranes with the Föppl–von Kármán Equations / K. Smith, A. Retallick, D. Melendrez et al. // *ACS Applied Materials & Interfaces*. — 2023. — Vol. 15, no. 7. — p. 9853–9861.
- 74 *Бургер И. А., Р. Мавлютов Р.* Сопротивление материалов. — Наука, 1986.
- 75 *Gurtin M. E., Murdoch I. A.* A continuum theory of elastic material surfaces // *Archive for rational mechanics and analysis*. — 1975. — Vol. 57. — p. 291–323.
- 76 *Еремеев В. А., Зубов Л. М.* Механика упругих оболочек. — Наука, 2008.
- 77 *Сабитов И. Х.* Изгибания поверхностей и многогранников // *Математическое просвещение*. — 2022. — Т. 29, № 0. — С. 117–145.
- 78 *Геккелер И.* Статика упругого тела. — КомКнига, 2005.
- 79 *Курант Р., Д. Гильберт.* Методы математической физики. Том 1. — ГИТТЛ, 1951.
- 80 *Тихонов А. Н., А. Самарский А.* Уравнения математической физики. — 1976.

- 81 *Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В.* Лекции по математической физике. — Изд-во Моск. ун-та, 2004.
- 82 *Тимошенко С.* История науки о сопротивлении материалов. — URSS, 2008.
- 83 *Todhunter I., K. Pearson.* A History of the Theory of Elasticity. — Cambridge University Press, 1886.
- 84 *Лычев С. А., Салеев С. В.* Замкнутое решение задач об изгибе жестко закрепленной прямоугольной пластины // *Вестник Самарского государственного университета.* — 2006. — № 2. — С. 62–73.
- 85 *Bucciarelli L., Dworsky N.* Sophie Germain: An essay in the history of the theory of elasticity. — Springer Science & Business Media, 2012.
- 86 *Musiela D.* Germain and Her Biharmonic Equation. — Springer, 2020.
- 87 *Euler L.* De motu vibratorio tympanorum // *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae.* — 1766. — p. 243–260.
- 88 *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. Том 1. — ГИТТЛ, 1950.
- 89 *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. — Физико-математическая литература, 2001.
- 90 *Chladni E.* Entdeckungen über die Theorie des Klanges. — Zentralantiquariat der Deutschen Demokratischen Republik, 1787.
- 91 *Bernoulli J.* Essai théorique sur les vibrations des plaques élastiques, rectangulaires et libres // *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae.* — 1788. — p. 197–219.
- 92 *Эйлер Л.* Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума.. — Гостехиздат, 1934.
- 93 *Stöckmann H-J.* Chladni meets Napoleon // *The European Physical Journal Special Topics.* — 2007. — Vol. 145, no. 1. — p. 15–23.
- 94 *Germain S.* Recherches sur la théorie des surfaces élastiques. — V. Courcier, 1821.
- 95 *Норден А. П.* Теория поверхностей. — URSS, 2019.

- 96 Гельфанд И. М. Фомин С. В. Вариационное исчисление. — 1961.
- 97 Poisson S.-D. Mémoire sur les surfaces élastiques. — 1814.
- 98 D. Toda M. Willmore energy and Willmore conjecture. — CRC Press, 2017.
- 99 Da Lio F., Palmurella F., Rivière T. A resolution of the Poisson problem for elastic plates // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. — 2020. — Vol. 236, no. 3. — p. 1593–1676.
- 100 Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — Наука, 1968.
- 101 Cauchy A.-L. Sur l'équilibre et le mouvement d'une plaque solide // *Exercices de Mathématique*. — 1828. — Vol. 3, no. 1828. — p. 328–355.
- 102 Poisson S.-D. Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques. — F. Didot, 1829.
- 103 Podio-Guidugli P. An exact derivation of the thin plate equation // *Journal of Elasticity*. — 1989. — Vol. 22, no. 2. — p. 121–133.
- 104 Томсон У., Тэт П. Г. Трактат по натуральной философии. Часть 2. — Изд-во Научно-издательского центра "Регулярная и хаотическая динамика 2011.
- 105 Navier M. Extrait des recherches sur la flexion des plans élastiques // *Bull. Sci. Soc. Philomat*. — 1823. — p. 95–102.
- 106 Levy M. Sur l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire // *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*. — 1899. — Vol. 129. — p. 535–539.
- 107 Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — Наука, 1976. — Т. 576.
- 108 Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. — URSS, 2010.
- 109 Estanave E. Contribution à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire mince // *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*. — 1900. — Vol. 17. — p. 295–358.

- 110 *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. — Наука, 1966.
- 111 *Мелешко ВВ, Папков СО.* Изгибные колебания упругих прямоугольных пластин со свободными краями: от Хладни (1809) и Ритца (1909) до наших дней // *Акустичний вісник.* — 2009. — Т. 12, № 4. — С. 34–51.
- 112 *Ritz W.* Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern // *Annalen der Physik.* — 1909. — Vol. 333, no. 4. — p. 737–786.
- 113 *Коялович Б. М.* Исследование о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений // *Изв. Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова.* — 1930. — Т. 3. — С. 41–167.
- 114 *Clebsch A.* Theorie der elasticität fester körper. — BG Teubner, 1862.
- 115 *Clebsch A.* Théorie de l'élasticité des corps solides. — Dunod, 1883.
- 116 *Kármán T.* Festigkeitsprobleme im Maschinenbau // *Encyclopadie Der Mathematischen Wissenschaften*, vol. 4. — B. G. Teubner Verlag, Leipzig, 1910.
- 117 *Бубнов И. Г.* Напряжения в обшивке судов от давления воды // *Морской сборник.* — 1902. — Т. 312, № 10. — С. 119–138.
- 118 *Nowinski J.* Note on an analysis of large deflections of rectangular plates // *Applied Scientific Research, Section A.* — 1963. — Vol. 11. — p. 85–96.
- 119 *Datta S.* Large deflection of a circular plate on elastic foundation under a concentrated load at the center // *J. Appl. Mech.* — 1975. — Vol. 42, no. 2.
- 120 *Datta S.* Large deflection of a semi-circular plate on elastic foundation under a uniform load // *Proceedings of the Indian Academy of Sciences-Section A.* — 1976. — Vol. 83, no. 1. — p. 21–32.
- 121 *Karmakar B. M.* Non-linear dynamic behaviour of plates on elastic foundations // *Journal of Sound and Vibration.* — 1977. — Vol. 54, no. 2. — p. 265–271.
- 122 *Бычков П. С., Лычев С. А., Бут Д. К.* Экспериментальная методика определения эволюции формы изгиба тонкой подложки при электрокристалли-

- зации меди в областях сложной формы // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия.* — 2019. — Т. 25, № 4. — С. 48–73.
- 123 Бут Д. К., Бычков П. С., Лычев С. А. Теоретическое и экспериментальное исследование изгиба тонкой подложки при электролитическом осаждении // *Вестник ПНИПУ. Механик.* — 2020. — № 1. — С. 17–31.
- 124 Устинов К. Б., Гандилян Д. В. О граничных условиях для тонкой круглой пластины, сопряженной с массивным телом // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия.* — 2024. — Т. 30, № 1. — С. 50–63.
- 125 Banerjee B., Datta S. A new approach to an analysis of large deflections of thin elastic plates // *International Journal of Non-Linear Mechanics.* — 1981. — Vol. 16, no. 1. — p. 47–52.
- 126 Курхгоф Г. Механика. — 1962.
- 127 Föppl A. Vorlesungen über technische Mechanik. Volume 5. — B. G. Teubner Verlag, Leipzig, 1907.
- 128 Timoshenko S. *Vibration Problems in Engineering.* — Van Nostrand, 1928.
- 129 Way S. Uniformly loaded, clamped, rectangular plates with large deflection // *Proc. 5th Int. Congr. on Applied Mechanics.* — 1938. — p. 123–128.
- 130 Levy S. Bending with large deflection of a clamped rectangular plate with length-width ratio of 1.5 under normal pressure. — NACA Technical notes No. 853, 1942.
- 131 Woolley R. M., Corrick J. N., Levy S. Clamped long rectangular plate under combined axial load and normal pressure. — NACA Technical note No. 1047, 1946.
- 132 Levy S., Goldenberg D., Zibritosky G. Simply supported long rectangular plate under combined axial load and normal pressure. — NACA Technical notes No. 949, 1944.
- 133 Нехотяев В. В., Саченков А. В. Большие прогибы тонких упругих пластин // *Исследования по теории пластин и оболочек.* — 1973. — Т. 10. — С. 27–40.

- 134 *Zhang Y.* Large deflection of clamped circular plate and accuracy of its approximate analytical solutions // *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*. — 2016. — Vol. 59. — p. 1–11.
- 135 *Кхоа Д. Н.* Расчет гибких прямоугольных пластин по методу последовательных аппроксимаций: диссертация кандидата технических наук / Московский государственный строительный университет. — 2023.
- 136 Bending of Rectangular Plates With Finite Deflections1 / F. Bauer, L. Bauer, W. Becker, E. L. Reiss // *Journal of Applied Mechanics*. — 1965. — P. 821.
- 137 *Hooke R.* Approximate analysis of the large deflection elastic behaviour of clamped, uniformly loaded, rectangular plates // *Journal of Mechanical Engineering Science*. — 1969. — Vol. 11, no. 3. — p. 256–268.
- 138 *Li-zhou P., Shu W.* A perturbation-variational solution of the large deflection of rectangular plates under uniform load // *Applied Mathematics and Mechanics*. — 1986. — Vol. 7, no. 8. — p. 727–740.
- 139 *Li-zhou P., Wei-zhong C.* The solution of rectangular plates with large deflection by spline functions // *Applied Mathematics and Mechanics*. — 1990. — Vol. 11, no. 5. — p. 429–439.
- 140 A biparametric perturbation method for the Föppl–von Kármán equations of bimodular thin plates / X.-T. He, L. Cao, Y.-Z Wang et al. // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. — 2017. — Vol. 455, no. 2. — p. 1688–1705.
- 141 *Rushton K. R.* Simply supported plates with corners free to lift // *Journal of Strain Analysis*. — 1969. — Vol. 4, no. 4. — p. 306–311.
- 142 *Scholes A., Bernstein E. L.* Bending of normally loaded simply supported rectangular plates in the large-deflection range // *Journal of Strain Analysis*. — 1969. — Vol. 4, no. 3. — p. 190–198.
- 143 *Petit P. H.* A Numerical Solution to the General Large Deflection Plate Equations // *SAE Transactions*. — 1966. — p. 236–243.
- 144 *Brezzi F.* Finite element approximations of the von Kármán equations // *RAIRO. Analyse numérique*. — 1978. — Vol. 12, no. 4. — p. 303–312.

- 145 *Miyoshi T.* Some aspects of a mixed finite element method applied to fourth order partial differential equations // *Computing Methods in Applied Sciences: Second International Symposium December 15–19, 1975 / Springer.* — 2008. — p. 237–256.
- 146 *Bartels S.* Numerical solution of a Foppl–von Karman model // *SIAM Journal on Numerical Analysis.* — 2017. — Vol. 55, no. 3. — p. 1505–1524.
- 147 *Kamiya N., Sawaki Y.* An integral equation approach to finite deflection of elastic plates // *International journal of non-linear mechanics.* — 1982. — Vol. 17, no. 3. — p. 187–194.
- 148 *Ye T. Q., Liu Y.* Finite deflection analysis of elastic plate by the boundary element method // *Applied mathematical modelling.* — 1985. — Vol. 9, no. 3. — p. 183–188.
- 149 *Tanaka M., Matsumoto T., Zheng Z.-D.* Incremental analysis of finite deflection of elastic plates via boundary-domain-element method // *Engineering analysis with boundary elements.* — 1996. — Vol. 17, no. 2. — p. 123–131.
- 150 *Wang W., Ji X., Tanaka M.* A dual reciprocity boundary element approach for the problems of large deflection of thin elastic plates // *Computational mechanics.* — 2000. — Vol. 26, no. 1. — p. 58–65.
- 151 *Waidemam L., Venturini W. S.* BEM formulation for von Kármán plates // *Engineering analysis with boundary elements.* — 2009. — Vol. 33, no. 10. — p. 1223–1230.
- 152 *Zhong X. X., Liao S. J.* Analytic Solutions of Von Kármán Plate under Arbitrary Uniform Pressure—Equations in Differential Form // *Studies in Applied Mathematics.* — 2017. — Vol. 138, no. 4. — p. 371–400.
- 153 *Zhong X. X., Liao S. J.* Analytic approximations of Von Kármán plate under arbitrary uniform pressure—equations in integral form // *Science China Physics, Mechanics & Astronomy.* — 2018. — Vol. 61. — p. 1–11.
- 154 *Yu Q., Xu H., Liao S.* Coiflets solutions for Föppl–von Kármán equations governing large deflection of a thin flat plate by a novel wavelet-homotopy approach // *Numerical Algorithms.* — 2018. — Vol. 79. — p. 993–1020.

- 155 Boresi A. P., Turner J. P. Large deflections of rectangular plates // *International journal of non-linear mechanics*. — 1983. — Vol. 18, no. 2. — p. 125–131.
- 156 Al-Shugaa M. A., Al-Gahtani H. J., Musa A. E. S. Automated Ritz method for large deflection of plates with mixed boundary conditions // *Arabian Journal for Science and Engineering*. — 2020. — Vol. 45. — p. 8159–8170.
- 157 Al-Shugaa M. A., Al-Gahtani H. J., Musa A. E. S. Ritz method for large deflection of orthotropic thin plates with mixed boundary conditions // *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*. — 2020. — Vol. 19, no. 2.
- 158 Al-Shugaa M. A., Musa A. E. S., Al-Gahtani H. J. Ritz Method-Based Formulation for Analysis of FGM Thin Plates Undergoing Large Deflection with Mixed Boundary Conditions // *Arabian Journal for Science and Engineering*. — 2024. — p. 1–15.
- 159 Enem J. I. Nonlinear analysis of isotropic rectangular thin plates using Ritz method // *Saudi J Eng Technol*. — 2022. — Vol. 7, no. 8. — p. 502–512.
- 160 Iyengar K. T. Sundara Raja, Naqvi M. Matin. Large deflections of rectangular plates // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. — 1966. — Vol. 1, no. 2. — p. 109–122.
- 161 Dai H.-H., Paik J. K., Atluri S. N. The global nonlinear galerkin method for the analysis of elastic large deflections of plates under combined loads: A scalar homotopy method for the direct solution of nonlinear algebraic equations // *Computers Materials and Continua*. — 2011. — Vol. 23, no. 1. — P. 69.
- 162 Dai H.-H., Paik J. K., Atluri S. N. The Global Nonlinear Galerkin Method for the Solution of von Karman Nonlinear Plate Equations: An Optimal & Faster Iterative Method for the Direct Solution of Nonlinear Algebraic Equations $F(x)=0$, using $x=\lambda[\alpha F+(1-\alpha)BTF]$ // *Computers Materials and Continua*. — 2011. — Vol. 23, no. 2. — P. 155.
- 163 Dai H.-H., Yue X., Atluri S. N. Solutions of the von Kármán plate equations by a Galerkin method, without inverting the tangent stiffness matrix // *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. — 2014. — Vol. 9, no. 2. — p. 195–226.

- 164 A wavelet method for bending of circular plate with large deflection / X. Wang, X. Liu, J. Wang, Y. Zhoue // *Acta Mechanica Solida Sinica*. — 2015. — Vol. 28, no. 1. — p. 83–90.
- 165 Zhang L., Wang J., Zhou Y.-H. Wavelet solution for large deflection bending problems of thin rectangular plates // *Archive of Applied Mechanics*. — 2015. — Vol. 85. — p. 355–365.
- 166 Вайнберг М. М. Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — Наука, 1969.
- 167 Лычев С. А. Несовместные деформации гибких пластин // *Ученые записки Казанского Университета. Серия Физико-Математические Науки*. — 2023. — Т. 165, № 4. — С. 361–388.
- 168 Койфман К. Г., Лычев С. А. Нелинейные уравнения деформирования гибких пластин // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*. — 2024. — Т. 30, № 4. — С. 53–83.
- 169 Лерэй Ж., Шаудер Ю. Топология и функциональные уравнения // *Успехи математических наук*. — 1946. — Т. 1, № 3. — С. 71–95.
- 170 Knightly G. H., Sather D. On nonuniqueness of solutions of the von Kármán equations // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. — 1970. — Vol. 36, no. 1. — p. 65–78.
- 171 Eringen A. C. Theory of electromagnetic elastic plates // *International journal of engineering science*. — 1989. — Vol. 27, no. 4. — p. 363–375.
- 172 Librescu L., Hasanyan D., Ambur D. R. Electromagnetically conducting elastic plates in a magnetic field: modeling and dynamic implications // *International journal of non-linear mechanics*. — 2004. — Vol. 39, no. 5. — p. 723–739.
- 173 Nonlinear magnetothermoelasticity of anisotropic plates immersed in a magnetic field / L. Librescu, D. Hasanyan, Z. Qin, D. R. Ambur // *Journal of Thermal Stresses*. — 2003. — Vol. 26, no. 11-12. — p. 1277–1304.
- 174 Калоеров С. А., Сероштанов А. В. Исследование изгиба тонких электромагнитоупругих плит // *Прикладная механика и техническая физика*. — 2022. — Т. 63, № 2. — С. 151–165.

- 175 *B. O. Штегман А. Б. Фрейдун.* О потере устойчивости пластины в результате распространения фронта химической реакции // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. — 2023. — p. 1071–1073.
- 176 *Serry F. M., Walliser D., Maclay G. J.* The role of the Casimir effect in the static deflection and stiction of membrane strips in microelectromechanical systems (MEMS) // *Journal of Applied Physics*. — 1998. — Vol. 84, no. 5. — p. 2501–2506.
- 177 *Liang Haiyi, Mahadevan Lakshminarayanan.* The shape of a long leaf // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. — 2009. — Vol. 106, no. 52. — p. 22049–22054.
- 178 *Lewicka M., Mahadevan L., Pakzad R.* The Von Kármán equations for plates with residual strain // *arXiv preprint arXiv:1002.2252*. — 2010.
- 179 *Lewicka M., Mahadevan L., Pakzad M. R.* The Föppl-von Kármán equations for plates with incompatible strains // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 2011. — Vol. 467, no. 2126. — p. 402–426.
- 180 *Andrini D., Chen X., Ciarletta P.* Nonlinear morphoelastic theory of biological shallow shells with initial stress // *Journal of Elasticity*. — 2025. — Vol. 157, no. 1. — P. 21.
- 181 *Singh M., Roychowdhury A., Gupta A.* Defects and metric anomalies in Föppl-von Kármán surfaces // *Proceedings of the Royal Society A*. — 2022. — Vol. 478, no. 2262. — P. 20210829.
- 182 *Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V. A.* On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography // *Archive of Applied Mechanics*. — 2010. — Vol. 80, no. 1. — p. 73–92.
- 183 *Goldenveizer A. L.* The principles of reducing three-dimensional problems of elasticity to two-dimensional problems of the theory of plates and shells // *Applied Mechanics: Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics Munich (Germany) 1964* / Springer. — 1966. — p. 306–311.

- 184 *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. — Наука, 1976.
- 185 *Fox D. D., Raoult A., Simo J. C.* A justification of nonlinear properly invariant plate theories // *Archive for rational mechanics and analysis*. — 1993. — Vol. 124, no. 2. — p. 157–199.
- 186 *Friesecke G., James R. D., Müller S.* The Föppl–von Kármán plate theory as a low energy Γ -limit of nonlinear elasticity // *Comptes Rendus. Mathématique*. — 2002. — Vol. 335, no. 2. — p. 201–206.
- 187 *Steigmann D. J.* Thin-plate theory for large elastic deformations // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. — 2007. — Vol. 42, no. 2. — p. 233–240.
- 188 *Steigmann D. J.* A concise derivation of membrane theory from three-dimensional nonlinear elasticity // *Journal of Elasticity*. — 2009. — Vol. 97, no. 1. — p. 97–101.
- 189 *Steigmann D. J.* Koiter’s shell theory from the perspective of three-dimensional nonlinear elasticity // *Journal of Elasticity*. — 2013. — Vol. 111, no. 1. — p. 91–107.
- 190 *Lauricella G.* Equilibrio dei corpi elastici isotropi // *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Scienze Fisiche e Matematiche*. — 1895. — Vol. 7. — p. i–120.
- 191 *Noll W.* Materially uniform simple bodies with inhomogeneities // *The Foundations of Mechanics and Thermodynamics: Selected Papers*. — Springer, 1967. — p. 211–242.
- 192 *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. — Наука, 1980.
- 193 *Lychev S. A., Koifman K. G., Pivovarov N. A.* Incompatible deformations in relativistic elasticity // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. — 2023. — Vol. 44, no. 6. — p. 2352–2397.
- 194 *Lychev S. A., Koifman K. G., Djuzhev N. A.* Incompatible deformations in additively fabricated solids: Discrete and continuous approaches // *Symmetry*. — 2021. — Vol. 13, no. 12. — P. 2331.

- 195 *Lychev S. A., Koifman K. G., Pivovarov N. A.* Configurations and Deformations in Relativistic Elasticity // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. — 2024. — Vol. 45, no. 5. — p. 2342–2362.
- 196 *Лычев С. А., Семенов Д. А.* Законы сохранения в недиссипативной термомеханике // *Вестник Самарского государственного университета*. — 2008. — № 61. — С. 183–217.
- 197 *Лычев С. А.* Законы сохранения недиссипативной микроморфной термоупругости // *Вестник Самарского государственного университета*. — 2007. — № 4. — С. 225–262.
- 198 *Mooney M.* A theory of large elastic deformation // *Journal of applied physics*. — 1940. — Vol. 11, no. 9. — p. 582–592.
- 199 *Rivlin R. S.* Large elastic deformations of isotropic materials IV. Further developments of the general theory // *Philosophical transactions of the royal society of London. Series A, Mathematical and physical sciences*. — 1948. — Vol. 241, no. 835. — p. 379–397.
- 200 *Лившиц Б. Г., Крапошин В. С., Линецкий Я. Л.* Физические свойства металлов и сплавов. — Металлургия, 1980.
- 201 *Уфлянд Я. С.* Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // *Прикладная математика и механика*. — 1948. — Т. 12, № 3. — С. 287–300.
- 202 *Кончковский З.* Плиты. Статические расчеты. — 1984.
- 203 *Panc V.* Theories of elastic plates. — Springer Science & Business Media, 1975. — Vol. 2.
- 204 *Levinson M.* An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates // *Mechanics Research Communications*. — 1980. — Vol. 7, no. 6. — p. 343–350.
- 205 *Murthy M. V. V.* An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates. — NASA Technical Paper 1903, 1981.

- 206 Reddy J. N. A simple higher-order theory for laminated composite plates // *Journal of applied mechanics*. — 1984. — Vol. 51, no. 4. — p. 745–752.
- 207 Touratier M. An efficient standard plate theory // *International journal of engineering science*. — 1991. — Vol. 29, no. 8. — p. 901–916.
- 208 Karama M., Afaq K. S., Mistou S. A new theory for laminated composite plates // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*. — 2009. — Vol. 223, no. 2. — p. 53–62.
- 209 Парс Л. А. Аналитическая динамика. — Наука, 1971.
- 210 Трусделл К. А. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — Мир, 1975.
- 211 Eringen A. C. Microcontinuum field theories: Foundations and solids. — Springer Science & Business Media, 2012.
- 212 Pochhammer L. Beitrag zur Theorie der Biegung des Kreiscylinders. — 1876.
- 213 Chree C. The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical co-ordinates their solution and application // *transactions of the Cambridge Philosophical Society*. — 1889. — Vol. 14. — P. 250.
- 214 Filon L. N. G. On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of load // *Proceedings of the Royal Society of London*. — 1901. — Vol. 68, no. 442-450. — p. 353–358.
- 215 Saito H. The axially symmetrical deformation of a short cylinder // *Transaction of the JSME*. — 1952. — Vol. 18. — p. 21–28.
- 216 Ватсон Д. Н. Теория бесселевых функций. — Издательство иностранной литературы, 1949.
- 217 Adkins J. E., Rivlin R. S. Large elastic deformations of isotropic materials IX. The deformation of thin shells // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. — 1952. — Vol. 244, no. 888. — p. 505–531.

- 218 *Yang W. H., Feng W. W.* On axisymmetrical deformations of nonlinear membranes // *Journal of Applied Mechanics*. — 1970. — Vol. 37. — p. 1002–1011.
- 219 *Уиттекер Е. Т., Ватсон Д. Н.* Современный анализ. — 1963.
- 220 *Feng W. W., Hallquist J. O.* On Mooney – Rivlin constants for elastomers // *12th International LS-DYNA Users Conference*. — 2012.
- 221 *Лурье А. И.* Теория упругости. — Наука, 1970.
- 222 *Лурье А. И.* Определение перемещения по заданному тензору деформации // *Прикладная математика и механика*. — 1940. — № 4. — С. 135–138.
- 223 *Георгиевский Д. В.* Построение обобщенных формул Чезаро для конечных плоских деформаций // *Прикладная механика и техническая физика*. — 2014. — Т. 55, № 3. — С. 140–145.
- 224 *Лурье С. А., Белов П. А.* Обобщенные формулы Чезаро и уравнения совместности третьего порядка // *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика*. — 2023. — № 4. — С. 61–64.
- 225 *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — Издательство Харьковского Университета, 1977.
- 226 *Cantor G.* Ein beitrage zur mannigfaltigkeitslehre // *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*. — 1878. — Vol. 1878, no. 84. — p. 242–258.
- 227 *Канторович Л. В. Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. — ГИТТЛ, 1950.
- 228 *Зиза О. А.* Суммирование ортогональных рядов. — URSS, 1999.
- 229 *Вест Ч.* Голографическая интерферометрия. — Мир, 1982.

Приложение А

В этом разделе приведены некоторые сведения из дифференциальной геометрии поверхностей необходимые для воспроизведения оригинального вывода уравнения Софи Жермен.

Рассматривается поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, заданная радиус-вектором:

$$\mathbf{r} = (x + u) \mathbf{i} + (y + v) \mathbf{j} + w \mathbf{k},$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} – орты декартовой системы координат, а u , v , w – известные гладкие функции координат x , y . На этой поверхности метрика объемлющего пространства индуцирует поле касательных векторов¹:

$$\mathbf{e}_x = (1 + u_x) \mathbf{i} + v_x \mathbf{j} + w_x \mathbf{k}, \quad \mathbf{e}_y = u_y \mathbf{i} + (1 + v_y) \mathbf{j} + w_y \mathbf{k},$$

и поле главных нормалей:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y}{\|\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y\|} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \left[(v_x w_y - v_y w_x - w_x) \mathbf{i} + (u_y w_x - u_x w_y - w_y) \mathbf{j} + (1 + u_x + v_y + u_x v_y - u_y v_x) \mathbf{k} \right].$$

Здесь ω – второй инвариант метрического тензора поверхности \mathbf{g}^2 :

$$\mathbf{g} = (\nabla \mathbf{r})^T \cdot \nabla \mathbf{r} = g_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j = g^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j,$$

где \mathbf{e}^i – некоторые базисные вектора, а \mathbf{e}_i – дуальные к ним.

Замечание А.1. *Здесь ∇ – это оператор градиента в трехмерном пространстве. То есть, формально метрический тензор поверхности, погруженной в трехмерное пространство – это тензор заданный в трехмерном векторном пространстве. Однако все компоненты этого тензора, ассоциированные с третьим базисным вектором, тождественно равны нулю.*

¹Здесь и далее нижними индексами обозначены соответствующие частные производные $f_v = \frac{\partial f}{\partial v}$

²Запись $g_i \mathbf{e}^i$ в соответствии с правилом суммирования Эйнштейна следует читать как сумму $g_i \mathbf{e}^i := \sum_{i=1}^2 g_i \mathbf{e}^i$

Если выбрать касательные вектора \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y в качестве базисных, то матрица метрического тензора будет содержать только два ненулевых компонента, однако их запись через функции u , v , w будет достаточно громоздкой в силу того, что эти функции ассоциированы с ортами декартового базиса. Поэтому далее считается, что в качестве базисных векторов выбраны орты декартовой системы координат:

$$\mathbf{e}^1 = \mathbf{e}_1 = \mathbf{i}, \quad \mathbf{e}^2 = \mathbf{e}_2 = \mathbf{j}.$$

В этих осях компоненты матрицы метрического тензора будут следующими:

$$\begin{aligned} g_{11} &= (1 + u_x)^2 + v_x^2 + w_x^2, & g_{22} &= u_y^2 + (1 + v_y)^2 + w_y^2, \\ g_{12} &= g_{21} = (1 + u_x)u_y + v_x(1 + v_y) + w_xw_y. \end{aligned}$$

Теперь несложно записать инварианты метрического тензора:

$$\begin{aligned} I_1^g &= g_{11} + g_{22} = (1 + u_x)^2 + (1 + v_y)^2 + u_y^2 + v_x^2 + w_x^2 + w_y^2, \\ I_2^g &= \omega = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = (1 + u_x)(1 + v_y)(1 + u_x + v_y + u_xv_y - 2u_yv_x) + \\ &+ (1 + u_x)w_y(w_y + u_xw_y - 2u_yw_x) + w_x(1 + v_y)(w_x + v_yw_x - 2v_xw_y) + \\ &+ v_x^2u_y^2 + v_x^2w_y^2 + w_x^2u_y^2. \end{aligned}$$

Компоненты метрического тензора образуют первую фундаментальную форму поверхности, отвечающую за ее внутреннюю геометрию. Однако в классической теории пластин считается, что при изгибе изменение внутренней геометрии пластины мало, а упругий отклик порождается, главным образом, изменением внешней геометрии (обратная ситуация наблюдается у мембран). Поэтому для того чтобы оценить упругие силы, возникающие в пластине, необходимо анализировать вторую фундаментальную форму ее деформированной поверхности, коэффициенты которой соответствуют компонентом тензора кривизн. Этот тензор может быть получен если подействовать на поле главных нормалей оператором градиента и поменять у результата знак:

$$\begin{aligned} h_{11} &= -\frac{1}{\sqrt{\omega}}(v_{xx}w_y + v_xw_{xy} - v_{xy}w_x - v_yw_{xx} - w_{xx}) + \frac{\omega_x}{2\sqrt{\omega^3}}(v_xw_y - v_yw_x - w_x), \\ h_{12} &= -\frac{1}{\sqrt{\omega}}(v_{xy}w_y + v_xw_{yy} - v_{yy}w_x - v_yw_{xy} - w_{xy}) + \frac{\omega_y}{2\sqrt{\omega^3}}(v_xw_y - v_yw_x - w_x), \\ h_{21} &= -\frac{1}{\sqrt{\omega}}(u_{xy}w_x + u_yw_{xx} - u_{xx}w_y - u_xw_{xy} - w_{xy}) + \frac{\omega_x}{2\sqrt{\omega^3}}(u_yw_x - u_xw_y - w_y), \\ h_{22} &= -\frac{1}{\sqrt{\omega}}(u_{yy}w_x + u_yw_{xy} - u_{xy}w_y - u_xw_{yy} - w_{yy}) + \frac{\omega_y}{2\sqrt{\omega^3}}(u_yw_x - u_xw_y - w_y). \end{aligned}$$

Замечание А.2. Вообще говоря, здесь перечислены не все ненулевые компоненты тензора кривизн. Из-за того что дифференцирование здесь ведется не вдоль направлений из касательного пространства (дифференциальный оператор не является оператором Вайнгартена) возникают еще два ненулевых компонента, однако они никак не влияют на инварианты этого тензора.

Согласно гипотезам Софи Жермен и Пуассона упругая энергия, запасаемая в пластине при ее деформации, зависит от скалярной и гауссовой кривизн деформированной поверхности, т. е. соответственно от первого и второго инвариантов тензора кривизн, которые теперь могут быть записаны в следующем виде:

$$I_1^\kappa = -\frac{1}{\sqrt{\omega}} \left[(v_{xx} - u_{xy}) w_y + (v_x + u_y) w_{xy} + (u_{yy} - v_{xy}) w_x - (1 + v_y) w_{xx} - (1 + u_x) w_{yy} \right] + \frac{1}{2\sqrt{\omega^3}} \left[\omega_x (v_x w_y - v_y w_x - w_x) + \omega_y (u_y w_x - u_x w_y - w_y) \right],$$

$$I_2^\kappa = \frac{1}{\omega} \left[\begin{aligned} &w_{xx} w_{yy} (u_x v_y - u_y v_x + u_x + v_y + 1) + w_{xy}^2 (u_y v_x - u_x v_y - u_x - v_y - 1) + \\ &+ w_{xx} w_x (u_y v_{yy} - u_{yy} v_y - u_{yy}) + w_{yy} w_y (u_{xx} v_x - u_x v_{xx} - v_{xx}) + \\ &+ w_{xx} w_y (u_{xy} v_y - u_y v_{xy} + u_{xy}) + w_{yy} w_x (u_x v_{xy} - u_{xy} v_x + v_{xy}) + \\ &+ w_{xy} w_x (u_{yy} v_x + u_{xy} v_y - u_x v_{yy} - u_y v_{xy} + u_{xy} - v_{yy}) + \\ &+ w_{xy} w_y (u_y v_{xx} + u_x v_{xy} - u_{xx} v_y - u_{xy} v_x + v_{xy} - u_{xx}) + \\ &+ w_x^2 (u_{xy} v_{yy} - u_{yy} v_{xy}) + w_y^2 (u_{xx} v_{xy} - u_{xy} v_{xx}) + w_x w_y (u_{yy} v_{xx} - u_{xx} v_{yy}) \end{aligned} \right] +$$

$$-\frac{\omega_x}{2\omega^2} \left[\begin{aligned} &w_{yy} w_x (u_x v_y - u_y v_x + u_x + v_y + 1) + w_{xy} w_y (u_y v_x - u_x v_y - u_x - v_y - 1) + \\ &+ w_x w_y (u_{yy} v_x + u_{xy} v_y - u_x v_{yy} - u_y v_{xy} + u_{xy} - v_{yy}) + \\ &+ w_x^2 (u_y v_{yy} - u_{yy} v_y - u_{yy}) + w_y^2 (u_x v_{xy} - u_{xy} v_x + v_{xy}) \end{aligned} \right] +$$

$$-\frac{\omega_y}{2\omega^2} \left[\begin{aligned} &w_{xx} w_y (u_x v_y - u_y v_x + u_x + v_y + 1) + w_{xy} w_x (u_y v_x - u_x v_y - u_x - v_y - 1) + \\ &+ w_x w_y (u_y v_{xx} + u_x v_{xy} - u_{xx} v_y - u_{xy} v_x + v_{xy} - u_{xx}) + \\ &+ w_y^2 (u_{xx} v_x - u_x v_{xx} - v_{xx}) + w_x^2 (u_{xy} v_y - u_y v_{xy} + u_{xy}) \end{aligned} \right].$$

Как видно, выписанные выражения весьма громоздки, однако, если считать, что функции u , v тождественно равны нулю, то формулы существенно сокращаются:

$$I_1^\kappa = \frac{1}{\sqrt{\omega}} (w_{xx} + w_{yy}) - \frac{1}{2\sqrt{\omega^3}} (\omega_x w_x + \omega_y w_y),$$

$$I_2^\kappa = \frac{1}{\omega} (w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2) - \frac{\omega_x}{2\omega^2} (w_{yy} w_x - w_{xy} w_y) - \frac{\omega_y}{2\omega^2} (w_{xx} w_y - w_{xy} w_x),$$

где второй инвариант метрического тензора ω также записывается упрощенным выражением:

$$\omega = 1 + w_x^2 + w_y^2.$$

После подстановки этого выражения в инварианты можно получить их в виде комбинации производных функции w :

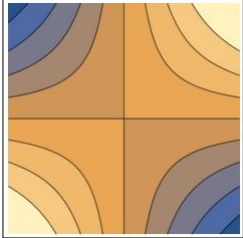
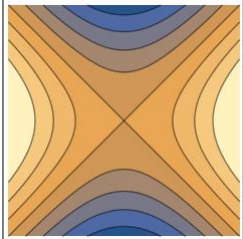
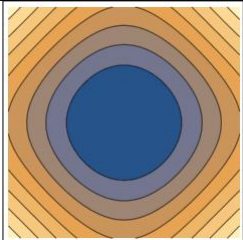
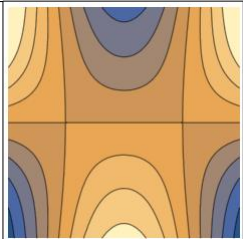
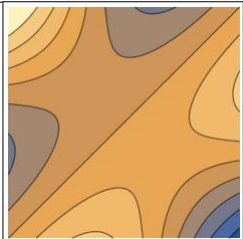
$$I_1^\kappa = \frac{1}{\sqrt{(1 + w_x^2 + w_y^2)^3}} (w_{xx} + w_{yy} + w_{xx}w_y^2 + w_{yy}w_x^2 - 2w_xw_yw_{xy}),$$

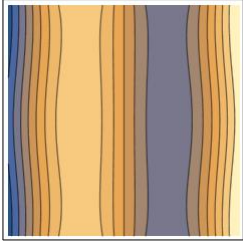
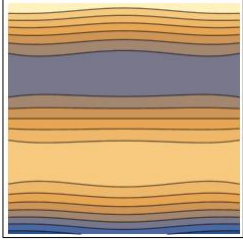
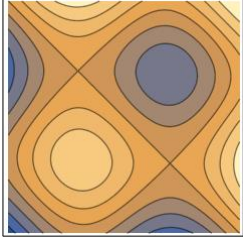
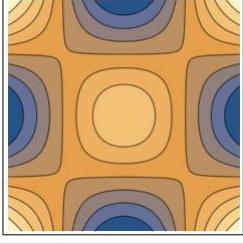
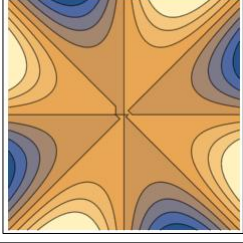
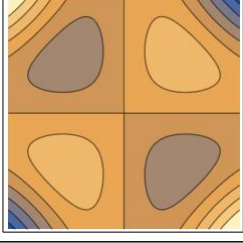
$$I_2^\kappa = \frac{w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2}{(1 + w_x^2 + w_y^2)^2}.$$

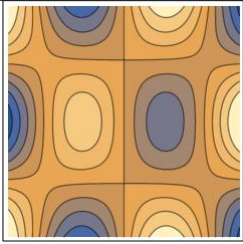
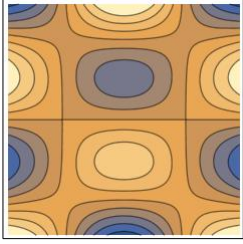
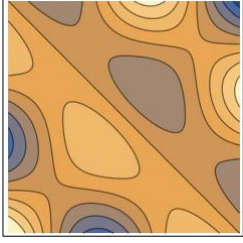
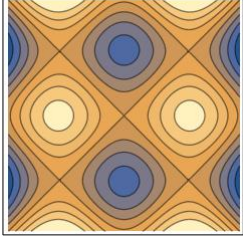
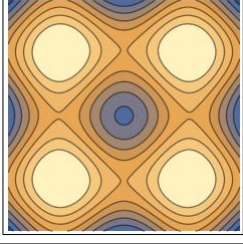
Теперь для того чтобы получить выражения, используемые в выводе уравнения Софи Жермен, осталось только предположить, что функция w мала по сравнению с единицей:

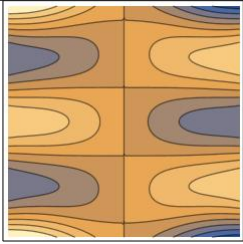
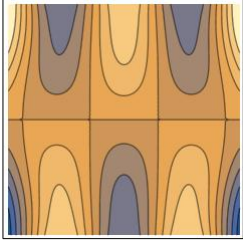
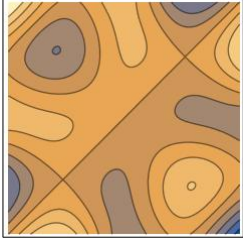
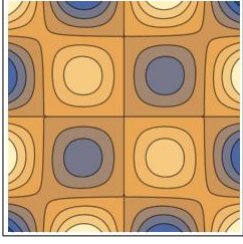
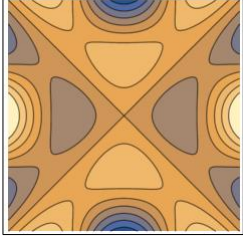
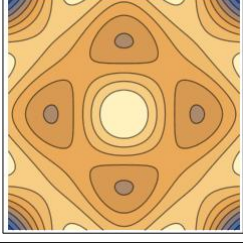
$$I_1^\kappa = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \approx w_{xx} + w_{yy}, \quad I_2^\kappa = \frac{1}{R_1R_2} \approx w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2.$$

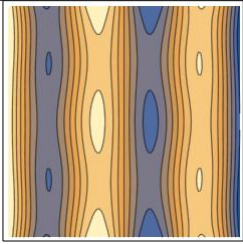
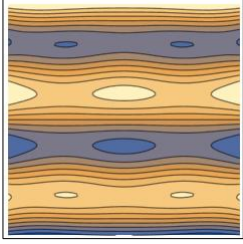
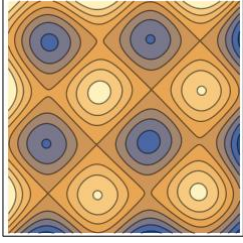
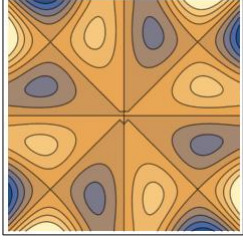
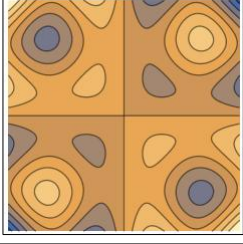
Приложение Б

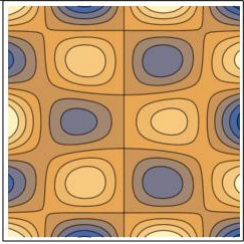
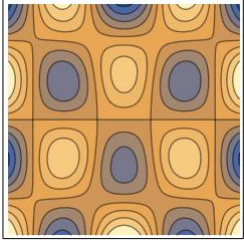
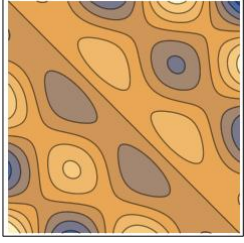
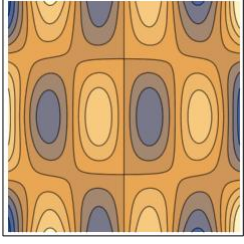
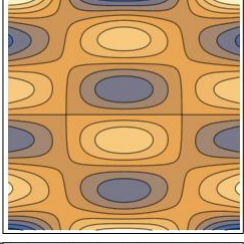
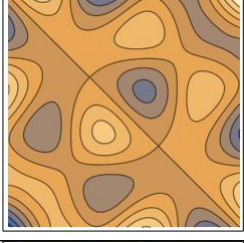
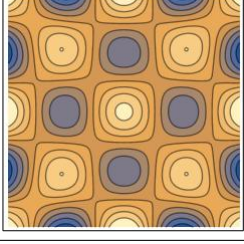
№	λ	λ по [112]	λ по [111]	Главная мода	Собственная форма
1	12.458	12.43	12.454	$v_0(x) v_0(y)$	
2	26.026	26.40	25.949	$u_0(x) u_1(y) - u_1(x) u_0(y)$	
3	35.689	35.73	35.620	$u_0(x) u_1(y) + u_1(x) u_0(y)$	
4	81.021	80.8	80.895	$v_0(x) u_1(y)$	
				$u_1(x) v_0(y)$	
				$v_0(x) u_1(y) - u_1(x) v_0(y)$	

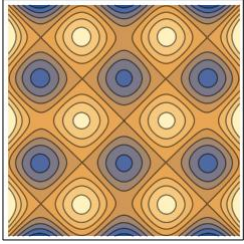
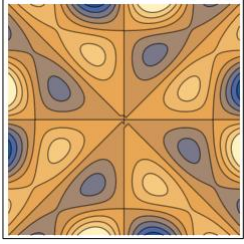
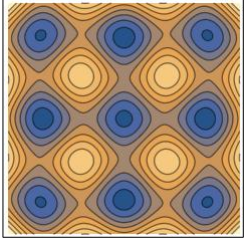
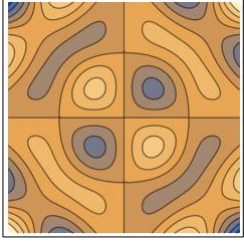
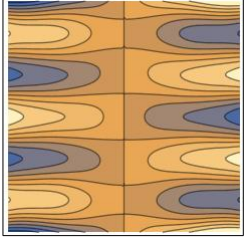
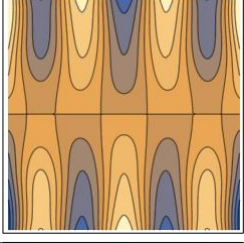
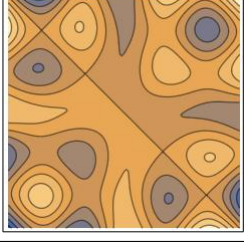
№	λ	λ по [112]	λ по [111]	Главная мода	Собственная форма
5	235.79	237.1	235.38	$v_1(x) u_0(y)$	
				$u_0(x) v_1(y)$	
				$u_0(x) v_1(y) - v_1(x) u_0(y)$	
6	269.65	266.0	269.31	$u_1(x) u_1(y)$	
7	321.58	316.1	320.67	$v_1(x) v_0(y) - v_0(x) v_1(y)$	
8	375.93	378	375.22	$v_1(x) v_0(y) + v_0(x) v_1(y)$	

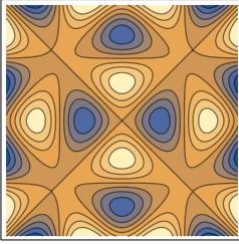
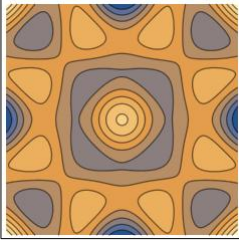
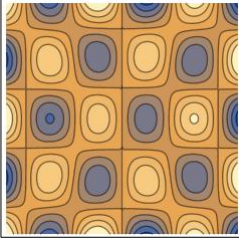
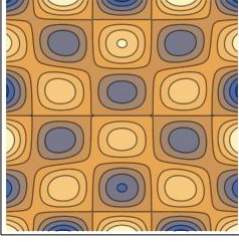
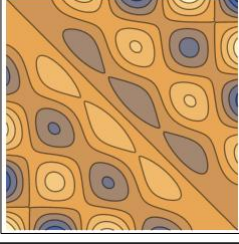
№	λ	λ по [112]	λ по [111]	Главная мода	Собственная форма
9	731.26	746	730.12	$v_1(x) u_1(y)$	
				$u_1(x) v_1(y)$	
				$u_1(x) v_1(y) + v_1(x) u_1(y)$	
10	878.10	886	876.42	$u_0(x) u_2(y) - u_2(x) u_0(y)$	
11	935.35	941	933.84	$u_0(x) u_2(y) + u_2(x) u_0(y)$	

№	λ	λ по [112]	λ по [111]	Главная мода	Собственная форма
12	1106.5	1131	1103.4	$v_0(x) u_2(y)$	
				$u_2(x) v_0(y)$	
				$u_2(x) v_0(y) - v_0(x) u_2(y)$	
13	1527.8	1554	1525.9	$v_1(x) v_1(y)$	
14	1704.2	1702	1700.9	$u_2(x) u_1(y) - u_1(x) u_2(y)$	
15	1816.4	2020	1812.7	$u_2(x) u_1(y) + u_1(x) u_2(y)$	

№	λ	λ по [112]	λ по [111]	Главная мода	Собственная форма
16	2481.6	2497	2477.0	$v_2(x) u_0(y)$	
				$u_0(x) v_2(y)$	
				$u_0(x) v_2(y) - v_2(x) u_0(y)$	
17	2693.3	2713	2684.4	$v_0(x) v_2(y) - v_2(x) v_0(y)$	
18	2878.5	2945	2870.6	$v_0(x) v_2(y) + v_2(x) v_0(y)$	

№	λ	λ по [112]	λ по [111]	Главная мода	Собственная форма
19	3008.6	3240	-	$v_1(x) u_2(y)$	
				$u_2(x) v_1(y)$	
				$v_1(x) u_2(y) + u_2(x) v_1(y)$	
20	3782.3	3927	3774.1	$v_2(x) u_1(y)$	
				$u_1(x) v_2(y)$	
				$v_2(x) u_1(y) + u_1(x) v_2(y)$	
21	5121.0	5480	5112.8	$u_2(x) u_2(y)$	

№	λ	λ по [112]	λ по [111]	Главная мода	Собственная форма
22	5473.0	5640	–	$u_0(x) u_3(y) - u_3(x) u_0(y)$	
23	5511.0	5570	5503.1	$v_1(x) v_2(y) - v_2(x) v_1(y)$	
24	5628.1	5640	5619.1	$u_0(x) u_3(y) + u_3(x) u_0(y)$	
25	5707.6	6303	5698.5	$v_1(x) v_2(y) + v_2(x) v_1(y)$	
26	5979.1	6036	–	$v_0(x) u_3(y)$	
				$u_3(x) v_0(y)$	
				$v_0(x) u_3(y) + u_3(x) v_0(y)$	

№	λ	λ по [112]	λ по [111]	Главная мода	Собственная форма
27	7252.9	7310	7235.8	$u_1(x) u_3(y) - u_3(x) u_1(y)$	
28	7524.6	7840	–	$u_1(x) u_3(y) + u_3(x) u_1(y)$	
29	8537.9	9030	–	$v_2(x) u_2(y)$	
				$u_2(x) v_2(y)$	
				$u_2(x) v_2(y) + v_2(x) u_2(y)$	

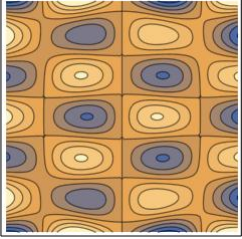
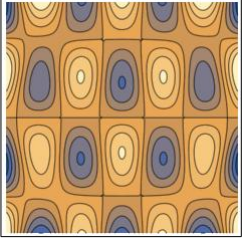
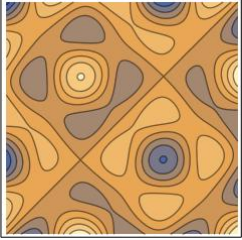
№	λ	λ по [112]	λ по [111]	Главная мода	Собственная форма
30	9895.4	10380	–	$v_1(x) u_3(y)$	
				$u_3(x) v_1(y)$	
				$u_3(x) v_1(y) - v_1(x) u_3(y)$	

Таблица Б.1 – Собственные частоты пластины со свободными краями, $\nu = 0.225$

Приложение В

p	r^0	r^2	r^4	r^6	r^8	r^{10}	r^{12}	r^{14}	r^{16}	r^{18}
100	1.00026	-1.72945	0.42836	0.32360	-0.00916	-0.02001	0.00531	0.00180	0.00067	-0.00014
200	1.43313	-2.21362	0.17556	0.51769	0.13126	-0.04025	-0.01205	0.00708	0.00230	-0.00081
300	1.72046	-2.47063	-0.03069	0.54489	0.26987	-0.00853	-0.03301	0.00135	0.00643	0.00092
400	1.94119	-2.64662	-0.17889	0.50856	0.36892	0.04812	-0.04077	-0.01017	0.00698	0.00369
500	2.12324	-2.78378	-0.28548	0.44969	0.43182	0.11116	-0.03483	-0.02164	0.00397	0.00581
600	2.28085	-2.90150	-0.36138	0.38464	0.46740	0.17158	-0.01851	-0.03015	-0.00126	0.00627
700	2.41874	-3.00171	-0.41967	0.32129	0.48352	0.22549	0.00471	-0.03465	-0.00741	0.00609
800	2.54464	-3.09610	-0.46139	0.26238	0.48551	0.27167	0.03206	-0.03506	-0.01353	0.00444
900	2.65812	-3.18049	-0.49234	0.20590	0.47937	0.31000	0.06132	-0.03173	-0.01899	0.00197
1000	2.76415	-3.26087	-0.51755	0.15859	0.46504	0.34104	0.09124	-0.02517	-0.02342	-0.00102

Таблица В.1 – Первые 10 термов построенных решений

Приложение Г

В этом разделе приведен вывод классической нумерующей функции Кантора и ее обобщения на случай неравномерной по индексам нумерации.

Рассмотрим диагональную нумерацию, показанную на Рисунке 2.10а. Из структуры нумерации сразу же можно отметить, что:

1. Каждой диагонали соответствует число $i+j$ одинаковое для всех элементов диагонали;
2. Число элементов на каждой диагонали равно ее номеру, вычисленному по формуле $i + j - 1$ (если пронумеровать диагонали из угла как показано на Рисунке Г.1а);
3. m -ому по счету элементу l -ой диагонали соответствует ячейка с индексами $i = m, j = l + 1 - m$.

Из этих наблюдений сразу следует, формула для определения индекса, соответствующего ячейке с индексами i, j :

$$k = i + \sum_{m=1}^{i+j-2} m.$$

Сумма здесь это не что иное как сумма членов арифметической прогрессии с единичными шагом, которая может быть вычислена по известной формуле:

$$k = i + \frac{(i + j - 1)(i + j - 2)}{2}.$$

После небольшого упрощения, можно прийти к искомому выражению:

$$k = \frac{1}{2}(i + j)(i + j - 1) - j + 1.$$

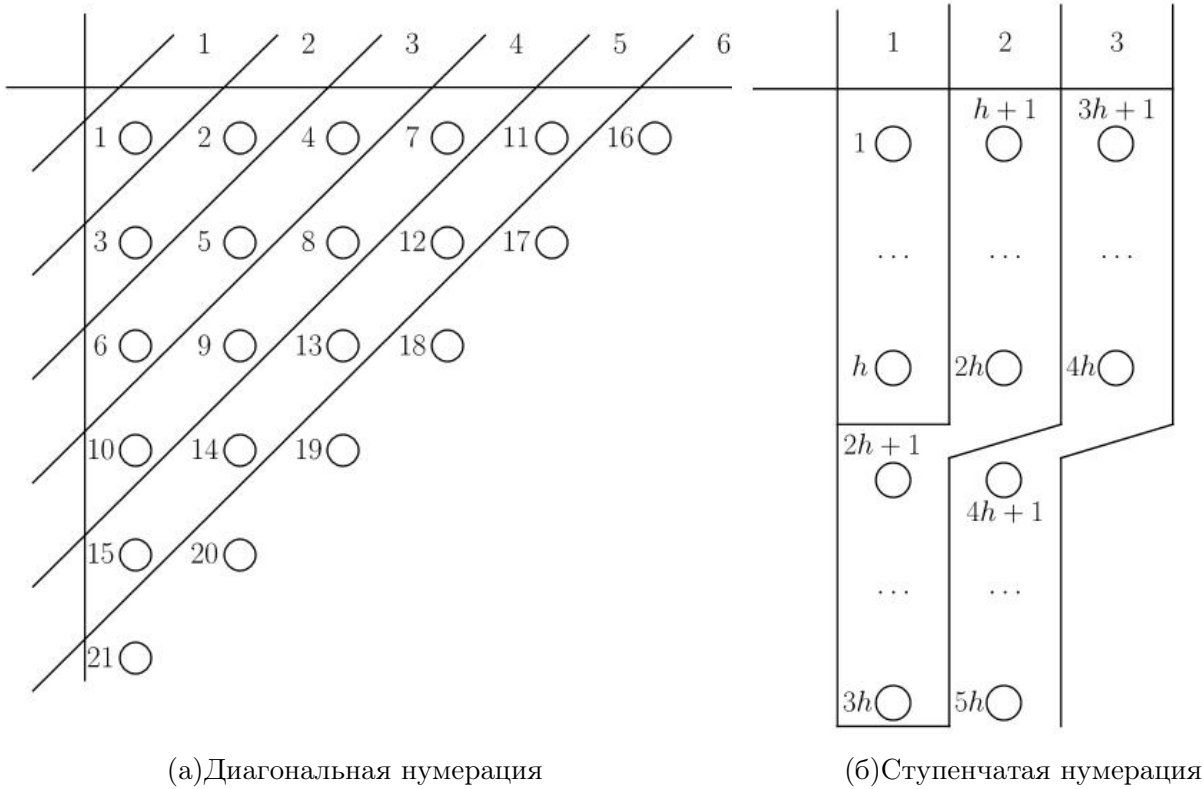


Рисунок Г.1 – Нумерация диагоналей (ступенек)

Перейдем к обратным формулам. Из отмеченного ранее, очевидно, что если удалось определить номер диагонали $N(k)$, на которой расположен k -ый элемент, то индексы ячейки находятся сразу же:

$$i = k - \sum_{m=1}^{N-1} m = k - \frac{N(N-1)}{2}, \quad j = N+1 - i = \frac{N(N+1)}{2} - k + 1.$$

Таким образом задача сводится к определению функции $N(k)$.

Пусть элемент с индексом k расположен на диагонали с номером N , тогда справедливо следующее равенство:

$$k = \delta + \sum_{m=1}^{N-1} m = \delta + \frac{N(N-1)}{2},$$

где δ – некоторое положительное целое число, не превосходящее N . Это равенство представляет собой квадратное уравнение относительно N , причем оно имеет лишь один положительный корень:

$$N = \frac{1 + \sqrt{1 + 8(k - \delta)}}{2}.$$

Очевидно, что если в этом выражении к числу k прибавить N , а δ оставить без изменений, то в результате получится номер следующей диагонали, т. е. $N + 1$:

$$N = \frac{1 + \sqrt{1 + 8(k - \delta)}}{2} < \frac{1 + \sqrt{1 + 8(N + k - \delta)}}{2} = N + 1.$$

Теперь, используя тот факт, что $1 \leq \delta \leq N$, получим цепочку неравенств:

$$\frac{1 + \sqrt{1 + 8(k - \delta)}}{2} \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 8(k - 1)}}{2} < \frac{1 + \sqrt{1 + 8(N + k - \delta)}}{2},$$

или, учитывая предыдущие равенства:

$$N \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 8(k - 1)}}{2} < N + 1.$$

Отсюда напрямую следует, что номер диагонали равен целой части от функции в центре, т. е.:

$$N = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{1 + 8(k - 1)}}{2} \right\rfloor.$$

Перейдем теперь к аналогичному выводу для ступенчатой нумерации с произвольной высотой ступени h (Рисунок 2.10б). Как и ранее, сделаем некоторые предварительные наблюдения:

1. Каждой “диагонали” соответствует число $\lceil i/h \rceil + j$ одинаковое для всех элементов “диагонали”;
2. Число элементов на каждой “диагонали” равно произведению высоты ступеньки h и номера “диагонали”, вычисленного по формуле $\lceil i/h \rceil + j - 1$ (нумерация “диагоналей” показана Рисунке Г.1б);
3. m -ому по счету элементу l -ой “диагонали” соответствует ячейка с индексами $i = m$, $j = l + 1 - \lceil m/h \rceil$.

Как и ранее, формулу для определения индекса, соответствующего ячейке с индексами i , j можно получить сразу же:

$$k = i + \sum_{m=1}^{\lceil i/h \rceil + j - 2} hm,$$

однако здесь все члены арифметической прогрессии увеличены в h раз:

$$k = i + h \frac{(\lceil i/h \rceil + j - 1)(\lceil i/h \rceil + j - 2)}{2}.$$

Обратные формулы также будут аналогичны предыдущему случаю:

$$i = k - h \sum_{m=1}^{N-1} m = k - h \frac{N(N-1)}{2},$$

$$j = N + 1 - [i/h] = \frac{N(N+1)}{2} - [k/h] + 1.$$

Перейдем к определению функции $N(k)$. Пусть, как и ранее, элемент с индексом k расположен на “диагонали” с номером N , тогда имеем:

$$k = \delta + h \sum_{m=1}^{N-1} m = \delta + h \frac{N(N-1)}{2},$$

где $1 \leq \delta \leq hN$. Как видно, за исключением коэффициента h уравнение полностью идентично, полученному ранее, отсюда находим:

$$N = \frac{1 + \sqrt{1 + 8(k - \delta)/h}}{2}.$$

Прибавляя к k число элементов в “диагонали” hN , получим неравенство:

$$N = \frac{1 + \sqrt{1 + 8(k - \delta)/h}}{2} < \frac{1 + \sqrt{1 + 8(k - \delta)/h + 8N}}{2} = N + 1.$$

Пропуская рассуждения, полностью аналогичные сделанным ранее, имеем:

$$N = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{1 + 8(k - 1)/h}}{2} \right\rfloor.$$

Приложение Д

В этом разделе приведены выражения вспомогательных интегралов, используемых в решении задачи об изгибе прямоугольной пластины методом Галеркина. В формулах ниже под k следует понимать произвольное положительное целое число, а под ρ, ν, ξ – корни трансцендентного уравнения

$$\tan(\cdot) + \tanh(\cdot) = 0.$$

$$I_0(\rho) = \int_{-1}^1 (\cos(\rho v) \cosh(\rho) - \cos(\rho) \cosh(\rho v)) dv = \frac{4 \sin(\rho) \cosh(\rho)}{\rho}$$

$$I_1(\rho, \nu) = \cos(\rho) \cos(\nu) \int_{-1}^1 \cosh(\rho v) \cosh(\nu v) dv$$

$$= \begin{cases} \frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) (\rho \sin(\rho) \cos(\nu) - \nu \sin(\nu) \cos(\rho))}{\nu^2 - \rho^2} & \rho \neq \nu \\ \frac{\rho \cos^2(\rho) - \sin(\rho) \cos(\rho) \cosh^2(\rho)}{\rho} & \rho = \nu \end{cases}$$

$$I_2(\rho, \nu) = \cos(\rho) \cosh(\nu) \int_{-1}^1 \cosh(\rho v) \cos(\nu v) dv$$

$$= \frac{2 \cos(\rho) \cosh(\nu) (\rho \sinh(\rho) \cos(\nu) + \nu \sin(\nu) \cosh(\rho))}{\nu^2 + \rho^2}$$

$$I_3(\rho, \nu) = \cosh(\rho) \cosh(\nu) \int_{-1}^1 \cos(\rho v) \cos(\nu v) dv$$

$$= \begin{cases} \frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) (\rho \sin(\rho) \cos(\nu) - \nu \sin(\nu) \cos(\rho))}{\nu^2 - \rho^2} & \rho \neq \nu \\ \frac{\rho \cosh^2(\rho) + \sin(\rho) \cos(\rho) \cosh^2(\rho)}{\rho} & \rho = \nu \end{cases}$$

$$I_4(\rho, k) = \cosh(\rho) \int_{-1}^1 \cos(\rho v) \cos(\pi k v) dv = \frac{2(-1)^k \rho \sin(\rho) \cosh(\rho)}{\rho^2 - \pi^2 k^2}$$

$$I_5(\rho, k) = \cos(\rho) \int_{-1}^1 \cosh(\rho v) \cos(\pi k v) dv = -\frac{2(-1)^k \rho \sin(\rho) \cosh(\rho)}{\rho^2 + \pi^2 k^2}$$

$$I_6(\rho, \nu) = \cos(\rho) \cos(\nu) \int_{-1}^1 \sinh(\rho v) \sinh(\nu v) dv$$

$$= \begin{cases} \frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) (\rho \cos(\rho) \sin(\nu) - \nu \cos(\nu) \sin(\rho))}{\nu^2 - \rho^2} & \rho \neq \nu \\ \frac{\rho \cos^2(\rho) + \sin(\rho) \cos(\rho) \cosh^2(\rho)}{\rho} & \rho = \nu \end{cases}$$

$$I_7(\rho, \nu) = \cos(\rho) \cosh(\nu) \int_{-1}^1 \sinh(\rho v) \sin(\nu v) dv$$

$$= \frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) (\rho \cos(\rho) \sin(\nu) + \nu \cos(\nu) \sin(\rho))}{\nu^2 + \rho^2}$$

$$I_8(\rho, \nu) = \cosh(\rho) \cosh(\nu) \int_{-1}^1 \sin(\rho v) \sin(\nu v) dv$$

$$= \begin{cases} \frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) (\rho \cos(\rho) \sin(\nu) - \nu \cos(\nu) \sin(\rho))}{\nu^2 - \rho^2} & \rho \neq \nu \\ \frac{\rho \cosh^2(\rho) - \sin(\rho) \cos(\rho) \cosh^2(\rho)}{\rho} & \rho = \nu \end{cases}$$

$$I_9(\rho, \nu, \xi) = \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi) \int_{-1}^1 \cos(\rho v) \cos(\nu v) \cos(\xi v) dv$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(\rho - \nu - \xi)}{\rho - \nu - \xi} + \frac{\sin(\rho + \nu - \xi)}{\rho + \nu - \xi} + \frac{\sin(\rho - \nu + \xi)}{\rho - \nu + \xi} + \frac{\sin(\rho + \nu + \xi)}{\rho + \nu + \xi} \right] \times$$

$$\times \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi)$$

Замечание Д.1. При вычислении интеграла I_9 может возникнуть ситуация неопределенности вида $\frac{0}{0}$. В этом случае необходимо избавиться от нее с помощью первого замечательного предела. То же верно для интегралов I_{12} , I_{13} и I_{18} (для I_{12} , I_{18} используется аналог первого замечательного предела для гиперболического синуса).

$$\begin{aligned}
 I_{10}(\rho, \nu, \xi) &= \cos(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi) \int_{-1}^1 \cosh(\rho\nu) \cos(\nu\nu) \cos(\xi\nu) d\nu \\
 &= -\frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi)}{(\rho^2 + (\nu - \xi)^2) (\rho^2 + (\nu + \xi)^2)} \times \\
 &\times \left[2\rho\nu\xi \sin(\rho) \sin(\nu) \sin(\xi) + \rho \sin(\rho) \cos(\nu) \cos(\xi) (\rho^2 + \nu^2 + \xi^2) - \right. \\
 &\left. - \nu \cos(\rho) \sin(\nu) \cos(\xi) (\rho^2 + \nu^2 - \xi^2) - \xi \cos(\rho) \cos(\nu) \sin(\xi) (\rho^2 - \nu^2 + \xi^2) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{11}(\rho, \nu, \xi) &= \cos(\rho) \cos(\nu) \cosh(\xi) \int_{-1}^1 \cosh(\rho\nu) \cosh(\nu\nu) \cos(\xi\nu) d\nu \\
 &= -\frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi)}{(\rho^2 - \nu^2)^2 + \xi^2 (2\rho^2 + 2\nu^2 + \xi^2)} \times \\
 &\times \left[2\rho\nu\xi \sin(\rho) \sin(\nu) \sin(\xi) + \rho \sin(\rho) \cos(\nu) \cos(\xi) (\rho^2 - \nu^2 + \xi^2) + \right. \\
 &\left. + \nu \cos(\rho) \sin(\nu) \cos(\xi) (-\rho^2 + \nu^2 + \xi^2) - \xi \cos(\rho) \cos(\nu) \sin(\xi) (\rho^2 + \nu^2 + \xi^2) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{12}(\rho, \nu, \xi) &= \cos(\rho) \cos(\nu) \cos(\xi) \int_{-1}^1 \cosh(\rho\nu) \cosh(\nu\nu) \cosh(\xi\nu) d\nu \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sinh(\rho - \nu - \xi)}{\rho - \nu - \xi} + \frac{\sinh(\rho + \nu - \xi)}{\rho + \nu - \xi} + \frac{\sinh(\rho - \nu + \xi)}{\rho - \nu + \xi} + \frac{\sinh(\rho + \nu + \xi)}{\rho + \nu + \xi} \right] \times \\
 &\times \cos(\rho) \cos(\nu) \cos(\xi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{13}(\rho, \nu, \xi) &= \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi) \int_{-1}^1 \cos(\rho v) \sin(\nu v) \sin(\xi v) dv \\
&= \frac{1}{2} \left[-\frac{\sin(\rho - \nu - \xi)}{\rho - \nu - \xi} + \frac{\sin(\rho + \nu - \xi)}{\rho + \nu - \xi} + \frac{\sin(\rho - \nu + \xi)}{\rho - \nu + \xi} - \frac{\sin(\rho + \nu + \xi)}{\rho + \nu + \xi} \right] \times \\
&\quad \times \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{14}(\rho, \nu, \xi) &= \cos(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi) \int_{-1}^1 \cosh(\rho v) \sin(\nu v) \sin(\xi v) dv \\
&= -\frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi)}{(\rho^2 + (\nu - \xi)^2)(\rho^2 + (\nu + \xi)^2)} \times \\
&\quad \times \left[2\rho\nu\xi \sin(\rho) \cos(\nu) \cos(\xi) + \rho \sin(\rho) \sin(\nu) \sin(\xi) (\rho^2 + \nu^2 + \xi^2) + \right. \\
&\quad \left. + \nu \cos(\rho) \cos(\nu) \sin(\xi) (\rho^2 + \nu^2 - \xi^2) + \xi \cos(\rho) \sin(\nu) \cos(\xi) (\rho^2 - \nu^2 + \xi^2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{15}(\rho, \nu, \xi) &= \cosh(\rho) \cos(\nu) \cosh(\xi) \int_{-1}^1 \cos(\rho v) \sinh(\nu v) \sin(\xi v) dv \\
&= -\frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi)}{(\rho^2 + \nu^2)^2 + \xi^2 (-2\rho^2 + 2\nu^2 + \xi^2)} \times \\
&\quad \times \left[2\rho\nu\xi \sin(\rho) \cos(\nu) \cos(\xi) + \rho \sin(\rho) \sin(\nu) \sin(\xi) (\rho^2 + \nu^2 - \xi^2) - \right. \\
&\quad \left. - \nu \cos(\rho) \cos(\nu) \sin(\xi) (\rho^2 + \nu^2 + \xi^2) - \xi \cos(\rho) \sin(\nu) \cos(\xi) (-\rho^2 + \nu^2 + \xi^2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{16}(\rho, \nu, \xi) &= \cos(\rho) \cos(\nu) \cosh(\xi) \int_{-1}^1 \cosh(\rho v) \sinh(\nu v) \sin(\xi v) dv \\
&= -\frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi)}{(\rho^2 - \nu^2)^2 + \xi^2 (2\rho^2 + 2\nu^2 + \xi^2)} \times \\
&\quad \times \left[2\rho\nu\xi \sin(\rho) \cos(\nu) \cos(\xi) - \rho \sin(\rho) \sin(\nu) \sin(\xi) (\rho^2 - \nu^2 + \xi^2) - \right. \\
&\quad \left. - \nu \cos(\rho) \cos(\nu) \sin(\xi) (-\rho^2 + \nu^2 + \xi^2) - \xi \cos(\rho) \sin(\nu) \cos(\xi) (\rho^2 + \nu^2 + \xi^2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{17}(\rho, \nu, \xi) &= \cosh(\rho) \cos(\nu) \cos(\xi) \int_{-1}^1 \cos(\rho\nu) \sinh(\nu\nu) \sinh(\xi\nu) d\nu \\
&= -\frac{2 \cosh(\rho) \cosh(\nu) \cosh(\xi)}{(\rho^2 + (\nu - \xi)^2) (\rho^2 + (\nu + \xi)^2)} \times \\
&\times \left[2\rho\nu\xi \sin(\rho) \cos(\nu) \cos(\xi) - \rho \sin(\rho) \sin(\nu) \sin(\xi) (\rho^2 + \nu^2 + \xi^2) + \right. \\
&\left. + \nu \cos(\rho) \cos(\nu) \sin(\xi) (\rho^2 + \nu^2 - \xi^2) + \xi \cos(\rho) \sin(\nu) \cos(\xi) (\rho^2 - \nu^2 + \xi^2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{18}(\rho, \nu, \xi) &= \cos(\rho) \cos(\nu) \cos(\xi) \int_{-1}^1 \cosh(\rho\nu) \sinh(\nu\nu) \sinh(\xi\nu) d\nu \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\sinh(\rho - \nu - \xi)}{\rho - \nu - \xi} - \frac{\sinh(\rho + \nu - \xi)}{\rho + \nu - \xi} - \frac{\sinh(\rho - \nu + \xi)}{\rho - \nu + \xi} + \frac{\sinh(\rho + \nu + \xi)}{\rho + \nu + \xi} \right] \times \\
&\times \cos(\rho) \cos(\nu) \cos(\xi)
\end{aligned}$$

$$I_G(\rho, \nu) = I_3(\rho, \nu) - I_2(\rho, \nu) + I_2(\nu, \rho) - I_1(\rho, \nu)$$

$$I_U(\rho, \nu) = I_6(\rho, \nu) + I_7(\rho, \nu) + I_7(\nu, \rho) + I_8(\rho, \nu)$$

$$\begin{aligned}
I_{M1}(\rho, \nu, \xi) &= I_9(\rho, \nu, \xi) - I_{10}(\rho, \nu, \xi) + I_{10}(\nu, \rho, \xi) - I_{10}(\xi, \rho, \nu) - \\
&- I_{11}(\rho, \nu, \xi) + I_{11}(\rho, \xi, \nu) - I_{11}(\nu, \xi, \rho) + I_{12}(\rho, \nu, \xi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{M2}(\rho, \nu, \xi) &= -I_{13}(\rho, \nu, \xi) + I_{14}(\rho, \nu, \xi) - I_{15}(\rho, \nu, \xi) - I_{15}(\rho, \xi, \nu) + \\
&+ I_{16}(\rho, \nu, \xi) + I_{16}(\rho, \xi, \nu) - I_{17}(\rho, \nu, \xi) + I_{18}(\rho, \nu, \xi)
\end{aligned}$$

$$I_{M3}(\rho, \nu, \xi) = I_9(\rho, \nu, \xi) - I_{10}(\rho, \nu, \xi) - I_{10}(\nu, \rho, \xi) + I_{11}(\rho, \nu, \xi)$$

$$I_{M4}(\rho, \nu, \xi) = I_9(\rho, \nu, \xi) + I_{10}(\rho, \nu, \xi) - I_{10}(\nu, \rho, \xi) - I_{11}(\rho, \nu, \xi)$$

$$I_{M5}(\rho, \nu, \xi) = -I_{13}(\rho, \nu, \xi) + I_{14}(\rho, \nu, \xi) - I_{15}(\nu, \rho, \xi) + I_{16}(\rho, \nu, \xi)$$

$$I_{M6}(\rho, \nu, \xi) = I_9(\rho, \nu, \xi) - I_{10}(\rho, \nu, \xi) + I_{10}(\nu, \rho, \xi) + I_{10}(\xi, \rho, \nu) - \\ - I_{11}(\rho, \nu, \xi) - I_{11}(\rho, \xi, \nu) + I_{11}(\nu, \xi, \rho) - I_{12}(\rho, \nu, \xi)$$

$$I_{M7}(\rho, \nu, \xi) = I_9(\rho, \nu, \xi) - I_{10}(\rho, \nu, \xi) - I_{10}(\nu, \rho, \xi) - I_{10}(\xi, \rho, \nu) - \\ + I_{11}(\rho, \nu, \xi) + I_{11}(\rho, \xi, \nu) + I_{11}(\nu, \xi, \rho) - I_{12}(\rho, \nu, \xi)$$

$$I_M(\rho_1, \nu_1, \xi_1, \rho_2, \nu_2, \xi_2) = \nu_1^2 \xi_2^2 I_{M1}(\rho_1, \nu_1, \xi_1) I_{M1}(\rho_2, \xi_2, \nu_2) - \\ - 2\nu_1 \nu_2 \xi_1 \xi_2 I_{M2}(\rho_1, \nu_1, \xi_1) I_{M2}(\rho_2, \nu_2, \xi_2) + \\ + \xi_1^2 \nu_2^2 I_{M1}(\rho_1, \xi_1, \nu_1) I_{M1}(\rho_2, \nu_2, \xi_2)$$

$$I_{N1}(\rho, \nu) = \begin{cases} \frac{8\nu^2 \cosh(\rho) \cosh(\nu)}{(\rho^4 - \nu^4)^2} \left[\nu(\rho^4 - \nu^4) \cos(\rho) \sin(\nu) - \right. \\ \left. - \cos(\nu) (\rho(\rho^4 - \nu^4) \sin(\rho) + 2(3\rho^4 + \nu^4) \cos(\rho)) \right] & \rho \neq \nu \\ \frac{1}{8\rho^3} \left[2\rho \left(\frac{2}{3}\rho^2 - 1 \right) \cos(2\rho) - \right. \\ \left. - (4\rho^2 + (1 + 2\rho^2) \cosh(2\rho)) \sin(2\rho) - \right. \\ \left. - 2 \cosh^2(\rho) (4\rho + \rho \left(\frac{2}{3}\rho^2 - 1 \right) \sec^2(\rho) + (2\rho^2 - 1) \operatorname{tg}(\rho)) \right] & \rho = \nu \end{cases}$$

$$I_{N2}(\rho, \nu) = \begin{cases} -\frac{8\rho^2 \nu \cos(\rho) \cos(\nu) \cosh(\rho) \cosh(\nu)}{\rho^4 - \nu^4} & \rho \neq \nu \\ -\frac{\cos(\rho)^2 \cosh(\rho)^2}{\rho} & \rho = \nu \end{cases}$$