Учёные зап. МГУ, 1946, в. 117, Механика т. 1, с. 103–126.

А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

РАЗРУШЕНИЕ НЕ ВПОЛНЕ УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

В технике, наряду с расчетами на прочность, существенную роль играют расчеты на разрушение тех или иных материалов, необходимое для успешного осуществления технологического процесса. Особенно большое значение имеет расчет на разрушение в сельскохозяйственной механике, где большинство процессов связано с разрушением части проходящих через машину материалов.

К сожалению, нет еще достаточно строгой и сколько-нибудь удовлетворительной теории разрушения материалов. Многочисленные теории прочности, применяемые в расчетах упругих систем, теряют силу при приложении их к расчету не вполне упругих систем, где существенное значение имеют и время действия силы на тело и скорость, с которой эти тела подвергаются деформированию.

В настоящей работе изучаются условия разрушения простейших не вполне упругих тел в статических и динамических условиях.

1. Связь между напряжением и деформацией не вполне упругого тела

Для выражения закона, которому подчиняется деформирование упругих тел, достаточно иметь зависимость между деформацией упругих тела и величинами сил (нагрузок), производящих эту деформацию. Но этого недостаточно для описания процесса деформирования не вполне упругих тел, где существенную роль играют также скорости изменения нагрузки и деформаций.

Если имеет место простое растяжение не вполне упругого бруса, находящегося под напряжением σ, то характерными величинами для процесса деформирования являются, таким образом, помимо напряжения σ и относительного удлинения ε, также и их скорости изменения $\frac{d\sigma}{dt}$ и $\frac{d\varepsilon}{dt}$. Примем, что величины σ, ε, $\frac{d\sigma}{dt}$ и $\frac{d\varepsilon}{dt}$ должны удовлетворять некоторому соотношению $f\left(\sigma, \varepsilon, \frac{d\sigma}{dt}, \frac{d\varepsilon}{dt}, t\right)=0$, выражающему закон деформирования не вполне упругого тела. В это соотношение может входить явно и время t, так как с течением времени свойства тел могут меняться (например, по мере повышения температуры тела).

Простейшей зависимостью типа $f\left(\sigma, \varepsilon, \frac{d\sigma}{dt}, \frac{d\varepsilon}{dt}, t\right) = 0$ является, очевидно, линейная зависимость, не содержащая времени t в явном виде, т. е.

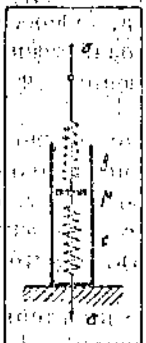
$$\alpha \frac{d\sigma}{dt} + \beta\sigma = \gamma \frac{d\varepsilon}{dt} + \delta\varepsilon, \tag{1}$$

где α, β, γ и δ — физические константы тела.

Свободный член в этой линейной зависимости должен непременно отсутствовать, если принять, что деформация отсутствовала до начала действия сил на тело.

К этой же линейной зависимости можно прийти, допуская разложимость функции $f\left(\sigma, \varepsilon, \frac{d\sigma}{dt}, \frac{d\varepsilon}{dt}, t\right)$ в ряд Маклорена, ограничиваясь лишь первыми членами разложения и считая, кроме того, что функция не содержит переменного t.

Построим модель не вполне упругого тела, подчиняющегося при деформации простейшему закону (1). Представим себе (фиг. 1) пружину жесткости b, соединенную последовательно с комбинацией пружины жесткости c, и поршня, движущегося в сосуде с вязкой жидкостью. Если к свободному концу первой пружины приложить силу σ, а сосуд с вязкой жидкостью вместе со свободным концом второй пружины закрепить, то удлинение ε всей конструкции составится из двух величин: удлинения $\varepsilon_1 = \sigma/b$ первой пружины и удлинения второй пружины $\varepsilon_2 = \sigma_2/c$, где сила σ_2—сила, растягивающая вторую пружину. При перемещении поршня в вязкой жидкости возникает сила сопротивления этому перемещению $\mu\frac{d\varepsilon_2}{dt}$, где $\frac{d\varepsilon_2}{dt}$—скорость движения поршня, а μ—коэфициент, связанный с вязкостью жидкости и размерами сосуда и поршня.


Фиг. 1

Если пренебречь инерционным эффектом пружин и поршня, то, очевидно,

$$\sigma = \sigma_2 + \mu\frac{d\varepsilon_2}{dt}.$$

С другой стороны,

$$\varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1 = \varepsilon - \frac{\sigma}{b}, \quad \frac{d\varepsilon_2}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{1}{b}\frac{d\sigma}{dt}.$$

Подставляя эти выражения в предыдущее соотношение, получим:

$$\sigma = c\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{b}\right) + \mu\left(\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{1}{b}\frac{d\sigma}{dt}\right)$$

или, после упрощений:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{b+c}{\mu}\sigma = b\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{bc}{\mu}\varepsilon, \tag{2}$$

что совпадает с выражением (1), если соответственно изменить обозначения.

Теперь легко представить себе, что будет происходить с бруском из не вполне упругого материала при нагрузке его достаточно быстро растягивающей силой. Для этого обратимся к модели. При быстром приложении силы прежде всего растянется верхняя пружина на величину $\varepsilon_1 = \sigma/b$, растяжение же второй пружины начнется постепенно, благодаря тормозящему действию поршня. Спустя достаточно большое время растянется и вторая пружина на величину $\varepsilon_2 = \sigma/c$, так что общая деформация составит величину

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\sigma. \tag{3}$$

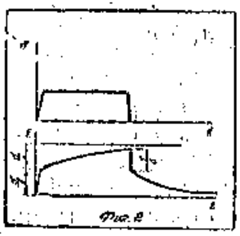
Если же силу σ достаточно быстро снять, то сейчас же исчезнет упругая деформация первой пружины, т. е. величина ε_1; деформация второй пружины ε_2 вследствие наличия тормозящего действия поршня будет исчезать постепенно.

На фиг. 2 схематически изображены соответствующие графики силы σ и деформации ε как функции времени. Описанное явление запаздывания образования деформации при действии на брус растягивающей силы называется упругим последействием.

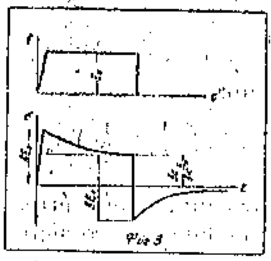
Если же модель быстро растянуть на величину деформации ε и затем закрепить, то в первый момент нагруженной окажется лишь первая пружина, и растягивающая ее сила будет, очевидно, равна $b\varepsilon$. Вторая же пружина, вследствие наличия тормозящего действия поршня, начнет растягиваться не сразу. По мере ее растяжения первая пружина будет несколько сокращаться, и, следовательно, усилие, возникшее в модели, будет падать.

После достаточно большого промежутка времени обе пружины окажутся нагруженными одинаковой силой σ, которую можно определить из соотношения (3).

Если теперь модели быстро придать первоначальную длину, то в первый момент вторая пружина будет попрежнему растянута, а первая окажется



Фиг. 2



Фиг. 3

сжатой; следовательно, вся модель будет нагружена в первый момент сжимающей нагрузкой. Затем с течением времени первая и вторая пружины примут первоначальную длину, и модель окажется разгруженной.

На фиг. 3 схематически изображены соответствующие графики деформации и нагрузки модели. Уменьшение с течением времени напряженности модели при постоянной деформации называется релаксацией.

Все описанные явления могут быть изучены математически решением диференциального уравнения модели (2)

$$\frac{d\sigma}{dt}+\frac{b+c}{\mu}\sigma=b\frac{d\varepsilon}{dt}+\frac{bc}{\mu}\varepsilon.$$

Предположим, например, что в течение весьма малого промежутка времени τ сила σ меняется от значения σ_0 до значения σ_1 и при этом деформация ε изменяется от значения ε_0 до значения ε_1.

Проинтегрировав левую и правую части диференциального уравнения в пределах от $t=0$ до $t=\tau$, получим:

$$\sigma_1-\sigma_0+\int_0^{\tau}\frac{b+c}{\mu}\sigma(t)\,dt=b(\varepsilon_1-\varepsilon_0)+\int_0^{\tau}\frac{bc}{\mu}\varepsilon(t)\,dt.$$

Так как выражения, стоящие под знаком интеграла в правой и левой частях равенства, ограничены, то значения обоих интегралов тем меньше, чем меньше промежуток времени τ изменения величин σ и ε. Считая этот промежуток бесконечно малым, получим:

$$\sigma_1-\sigma_0=b(\varepsilon_1-\varepsilon_0),$$

т. е. при очень быстрых изменениях нагрузки деформация изменяется пропорционально изменению нагрузки. Очевидно и обратное заключение: при быстрых деформациях модели возникающее в ней усилие пропорционально изменению деформации. Так как коэфициентом пропорциональности служит величина b, то это явление, очевидно, происходит за счет деформирования одной первой пружины.

Пусть к модели приложена постоянная сила σ_0 и в некоторый момент времени $t_0=0$, деформация пружины составляет величину ε_0. Так как для этого случая $\frac{d\sigma}{dt}=0$, то имеем:

$$b\frac{d\varepsilon}{dt}+\frac{bc}{\mu}\varepsilon=\frac{b+c}{\mu}\sigma_0,$$

откуда, интегрируя получающееся для величины ε линейное диференциальное уравнение, найдем:

$$\varepsilon=\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\sigma_0+Ce^{-\frac{c}{\mu}t},$$

а так как при $t=0$ $\varepsilon=\varepsilon_0$, то

$$\varepsilon_0=\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\sigma_0+C$$

и окончательно:

$$\varepsilon=\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\sigma_0+\left[\varepsilon_0-\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]e^{-\frac{c}{\mu}t}. \qquad (4)$$

Из рассмотрения этого выражения следует, что деформация модели под постоянной силой с течением времени стремится к значению:

$$\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\sigma_0$$

независимо от первоначальной деформации. Это стремление будет тем энергичнее, чем больше величина $\frac{c}{\mu}$, которую следует назвать коэфициентом последействия.

Пусть, наконец, модель подвергнута деформации и закреплена так, что деформация ее составляет постоянную величину ε_0. Тогда в модели разовьется некоторое усилие, которое будет изменяться с течением времени (релаксация).

Пусть σ_0—значение этого усилия в некоторый момент времени $t_0=0$; тогда, замечая, что для этого случая $\frac{d\varepsilon}{dt}=0$, получим для определения усилия σ диференциальное уравнение

$$\frac{d\sigma}{dt}+\frac{b+c}{\mu}\sigma=\frac{bc}{\mu}\varepsilon_0$$

с начальным условием: $\sigma=\sigma_0$ при $t=0$.

Интегрируя его, получим:

$$\sigma=\frac{bc}{b+c}\varepsilon_0+Ce^{-\frac{b+c}{\mu}t},$$

причем

$$\sigma_0=\frac{bc}{b+c}\varepsilon_0+C$$

и, следовательно,

$$\sigma=\frac{bc}{b+c}\varepsilon_0+\left(\sigma_0-\frac{bc}{b+c}\varepsilon_0\right)e^{-\frac{b+c}{\mu}t}. \qquad (5)$$

Таким образом усилие σ в модели, поддерживаемой в постоянном деформированном состоянии, будет стремиться к значению

$$\frac{bc}{b+c}\varepsilon_0,$$

не зависящему от начальных условий процесса. Это стремление будет тем интенсивнее, чем больше величина $\frac{b+c}{\mu}$, которую следует назвать коэфициентом релаксации (обратная величина коэфициента релаксации иногда называется периодом релаксации, так как имеет размерность времени). Приведенные математические рассуждения, очевидно, полностью подтверждают описанные явления, схематически изображенные на фиг. 2 и 3, так как в этих явлениях как раз имеют место внезапное (точнее, достаточно быстрое) приложение нагрузки или изменение деформации и постоянное действие силы, или, соответственно, поддержание постоянной деформации.

Возвращаясь теперь к закону деформирования не вполне упругого стержня (2), замечаем, что этот закон можно представить в виде

$$\frac{d\sigma}{dt}+r\sigma=b\frac{d\varepsilon}{dt}+bn\varepsilon, \tag{6}$$

вводя новые константы

$$r=\frac{b+c}{\mu} \quad \text{и} \quad n=\frac{c}{\mu}. \tag{7}$$

Константы b, r, n имеют простой физический смысл: константа n представляет собой коэфициент упругого последствия, r — коэфициент релаксации напряжений и b — модуль упругости при быстрых деформированиях стержня. Жесткости второй (внутренней) пружины модели c будет соответствовать величина $\frac{nb}{r-n}$, а коэфициенту вязкости μ — величина $\frac{b}{r-n}$, в чем легко убедиться, решая соотношения (7) относительно c и μ.

Как любопытное следствие отметим, что коэфициент релаксации r всегда больше коэфициента последствия n.

2. Изгиб не вполне упругого стержня

Обобщение закона не вполне упругого растяжения-сжатия на другие виды деформации встречает некоторые трудности, поэтому ограничимся лишь элементарной теорией изгиба бруса из не вполне упругого материала.

Будем считать так же, как это делается в теории сопротивления материалов, нормальные сечения бруса плоскими в течение всего времени деформирования, а нормальные напряжения, развивающиеся по сечению, подчиняющимися закону (6), где ε — относительное удлинение волокон бруса. Если плоскость действия изгибающей пары M совпадает с плоскостью симметрии бруса, то изгиб бруса будет происходить в одной плоскости, и относительное удлинение волокон, находящихся на расстоянии y от плоскости, расположенной перпендикулярно к плоскости симметрии бруса и проходящей через нижние волокна бруса (фиг. 4), будет составлять величину $\varepsilon=\varepsilon_0+\varkappa y$, где ε_0 — удлинение нижнего волокна и $\varkappa$ — кривизна нейтрального слоя.

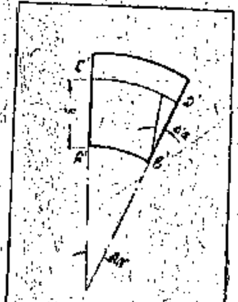
Действительно, до деформации длина нижнего волокна AB равна длине волокна CD, находящегося на расстоянии y от плоскости, проходящей через нижнее волокно перпендикулярно плоскости симметрии. После деформации крайние сечения элемента бруса повернутся друг относительно друга на некоторый угол $\Delta\alpha$, оставаясь при этом плоскими по предположению. Длины волокон будут теперь уже другие и составят соответственно величины $A'B'$ и $C'D'$.

Очевидно, с точностью до малых высших порядков, имеет место:

$$\varepsilon = \frac{C'D' - CD}{CD} = \frac{C'D' - A'B' + A'B' - AB}{AB} = \frac{y\Delta\alpha}{AB} + \varepsilon_0,$$

а так как $\frac{\Delta\alpha}{AB} = \varkappa$ составляет кривизну нейтрального слоя волокон, то $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varkappa y$.

Легко теперь показать, что нейтральный слой пройдет через центр тяжести сечения, если на брус не действуют продольные силы. Действительно, в этом случае $\iint \sigma\, dF = 0$, где двойной интеграл распространен по всей площади поперечного сечения бруса, причем напряжение является функцией координат точек сечения и времени. Так как интеграл в течение всего времени изгибания бруса равен нулю, то



Фиг. 4

$$\frac{d}{dt}\iint \sigma\, dF = \iint \frac{d\sigma}{dt}\, dF = 0$$

и, следовательно,

$$\iint \left(\frac{d\sigma}{dt} + r\sigma\right) dF = 0.$$

Далее, согласно, (6) $\frac{d\sigma}{dt} + r\sigma = b\frac{d\varepsilon}{dt} + bn\varepsilon$, и таким образом

$$\iint \left(\frac{d\varepsilon}{dt} + n\varepsilon\right) dF = 0.$$

Подставляя сюда $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varkappa y$ и $\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_0}{dt} + \frac{d\varkappa}{dt} y$, получим:

$$\left(\frac{d\varepsilon_0}{dt} + n\varepsilon_0\right)\iint dF + \left(\frac{d\varkappa}{dt} + n\varkappa\right)\iint y\, dF = 0,$$

так как ε_0, $\frac{d\varepsilon_0}{dt}$, $\varkappa$ и $\frac{d\varkappa}{dt}$ — постоянные по отношению к процессу интегрирования по площади.

Замечая, что $\iint y\, dF = y_c F$, где y_c — ордината центра тяжести сечения, имеем:

$$\frac{d\varepsilon_0}{dt} + \frac{d\varkappa}{dt} y_c + n(\varepsilon_0 + \varkappa y_c) = 0, \tag{8}$$

где $\varepsilon_0 + \varkappa y_c = \varepsilon_c$ представляет собой относительное удлинение волокна, лежащего в слое волокон, проходящем через центр тяжести сечения. Таким образом $\frac{d\varepsilon_c}{dt} + n\varepsilon_c = 0$, откуда $\varepsilon_c = Ce^{-nt}$, и если в начальный момент имело место $\varepsilon_c = 0$, то оно останется и в дальнейшем.

Следовательно, нейтральный слой при поперечном изгибе не вполне упругого стержня проходит через центр тяжести сечения. Чтобы подсчитать изгибающий момент в каком-либо сечении, достаточно вычислить интеграл $M = \iint \sigma y\, dF$. При этом изгибающий момент M окажется также и функцией времени, причем

$$\frac{dM}{dt} = \iint \frac{d\sigma}{dt} y\, dF.$$

Если составить выражение

$$\frac{dM}{dt}+rM=\iint\left(\frac{d\sigma}{dt}+r\sigma\right)y\,dF,$$

то, подставляя сюда $\frac{d\sigma}{dt}+r\sigma=b\frac{d\varepsilon}{dt}+bn\varepsilon$ и замечая, что $\varepsilon=\varepsilon_0+\varkappa y$ и $\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{d\varepsilon_0}{dt}+\frac{d\varkappa}{dt}$, получим:

$$\frac{dM}{dt}+rM=b\left(\frac{d\varepsilon_0}{dt}+n\varepsilon_0\right)\iint y\,dF+b\left(\frac{d\varkappa}{dt}+n\varkappa\right)\iint y^2\,dF,$$

а так как, согласно (5) $\frac{d\varepsilon_0}{dt}+n\varepsilon_0=-\left(\frac{d\varkappa}{dt}+n\varkappa\right)y_c$, то

$$\frac{dM}{dt}+rM=b\left(\frac{d\varkappa}{dt}+n\varkappa\right)(I_0-y_c^2F).$$

Выражение $I_0-y_c^2F=I$ представляет собой момент инерции площади сечения относительно центральной оси, расположенной в нейтральном слое сечения.

Окончательно имеем следующую зависимость между изгибающим моментом и кривизною нейтрального слоя волокон стержня:

$$\frac{dM}{dt}+rM=bI\frac{d\varkappa}{dt}+bIn\varkappa. \qquad (9)$$

При малых деформациях можно принять, как и в теории сопротивления материалов:

$$\varkappa=\frac{d^2v}{dx^2},$$

где v — смещение сечения в направлении, нормальном к недеформированной оси балки, принятой за ось x. При этом можно развить теорию интегрирования упругой линии стержня, аналогичную в некоторых случаях обычной теории сопротивления материалов.

Ограничимся рассмотрением простейшего примера изгиба балки из не вполне упругого материала, лежащей на двух опорах и нагруженной грузом посредине. Из условий $v=0$ при $x=0$ и $x=l$ следует, что в тех же точках

$$w=\frac{dv}{dt}+nv=0.$$

Точно так же можно показать, что по середине балки, т. е. при $x=\frac{l}{2}$, имеет место $\frac{dw}{dx}=0$.

Далее, изгибающий момент в каком-либо сечении левой половины балки имеет выражение

$$M=\frac{1}{2}Px$$

и, следовательно,

$$\frac{dM}{dt}=\frac{1}{2}\frac{dP}{dt}x.$$

Таким образом получим $\frac{dM}{dt}+rM=\frac{1}{2}Qx$, где введено обозначение

$$Q=\frac{dP}{dt}+rP.$$

8*

Замечая теперь, что

$$bI\frac{d\varkappa}{dt} + bIn\varkappa = bI\frac{d^2w}{dx^2},$$

получим из диференциального уравнения изгиба бруса (9) соотношение

$$bI\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{1}{2}Qx$$

для левой половины балки и

$$bI\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{1}{2}Q(l-x)$$

для правой.

Эти соотношения ничем не отличаются от уравнений сопротивления материалов для случая нагруженной по середине балки, если только вместо прогиба подставить функцию w и вместо силы, вызывающей изгиб, — величину Q. Так как и граничные условия остаются такими же, как в сопротивлении материалов, то, интегрируя получившиеся два диференциальных уравнения, найдем следующее значение величины w в середине балки $\left(\text{т. е. при } x = \frac{l}{2}\right)$:

$$w = \frac{Ql^3}{48EI},$$

откуда, подставляя значения w и Q, получим соотношение между прогибом f по середине балки из не вполне упругого материала и силой P, вызывающей этот прогиб:

$$\frac{dP}{dt} + rP = \frac{48EI}{l^3}\left(\frac{df}{dt} + nf\right). \tag{10}$$

Это соотношение аналогично закону (4), выражающему связь между напряжением и деформацией при простом растяжении.

Максимальное напряжение при изгибе определяется по обычным формулам сопротивления материалов. Действительно, из гипотезы плоских сечений следует $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varkappa y$, где ε_0 — удлинение нижнего волокна, а из условия прохождения нейтрального слоя через центр тяжести следует $0 = \varepsilon_0 + \varkappa y_0$. Исключая из обоих написанных равенств величину ε_0, получим:

$$\varepsilon = \varkappa(y - y_0) \quad \text{и} \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varkappa}{dt}(y - y_0)$$

и, следовательно,

$$\frac{d\sigma}{dt} + r\sigma = b(y - y_0)\left(\frac{d\varkappa}{dt} + n\varkappa\right).$$

Так как при $t = 0$ балка была ненагружена и, значит, имело место $\sigma = 0$, то интеграл написанного выше уравнения, как легко проверить, имеет вид:

$$\sigma = e^{-rt}\int_0^t e^{rt} b(y - y_0)\left(\frac{d\varkappa}{dt} + n\varkappa\right)dt,$$

откуда следует, что в зависимости от y напряжения меняются по линейному закону, обращаясь в нуль в нейтральном слое, т. е. так же, как и в обычной теории сопротивления материалов.

Таким образом

$$\sigma = \frac{M}{I}(y - y_c),$$

где $y - y_c$ — расстояние слоя рассматриваемых волокон от нейтрального слоя.

3. Гипотезы разрушения не вполне упругого материала

Наличие двух упругих начал, соответственно двум пружинам в модели, позволяет предполагать, что возможны два вида разрушения бруса из не вполне упругого материала при растяжении. Первому разрушению соответствует разрыв первой пружины модели. Это разрушение назовем внешним; оно будет иметь место, когда напряжение или соответственно на модели растягивающая сила σ, превышает некоторое предельное значение σ_b.

Второму разрушению соответствует разрыв второй пружины модели; назовем его внутренним. Разрыв второй пружины будет иметь место, когда приходящееся на нее усилие превысит некоторое предельное значение σ_s. Удлинение ε_2 второй пружины составляет величину $\varepsilon - \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 = \sigma/b$ — удлинение первой пружины. Так как усилие, возникающее во второй пружине, равно

$$\sigma_2 = c\varepsilon_2 = c\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{b}\right), \quad \left(c = \frac{bn}{r-n}\right),$$

то ее разрушение наступит при выполнении условия

$$c\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{b}\right) > \sigma_s. \tag{11}$$

Обозначая $\frac{\sigma_s}{c} = \frac{\sigma_s(r-n)}{bn}$ через ε_s, можно написать последнее условие разрушения следующим образом:

$$\varepsilon - \frac{\sigma}{E} < \varepsilon_s,$$

причем левая часть, очевидно, соответствует удлинению второй пружины модели.

Для большей наглядности в дальнейшем будем рассматривать лишь условия разрушения модели. Таким образом разрушение будет иметь место при выполнении одного из следующих условий:

$$\sigma > \sigma_b, \quad c\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{b}\right) > \sigma_s.$$

Так как усилие, возникающее во второй пружине, всегда меньше усилия, возникающего в первой пружине, то внутреннее разрушение модели, т. е. выполнение второго условия, возможно лишь при $\sigma_s < \sigma_b$, что мы и будем предполагать в дальнейшем.

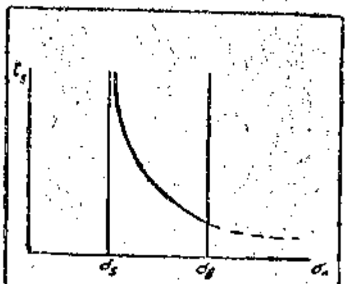
Можно указать предельное удлинение модели, при достижении которого непременно произойдет разрушение. Действительно, наибольшее удлинение первой пружины, не вызывающее ее разрушения $\varepsilon_1 = \sigma_b/b$, тогда как у второй пружины будет соответственно $\varepsilon_2 = \sigma_s/c$. Поэтому

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{\sigma_b}{b} + \frac{\sigma_s}{c}$$

наибольшее из всех возможных удлинений модели без разрушения. В действительности разрушение может произойти и при меньшем удлинении, но не ниже, конечно, значения $\alpha = \sigma_s/b$, если $\sigma_s < \sigma_b$.

4. Разрушение постоянной силой

Если к модели приложена сила, превышающая значение σ_b, то разрушение произойдет немедленно (внешнее разрушение). Если сила меньше предельного значения $\sigma_s < \sigma_b$, то разрушения вообще не произойдет. Наконец, если величина силы является промежуточной между значениями σ_s и σ_b, то разрушение будет внутренним и произойдет спустя некоторое время после приложения нагрузки.



Фиг. 5

Ранее уже было найдено, что под постоянной нагрузкой σ_0 модель деформируется по закону (4):

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\sigma_0 + \left[\varepsilon_0 - \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\right] e^{-\frac{c}{\mu}t},$$

что получилось в результате интегрирования диференциального уравнения, связывающего величины деформации ε и усилия σ при начальном условии $\varepsilon = \varepsilon_0$ при $t = 0$. Здесь следует принять $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{b}$, потому что сила, приложенная к недеформированной модели, вызовет немедленно удлинение ε_0 первой пружины. Получим:

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\sigma_0 - \frac{\sigma_0}{c} e^{-\frac{c}{\mu}t}.$$

Подставляя это выражение в неравенство (11), получим условие

$$\sigma_0\left(1 - e^{-\frac{c}{\mu}t}\right) > \sigma_s,$$

которое будет удовлетворено, если значение времени t превысит величину

$$t_s = \frac{\mu}{b} \ln \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - \sigma_s}.$$

Примерный график зависимости между моментом t_s наступления разрушения и величиной нагрузки представлен на фиг. 5. Так как при $\sigma_0 = \sigma_b$ наступает уже внешнее разрушение, то при $\sigma_0 > \sigma_b$ ордината кривой графика обращается в нуль, т. е. разрушение наступает мгновенно. Если $\sigma_0 < \sigma_b$, то разрушение наступает в момент времени t_s, всегда превышающий значение

$$\frac{\mu}{c} \ln \frac{\sigma_b}{\sigma_b - \sigma_s}.$$

Значение t_s становится бесконечно большим при $\sigma_0 = \sigma_s$, что очевидно.

Факт разрушения материалов спустя некоторое время после приложения нагрузок экспериментально подтверждается.

5. Разрушение внезапно вызванной деформацией

При внезапно вызванной деформации ε_0 в первый момент времени окажется нагруженной лишь первая пружина и, следовательно, усилие, возникшее в модели, будет составлять величину

$$\sigma_0 = b\varepsilon_0.$$

Ранее был получен закон (5):

$$\sigma = \frac{bc}{b+c}\varepsilon_0 + \left(\sigma_0 - \frac{bc}{b+c}\varepsilon_0\right) e^{-\frac{b+c}{\mu}t}$$

изменения усилия, возникшего в модели при условии постоянства деформации $\varepsilon = \varepsilon_0$. Положив $\sigma_0 = b\varepsilon_0$, получим:

$$\sigma = \frac{bc}{b+c}\varepsilon_0 + \frac{b^2}{b+c}\varepsilon_0 e^{-\frac{b+c}{\mu}t}.$$

Если $b\varepsilon_0 > \sigma_b$, то, очевидно, произойдет внешнее разрушение модели немедленно после внезапного деформирования. Если же $b\varepsilon_0 < \sigma_b$, то разрушение может быть лишь внутренним, для чего необходимо выполнение условия:

$$c\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{b}\right) = c\left(\varepsilon_0 - \frac{c}{b+c}\varepsilon_0 - \frac{b}{b+c}\varepsilon_0 e^{-\frac{b+c}{\mu}t}\right) > \sigma_s$$

или, производя упрощения:

$$\frac{bc}{b+c}\varepsilon_0\left(1 - e^{-\frac{b+c}{\mu}t}\right) > \sigma_s.$$

Левая часть неравенства возрастает при неограниченном увеличении значения времени t, но остается меньше значения

$$\frac{bc}{b+c}\varepsilon_0.$$

Поэтому, чтобы разрушение наступило, необходимо иметь

$$\varepsilon_0 > \frac{b+c}{bc}\sigma_s.$$

Момент времени разрушения t_s при выполнении этого условия определяется из равенства

$$\varepsilon_0 \frac{bc}{b+c}\left(1 - e^{-\frac{b+c}{\mu}t}\right) = \sigma_s.$$

Таким образом

$$t_s = \frac{\mu}{b+c} \ln \frac{1}{1 - \frac{b+c}{bc}\varepsilon_0}.$$

Факт разрушения материалов спустя некоторое время после деформирования подтвержден также экспериментально.

6. Разрушение равномерным деформированием

Если деформацию модели производить по закону $\varepsilon = vt$, то усилие, возникающее в модели, можно определить, интегрируя уравнение (2)

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{b+c}{\mu}\sigma = b\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{bc}{\mu}\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon = vt$ и, следовательно, $\frac{d\varepsilon}{dt} = v$, то общий интеграл этого уравнения имеет следующий вид:

$$\sigma = Ce^{-\frac{b+c}{\mu}t} + \frac{bc}{b+c}vt - \frac{b^2}{(b+c)^2}\mu v,$$

причем константа C определяется из условия обращения в нуль усилия в начальный момент времени. Следовательно,

$$\sigma = \frac{b^2\mu v}{(b+c)^2}\left(1 - e^{-\frac{b+c}{\mu}t}\right) + \frac{bcv}{b+c}t. \tag{12}$$

Внешнее разрушение наступит в момент t_b, при котором будет иметь место равенство:

$$\frac{b^2\mu v}{(b+c)^2}\left(1 - e^{-\frac{b+c}{\mu}t_b}\right) + \frac{bc}{b+c}vt_b = \sigma_b. \tag{13}$$

Однако может случиться и так, что внутреннее разрушение наступит в более ранний момент времени t_s. Так как условием внутреннего разрушения является удовлетворение неравенства (11)

$$c\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{b}\right) > \sigma_s,$$

то момент времени внутреннего разрушения t_s определяется из уравнения:

$$b\left[vt_s - \frac{b}{(b+c)^2}\mu v\left(1 - e^{-\frac{b+c}{\mu}t_s}\right) - \frac{c}{b+c}vt_s\right] = \sigma_s,$$

или после очевидного упрощения:

$$\frac{bcv}{b+c}t_s - \frac{bc}{(b+c)^2}\mu v\left(1 - e^{-\frac{b+c}{\mu}t_s}\right) = \sigma_s. \tag{14}$$

Как легко усмотреть из уравнений, определяющих моменты разрушения t_b и t_s, внутреннее разрушение может произойти, если $\sigma_s < \sigma_b$ и если, кроме того, скорость деформирования достаточно мала. При достаточно большой скорости деформирования, напротив, всегда будет иметь место внешнее разрушение.

Можно подсчитать работу, которую совершит внешняя сила, производя разрушение. Так как элементарное перемещение точки приложения силы σ составляет величину $v\,dt$, то работа разрушения представляется интегралом

$$A = \int_0^t \sigma v\,dt.$$

Верхний предел t следует полагать равным наименьшему из чисел t_s и t_b.

Чтобы произвести фактический подсчет работы, затрачиваемой на разрушение, и оценить влияние скорости на величину работы, перейдем к безразмерным величинам. Для этой цели введем прежде всего безразмерную величину τ, связанную с временем t соотношением

$$\tau = \frac{b+c}{\mu}t.$$

Тогда закон изменения усилия σ согласно (12) будет иметь вид:

$$\sigma = \frac{bc}{(b+c)^2}\mu v \left[\frac{b}{c}(1-e^{-\tau})+\tau\right].$$

Моменту наступления внешнего разрушения t_b будет соответствовать некоторое значение величины τ_b, согласно (13) из уравнения

$$v\left[\frac{b}{c}(1-e^{-\tau_b})+\tau_b\right]=\nu_b, \tag{15}$$

где

$$\nu_b=\frac{(b+c)^2}{bc}\frac{\sigma_b}{\mu}. \tag{16}$$

Точно так же величина τ_s, соответствующая моменту наступления внутреннего разрушения t_s, определится согласно (14) из равенства

$$v(\tau_s-1+e^{-\tau_s})=\nu_s, \tag{17}$$

где

$$\nu_s=\frac{(b+c)^2}{bc}\frac{\sigma_s}{\mu}. \tag{18}$$

Выражение для работы, расходуемой на разрушение, примет вид:

$$A=\int_0^t \sigma v\,dt=\int_0^\tau \frac{bc}{(b+c)^2}\mu v\left[\frac{b}{c}(1-e^{-\tau})+\tau\right]\frac{\mu v}{b+c}\,d\tau=$$

$$=\frac{\mu^2 v^2 bc}{(b+c)^3}\left[\frac{b}{c}(\tau+e^{-\tau}-1)+\frac{\tau^2}{2}\right], \tag{19}$$

причем вместо τ следует подставить наименьшую из величин τ_b и τ_s.

Следует отметить два крайних случая: 1) деформирование с очень большой скоростью v, 2) деформирование с очень малой скоростью. При большом значении v разрушение будет наступать очень скоро и, следовательно, значение величины τ_b будет весьма малым. Поэтому, замечая, что

$$e^{-\tau}=1-\tau+\frac{\tau^2}{2}-\frac{\tau^3}{6}+\ldots$$

можно уравнение (15) для определения величины τ_b записать приближенно так:

$$\left[\frac{b}{c}(1-e^{-\tau_b})+\tau_b\right]\cong v\left(\frac{b}{c}+1\right)\tau_b=\nu_b,$$

откуда

$$\tau_b=\frac{c\nu_b}{v(b+c)}. \tag{20}$$

Заметим, что величина τ_s, соответствующая внутреннему разрушению, будет в этом случае значительно больше. Действительно, уравнение для определения τ_s можно записать так:

$$v\left(\tau_s-1+1-\tau_s+\frac{1}{2}\tau_s^2-\frac{1}{6}\tau_s^3+\ldots\right)=\nu_s.$$

Пренебрегая малыми третьего порядка и выше, получим:

$$\tau_s\cong\sqrt{\frac{2\nu_s}{v}}.$$

Составляя отношение τ_b и τ_s, имеем:

$$\frac{\tau_b}{\tau_s}=\frac{\nu_b c}{(b+c)\sqrt{2\nu_s v}},$$

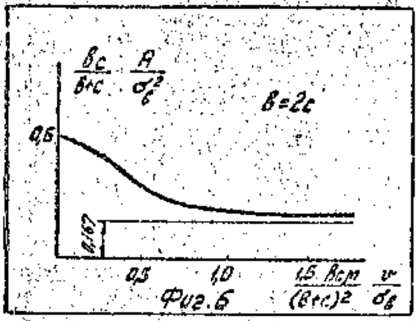
откуда непосредственно видно, что при достаточно большой скорости деформирования v величина τ_b будет принципиально меньше τ_s.

Для малых значений τ выражение работы (19), расходуемой на разрушение, можно написать так:

$$A=\frac{bc\mu^2v^2}{(b+c)^3}\left[\frac{b}{c}\left(\tau+1-\tau+\frac{1}{2}\tau^2-\frac{1}{6}\tau^3+\ldots\right)+\frac{1}{2}\tau^2\right]\cong$$
$$\cong\frac{bc\mu^2v^2}{(b+c)^3}\left(\frac{b}{c}+1\right)\frac{\tau^2}{2}.$$

Подставляя сюда вместо τ величину τ_b согласно (20) и учитывая (16), получим, произведя сокращения,

$$A\cong\frac{\sigma_b^2}{2b},$$



Фиг. 6

что представляет собой работу, которую надлежало бы затратить для растяжения первой пружины модели до создания в ней усилия σ_b. Этот результат можно было бы предвидеть сразу, учтя, что при быстром деформировании вторая пружина модели вследствие наличия вязкости не успеет сколько-нибудь заметно деформироваться.

Чтобы подсчитать работу, потребную на внешнее разрушение при не слишком больших скоростях, следует, очевидно, совместно решить уравнения (15) и (19), т. е.:

$$v\left[\frac{b}{c}(1-e^{-\tau_b})+\tau_b\right]=\nu_b=\frac{(b+c)^2}{bc}\frac{\sigma_b}{\mu},$$
$$v^2\left[\frac{b}{c}(\tau_b+e^{-\tau_b})+\frac{1}{2}\tau_b^2\right]=\alpha=\frac{(b+c)^3}{bc}\frac{A}{\mu^2},$$

исключая из них τ_b и находя работу A как функцию скорости. Для практических целей проще задаваться частными значениями τ_b и, определяя по ним значения скорости v из первого уравнения, подсчитывать по второму уравнению соответствующее этой скорости значение работы A.

На фиг. 6 дан график зависимости между безразмерными величинами:

$$\frac{v}{\nu_b}=\frac{bc}{(b+c)^2}\frac{\mu v}{\sigma_b}=\left[\frac{b}{c}(1-e^{-\tau_b})+\tau_b\right]^{-1},$$

$$\frac{\alpha}{\nu_b^2}=\frac{bc}{b+c}\frac{A}{\sigma_b^2}=\frac{+\frac{b}{c}(\tau_b+e^{-\tau_b}-1)+\frac{1}{2}\tau_b^2}{\left[\frac{b}{c}(1-e^{-\tau_b})+\tau_b\right]^2},$$

при частном значении отношения $\frac{b}{c}=2$.

Не представляет труда построить соответствующие графики и для других значений отношения $\frac{b}{c}$ и, кроме того, произвести по ним пересчеты на величины скоростей v и соответствующие величины работ A, если известны константы b, c, μ и σ_b.

График, изображенный на фиг. 6, перестает быть справедливым при достаточно малом значении скорости v, так как вместо внешнего разрушения при малой скорости деформирования будет разрушение внутреннее. Действительно, в этом случае величина τ_b будет велика, и согласно (15) можно записать:

$$\nu_b = v\left[\frac{b}{c}(1-e^{-\tau_b})+\tau_b\right] = v\left(\frac{c}{b}+\tau_b\right) \quad \text{и} \quad \tau_b = \frac{\nu_b}{v}-\frac{c}{b},$$

тогда как для величины τ_s из (15) получим:

$$\nu_s = v(\tau_s - 1 + e^{-\tau_s}) \simeq v(\tau_s - 1) \quad \text{и} \quad \tau_s = \frac{\nu_s}{v}+1.$$

Очевидно, будет иметь место $\tau_s < \tau_b$, если $\nu_b > \nu_s + \left(1+\frac{c}{b}\right)v$, т. е. если $\sigma_s < \sigma_b$ и значение v достаточно мало.

Можно ограничиться для величины τ_s значением $\frac{\nu_s}{v}$, которое будет тем точнее, чем меньше скорость деформирования v. Далее, величина работы A, затрачиваемой на разрушение, выразится при этом согласно (19) приближенно так:

$$A = \frac{\mu^2 v^2 bc}{(b+c)^3}\left[\frac{b}{c}(\tau_s + e^{-\tau_s} - 1) + \frac{1}{2}\tau_s^2\right] \simeq \frac{bc\mu^2 v^2}{(b+c)^3}\frac{\tau_s^2}{2}.$$

Подставляя сюда

$$\tau_s \cong \frac{\nu_s}{v} = \frac{(b+c)^2}{bc}\frac{\sigma_s}{\mu v},$$

получим:

$$A \cong \left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\frac{\sigma_s^2}{2}.$$

То же можно было усмотреть непосредственно, так как приведенная выше величина представляет работу, которую нужно затратить для растяжения обеих пружин до создания в них усилия σ_s; при этом потери на сопротивление поршня в вязкой жидкости ничтожно малы вследствие весьма малой скорости деформирования.

Чтобы подсчитать работу, потребную на разрушение при не слишком малой скорости деформирования, следует, очевидно, совместно решить два уравнения (17) и (19), т. е.

$$v(\tau_s - 1 + e^{-\tau_s}) = \nu_s = \frac{(b+c)^2}{bc}\frac{\sigma_s}{\mu}$$

и

$$v^3\left[\frac{b}{c}(\tau_s + e^{-\tau_s} - 1) + \frac{1}{2}\tau_s^2\right] = \alpha = \frac{(b+c)^3}{bc}\frac{A}{\mu^3},$$

из которых можно по заданной величине скорости v подсчитать величину работы A.

Замечая аналогично предыдущему, что

$$\frac{v}{\nu_s} = (\tau_s - 1 + e^{-\tau_s})^{-1} \quad \text{и} \quad \frac{\alpha}{\nu_s^3} = \frac{\frac{b}{c}(\tau_s + e^{-\tau_s} - 1) + \frac{1}{2}\tau_s^2}{(\tau_s - 1 + e^{-\tau_s})^3},$$

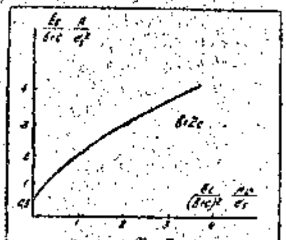
можно, задаваясь последовательными частными значениями τ_s, построить графически зависимость между безразмерными величинами

$$\frac{v}{\nu_s} = \frac{bc}{(b+c)^2}\frac{\mu v}{\sigma_s} \quad \text{и} \quad \frac{\alpha}{\nu_s^3} = \frac{bc}{b+c}\frac{A}{\sigma_s^2},$$

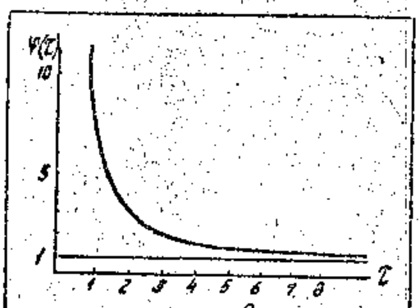
отправляясь от которых, легко перейти и к зависимости работы A от скорости деформирования v.

На фиг. 7 построен такой график для значения отношения $\frac{b}{c} = 2$.

Этот график справедлив лишь для достаточно малых скоростей деформирования, так как при больших скоростях произойдет уже внешнее



Фиг. 7



Фиг. 8

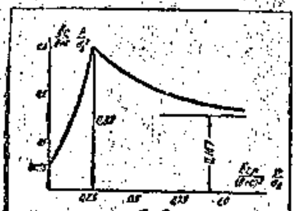
разрушение, и тогда следует пользоваться графиком, изображенным на фиг. 6.

Значение скорости деформирования, отделяющее область внутреннего разрушения от внешнего, можно найти, решая совместно два уравнения (15) и (17):

$$v\left[\frac{b}{c}(1-e^{-\tau_b})+\tau_b\right]=\nu_b$$

$$v(\tau_s-1+e^{-\tau_s})=\nu_s,$$

где следует положить $\tau_b=\tau_s$. Так, например, если попрежнему $\frac{b}{c}=2$ и, кроме того, $\sigma_b=3\sigma_s$, то будем иметь:



Фиг. 9

$$\frac{\nu_b}{\nu_s}=\frac{\sigma_b}{\sigma_s}=3$$

и, следовательно,

$$\varphi(\tau)=\frac{2(1+e^{-\tau})+\tau}{\tau-1+e^{-\tau}}=3.$$

График функции $\varphi(\tau)$ изображен на фиг. 8. Значение 3 функция $\varphi(\tau)$ принимает при $\tau=2{,}23$. Граничное значение скорости оказывается равным

$$v=\frac{\nu_b}{\frac{b}{c}(1+e^{-\tau_b})+\tau_b}\approx 0{,}25\ \nu_b.$$

Так как для приведенного примера

$$\frac{v}{\nu_b}=\frac{1}{3}\frac{v}{\nu_s},$$

то кривую зависимости работы, идущей на разрушение, от скорости деформирования v, точнее—кривую зависимости между безразмерными величинами

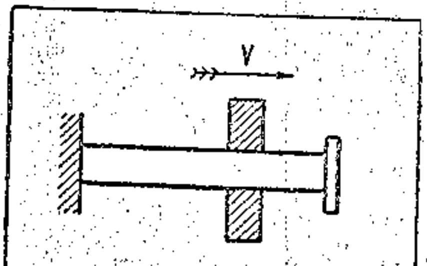
$$\frac{v}{\nu_b}=\frac{bc\mu v}{(b+c)^2}\frac{1}{\sigma_b} \quad \text{и} \quad \frac{a}{\nu_b^2}=\frac{bc}{b+c}\frac{A}{\sigma_b^2}$$

можно построить, соответственно изменив масштаб кривой внутреннего разрушения, изображенной на фиг. 7, и соединить ее с кривой внешнего разрушения (см. фиг. 6). Получающаяся кривая изображена на фиг. 9. Левая ее часть соответствует внутреннему разрушению, правая внешнему, а абсцисса точки излома кривой—граничному значению скорости.

Подобным же образом можно описать процесс разрушения и при изгибе. При этом изменились бы лишь константы основного уравнения, так как уравнения (4) и (10) вполне аналогичны.

7. Разрушение динамической нагрузкой

Пусть стержень из не вполне упругого материала подвергается действию растягивающего удара со стороны массы m, обладающей скоростью v (фиг. 10). Если пренебречь влиянием собственной массы стержня, то напряженное и деформированное состояния по его длине будут однородными.



Фиг. 10

Напряжение σ материала будет составлять величину $-\frac{m}{F}\frac{d^2u}{dt^2}$, где F—площадь сечения стержня, u—перемещение правого конца стержня. Так как

$$\frac{u}{l}=\varepsilon, \quad \text{то} \quad \sigma=-\frac{ml}{F}\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}.$$

С другой стороны, напряжение σ и относительное удлинение ε не вполне упругого стержня связаны соотношением (4)

$$\frac{d\sigma}{dt}+r\sigma=b\frac{d\varepsilon}{dt}+bn\varepsilon.$$

Подставляя сюда выражение для σ, получим диференциальное уравнение для определения относительного удлинения ε:

$$\frac{ml}{F}\frac{d^3\varepsilon}{dt^3}+\frac{ml}{F}r\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}+b\frac{d\varepsilon}{dt}+bn\varepsilon=0.$$

Так как в момент удара относительное удлинение ε и напряжение σ равны нулю, то, принимая этот момент за начало отсчета времени и замечая, что $\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{1}{l}\frac{du}{dt}$, получим для момента времени $t=0$:

$$\varepsilon=0, \quad \frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{v}{l}, \quad \frac{d^2\varepsilon}{dt^2}=0,$$

что и составит начальные условия диференциального уравнения. Общий интеграл этого уравнения имеет вид:

$$\varepsilon=C_1e^{\gamma_1 t}+C_2e^{\gamma_2 t}+C_3e^{\gamma_3 t},$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$—корни характеристического уравнения

$$\gamma^3+r\gamma^2+\frac{bF}{ml}(\gamma+n)=0.$$

Все коэфициенты этого уравнения положительны, следовательно, корни не могут быть положительными. Поэтому возможны два случая:

или все три корня отрицательны, или один корень отрицателен, а два других — сопряженно комплексные. Покажем, что в последнем случае действительная часть комплексных корней отрицательна.

Действительно, характеристическое уравнение можно переписать в виде:

$$a_0\gamma^3 + a_1\gamma^2 + a^2\gamma + a_3 = 0,$$

где $a_0 = 1$, $a_1 = r$, $a_2 = \frac{bF}{ml}$, $a_3 = \frac{bF}{ml}n$, причем (условие Рауса—Гурвитца

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 = \frac{bF}{ml}(r-n) > 0,$$

выполняется, так как ранее было показано, что коэффициент релаксации $r = \frac{b+c}{\mu}$ больше коэффициента последействия $n = \frac{c}{\mu}$.

обоих упомянутых случаях с течением времени относительное удлинение, в начальный момент возраставшее, так как $\dot{\varepsilon}_0 = \frac{v}{l} > 0$, будет в дальнейшем уменьшаться (либо апериодически — в том случае, когда все три корня характеристического уравнения отрицательны, либо будут иметь место затухающие колебания массы, производившей удар). При этом предполагается, что масса, производившая удар, остается после удара связанной с концом стержня.

Из начальных условий следует:

$$0 = C_1 + C_2 + C_3,$$
$$\frac{v}{l} = \gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 + \gamma_3 C_3,$$
$$0 = \gamma_1^2 C_1 + \gamma_2^2 C_2 + \gamma_3^2 C_3.$$

Решая систему линейных уравнений, получим:

$$C_1 = v\frac{\gamma_2^2 - \gamma_3^2}{(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_2-\gamma_3)(\gamma_3-\gamma_1)},$$
$$C_2 = v\frac{\gamma_3^2 - \gamma_1^2}{(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_2-\gamma_3)(\gamma_3-\gamma_1)},$$
$$C_3 = v\frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_2-\gamma_3)(\gamma_3-\gamma_1)}.$$

При этом для разных значений массы будут получаться различные значения минимальных разрушающих скоростей и различные значения кинетической энергии $\frac{mv^2}{2}$.

Может быть и так, что для одной и той же массы получатся две минимальные скорости — одна сравнительно небольшая, соответствующая внутреннему разрушению, и другая — значительно большая, соответствующая внешнему разрушению. Приведенные выше формулы слишком сложны, чтобы можно было исследовать математически этот вопрос в общем виде.