

Подложенными линиями ζ и η при
 ζ — прямой,
 η — кривой.
Положение
тремя углами

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩЕНИЯ НА СТРУНЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ПОЛОСТЬЮ, ЦЕЛИКОМ НАПОЛНЕННОЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

А. Ю. Ишлинский, М. Е. Темченко

(Москва, Киев)

В предлагаемом исследовании устойчивости вращения на струне твердого тела с полостью, наполненной идеальной жидкостью, вновь применяется метод, развитый в [1]. Сущность этого метода заключается в описании движения жидкости по отношению к системе координат, связанной с самим твердым телом, совершающим движение при воздействии на него жидкости, собственной чистоты, а также сил реакции связи.

Задача, рассмотренная ниже, в случае отсутствия жидкости была предметом исследования в [2]. Другим ее предельным случаем при длине струны, равной нулю, является известная задача С. Л. Соболева, исследованная в [3]. Отдельные приемы этих исследований ниже используются.

1. Пусть симметричное твердое тело, будучи подвешенным на идеально гибкой, нерастяжимой и безинерционной струне длиною l , в невозмущенном движении вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси (фиг. 1). Внутри тела имеется полость формы эллипсоида вращения, целиком заполненная идеальной несжимаемой жидкостью. Оси симметрии полости и самого тела совпадают. В невозмущенном движении жидкость вращается вместе с телом, образуя с ним как бы единое твердое целое. Требуется исследовать устойчивость такого стационарного движения.

2. Обратимся вначале к выводу дифференциальных уравнений движения рассматриваемого тела, предполагая, что это движение мало отличается от упомянутого стационарного вращения вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω .

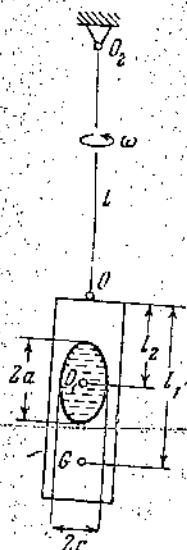
Введем неподвижную систему координат $\xi\eta\zeta$ с вертикально направленной осью ζ и началом O_2 в точке крепления струны к неподвижному основанию, а также поступательно перемещающуюся систему $\xi^0\eta^0\zeta^0$ с началом O в точке крепления тела к струне (фиг. 2).

Соответствующие оси этих систем параллельны.

В точке O расположим также начало системы координат xuy , жестко связанной с телом. Ось z этой системы направим по оси симметрии тела и полости, а оси x и y расположим в плоскости, перпендикулярной оси z , так, чтобы они вместе с этой осью образовывали правую систему координат.

проекцией оси
оду осью z и
и вспомогатель-
жающейся в в

Таблица
или (что то
имеет вид



Фиг. 1

Нетрудно
ловой скорос-
дующими:

Для даль-
точки O — кр-

$$\xi_0 = -$$

ЗЕРДОГО ТЕЛА
НАПОЛНЕННОЙ
СТЬЮ
КО

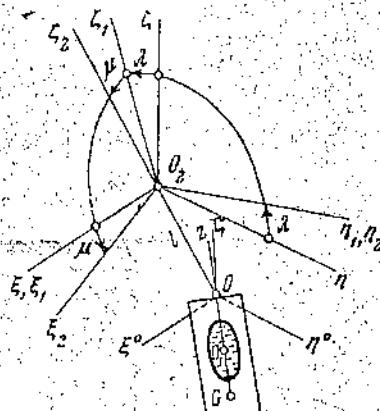
струне твердого тела является метод, разви-
тия жидкости по-
тому, совершающим
ги, а также сил реак-
ции была предметом
струны, равной нулю.
I. Отдельные приемы

использованным на идеаль-
ную l , в невозму-
щаемостью ω вокруг
тела. имеется по-
спомогательном заполнен-
тью. Оси симмет-
ии тела, образуя
Требуется иссле-
дование движения.
дифференциальных
о тела, предпола-
сия от упомянутой
вертикальной оси.

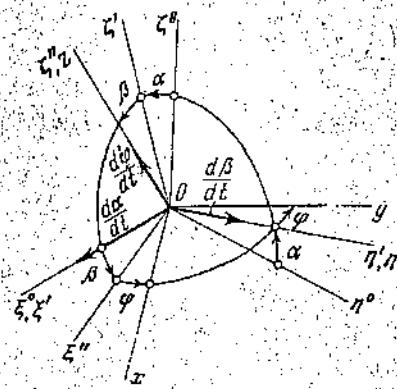
единят $\xi\eta\zeta$ с вер-
хним O_2 в точке
к повороту; а также
ему $\xi^0\eta^0\zeta^0$ с на-
струне (фиг. 2),
параллельны.
нат xyz , жестко
имметрии тела и
кулярной оси z ,
о систему коор-

Положение струны по отношению к системе $\xi\eta\zeta$ определим двумя уг-
лами λ и μ ; при этом λ — угол между осью ζ и проекцией на плоскость
 $\eta\zeta$ прямой, направленной по струне вверх; μ — угол между этой пря-
мой и плоскостью $\eta\zeta$ (фиг. 2).

Положение твердого тела по отношению к системе $\xi^0\eta^0\zeta^0$ определим
трех углами Эйлера — Крылова (фиг. 3): углом α между осью ζ^0 и



Фиг. 2



Фиг. 3

проекцией оси симметрии тела (оси z) на плоскость $\eta^0\zeta^0$, углом β — меж-
ду осью z и той же плоскостью $\eta^0\zeta^0$ и, наконец, углом φ между осью x
и вспомогательной осью ζ'' , образующей прямой угол с осью z и содер-
жащейся в плоскости ξ^0z .

Таблица косинусов углов между осями систем координат $\xi\eta\zeta$ и xyz
или (что то же) между осями $\xi^0\eta^0\zeta^0$ и xyz в рассматриваемом случае
имеет вид

$$\begin{array}{ll} x & \cos \beta \cos \varphi \quad \sin \alpha \sin \beta \cos \varphi + \\ & + \cos \alpha \sin \varphi \quad - \sin \beta \cos \alpha \cos \varphi + \\ y & -\cos \beta \sin \varphi \quad -\sin \alpha \sin \beta \sin \varphi + \\ & + \cos \alpha \cos \varphi \quad \sin \beta \cos \alpha \sin \varphi + \\ z & \sin \beta \quad -\sin \alpha \cos \beta \quad \cos \alpha \cos \beta \end{array} \quad (2.1)$$

Нетрудно убедиться, используя фиг. 3, что проекции ω_x , ω_y и ω_z уг-
лововой скорости системы координат xyz на ее же собственные оси будут сле-
дующими:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{d\alpha}{dt} \cos \beta \cos \varphi + \frac{d\beta}{dt} \sin \varphi \\ \omega_y &= -\frac{d\alpha}{dt} \cos \beta \sin \varphi + \frac{d\beta}{dt} \cos \varphi \\ \omega_z &= \frac{d\alpha}{dt} \sin \beta + \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для дальнейшего полезно также определить в системе $\xi\eta\zeta$ координаты
точки O — крепления тела к струне. Имеем

$$\xi_0 = -l \sin \mu, \quad \eta_0 = l \cos \mu \sin \lambda, \quad \zeta_0 = l \cos \mu \cos \lambda \quad (2.3)$$

Выражение для живой силы твердого тела можно представить в виде

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2 + m \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_G & y_G & z_G \\ (v_0)_x & (v_0)_y & (v_0)_z \end{vmatrix} + \frac{1}{2} [(A + ml_1^2)(\omega_x^2 + \omega_y^2) + C\omega_z^2] \quad (2.4)$$

Здесь m — масса твердого тела; $A + ml_1^2 = B + ml_1^2$ и C — его моменты инерции соответственно относительно осей x , y и z ; v_0 — абсолютная скорость начала координат O ; x_G , y_G , z_G — координаты центра тяжести тела в системе xyz ; l_1 — расстояние от центра тяжести тела до точки крепления его к струне (фиг. 1).

Учитывая выражение (2.4), формулы (2.2) и (2.3), получим явное представление живой силы через обобщенные координаты α , β , λ , μ и обобщенные скорости $d\alpha/dt$, $d\beta/dt$, $d\lambda/dt$, $d\mu/dt$, $d\varphi/dt$ (обобщенная координата φ — циклическая), именно

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} m \left[l^2 \left(\frac{d\mu}{dt} \right)^2 + l^2 \cos^2 \mu \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 \right] + ml_1 l \frac{d\alpha}{dt} \cos \beta \left[\frac{d\mu}{dt} \sin \mu \sin (\alpha - \lambda) + \right. \\ & \left. + \frac{d\lambda}{dt} \cos \mu \cos (\alpha - \lambda) \right] + ml_1 l \frac{d\beta}{dt} \left[\frac{d\mu}{dt} \cos \beta \cos \mu + \right. \\ & \left. + \frac{d\mu}{dt} \sin \mu \sin \beta \cos (\alpha - \lambda) - \frac{d\lambda}{dt} \cos \mu \sin \beta \sin (\alpha - \lambda) \right] + \\ & + \frac{1}{2} (A + ml_1^2) \left[\left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \cos^2 \beta + \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} C \left[\frac{d\alpha}{dt} \sin \beta + \frac{d\varphi}{dt} \right]^2 \quad (2.5) \end{aligned}$$

Составим теперь уравнения движения твердого тела посредством второй методы Лагранжа. Ограничиваюсь малыми первого порядка относительно координат λ , μ , α , β и их производных по времени, придем к следующей совокупности линейных дифференциальных уравнений в постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} ml \left(l \frac{d^2\lambda}{dt^2} + l_1 \frac{d^2\alpha}{dt^2} \right) &= Q_\lambda, \quad ml \left(l \frac{d^2\mu}{dt^2} + l_1 \frac{d^2\beta}{dt^2} \right) = Q_\mu, \\ A \frac{d^2\alpha}{dt^2} + C\beta \frac{d^2\varphi}{dt^2} + C \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\beta}{dt} + ml_1 \left(l \frac{d^2\lambda}{dt^2} + l_1 \frac{d^2\alpha}{dt^2} \right) &= Q_\alpha, \quad (2.6) \\ A \frac{d^2\beta}{dt^2} - C \frac{d\alpha}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + ml_1 \left(l \frac{d^2\mu}{dt^2} + l_1 \frac{d^2\beta}{dt^2} \right) &= Q_\beta, \\ C \frac{d}{dt} \frac{d\varphi}{dt} &= Q_\varphi. \end{aligned}$$

3. Правые члены уравнений (2.6) представляют собой обобщенные силы, относящиеся к выбранным новым координатам твердого тела. Они являются коэффициентами при вариациях соответствующих обобщенных координат в выражении элементарной работы δW действующих на тело активных сил при его произвольном возможном перемещении. Имеем [4]

$$\delta W = P \delta r_0 + L_0 \delta \gamma \quad (3.1)$$

где P — главный вектор всех активных сил, приложенных к телу, а L_0 — их главный момент относительно точки O ; δr_0 — возможное смещение точки O ; $\delta \gamma$ — вектор возможного поворота тела.

Обозначим
 L_α , L_β , L_φ — си-
осей ξ^2 , η^1 и z^1 .
Тогда при

или, при исчи-
также малыми

$$\delta W = l$$

Из последне-

$$Q_\lambda = l(P_n +$$

Активными с-
воздействия на т-
следует, что обоб-
собой сумму мом-
Однако, в силу с-
ного давления ж-

Учитывая ·
 α , β , λ и μ , урав-

$$ml \left(l \frac{d^2\lambda}{dt^2} +$$

$$ml \left(l \frac{d^2\mu}{dt^2} +$$

$$(A + ml_1^2) \frac{d^2\varphi}{dt^2} +$$

$$(A + ml_1^2) \frac{d^2\beta}{dt^2} +$$

В этих ура-
 g — ускорение

$$F_x = \iint_a p^* \cos$$

проецируя на оси

и в свою оче-

$$M_x = \iint_a (p^* y \cos$$

— проекции со-
выше сил, относ-
(3.6) и (3.7) веде-
ляющие косину
текущие координ

3 Прикладная мате-

о представить в виде

$$\omega_x^2 (\omega_x^2 + \omega_y^2) + C \omega_z^2] \quad (2.4)$$

$+ ml_1^2$ и C — его
 x, y и z ; r_0 — або-
координаты центра
ра тяжести тела до

получим явное пред-
 $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ и обобщен-
ченная координата.

$$\begin{aligned} & \sin \mu \sin (\alpha - \lambda) + \\ & \cos \mu + \\ & [\alpha - \lambda] + \\ & \sin \beta + \frac{d\phi}{dt}]^2 \quad (2.5) \end{aligned}$$

а посредством вто-
рого порядка отно-
з времени, приDEM к
уравнений с по-

$$\begin{aligned} & = Q_\mu \\ & = Q_\alpha \quad (2.6) \end{aligned}$$

$$Q_\beta$$

обобщенные силы,
для тела. Они яв-
ляются обобщенными
силами, действую-
щими на тело.

$$\begin{aligned} & \text{имеем [4]} \\ & \text{и к телу, а } L_0 \text{ —} \\ & \text{текущее смещение} \quad (3.1) \end{aligned}$$

Обозначим через P_ξ, P_η, P_ζ проекции вектора P на оси ξ, η, ζ и через $L_\alpha, L_\beta, L_\phi$ — суммы моментов активных сил, соответственно относительно осей ξ°, η° и z (фиг. 3).

Тогда при малых углах α и β получим для δW выражение

$$\delta W = P_\xi \delta \xi_0 + P_\eta \delta \eta_0 + P_\zeta \delta \zeta_0 + L_\alpha \delta \alpha + L_\beta \delta \beta + L_\phi \delta \phi \quad (3.2)$$

или, при использовании формул (2.3), считая, как и ранее углы λ и μ также малыми

$$\delta W = l(P_\eta + \lambda P_\zeta) \delta \lambda + l(P_\zeta \mu - P_\xi) \delta \mu + L_\alpha \delta \alpha + L_\beta \delta \beta + L_\phi \delta \phi \quad (3.3)$$

Из последнего выражения следует

$$Q_\lambda = l(P_\eta + \lambda P_\zeta), \quad Q_\mu = l(P_\zeta \mu - P_\xi), \quad Q_\alpha = L_\alpha, \quad Q_\beta = L_\beta, \quad Q_\phi = L_\phi \quad (3.4)$$

Активными силами, действующими на тело, являются сила тяжести mg и силы воздействия на тело со стороны заключенной в нем жидкости. Отсюда, в частности, следует, что обобщенная сила Q_ϕ равна нулю. Действительно, она представляет собой сумму моментов силы тяжести и сил давления жидкости относительно оси z . Однако, в силу симметрии, центр тяжести тела расположен на оси z , а вектор удельного давления жидкости на тело всюду эту ось пересекает.

Учитывая таблицу косинусов (2.1), формулы (3.3) и малость углов α, β, λ и μ , уравнения движения (2.6) можно представить в виде

$$\begin{aligned} ml \left(l \frac{d^2 \lambda}{dt^2} + l_1 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \right) &= -mgl\lambda + l[F_x \sin \varphi + F_y \cos \varphi - F_z \alpha] + lF_z \lambda \\ ml \left(l \frac{d^2 \mu}{dt^2} + l_1 \frac{d^2 \beta}{dt^2} \right) &= -mgl\mu - l[F_x \cos \varphi - F_y \sin \varphi + F_z \beta] + lF_z \mu \\ (A + ml_1^2) \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + ml_1 l \frac{d^2 \lambda}{dt^2} + C \frac{d\phi}{dt} \frac{d\beta}{dt} &= -mgl_1 \alpha + M_x \cos \varphi - M_y \sin \varphi \\ (A + ml_1^2) \frac{d^2 \beta}{dt^2} + ml_1 l \frac{d^2 \mu}{dt^2} - C \frac{d\phi}{dt} \frac{d\alpha}{dt} &= -mgl_1 \beta + M_x \sin \varphi + M_y \cos \varphi \\ C \frac{d}{dt} \frac{d\phi}{dt} &= 0 \quad (3.5) \end{aligned}$$

В этих уравнениях, помимо величин, уже встречавшихся ранее, g — ускорение силы тяжести и

$$F_x = \iint_{\sigma} p^* \cos xv d\sigma, \quad F_y = \iint_{\sigma} p^* \cos yv d\sigma, \quad F_z = \iint_{\sigma} p^* \cos zv d\sigma \quad (3.6)$$

— проекции на оси x, y и z главного вектора сил давления жидкости на тело.

В свою очередь,

$$M_x = \iint_{\sigma} (p^* y \cos zv - p^* z \cos yv) d\sigma, \quad M_y = \iint_{\sigma} (p^* z \cos xv - p^* x \cos zv) d\sigma \quad (3.7)$$

— проекции соответственно на оси x и y главного момента упомянутых выше сил относительно точки подвеса O . Интегрирование в соотношениях (3.6) и (3.7) ведется по границе полости σ ; $\cos xv, \cos yv$ и $\cos zv$ — направляющие косинусы внешней нормали v к поверхности полости; x, y и z — текущие координаты элемента поверхности $d\sigma$.

3 Прикладная математика и механика, № 1

Формулы (3.6) и (3.7) (см. [5]) можно заменить следующими:

$$F_x = \iiint \frac{\partial p^*}{\partial x} d\tau, \quad F_y = \iiint \frac{\partial p^*}{\partial y} d\tau, \quad F_z = \iiint \frac{\partial p^*}{\partial z} d\tau \quad (3.8)$$

$$M_x = \iiint \left(y \frac{\partial p^*}{\partial z} - z \frac{\partial p^*}{\partial y} \right) d\tau, \quad M_y = \iiint \left(z \frac{\partial p^*}{\partial x} - x \frac{\partial p^*}{\partial z} \right) d\tau \quad (3.9)$$

Здесь укло интегрированию проходит по всему объему полости τ .

4. Для определения давления p^* внутри жидкости, как функции координат x, y, z и времени t , следует обратиться к уравнениям движения жидкости по отношению к подвижной системе координат xyz , жестко связанный с твердым телом. В этих уравнениях будем считать малыми проекции u_x, u_y, u_z относительной скорости какой-либо частицы жидкости и их производные по координатам. Пренебрегая, кроме того, произведениями упомянутых малых величин, получим

$$\frac{du_x}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + w_x^e - w_x^c - g \cos \zeta x \quad (xyz) \quad (4.1)$$

Символ (xyz) означает, что две другие формулы получаются аналогичной приведенной; w_x^e, w_y^e, w_z^e — проекции на оси x, y, z переносного и w_x^c, w_y^c, w_z^c — кориолисовы ускорения частицы жидкости; син ζ , син ψ , син ξz — направляющие косинусы оси ζ в системе координат xyz . Последние с точностью до членов второго порядка относительно малых углов α и β равны соответственно величинам $\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi, \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi$ и 1 (фиг. 3 и (2.1)). Для проекций переносного ускорения имеем формулы

$$w_x^e = w_x^0 + \frac{d\omega_y}{dt} z - \frac{d\omega_z}{dt} y + \omega_x (x \omega_x + y \omega_y + z \omega_z) - \omega^2 x \quad (xyz) \quad (4.2)$$

Здесь w_x^0, w_y^0, w_z^0 — проекции на оси x, y, z абсолютного ускорения точки O — начала системы координат xyz , которые с точностью до малых второго порядка относительно производных углов α, β, λ и μ представляются выражениями

$$w_x^0 = -l \frac{d^2 \mu}{dt^2} \cos \varphi + l \frac{d^2 \lambda}{dt^2} \sin \varphi, \quad w_y^0 = l \frac{d^2 \mu}{dt^2} \sin \varphi + l \frac{d^2 \lambda}{dt^2} \cos \varphi, \quad w_z^0 = 0 \quad (4.3)$$

С той же точностью, согласно формулам (2.2), имеем

$$\omega_x = \frac{da}{dt} \cos \varphi + \frac{d\beta}{dt} \sin \varphi, \quad \omega_y = -\frac{da}{dt} \sin \varphi + \frac{d\beta}{dt} \cos \varphi, \quad \omega_z = \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

Из последнего уравнения (3.5) следует, что $\omega = \text{const}$ и, если опустить несущественную константу, $\Phi = \omega t$. Опуская, кроме того, в выражениях (4.2) члены второго порядка относительно ω_x и ω_y (имеющих порядок величин da/dt и $d\beta/dt$), а также члены, содержащие производную ω_z по времени, получим

$$\begin{aligned} w_x^e &= -l \frac{d^2 \mu}{dt^2} \cos \varphi + l \frac{d^2 \lambda}{dt^2} \sin \varphi + \frac{d\omega_z}{dt} z + \omega \omega_x z - \omega^2 x \\ w_y^e &= l \frac{d^2 \mu}{dt^2} \sin \varphi + l \frac{d^2 \lambda}{dt^2} \cos \varphi - \frac{d\omega_x}{dt} z + \omega \omega_y z - \omega^2 y \\ w_z^e &= \frac{d\omega_x}{dt} y - \frac{d\omega_y}{dt} x + \omega \omega_x x + \omega \omega_y y \end{aligned} \quad (4.5)$$

Проекции кор

$$w_x^c = 2(\omega_y u_z - \omega_z u_y)$$

Здесь также сл

$$\omega_y, \text{ и положить об}$$

С учетом форм

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} +$$

В них

$$p_1 = p^* + \rho [\omega z (x$$

$$+ y (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi$$

и $\omega_x, \omega_y, w_x^0, w_y^0, u$

Функции u_x, u_y , и

стремимости

и граничному усл

и

Последнее озна

ности частицы жи

маль к ней,

5. Следяя С. Л.

$$u_x = U_x(t)(z + l_2);$$

Здесь $U_x(t)$ и l

l_2 — расстояние м

системы координат

Обозначим бук

аллипсоидальной п

и

а направляющие к

дующими:

$$\cos xv$$

Путем непосред

ничное условие (4.1)

следние удовлетво

1 Ср. также замеч

куюющим

$$\iiint \frac{\partial p^*}{\partial z} dt \quad (3.8)$$

$$-x \frac{\partial p^*}{\partial z} dt \quad (3.9)$$

объему полости т., как функции координат движения в системе xyz , жестко связать малыми проекциями жидкости и их производными

$$(wz) \quad (4.1)$$

получаются цилиндрические уравнения: $\cos \zeta x$, $\cos \zeta y$, $\sin \zeta z$. Последние определяются малыми углами α и β : $\cos \varphi + \beta \sin \varphi$ и $1 - \alpha \cos \varphi - \beta \sin \varphi$

$$-\omega_x^2 w - (wz) \quad (4.2)$$

центробежного ускорения приводят к формуле

$$\frac{\lambda}{\rho} \cos \varphi, \quad w_z^0 = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_z \quad (4.4)$$

и, если опустить члены, в выражениях имеющих порядок производной ω_z :

$$-\omega_x^2 x \quad (4.5)$$

$$-\omega_y^2 y \quad (4.5)$$

Проекции кориолисона ускорения на оси x , y и z будут равны [4]:

$$v_x^c = 2(\omega_y u_z - \omega_z u_y), \quad v_y^c = 2(\omega_z u_x - \omega_x u_z), \quad v_z^c = 2(\omega_x u_y - \omega_y u_x) \quad (4.6)$$

Здесь также следует опустить члены, содержащие множителями ω_x и ω_y , и положить $\omega_z = \omega$.

С учетом формул (4.2) и (4.6) уравнения (4.1) приводятся к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} - 2\omega u_y &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} - 2z \frac{d\omega_y}{dt}, \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + 2\omega u_x &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial y} + 2z \frac{d\omega_x}{dt}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

В них

$$(4.8)$$

$$p_1 = p^* + \rho [\omega z (x\omega_x + y\omega_y) - 1/2\omega^2(x^2 + y^2)] + \rho g [x(\alpha \sin \varphi - \beta \cos \varphi) + y(\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi) + z] + \rho(xw_x^0 + yw_y^0 + zw_z^0) + \rho z (y \frac{d\omega_x}{dt} - x \frac{d\omega_y}{dt})$$

и ω_x , ω_y , w_x^0 , w_y^0 , w_z^0 определяются согласно равенствам (4.3) и (4.4).

Функции u_x , u_y , u_z должны, кроме того, удовлетворять условию несжимаемости

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (4.9)$$

и граничному условию

$$u_x \cos xv + u_y \cos yv + u_z \cos zv = 0 \quad (4.10)$$

Последнее означает обращение в нуль проекции относительной скорости частицы жидкости, соприкасающейся с границей полости, на нормаль к ней.

5. Следуя С. Л. Соболеву [3], ищем u_x , u_y и u_z в виде

$$u_x = U_x(t)(z + l_2), \quad u_y = U_y(t)(z + l_2), \quad u_z = -\frac{c^2}{a^2} [xU_x(t) + yU_y(t)] \quad (5.1)$$

Здесь $U_x(t)$ и $U_y(t)$ — функции времени, подлежащие определению; l_2 — расстояние между центром эллипсоидальной полости и началом системы координат xyz (фиг. 1).

Обозначим буквами a и c соответственно большую и малую полуоси эллипсоидальной полости. Тогда ее уравнение приобретает вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{(z + l_2)^2}{c^2} = 1 \quad (5.2)$$

а направляющие косинусы нормали v в системе координат xyz будут следующими:

$$\cos xv = \frac{xc^2}{D}, \quad \cos yv = \frac{yc^2}{D}, \quad \cos zv = \frac{a^2(z + l_2)}{D} \quad (5.3)$$

$$D = \sqrt{c^2(x^2 + y^2) + a^2(z + l_2)^2} \quad (5.4)$$

Путем непосредственной подстановки соотношений (5.1) и (5.3) в граничное условие (4.10) и условие несжимаемости (4.9) убеждаемся, что последние удовлетворяются тождественно.

¹ Ср. также замечание в начале статьи [1].

Обратимся теперь к рассмотрению системы (4.7). Умножим первое ее уравнение на $\cos xy$, второе — на $\cos yz$, а третье — на $\cos zx$ и сложим. Тогда при использовании выражений (5.1) и (5.3) имеем

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial n} = \frac{2c^2}{D} z \left\{ x \left[\omega U_y(t) - \frac{d\omega_y}{dt} \right] + y \left[-\omega U_x(t) + \frac{d\omega_x}{dt} \right] \right\} + \frac{2c^2 l_2 \omega}{D} [x U_y(t) - y U_x(t)] \quad (5.5)$$

Последнее соотношение обратится в тождество, если в нем положить

$$p_1 = \rho z [x P^*(t) + y Q^*(t)] + \rho [x P_1^*(t) + y Q_1^*(t)] \quad (5.6)$$

и функции $P^*(t)$, $P_1^*(t)$, $Q^*(t)$ и $Q_1^*(t)$ выбрать следующими: (5.7)

$$P^*(t) = \frac{2c^2}{a^2 + c^2} \left[\omega U_y(t) - \frac{d\omega_y}{dt} \right], \quad P_1^*(t) = \frac{2l_2}{a^2 + c^2} \left[a^2 \frac{d\omega_y}{dt} + \omega U_y(t) c^2 \right]$$

$$Q^*(t) = \frac{2c^2}{a^2 + c^2} \left[-\omega U_x(t) + \frac{d\omega_x}{dt} \right], \quad Q_1^*(t) = -\frac{2l_2}{a^2 + c^2} \left[a^2 \frac{d\omega_x}{dt} + \omega U_x(t) c^2 \right]$$

Умножим теперь второе уравнение системы (4.7) на $i = \sqrt{-1}$ и сложим с первым. Тогда при использовании равенств (5.1), (5.6), (5.7) и сокращения на выражение $z + l_2$ получим соотношение, необходимое в дальнейшем для определения функций $U_x(t)$ и $U_y(t)$, именно

$$\left[(a^2 + c^2) \frac{d}{dt} + 2\omega a^2 i \right] [U_x(t) + iU_y(t)] = 2a^2 i \left(\frac{d\omega_x}{dt} + i \frac{d\omega_y}{dt} \right) \quad (5.8)$$

6. Обратимся теперь к рассмотрению системы (3.5). Умножим второе и четвертое ее уравнения на $i = \sqrt{-1}$ и сложим соответственно первое уравнение со вторым, а третье — с четвертым. Введем далее комплексно-изначные функции действительного переменного t

$$\xi^* = a + i\beta, \quad z^* = \lambda + i\mu \quad (6.1)$$

Тогда, при учете третьего равенства (4.4), имеем

$$(A + ml_1^2) \frac{d^2 \xi^*}{dt^2} - iC\omega \frac{d\xi^*}{dt} + ml_1 l \frac{d^2 z^*}{dt^2} + mgl_1 \xi^* = (M_x + iM_y) e^{i\omega t} \quad (6.2)$$

$$m \left(l \frac{d^2 z^*}{dt^2} + l_1 \frac{d^2 \xi^*}{dt^2} \right) + (mg - F_z) z^* = -i(F_x + iF_y) e^{i\omega t} - F_z \xi^*$$

Вычислим выражения $F_x + iF_y$, F_z , $M_x + iM_y$, которые стоят в правых частях системы (6.2). Для этой цели в формулах (3.8) и (3.9) подставим выражение для давления p^* , которое можно получить, исключая переменную p_1 из соотношений (4.8) и (5.6). Далее следует учесть, что

$$\iiint_{\tau} \rho xz \, d\tau = \iiint_{\tau} \rho xy \, d\tau = \iiint_{\tau} \rho yz \, d\tau = 0, \quad \iiint_{\tau} \rho (x^2 - y^2) \, d\tau = 0$$

$$\iiint_{\tau} \rho ox \, d\tau = \iiint_{\tau} \rho py \, d\tau = 0, \quad \iiint_{\tau} \rho dt = m_1, \quad \iiint_{\tau} \rho z \, d\tau = -m_1 l_2 \quad (6.3)$$

$$\iiint_{\tau} \rho (z^2 - y^2) \, d\tau = \iiint_{\tau} \rho (z^2 - x^2) \, d\tau = \frac{4}{15} \pi \rho a^2 c (c^2 - a^2) + m_1 l_2^2$$

Здесь, кроме соответствия удовлетворяющую полное

Если, кроме то-

$\phi_x +$

то после сравните (5.7), (5.8) полути:

$$F_x + iF_y = -$$

а также дифферен-

$$M_x + iM_y = k^{\frac{1}{2}}$$

$$- [m_1 l]$$

в котором

7. Исключая z посредством форм

ний относительно

$$(A^* + k\eta) \frac{d\xi^*}{dt^2} -$$

$$- i\omega K \xi^*$$

Здесь

$$A^* = A$$

$$K = g($$

Решение совок

При этом хара-

$$f(\lambda; \omega) = (A^0 +$$

$$+ C\omega^2 \eta +$$

$$+ \frac{g}{l} K) K -$$

Здесь

Уравнения (7.

движение рассма

его движений спо;

критерием устойч

ствительности ко

этого условия и б

(1.7). Умножим первое на $i\omega$ и сложим с (5.3) имеем

$$(t) + \left[\frac{d\omega_x}{dt} \right] \} + \quad (5.5)$$

если в нем положить
+ $y Q_1^*(t)$ (5.6)

$$\begin{aligned} & \text{следующим:} \quad (5.7) \\ & \left[a^3 \frac{d\omega_y}{dt} + ml f_y(t) c^3 \right] \\ & + \left[a^3 \frac{d\omega_x}{dt} + \omega U_x(t) c^2 \right] \end{aligned}$$

) на $i = \sqrt{-1}$ и сложим (5.1), (5.6), (5.7) и сопоставление, необходимое в (2), именно

$$i \left(\frac{d\omega_x}{dt} + i \frac{d\omega_y}{dt} \right) \quad (5.8)$$

5). Умножим второе соответственно первое уравнение, необходиное в (2), на $i\omega$ и сложим с (5.1), (5.6), (5.7) и сопоставление, необходимое в (2), имеем

$$(M_x + iM_y) e^{i\omega t} \quad (6.1)$$

$$(M_x + iM_y) e^{i\omega t} \quad (6.2)$$

$iF_y e^{i\omega t} - F_z \zeta^*$, которые стоят в уравнениях (3.8) и (3.9) под- получить, исключая ζ^* следует учесть, что

$$z^2 - y^2 d\tau = 0$$

$$\rho z d\tau = -m_1 l_2 \quad (6.3)$$

$$z^2 - a^2 + m_1 l_2^2$$

Здесь, кроме обозначенений, ужко встречающихся ранее, ρ и m_1 — соответственно удельная плотность и масса жидкости, заполняющей эллипсоидальную полость твердого тела.

Если, кроме того, заметить, что, согласно формулам (4.3), (4.4) и (6.1),

$$\omega_x + i\omega_y = \frac{d\zeta^*}{dt} e^{-i\omega t}, \quad \omega_x^0 + i\omega_y^0 = il \frac{d^2\zeta^*}{dt^2} e^{-i\omega t} \quad (6.4)$$

то после сравнительно несложных выкладок и использования равенств (5.7), (5.8) получим искомое выражение для $F_x + iF_y$ и F_z

$$F_x + iF_y = -m_1 l \left[l \frac{d^2 z^*}{dt^2} + l_2 \frac{d^2 \xi^*}{dt^2} + g \xi^* \right] e^{-i\omega t}, \quad F_z = -m_1 g \quad (6.5)$$

а также дифференциальное соотношение для $M_x + iM_y$, именно,

$$\begin{aligned} M_x + iM_y = k &= \frac{(a^3 - a^2) d^3 l^* / dt^3 + 2(a^3 l^* - a^2 l^*) d^2 l^* / dt^2 - (a^3 + a^2) (a^3 d^2 l^* / dt^2 - a^2 d^3 l^* / dt^3)}{(a^3 + a^2) d^3 / dt^3 - 2a^3 d^2 / dt^2} \\ &= \left[m_1 l_2^2 \frac{d^3 \zeta^*}{dt^3} + m_1 g l_2 \xi^* + m_1 l_2 l \frac{d^2 z^*}{dt^2} + i\omega k \frac{d\xi^*}{dt} \right] e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (6.6)$$

в котором

$$k = 1/15 \pi \rho a^2 c (c^2 - a^2) \quad (6.7)$$

7. Исключая из уравнений (6.2) величины $F_x + iF_y$, F_z и $M_x + iM_y$ посредством формул и соотношений (6.5) и (6.6) получим систему уравнений относительно комплекснозначных функций времени ζ^* и z^*

$$\begin{aligned} (A^* + k\eta) \frac{d^2 \zeta^*}{dt^2} - i\omega [C + (A^* + k)\eta] \frac{d^2 \zeta^*}{dt^2} + [K - \omega^2 (C\eta - k\eta + k)] \frac{d\xi^*}{dt} - \\ - i\omega \eta K \zeta^* + (ml_1 + m_1 l_2) l \frac{d^3 z^*}{dt^3} - i\omega \eta l (ml_1 + m_1 l_2) \frac{d^2 z^*}{dt^2} = 0 \quad (7.1) \\ l \frac{d^2 z^*}{dt^2} + z_0 \frac{d^2 \zeta^*}{dt^2} + g z^* = 0 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} A^* &= A + ml_1^3 + m_1 l_2^3, \quad \eta = \frac{a^3 - a^2}{a^3 + a^2}, \quad z_0 = \frac{ml_1 + m_1 l_2}{m + m_1} \quad (7.2) \\ K &= g(ml_1 + m_1 l_2), \quad C = \frac{a^3 - a^2}{a^3 + a^2} \end{aligned}$$

Решение совокупности (7.1) естественно искать в виде

$$\zeta^* = \zeta^0 e^{i\lambda t}, \quad z^* = z^0 e^{i\lambda t} \quad (7.3)$$

При этом характеристическое уравнение приводится к следующему:

$$\begin{aligned} f(\lambda; \omega) = (A^* + k\eta) \lambda^6 - \omega [C + (A^* + k)\eta] \lambda^4 + [-K - (A^* + k\eta)] \frac{g}{l} + \\ + C \omega^2 \eta + k \omega^2 (1 - \eta) \lambda^3 + [K\eta + C \frac{g}{l} + \frac{g}{l} (A^* + k)\eta] \omega \lambda^2 + \\ + \frac{g}{l} [K - k \omega^2 (1 - \eta) - C \omega^2 \eta] \lambda - K \omega \eta \frac{g}{l} = 0 \quad (7.4) \end{aligned}$$

Здесь

$$A^0 = A^* - z_0 (ml_1 + m_1 l_2) \quad (7.5)$$

Уравнения (7.1) совместно с равенством $\omega_z = \omega = \text{const}$ описывают движение рассматриваемого тела. Поэтому исследование устойчивости его движения сводится к изучению поведения функций (7.3). Очевидно, что критерием устойчивости движения в данном случае является условие действительности корней характеристического уравнения (7.4). Найдению этого условия и будут посвящены ниже следующие пункты.

8. Рассмотрим вначале несколько частных случаев. а) Длина струны $l \rightarrow 0$. При этом характеристическое уравнение (7.4) преобразуется к виду

$$(A^* + k\eta) \lambda^3 - [C + (A^* + k)\eta] \omega \lambda^2 - [K - k\omega^2(1 - \eta) - C\omega^2\eta] \lambda + K\omega\eta = 0 \quad (8.1)$$

Заметим, что с точностью до обозначений уравнению (8.1) полностью соответствует уравнение, получившееся в работах [1] и [3] при изучении устойчивости волчка с эллипсоидальной полостью, целиком заполненной идеальной жидкостью¹.

б) Полость имеет форму сферы. При этом предположим $a = c$ и, согласно равенству (6.7) и третьему соотношению (7.2), $k = 0$, $\eta = 0$. Характеристическое уравнение (7.4) преобразуется к виду

$$\lambda \left\{ \lambda^4 - \frac{C}{A^0} \omega \lambda^3 - \frac{g}{l} \left[1 + \frac{(m_1 + m_1 l_2)(l + z_c)}{A^0} \right] \lambda^2 + \frac{C}{A^0} \omega \frac{g}{l} \lambda + \frac{g^2 (m_1 + m_1 l_2)}{A^0} \right\} = 0 \quad (8.2)$$

Одни из корней уравнения (8.2) равны нулю, а оставшиеся четыре корня, как нетрудно показать, расположены на интервалах

$$(-\infty, -\sqrt{g/l}), (-\sqrt{g/l}, 0), (0, \sqrt{g/l}), (\sqrt{g/l}, \infty)$$

Таким образом, движение тела при наличии сферической полости, целиком наполненной идеальной жидкостью, будет всегда устойчивым. Оно имеет тот же характер, что и движение вращающегося сплошного твердого тела, исследованного в [2].

9. Обратимся теперь вновь к изучению устойчивости движения твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной идеальной несжимаемой жидкостью. Для этой цели рассмотрим характеристическое уравнение (7.4) и займемся определением условий действительности его корней (т. е. условий устойчивости движения).

В настоящее время известен ряд критериев действительности корней алгебраических уравнений n -й степени (см., например, [6]). Однако в рассматриваемом случае задачи (виду сложности коэффициентов уравнений (7.4)) эти критерии оказываются крайне громоздкими и вследствие этого — мало пригодными для изучения условий устойчивости исследуемого тела при произвольном изменении параметров, входящих в уравнения (7.1) его движения. Ниже приводится графо-аналитический прием исследования корней уравнения (7.4), который дает возможность сравнительно просто выявить виды устойчивого и неустойчивого движения исследуемого тела при произвольном задании величины угловой скорости его вращения ω .

В соответствии с правилом Декарта [7], число положительных корней уравнения (7.4) при любых значениях параметра $\omega > 0$ не может быть более трех², а отрицательных — не более двух. Покажем далее, что уравнение (7.4) при $\omega > 0$ всегда имеет два отрицательных корня.

В самом деле, принимая во внимание равенства (7.2) и (7.5), имеем

$$f(-\sqrt{g/l}, \omega) = -\frac{g^2}{l^2} (A^* - A^0) (\omega \eta \sqrt{g/l}) > 0 \quad (9.1)$$

Однако $f(-\infty; \omega) < 0$ и $f(0; \omega) < 0$. Следовательно, в интервалах $-\infty < \lambda < -\sqrt{g/l}$ и $-\sqrt{g/l} < \lambda < 0$ находится по одному (отрицательному) корню уравнения (7.4).

¹ При условии, что знак при величине момента K будет изменен на обратный по сравнению со случаем, разобранным в [1] и [3].

² В случае $\omega = 0$ четыре корня уравнения (7.4) действительны (пятый равен нулю).

Для определения корней уравнения (8.1) сгруппируем члены:

Здесь

$$p(\lambda) = \lambda (\lambda^2 -$$

$$R(\lambda) =$$

$$e = -\frac{C\eta +$$

Графики па-

раболы получ-

аются в виде

Пользуясь

скорости ω в

действительном

числе, — уст-

рение твердого

тела при

изменении

положения

гаснет

форму

аксисно-сопряжен-

ства. Это бы-

лах $(\lambda_1^*, \lambda_1^{**})$

где λ_1^* , λ_1^{**} —

положительные

многочлены

(равно как и

любых значе-

ния ω)

затем

все корни

будут

иметь

одинаковую

знак

и принять во в-

Длина струны $l \rightarrow 0$. При
как виду

$$-\bar{C}\varphi^2\eta + \lambda + K\eta = 0 \quad (8.1)$$

(8.1) полностью совпадает
с устойчивости волчка с
нейтральностью 1.

или $a = c$ и, согласно ра-
Характеристическое урав-
нение

$$\left. \begin{aligned} -\lambda + \frac{g^2}{l} \frac{ml_1 + m_1 l_2}{A^0} \end{aligned} \right\} = 0 \quad (8.2)$$

число четыре корня, как

$$\sqrt{g/l}, \infty$$

кой полости, целиком на-
Оно имеет тот же харак-
теристическое уравнение

квости движения твер-
дополненной идеальной
м характеристическое
действительности его

ности корней алгебраи-
в рассматриваемом слу-
(4)) эти критерии оказываются
годными для изучения
изменении параметров,
ся графо-аналитический
возможность сравнитель-
ления исследуемого тела
трансцендент ω .

положительных корней
 > 0 не может быть
жем далее, что урав-
ных корней.

и (7.2) и (7.5), имеем

$$> 0 \quad (9.1)$$

льно, в интервалах
и по одному (отри-

изменен на обратный
ны (пятый равен нулю).

Для определения характера трех остальных корней уравнения (7.4) сгруппируем члены его левой части по степеням ω , имея

$$p(\lambda)\omega^2 - q(\lambda)\omega + r(\lambda) = 0 \quad (9.2)$$

Здесь

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + \frac{g}{l}\varepsilon\eta^2), \quad q(\lambda) = \eta[R(\lambda) - \lambda^2(\lambda^2 - \frac{g}{l})(\varepsilon - \kappa)], \quad r(\lambda) = \lambda R(\lambda) \quad (9.3)$$

$$R(\lambda) = (A^0 + k\eta)\lambda^4 - [K + \frac{g}{l}(A^0 + k\eta)]\lambda^2 + \frac{g}{l}K$$

$$\varepsilon = \frac{C\eta + k(1 - \eta)}{\eta^2} > 0, \quad \kappa = \frac{k(1 - \eta)(1 - \eta^2)}{\eta^2} > 0, \quad (\varepsilon - \kappa) > 0 \quad (9.4)$$

Графики полиномов $p(\lambda)$, $q(\lambda)$, $r(\lambda)$ при $\lambda \geq 0$ представлены на фиг. 4. Анализ полученных графиков показывает, что при $\lambda \geq 0$ полином $r(\lambda)$ обращается в нуль при $\lambda = 0$ и еще при двух значениях λ , обозначенных через λ_1 и λ_2 . В свою очередь полином $q(\lambda)$ равен нулю только при $\lambda = \lambda_1^0$ и $\lambda = \lambda_2^0$. Наконец, полином $p(\lambda)$ становится равным нулю, когда λ либо равно нулю, либо $\sqrt{g/l}$.

Уравнение (9.2) можно разрешить относительно ω и построить график функции

$$\omega(\lambda) = \frac{q(\lambda) \pm \sqrt{q^2(\lambda) - 4p(\lambda)r(\lambda)}}{2p(\lambda)} \quad (9.5)$$

Пользуясь этим графиком, можно по заданному значению угловой
скорости ω выяснить — все ли корни уравнения (7.4) относительно λ
действительны и, следова-
тельно, — устойчиво движе-
ние твердого тела с жидким
наполнением или нет.

В той области значений
 λ , где дискриминант

$$\Delta(\lambda) = 4p(\lambda)r(\lambda) - q^2(\lambda) \quad (9.6)$$

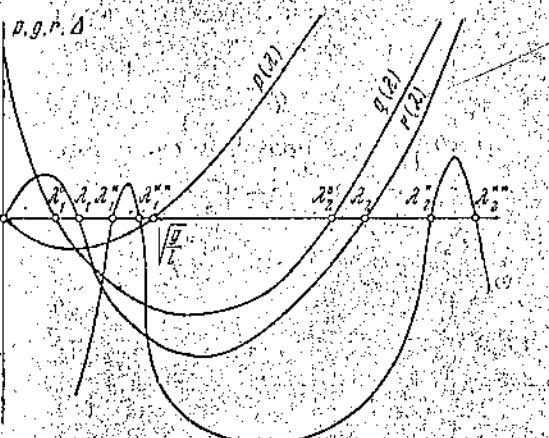
положителен, значения ω , со-
гласно формуле (9.5), комп-
лексно-сопряженные количе-
ства. Это будет в интерва-
лах $(\lambda_1^{*}, \lambda_1^{**})$ и $(\lambda_2^{*}, \lambda_2^{**})$,
где $\lambda_1^{*}, \lambda_2^{*}, \lambda_1^{**}, \lambda_2^{**}$ —
положительные корни уже

многочлена $\Delta(\lambda)$; корни

(равно как и отрицательные с теми же модулями) существуют при
любых значениях параметров, входящих в выражение (9.6). Для дока-
зательства следует дискриминант $\Delta(\lambda)$ представить в виде произведения

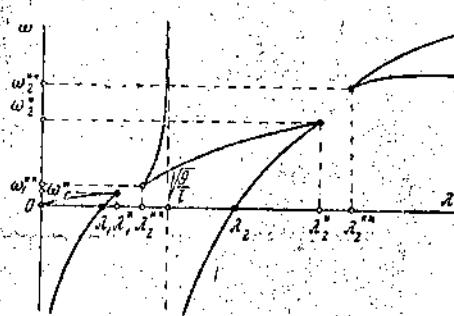
$$\Delta(\lambda) = -\eta^2 [R(\lambda) - \lambda^2(\lambda^2 - \frac{g}{l})(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\kappa})^2] \times \\ \times [R(\lambda) - \lambda^2(\lambda^2 - \frac{g}{l})(\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\kappa})^2] \quad (9.7)$$

и принять во внимание вид полинома $R(\lambda)$, согласно первой формуле (9.4).



Фиг. 4

При величинах λ , совпадающих с одним из корней дискриминанта $\Delta(\lambda)$, оба значения ω , согласно формуле (9.5), становятся равными друг другу. Обозначим их соответственно через ω_1^* , ω_2^* , ω_1^{**} и ω_2^{**} . Оказывается, что им соответствуют точки извлечения кривой $\omega = \omega(\lambda)$. Эта кривая изображена на фиг. 5. При ее построении следует учесть расположение нулей полиномов $p(\lambda)$, $q(\lambda)$ и $r(\lambda)$, определяемых формулами (9.3) и фиг. 4.



Фиг. 5.

В интервалах $(\omega_1^*, \omega_1^{**})$ и $(\omega_2^*, \omega_2^{**})$ (см. фиг. 5) каждому значению ω соответствуют только три действительные корни (из них два отрицательных) уравнения пятой степени (7.4) относительно λ . Оставшиеся два корня становятся комплексными.

Согласно изложенному выше, приходим, таким образом, к следующему выводу: движение твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной идеальной несжимаемой жидкостью, при значениях угловой скорости, изменяющейся в пределах $\omega_1^* < \omega < \omega_1^{**}$ и $\omega_2^* < \omega < \omega_2^{**}$, неустойчиво. Вне этих пределов изменения ω движение рассматриваемого тела, напротив, устойчиво.

10. Критические значения угловой скорости ω_1^* , ω_1^{**} , ω_2^* , ω_2^{**} определяются выражением (9.5), если положить в нем

$$q^2(\lambda) - 4p(\lambda)r(\lambda) = -\Delta(\lambda) = 0$$

В результате получаем следующие простые формулы

$$\begin{aligned} \omega_1^* &= \frac{q(\lambda_1^*)}{2p(\lambda_1^*)} = \frac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon\eta}}{\varepsilon\eta} \lambda_1^*, & \omega_2^* &= \frac{q(\lambda_2^*)}{2p(\lambda_2^*)} = \frac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon\eta}}{\varepsilon\eta} \lambda_2^*, \\ \omega_1^{**} &= \frac{q(\lambda_1^{**})}{2p(\lambda_1^{**})} = \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon\eta}}{\varepsilon\eta} \lambda_1^{**}, & \omega_2^{**} &= \frac{q(\lambda_2^{**})}{2p(\lambda_2^{**})} = \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon\eta}}{\varepsilon\eta} \lambda_2^{**} \end{aligned} \quad (10.1)$$

в которых λ_1^* , λ_1^{**} , λ_2^* и λ_2^{**} , как уже упоминалось ранее, — соответственно положительные корни дискриминанта $\Delta(\lambda)$.

11. В качестве примера определим критические значения угловой скорости ω вращения твердого тела, параметры которого определяются следующими величинами:

$$A = 15.84, C = 3.74 \text{ [см}^2\text{], } m = 0.8145, m_1 = 0.0334 \text{ [кг} \cdot \text{см}^2\text{ см}^{-1}\text{]}$$

$$a = 1.5, c = 4.35, l_1 = 6.6, l_2 = 5.5, l = 50 \text{ [см]}$$

В данном случае, согласно формулам (10.1),

$$\omega_1^* = 48, \omega_1^{**} = 53, \omega_2^* = 264, \omega_2^{**} = 309 \text{ [об/мин].}$$

Таким образом, при значениях параметра ω в пределах

$$48 < \omega < 53, \quad 264 < \omega < 309 \text{ [об/мин].}$$

движение исследуемого твердого тела должно быть неустойчивым; для всех же значений ω вне этих интервалов движение устойчиво.

Критические значения при венчиках наполнения, однаковых друг с другом.

12. Для пролетного тела с жидким наполнением АИ УССР Э. В. Бирнбаум С. В. Малашенко, описанной в

К если вертикальной новой нити прикрепляется расположенным видах составных частей полость (см. фиг.), которое полость заполнения была меси-

Модели сообщают. Стабилизация угловым и тяготропом.

Устойчивость (или угловой скорости определенного наблюдения за экспериментальным п. 11 настоящей работы в интервале 100—220 угловой скорости 220 различий угловой скорости.

Экспериментальных значений угловых, применявшихся установкой скоростью, меньше.

Поступила 29 VI

1. Ипполитский, Т. М. Основы теории волчка, т. 1. М.: ГИИА, 1958.
2. Морозова Е. А. Устойчивость вращения. ПММ, 1958, т. 22, № 3.
3. Соболев С. Л. Устойчивость вращения в жидкости. ПММ, 1959, т. 23, № 3.
4. Суслов Г. К. Устойчивость вращения в жидкости. ПММ, 1959, т. 23, № 3.
5. Кибель Н. Е. Устойчивость вращения в жидкости. Гостехиздат, 1948.
6. Чеботарев Н. И. Устойчивость вращения в жидкости и цепях фундаментальных. АН СССР, 1950.
7. Куропат А. Г. Устойчивость вращения в жидкости. АН СССР, 1951.
8. Малашенко С. В. Исследование устойчивости вращения в жидкости. АН СССР, 1952.

ординат дискриминанта являются равными друг другу, ω_1^{**} и ω_2^{**} . Оказывается, $\phi = \phi(\lambda)$. Эта кривая имеет расположение пучинами (9.3) и фиг. 4. х (ω_1^{**} , ω_2^{**}) и (ω_2^{**} , ω_1^{**} , фиг. 5) каждому соответствуют только три члены корня (из них двух) уравнения пятой степени относительно λ . Два корня становятся нулями.

изложенному выше, таким образом, к следующему: движение твердого эллипсоидальной полусферой жидкостью, при $\omega_1^{**} < \omega < \omega_2^{**}$ и изменения ω движение $\omega_1^{**}, \omega_2^{**}$ определяется

$$\frac{e - V_{ek}}{e\eta} \lambda_2^{**} \quad (10.1)$$

$$\frac{e + V_{ek}}{e\eta} \lambda_2^{**}$$

ранее, — соответствует угловой скорости ω следующими величинами:

0334 [$\text{г}\cdot\text{сек}^2\text{см}^{-1}$]

0 [см]

об/мин]

и

тойческим для всех же

критические значения угловой скорости для тех же параметров были вычислены и при использовании критерия, изложенного в [8]. Они оказались равными приведенным выше, однако их вычисление потребовало затраты значительно большего труда.

12. Для проверки полученного выше критерия устойчивости движения твердого тела с жидким наполнением в физико-технической лаборатории Института механики АН УССР Э. В. Впротом и А. П. Поляниной под руководством доктора технических наук С. В. Малашенко были проведены экспериментальные исследования на установке, описанной в [8].

К оси вертикально поставленного мотора посредством тонкой струны или капроновой нити прикреплялась исследуемая модель, представляющая собой полый корпус с расположенным внутри него цилиндрическим вкладышем. Вкладыши состояли из двух составных частей, которые герметически соединялись, образуя эллипсоидальную полость (см. фиг. 7 в [8]). В верхней части вкладыша имелось отверстие, через которое полость заполнялась жидкостью (в описываемых экспериментах в качестве наполнителя был использован этиловый спирт).

Модели сообщалось вращение с числом оборотов в пределах от 100 до 3000 об/мин. Стабилизация угловой скорости осуществлялась прецизионным звуковым генератором и тиратроном.

Устойчивость (или неустойчивость) движения модели при различных значениях угловой скорости определялась посредством легких ударов по модели и визуального наблюдения за последующим ее поведением.

Экспериментальные исследования с моделью, параметры которой приведены в п. 11 настоящей работы, показали, что при изменении угловой скорости вращения в интервале 100—220 об/мин движение модели устойчиво. В интервале изменения угловой скорости 220—450 об/мин устойчивое ее движение нарушалось, а при увеличении угловой скорости от 450 об/мин и выше движение модели было вновь устойчивым.

Экспериментальное определение границ существования первой зоны критических значений угловой скорости (см. п. 11 настоящей работы) не проводилось (за применившейся установке нельзя было получать стабилизированное вращение с угловой скоростью, меньшей 100 об/мин).

Поступила 29 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

- Ишлапский А. Ю., Темченко М. Е. О малых колебаниях вертикальной оси волчка, имеющего полость, целиком наполненную идеальной бескисающей жидкостью. ПМТФ, 1960, № 3.
- Морозова Е. П. Об устойчивости вращения твердого тела, подвешенного на струне. ПММ, 1956, т. 20, вып. 5.
- Соболов С. Я. О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью. ПМТФ, 1960, № 3.
- Суслов Г. К. Теоретическая механика. Гостехиздат. 1946.
- Кибель Н. Е., Коции И. А., Розен Н. Б. Теоретическая гидромеханика. Гостехиздат, 1948, т. 1.
- Чеботарев Н. Г., Мейман И. Н. Проблема Раусса — Гурвицца для полиномов и целых функций. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Столкова. 1949, т. 26, Изд-во АН СССР.
- Куропт А. Г. Курс высшей алгебры. Гостехиздат, 1955.
- Малашенко С. В., Темченко М. Е. Об одном методе экспериментального исследования устойчивости движения волчка, внутри которого имеется полость, наполненная жидкостью. ПМТФ, 1960, № 3.