В кн.: Теория инвариантности в системах автоматического управления. Труды Второго Всесоюзного совещания, состоявшегося в Киеве 29 мая - 1 июня 1962 года. М.: Наука, 1964. 504 с.
с. 56-64

ОТН

А. Ю. Ишлинский

ИДЕИ ТЕОРИИ ИНВАРИАНТНОСТИ И ИНЕРЦИАЛЬНАЯ НАВИГАЦИЯ

1. Один из аспектов теории инвариантности [1] заключается в полной компенсации возмущений, воздействующих на систему автоматического регулирования или на какую-либо другую систему, поведение которой описывается совокупностью обыкновенных дифференциальных уравнений.

Полная компенсация становится возможной, если, например, возмущение воздействует на систему по двум каналам [2, 3]. Тогда параметры соответствующих звеньев этих каналов удается, как правило, подобрать так, чтобы воздействия, идущие по каналам, нейтрализовали друг друга.

Чаще всего второй канал создается искусственным путем с использованием в том или ином виде информации о величине возмущающего воздействия. Если такой информации получить нельзя, то компенсацию осуществить не удастся.

В некоторых же случаях, когда оба канала образуются как бы естественным образом, соответствующая информация не нужна, и компенсация осуществляется сама собой, без измерений текущих значений возмущения.

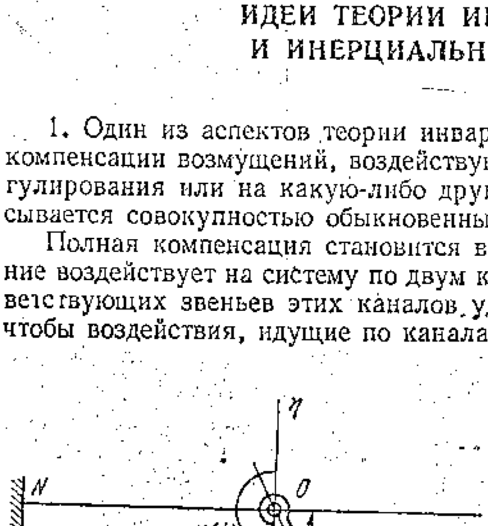

Рис. 1

Приведенные положения теории инвариантности, как будет показано ниже, позволяют уточнить принципиальные особенности инерциальной навигации.

Для иллюстрации идей компенсации возмущающих воздействий на механические системы обратимся вначале к двум примерам, полезным также и для уяснения теории инерциальной навигации (ряд других примеров см. в [4]).

2. Рассмотрим физический маятник с осью вращения, которая поступательно перемещается в горизонтальной плоскости (рис. 1). Уравнение малых колебаний такого маятника имеет вид

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} + mgl\alpha = -ml\frac{d^2s}{dt^2}, \qquad (1)$$

где α — угол отклонения маятника от положения равновесия при неподвижной оси вращения; J — его момент инерции относительно оси; m — масса маятника; l — расстояние между центром тяжести маятника и его осью;

g — ускорение силы тяжести;

$$s = s(t) \tag{2}$$

есть закон, по которому перемещается ось вращения маятника. Трение в подшипниках оси считается отсутствующим.

Правая часть уравнения (1) представляет собой величину суммарного момента сил инерции переносного движения маятника в сопутствующей вспомогательной системе координат $\xi\eta$ с началом в произвольной точке оси маятника и перемещающейся поступательно (см. рис. 1).

Упомянутый момент является возмущающим воздействием на маятник. Величина его полностью определяется законом (2). Если имеется мгновенная информация о текущих значениях функции $s = s(t)$ и представляется возможным без всякого промедления эту функцию дважды дифференцировать, то момент сил инерции можно полностью уравновесить. Для этой цели к оси маятника следует приложить искусственный момент

$$K(t) = k\frac{d^2s}{dt^2} \tag{3}$$

и коэффициент k выбрать так, чтобы имело место равенство

$$k = ml. \tag{4}$$

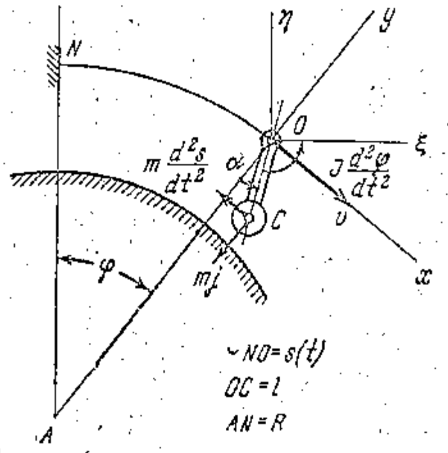

Рис. 2

Теперь на колебания маятника совершенно не будет влиять произвольное движение оси его подвеса (разумеется, при идеальном осуществлении равенств (3) и (4) и отсутствии трения). В частности, если маятник до начала движения его оси подвеса находился в состоянии равновесия, то он сохранит неизменное вертикальное расположение и при любых поступательных движениях этой оси в горизонтальной плоскости.

Равенство (4) является в данном случае условием полной компенсации, или условием инвариантности, т. е. независимости колебаний маятника от возмущений, вызванных движением его оси. Непосредственное воздействие сил инерции переносного поступательного движения на физический маятник явилось как бы первым каналом возмущения. Вторым же его каналом стал тракт использования информации о законе движения оси маятника для создания искусственным путем компенсирующего момента.

3. В п. 2 сферичность Земли не учитывалась. Рассмотрим теперь движение того же физического маятника с учетом кривизны Земли, принимая последнюю за невращающийся шар с радиально симметричным распределением плотности. Будем считать, что размеры маятника малы по сравнению с радиусом Земли. Пусть его ось подвеса перемещается поступательно и сохраняет неизменное расстояние R до центра Земли, а центр тяжести маятника остается в одной и той же диаметральной плоскости земного шара. Тогда (рис. 2) уравнение малых колебаний маятника представится в виде

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} + m\left(j - \frac{v^2}{R}\right)l\alpha = -ml\frac{d^2s}{dt^2} + J\frac{d^2\varphi}{dt^2}, \tag{5}$$

где α — угол отклонения маятника от плоскости, содержащей его ось и центр Земли; $s = s(t)$ — длина дуги, отсчитываемая от некоторого исходного расположения оси подвеса маятника до ее текущего положения; $\varphi = \varphi(t)$ —

угол между соответствующими радиусами круга радиуса R; j — ускорение тяготения,

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{6}$$

есть скорость перемещения оси подвеса маятника относительно невращающейся Земли. Остальные обозначения те же, что и в п. 2.

Если скорость v невелика по сравнению с первой космической скоростью

$$v_1 = \sqrt{jR}, \tag{7}$$

то ускорение тяготения практически равно ускорению силы тяжести g, и уравнение (5) можно заменить следующим:

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} + mgl\alpha = -ml\frac{d^2s}{dt^2} + J\frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{8}$$

Очевидно, что

$$s(t) = R\varphi(t) \tag{9}$$

и, следовательно, если

$$mlR = J, \tag{10}$$

то правая часть уравнения (8) тождественно обращается в нуль. При этом колебания маятника около своего среднего положения (направления к центру Земли) становятся не зависящими от того, по какому закону $s = s(t)$ будет перемещаться его ось подвеса. Они гармонические, и период их выражается формулой

$$T_s = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 84{,}4\ мин, \tag{11}$$

если R радиус Земли.

Маятник, параметры которого удовлетворяют условию инвариантности (10), был придуман М. Шулером еще в 1923 г. и носит его имя. Величина T_s называется периодом Шулера[1].

Возмущение, воздействующее на только что рассмотренный маятник, из-за движения его оси подвеса, как и в предыдущем случае, когда Земля предполагалась плоской, идет по двум каналам. Однако теперь оба канала представляют собой воздействие на маятник сил инерции, обусловленных перемещением системы координат, относительно которой изучаются колебания маятника. Такой системой является здесь система xy, ось x которой направлена в сторону увеличения дуги s, а ось y — по радиусу Земли (см. рис. 2). Угол α определяет положение маятника именно в этой системе координат.

Нетрудно убедиться, что выражения $-ml\frac{d^2s}{dt^2}$ и $J\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, составляющие правую часть уравнения (5), представляют собой соответственно моменты сил инерции, обусловленные с одной стороны перемещением начала системы координат xy и с другой — вращением этой системы относительно системы координат $\xi\eta$, оси которой ориентированы по неподвижным звездам (см. рис. 2). Как уже было показано выше, эти моменты при соблюдении условия инвариантности (10) уравновешивают друг друга.

4. Перейдем к вопросам инерциальной навигации и их связи с теорией инвариантности. В простейшем случае при движении объекта по дуге большого круга невращающейся Земли инерциальная навигация может быть осуществлена [5, 6] следующим образом (рис. 3). На кожухе гироскопа Γ

[1] Осуществление маятника Шулера в металле встречает пока непреодолимые технические трудности. Если, например, маятник Шулера изготовить в виде маховика диаметром в один метр, то расстояние l между его осью вращения и центром тяжести должно составлять величину порядка 0,04 *мк*. Это расстояние должно оставаться неизменным с точностью до долей ангстрема.

с собственным кинетическим моментом H располагается измеритель (или интегратор) ускорений $И$. Ось чувствительности измерителя λ должна быть перпендикулярна оси ротора гироскопа. В исходном положении последняя направлена к центру Земли, а ось чувствительности измерителя — соответственно по касательной к дуге большого круга. К гироскопу прилагаются искусственно создаваемые силы, которые вызывают прецессию оси его ротора в плоскости большого круга. Момент $M(t)$ этих сил относительно оси прецессии должен изменяться по закону

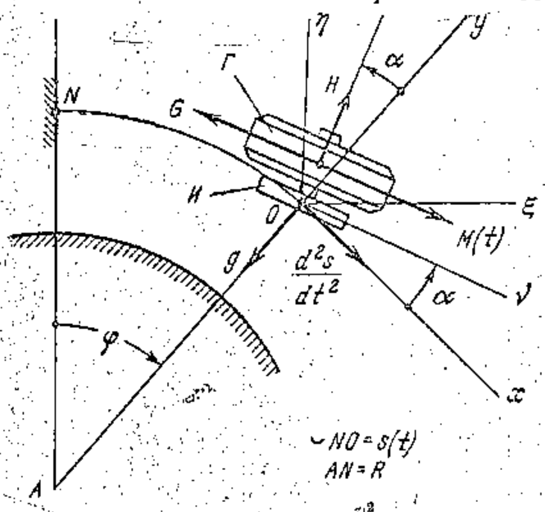

Рис. 3 $g=j\frac{v^2}{R}$

$$M(t)=\mu\int_0^t a(t)\,dt+M_0, \tag{12}$$

где $a(t)$ — текущее показание измерителя ускорений; μ, M_0 — некоторые постоянные параметры, величины которых определим несколько позже.

Если $s = s(t)$ — длина дуги большого круга между исходным положением гироскопа и его расположением в данное мгновение и α — угол отклонения оси ротора от направления к центру Земли, то скорость прецессии гироскопа ω по отношению к невращающейся системе координат $\xi\eta$ представится равенством

$$\omega=\frac{d\alpha}{dt}-\frac{1}{R}\frac{ds}{dt}. \tag{13}$$

Согласно прецессионной теории гироскопов (см. рис. 3) имеем [6]

$$\omega=-\frac{M(t)}{H} \tag{14}$$

и, следовательно,

$$\frac{d\alpha}{dt}-\frac{1}{R}\frac{ds}{dt}=-\frac{\mu}{H}\int_0^t a(t)\,dt-\frac{M_0}{H}. \tag{15}$$

Показание идеального измерителя ускорений $a(t)$ определяется суммой проекций на его ось чувствительности силы тяготения и сил инерции переносного движения, обусловленных перемещением корпуса измерителя относительно системы координат с началом в центре Земли и с осями, направленными на неподвижные звезды.

Имеем (см. рис. 3) при надлежащей градуировке измерителя

$$a(t)=\frac{d^2s}{dt^2}\cos\alpha+\left(j-\frac{v^2}{R}\right)\sin\alpha. \tag{16}$$

Допустим, как и в п. 3, что скорость v перемещения объекта относительно невращающейся Земли значительно меньше первой космической скорости v_1, определяемой формулой (7). Тогда, аналогично предыдущему, можно положить, что

$$j-\frac{v^2}{R}=j\left(1-\frac{v^2}{v_1^2}\right)\approx g, \tag{17}$$

где g — ускорение силы тяжести, принимаемое в дальнейшем за постоянное количество.

Считая угол α малым, получим на основании формул (16) и (17) с достаточной точностью, что

$$a(t) = \frac{d^2 s}{dt^2} + g\alpha. \tag{18}$$

Используя эту формулу в равенстве (15), придем к соотношению

$$\frac{d\alpha}{dt} - \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = -\frac{\mu}{H}\left[\frac{ds}{dt} - v_0 + g\int_0^t \alpha(t)\,dt\right] - \frac{M_0}{H}, \tag{19}$$

в котором v_0 — скорость объекта в начальное мгновение.

Выберем параметр μ таким, чтобы соблюдалось равенство

$$\frac{1}{R} = \frac{\mu}{H}. \tag{20}$$

Тогда соотношение (19) приведется к виду

$$\frac{d\alpha}{dt} + \frac{g}{R}\int_0^t \alpha(t)\,dt = \frac{v_0}{R} - \frac{M_0}{H}. \tag{21}$$

Отсюда после дифференцирования получим уравнение

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{R}\alpha = 0, \tag{22}$$

которому удовлетворяет угол α как функция времени.

Из уравнения (22) следует, что при условии движения объекта по дуге большого круга, в общем случае при произвольных начальных условиях, касающихся угла α и его производной по времени, ось ротора гироскопа будет совершать гармонические колебания с периодом Шулера T_s около направления к центру Земли.

Начальное значение угла α равно нулю, если ось ротора гироскопа в начальное мгновение была точно направлена к центру Земли.

Если, кроме того, параметр M_0 был подобран так, чтобы имело место равенство

$$\frac{v_0}{R} = \frac{M_0}{H}, \tag{23}$$

то, согласно соотношению (21), и начальное значение производной угла α по времени также будет равно нулю. В этом случае единственным решением дифференциального уравнения (22) окажется тождество

$$\alpha \equiv 0. \tag{24}$$

Таким образом, ось ротора будет все время направлена точно к центру Земли при произвольном законе движения объекта по дуге большого круга.

Если же $\alpha \equiv 0$, то в силу равенств (13), (14) и (20) получаем

$$\frac{ds}{dt} = \frac{R}{H}M(t) = \frac{1}{\mu}M(t), \tag{25}$$

и, следовательно, для отыскания пройденного расстояния по дуге большого круга невращающейся земной сферы достаточно проинтегрировать по времени величину момента $M(t)$. В результате, учитывая равенства (12) и условия (20) и (23), получим формулу

$$s = \int_0^t\int_0^t a(t)\,dt^2 + v_0 t. \tag{26}$$

5. С точки зрения теории инвариантности и в данном случае происходит компенсация посредством момента $M(t)$ возмущения ориентации гироскопа в подвижной системе координат xy (см. рис. 3) из-за вращения последней (при перемещении объекта по дуге большого круга). При этом равенство (20) можно рассматривать как условие инвариантности.

Действительно, вращение системы координат xy происходит с угловой скоростью

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} \qquad (27)$$

по часовой стрелке.

Движение гироскопа относительно этой системы происходит так, как будто она не вращается, но к гироскопу приложены кориолисовы силы инерции. Последние сводятся к паре, называемой обычно гироскопическим моментом; величина последнего определяется формулой

$$G = H\frac{d\varphi}{dt} = \frac{H}{R}\frac{ds}{dt}. \qquad (28)$$

Вектор гироскопического момента направлен в сторону отрицательной части оси x.

С другой стороны, искусственно создаваемый момент $M(t)$ при $\alpha \equiv 0$ согласно формулам (12), (16), условию (23) и равенству (20) представляется в виде

$$M(t) = \mu\int_0^t \frac{d^2s}{dt^2}\,dt + \mu v_0 = \mu\frac{ds}{dt} \qquad (29)$$

и имеет направление в сторону положительной части оси x.

Налицо вновь два канала воздействия на гироскоп: один из них «естественный» — гироскопический момент G; другой — «искусственный» — момент $M(t)$. При выполнении условия (20) они уравновешивают («компенсируют») друг друга.

6. Уточним постановку задачи об инерциальной навигации, считая, что к гироскопу приложен, кроме компенсирующего момента $M(t)$, еще некоторый неизвестный по величине возмущающий момент $M^*(t)$, обусловленный несовершенством изготовления гироскопа. Соотношение (21) заменится следующим:

$$\frac{d\alpha}{dt} + \frac{g}{R}\int_0^t \alpha(t)\,dt = \frac{v_0}{R} - \frac{M_0 + M^*(t)}{H}. \qquad (30)$$

Предположим, что возмущающий момент $M^*(t)$ является постоянной величиной M^*. Тогда после дифференцирования соотношения (30) по времени вновь придем к уравнению (22). Следовательно, наличие постоянного возмущающего момента M^* не изменяет среднего положения, относительно которого происходят гармонические колебания оси ротора. Они по-прежнему будут происходить с периодом Шулера T_s около направления к центру Земли. Тем не менее вследствие того, что величина возмущающего момента M^* неизвестна, точная инерциальная навигация в этом случае принципиально не осуществима.

В самом деле, формула (25), согласно которой пройденное расстояние $s(t)$ определяется в результате интегрирования текущего значения коррекционного момента $M(t)$, должна применяться и при наличии возмущающего момента M^*. Однако вместо точного значения пройденного расстояния s она будет в данном случае указывать некоторую величину σ, называемую на практике приборным расстоянием. Учитывая формулу (18), получим теперь

$$\sigma = \int_0^t \int_0^t \left(\frac{d^2 s}{dt^2} + g\alpha \right) dt^2 + v_0 t, \tag{31}$$

или после очевидных упрощений, считая, что $s(0) = 0$,

$$\sigma = s + g \int_0^t \int_0^t \alpha(t)\, dt^2. \tag{32}$$

Входящий сюда двухкратный интеграл можно определить, интегрируя соотношение (30) по времени. Приняв, кроме того, во внимание равенство (23), имеем

$$\alpha(t) + \frac{g}{R} \int_0^t \int_0^t \alpha(t)\, dt^2 = -\frac{M^*}{H} t + \alpha_0, \tag{33}$$

где введено обозначение α_0 для величины угла α отклонения оси ротора гироскопа от радиуса Земли в начальный момент времени.

Исключая из соотношений (32) и (33) упомянутый двухкратный интеграл, приходим к окончательной формуле

$$s = \sigma + \frac{RM^*}{H} t + R\alpha(t) - R\alpha_0. \tag{34}$$

Выше было показано, что и при наличии постоянного возмущающего момента M^* функция $\alpha(t)$ является периодической. Следовательно, в соответствии с формулой (34), разность между фактическим расстоянием s и величиной σ, которую вырабатывают приборы инерциальной навигации, систематически возрастает за счет члена

$$\delta^*(t) = \frac{RM^*}{H} t. \tag{35}$$

Произвести полную или частичную компенсацию этого члена уже не представляется возможным, так как в описанной простейшей системе инерциальной навигации принципиально нельзя организовать второй канал воздействия на нее возмущающего момента.

Такое же заключение можно сделать и относительно более сложных систем инерциальной навигации, учитывающих вращение Земли при произвольном перемещении движущегося объекта. Никакие схемы не могут скомпенсировать не поддающиеся измерению уходы гироскопов, вызванные несовершенством их изготовления. Тем самым организация второго канала воздействия на систему инерциальной навигации оказывается невозможной.

7. Отметим одну особенность описанной системы инерциальной навигации. Согласно формуле (32), разность между фактическим расстоянием s и приборным σ, т. е. ошибка системы, представляется двукратным интегралом

$$\delta(t) = s - \sigma = -g \int_0^t \int_0^t \alpha(t)\, dt^2. \tag{36}$$

Из последней формулы следует, что в начальный момент времени $t = 0$ сама функция $\delta(t)$ и ее первая производная равны нулю, а вторая и третья производные выражаются равенствами

$$\frac{d^2\delta(0)}{dt^2} = -g\alpha(0), \quad \frac{d^3\delta(0)}{dt^3} = -g\frac{d\alpha(0)}{dt}. \tag{37}$$

В соответствии со строкой Маклорена для малых значений времени t имеем для функции $\delta(t)$ следующее приближенное выражение:

$$\delta(t) = -\frac{1}{2} g\alpha(0) t^2 - \frac{1}{6} g \frac{d\alpha(0)}{dt} t^3. \tag{38}$$

Ошибка системы инерциальной навигации в области малых значений t уменьшится, если в начальное мгновение ось собственного вращения ротора гироскопа будет точно направлена по радиусу Земли. Тогда и формуле (38) надо положить

$$\alpha(0) = 0. \tag{39}$$

Заметим, что соотношение (30) при учете равенства (23) приводит при $t = 0$ к формуле

$$\frac{d\alpha(0)}{dt} = -\frac{M^*(0)}{H}. \tag{40}$$

Таким образом, если в выражении (38) принять во внимание равенства (39) и (40), то для ошибки системы инерциальной навигации $\delta(t)$ получим приближенное выражение

$$\delta(t) = \frac{gM^*(0)}{6H} t^3, \tag{41}$$

которым можно пользоваться, разумеется, лишь для малых значений аргумента t.

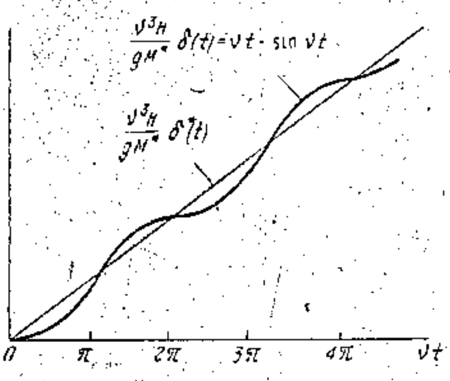

Рис. 4

$\frac{\nu^3 H}{gM^*}\delta^*(t) = \nu t$

Согласно формуле (41), можно ожидать, что при таких значениях времени t ошибка $\delta(t)$ будет сравнительно невелика, несмотря на наличие возмущающего момента M^*.

Рассмотрим в качестве примера случай постоянного возмущающего момента M^*. При этом, как уже указывалось в п. 6, справедливо уравнение (22). Его решение при начальных условиях (39) и (40) имеет вид

$$\alpha(t) = -\frac{M^*}{\nu H}\sin\nu t, \tag{42}$$

где

$$\nu = \sqrt{\frac{g}{R}} = 0{,}001240\ сек^{-1}; \tag{43}$$

ν — так называемая частота Шулера.

Подставляя решение (42) в формулу (36), получим для ошибки $\delta(t)$ выражение

$$\delta(t) = \frac{gM^*}{\nu^3 H}(\nu t - \sin\nu t). \tag{44}$$

Первый член разложения правой части последнего равенства по степеням аргумента t совпадает с правой частью равенства (41). График функции (44) имеет вид, изображенный на рис. 4.

Возьмем аргумент t равным 14 *мин* и 4 *сек*, т. е. одной шестой части периода Шулера (84,4 *мин*) и примем $M^* = 0{,}1$ *гсм*, $H = 100\,000$ *г·см·сек*, $g = 9{,}8$ *м·сек*$^{-2}$, $R = 6370$ *км*. Тогда получим по формуле (44) ошибку инерциальной навигации системы, равную 930 *м*, а по приближенной формуле (41) — соответственно 981 *м*.

Если же исходить из выражения (35) для систематической ошибки инерциальной навигации $\delta^*(t)$, т. е. без учета влияния изменения угла α, то получим, при тех же числовых данных, 5380 *м*, т. е. значительно больше, чем результат, вычисленный по формуле (44).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Кулебакин. Высококачественные инвариантные системы регулирования.— Сб. «Теория инвариантности и ее применение в автоматических устройствах». Труды совещания, состоявшегося в Киеве 16—20 октября 1958 г. М., 1959, стр. 11.
2. Б. Н. Петров. О реализуемости условий инвариантности.— Сб. «Теория инвариантности и ее применение в автоматических устройствах». Труды совещания, состоявшегося в Киеве 16—20 октября 1958 г. М., 1959, стр. 59.
3. А. Ю. Ишлинский. Вступительное слово при открытии совещания.— Сб. «Теория инвариантности и ее применение в автоматических устройствах». Труды совещания, состоявшегося в Киеве 16—20 октября 1958 г. М., 1959, стр. 5.
4. А. Ю. Ишлинский. Полная компенсация внешних возмущений, вызванных маневрированием в гироскопических системах.— Сб. «Теория инвариантности и ее применение в автоматических устройствах». Труды совещания, состоявшегося в Киеве 16—20 октября 1958 г. М., 1959, стр. 81.
5. А. Ю. Ишлинский. Об уравнениях задачи определения местоположения движущегося объекта посредством гироскопов и измерителей ускорений.— ПММ, 1957, т. XXI, вып. 6.
6. А. Ю. Ишлинский. Механика гироскопических систем. М., Изд-во АН СССР, 1963.