Р О С С И Й С К А Я   А К А Д Е М И Я   Н А У К

Институт проблем механики

На правах рукописи

Мокряков Вячеслав Викторович

МЕТОД МУЛЬТИПОЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

01.02.04. – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2008

Работа выполнена в Институте проблем механики Российской академии наук

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Гольдштейн Роберт Вениаминович (Институт проблем механики Российской академии наук)
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Бураго Николай Георгиевич (Институт проблем механики Российской академии наук)
	доктор физико-математических наук, профессор Линьков Александр Михайлович (Институт проблем машиноведения Российской академии наук)
Ведущая организация:	Кафедра теории пластичности механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Защита состоится 5 июня 2008 г. в 15 часов на заседании Диссертационного совета Д 002.240.01 при Институте проблем механики Российской академии наук по адресу: 119526, Москва, пр-кт Вернадского, д. 101, корп. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института проблем механики Российской академии наук.

Автореферат разослан 5 мая 2008 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета
Д 002.240.01 при ИПМех РАН,
кандидат физико-математических наук Е.Я. Сысоева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена исследованию полей напряжений, создаваемых круговыми отверстиями в упругой плоскости, находящейся под воздействием нагрузок на бесконечности. Предложен метод представления полей в виде ряда базовых решений уравнения упругости – мультиполей.

Актуальность темы. Один из важнейших предметов исследования теории разрушения – поведение полей напряжений в окрестности концентраторов: дефектов и неоднородностей среды, полостей и включений. Широкое практическое приложение имеют задачи о концентрации напряжений возле пор и отверстий в конструкциях и материалах, нередко их можно свести к плоским задачам об упругой плоскости с отверстиями. К таким задачам можно отнести, например, задачи о туннелях, скважинах, перфорированных пластинах.

В последнее время все больший интерес вызывают материалы, содержащие мезоструктуры пор ("сверхрешетки"), как природные (цеолиты), так и возникающие при различных процессах обработки, таких как радиационное облучение, травление, и др. В электронике все более популярными, прежде всего, из-за их уникальных свойств, становятся фотонные кристаллы и пористый кремний. Под воздействием механических нагрузок, градиентов температур, в них могут возникать дефекты, трещины, что негативно сказывается на характеристиках материала.

Поле напряжений вокруг одиночного круглого отверстия в плоскости при произвольном нагружении хорошо изучено, известно точное аналитическое решение для произвольной нагрузки на поверхности поры и на бесконечности. Это решение можно применять на практике при достаточно редко расположенных в материале порах. Однако, если характерное расcтояние между порами не превышает нескольких их диаметров, то их влияние друг на друга вносит значительные искажения в поля напряжений в их окрестностях.

Уже для двух отверстий аналитическое решение задачи представляет собой серьезную проблему. Для некоторых частных случаев (два отверстия в плоскости при всестороннем нагружении, одноосных нагружениях вдоль и поперек оси, соединяющей центры отверстий) с помощью биполярной системы координат получено аналитическое решение в виде гиперболическо-тригонометрических рядов. К сожалению, в общем случае нагружения применение данного метода представляется затруднительным.

Из-за сложности аналитического решения подобных задач приходится применять численные методы, такие как, например, метод граничных элементов. Однако известно, что на круговых контурах такие методы могут давать ложные решения из-за высокой степени симметрии контура (так называемый "парадокс симметрии" – Линьков А.М. "Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости", §72).

Таким образом есть потребность в численных методах, позволяющих устранить указанные трудности, и при этом точно и эффективно строить поля напряжений в среде и исследовать их особенности: точки концентрации, асимптотику на расстоянии, зависимость от геометрических параметров системы.

Цели работы. 1). Разработка численного метода решения задач теории упругости для плоскости с круговыми отверстиями, позволяющего:

– в точности учитывать геометрию поставленной задачи;

– в точности удовлетворить уравнениям теории упругости;

– отказаться от разбиения как контура, так и среды на конечные элементы.

2). Апробация метода на задачах с известным решением.

3). Создание алгоритма решения задач теории упругости с помощью разработанного метода и его программная реализация.

4). Демонстрация применения данного метода для решения ряда задач теории упругости и исследование полученных результатов.

Методика исследования. Представленные в диссертации исследования опираются, в первую очередь, на теорию упругих комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили и теорию сингулярных граничных интегральных уравнений. При этом используются результаты и методы теории аналитических функций, функционального анализа, теории разрушения.

Научная новизна. Разработан новый метод представления полей, создаваемых концентраторами напряжений в упругой плоскости – метод мультипольных разложений. На его основе разработан численный метод решения поставленных задач теории упругости, не нуждающийся в разбиении контуров, в точности учитывающий геометрию задачи и автоматически удовлетворяющий уравнению упругости. Предложен критерий точности полученного решения – по величине функционала интегральной квадратичной невязки. Программно реализован алгоритм, позволяющий с использованием разработанного метода строить поля напряжений, создаваемые заданной группой круговых отверстий и двояко-периодической решеткой одинаковых круговых отверстий. Программа также позволяет в процессе расчета менять алгоритм минимизации интегральной невязки и количество членов разложения, что дает возможность динамически повышать точность расчетов, если она недостаточна, или напротив, ограничиться минимально необходимым количеством членов разложения для достижения достаточной точности. Также рассмотрены некоторые теоретические вопросы, касающиеся мультипольного разложения. Кроме того, исследовано поведение концентрации напряжений при изменении геометрических параметров системы отверстий и установлено, что в некоторых случаях она может быть меньше, чем концентрация на одиночном отверстии.

Практическая значимость. Результаты работы представляют теоретический и практический интерес как для механики деформируемого твердого тела, так и для теории разрушения в частности, и могут быть использованы в инженерной практике при расчете запаса прочности конструкции и величины концентрации напряжений на круговых отверстиях.

Диссертация выполнялась в рамках плановой тематики Института проблем механики Российской академии наук, ее результаты включались в отчеты по проектам, входящим в Программу фундаментальных исследований Президиума РАН «Исследование вещества в экстремальных условиях», направление «Физика и механика сильно сжатого вещества и проблема внутреннего строения Земли и планет», гранты Президента РФ по поддержке ведущих научных школ России НШ-1849.2003.1, НШ-4472.2006.1.

Достоверность полученных результатов в рамках рассматриваемых механических моделей обеспечивается применением строгого математического аппарата при построении и анализе решений поставленных задач. Она основывается также на практических оценках точности выполняемых машинных вычислений, контроле точности найденного напряженного состояния посредством оценки величины функционала интегральной квадратичной невязки, тестировании разработанной программы на задачах с известным решением, полученным другими исследователями посредством иных численных методов, сопоставлении получаемых в частных случаях результатов с заранее известными. Также достоверность полученных результатов подтверждается проведенными экспериментами и сравнением результатов экспериментов с результатами численного моделирования.

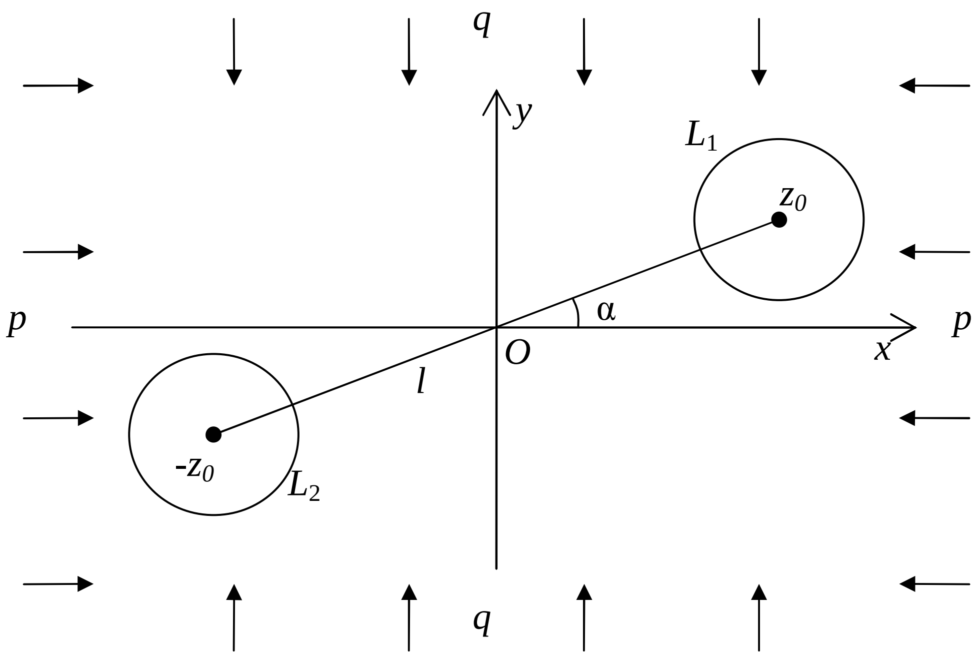
Апробация работы. Результаты диссертации представлены на Международной Молодежной Научной Конференции «XXX Гагаринские чтения» (Москва, 2004), Международной Молодежной Научной Конференции «XXXII Гагаринские чтения» (Москва, 2006), на Семинарах по механике прочности и разрушения в Институте проблем механики РАН, а также на совместном заседании Семинара по динамике сплошной среды под руководством академика А.Г. Куликовского, профессора В.Н. Кукуджанова и профессора И.В. Симонова и Семинара по механике прочности и разрушения под руководством профессора Р.В. Гольдштейна, состоявшегося в ИПМех РАН 31 октября 2007 г..

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, приложения и списка литературы. Полный объем диссертации вместе с иллюстрациями составляет 136 страниц. Из них 5 занимает список литературы, содержащий 56 наименований. Общее количество иллюстраций – 70.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** обсуждается тематика предпринятых в диссертации исследований и обосновывается их актуальность. Проводится краткий обзор важнейших работ, посвященных решению задач для упругой плоскости с отверстиями и близких к ним по тематике. Приводятся основные трудности решения этих задач. Описываются структура и содержание диссертации.

В **Главе 1** основные положения метода мультипольного разложения выводятся при решении задачи о двух взаимодействующих отверстиях в напряженной плоскости. С помощью метода решена модельная задача, результаты согласуются с опубликованными данными. Также исследована концентрация напряжений на отверстиях при их различном расположении, определены вероятные сценарии разрушения.



Фиг. 1.

В **п. 1.1** дается постановка задачи о двух одинаковых отверстиях в упругой плоскости (фиг. 1). Радиус отверстий полагается единичным, края отверстий свободны от нагрузок. На бесконечности плоскость подвергается двухосному нагружению. Требуется найти смещения на краях отверстий, распределение полей напряжений и деформаций в среде. Также требуется найти наиболее вероятные точки зарождения трещин и ориентацию отверстий (по отношению к нагрузке), при которой возникновение трещин наиболее вероятно.

В **п. 1.2** выведены основные уравнения задачи. Поле напряжений ищется в виде комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили в их выражении через функцию смещений $g_k(t_k)$.

Используя симметрию задачи, выражение для функционалов сводится к следующему выражению, зависящему только от одной функции $g(t)$ ($t = e^{i\theta}$-точка, принадлежащая контуру):

$$\Phi(z) = \frac{p+q}{4} + \frac{1}{2\pi}\int_L \left[\frac{1}{t+z_0-z} + \frac{1}{t+z_0+z}\right] g'(t)dt$$

$$\begin{aligned}\Psi(z) = \frac{q-p}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_L \left[\frac{1}{t+z_0-z} + \frac{1}{t+z_0+z}\right] \overline{g'(t)dt} - \\ -\frac{1}{2\pi}\int_L \left[\frac{1}{(t+z_0-z)^2} + \frac{1}{(t+z_0+z)^2}\right] \overline{(t+z_0)} g'(t)dt + \\ +\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{(z_0-z)^2} + \frac{1}{(z_0+z)^2}\right)\int_L \left[\overline{(t+z_0)} g'(t)dt + (t+z_0)\overline{g'(t)dt}\right]\end{aligned} \qquad (1)$$

Граничное условие

$$\Phi(t') + \overline{\Phi}(t') + \frac{d\overline{t'}}{dt'}\left[t'\overline{\Phi'}(t') + \overline{\Psi}(t')\right] = 0,$$ (t' – точка на контуре)

с учетом (1) преобразовано в сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{2\pi}\int_L K(t,t')g'(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_L L(t,t')\overline{g}'(t)d\overline{t} = A(t') \qquad (2)$$

где ядра

$$K(t,t') = \frac{2}{t-t'} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t'} + \frac{1}{t+t'+2z_0} - \frac{\overline{t'}^2}{\overline{t}+\overline{t'}+2\overline{z}_0} + \frac{1}{t}\frac{\overline{t'}^2}{(\overline{t'}+2\overline{z}_0)^2}$$

$$L(t,t') = \frac{1}{\overline{t}+\overline{t'}+2\overline{z}_0} + \overline{t'}^2\frac{t+t'+2z_0}{(\overline{t}+\overline{t'}+2\overline{z}_0)^2} - t\frac{\overline{t'}^2}{(\overline{t'}+2\overline{z}_0)^2}$$

и свободный член

$$A(t') = -\frac{p+q}{2} + \frac{q-p}{2}\overline{t'}^2$$

В **п. 1.3** предложен численный метод решения поставленной задачи.

Чтобы обойти "парадокс симметрии" нужно, чтобы представление искомой функции (как и основное уравнение) не было связано с определенными точками на контуре.

Таким представлением может быть разложение по степеням t:

$$g'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n t^n \tag{3}$$

Уравнение (2) в этом случае сводится к

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n K_n(t') + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{g}_n L_n(t') = A(t')$$

где ядра суммирования

$$K_n(t') = \frac{1}{2\pi}\int_L K(t,t')t^n dt;\ \ L_n(t') = \frac{1}{2\pi}\int_L L(t,t')\overline{t}^n d\overline{t}$$

Введена функция невязки

$$G(g_n,t') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n K_n(t') + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{g}_n L_n(t') - A(t')$$

В качестве критерия точности численного решения $\{g_n\}$ выбран функционал интегральной квадратичной невязки:

$$F(g_n) = \frac{1}{2\pi}\int_L \left|G(g_n,t')\right|^2 ds$$

Точному решению соответствует

$$F(g_n) = 0$$

Доказано, что если $G(g_n,t')$ также разложить в ряд:

$$G(g_n,t') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k t'^k$$

то в силу взаимной ортогональности функций t^k на единичной окружности

$$F(g_n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k \overline{G}_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|G_k\right|^2$$

Таким образом показано, что (2) равносильно системе

$$G_k = 0$$

Далее приведены значения G_k для поставленной задачи.

В **п. 1.4** получены формулы, выражающие смещения на контуре через найденное решение $\{g_n\}$:

$$u(t)+iv(t)=\frac{i(1+\kappa)}{2G}\left[\sum_{n=0}^{N_2}\frac{g_n}{n+1}t^{n+1}-\sum_{n=2}^{N_1}\frac{g_{-n}}{n-1}\frac{1}{t^{n-1}}+g_{-1}\ln t+const\right]$$

Показано, что каждому g_n соответствует определенный тип деформации отверстия, имеющий вполне определенный физический смысл. Так, $\mathrm{Re}\,g_0$ соответствует вращению контура, как единого целого, причем другие члены вклад во вращение не дают. Аналогично, компонента $\mathrm{Im}\,g_0$ (и только она) описывает всестороннее расширение (сжатие) контура. Члену при g_{-2} соответствует деформация чистого сдвига. Вместе эти члены дают решение для одиночного отверстия в плоскости

$$g'(t)=i\left(\frac{p+q}{4}+\frac{q-p}{2}\frac{1}{t^2}\right)$$

Члену при g_{-4} соответствует квадрупольная деформация, и вообще, каждому g_{-n} соответствует мультипольная деформация n-го порядка. Отмечено, что каждому g_{-n} ($n > 2$) соответствует сопряженный ему член g_{n-2}, который позволяет выделить из n-го члена отдельно действительную и мнимую компоненты. Например, комбинируя 0-й и -2-й члены можно получить одноосную деформацию вдоль любой из координатных осей.

Особо выделен коэффициент g_{-1}, которому соответствует дислокационно-подобная деформация. Отмечено, что это единственный член, дающий разрыв смещений. Таким образом, при любых граничных условиях возможно вычислить g_{-1}, исходя только из условия совместности (но только его).

Таким образом показано, что разложение функции, заданной на единичной окружности, в степенной ряд относительно центра окружности фактически является разложением по мультиполям.

В **п. 1.5** введены критерии возникновения трещин разрыва и сдвига, приведены выражения для первого главного и максимального сдвигового напряжений.

В **п. 1.6** для проверки работоспособности метода с его помощью была решена модельная задача о вертикальном растяжении плоскости с парой одинаковых отверстий, контуры которых свободны от нагрузки. Для различных расстояний между отверстиями были получены: распределение окружного напряжения вдоль контура, для горизонтального и вертикального расположения отверстий; зависимость коэффициента концентрации напряжений на отверстиях от ориентации пары отверстий относительно направления приложенной нагрузки. Результаты расчетов согласуются с результатами, полученными и опубликованными другими исследователями.

В **п. 1.7** метод мультипольных разложений применен для решения задачи о вертикальном сжатии. Построены поля напряжений для вертикального, горизонтального и диагонального расположений отверстий. Также исследовано поведение концентрации растягивающих и сдвиговых напряжений на контуре при изменении геометрических параметров системы. Продемонстрировано, что хотя взаимовлияние отверстий, как правило, приводит к увеличению концентрации напряжений, в некоторых случаях, напротив, наблюдается ее снижение, т.е. разгрузка среды.

Также метод опробован на решении задачи Кирша для одиночного отверстия при тех же условиях. Результаты совпали с известным аналитическим решением. Также, полученное поле максимального сдвига соответствует экспериментально полученной картине интерференционных полос.

В **п. 1.8** проводится сравнение результатов экспериментов по разрушению тел с отверстиями с результатами численного моделирования, полученными с применением метода мультипольных разложений.

Эксперименты проведены в ИПМех РАН в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН П-09 "Исследование вещества в экстремальных условиях", Подпрограмма "Физика и механика сильно сжатого вещества и проблемы внутреннего строения Земли и планет" (проект "Механика структурированных сред и горных пород в условиях высокого давления", руководитель проекта зав. лаб. ИПМех РАН, проф. д.ф.-м.н. Р.В. Гольдштейн). Эксперименты проведены с.н.с., к.ф.-м.н. Ю.В. Кулиничем и с.н.с., к.т.н. Н.М. Осипенко.

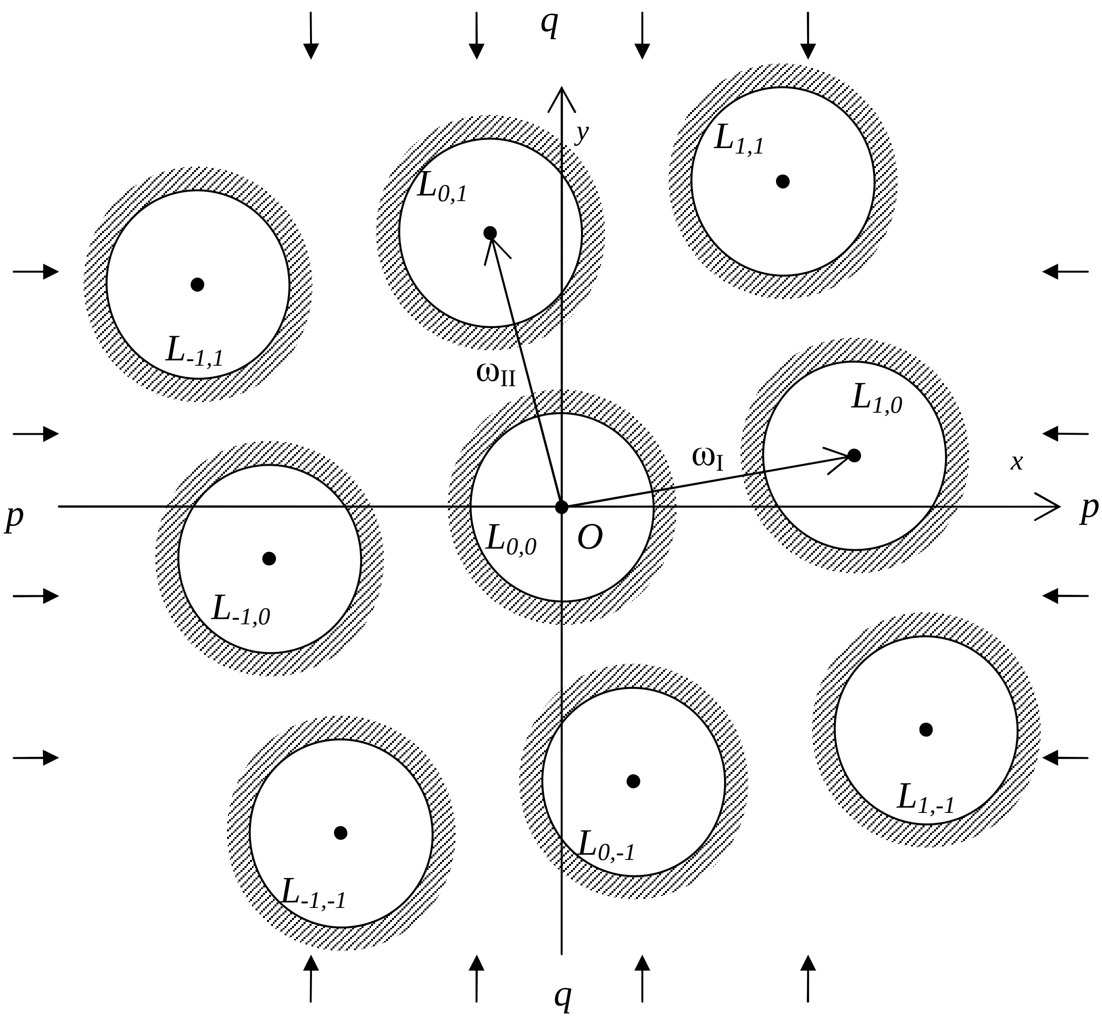
Испытания проводились на ИС ТНН – испытательной системе трехосного наравнокомпонентного нагружения, разработанную в ИПМех РАН. Отличительная особенность системы – возможность независимого нагружения образцов по трем перпендикулярным осям и реализации сложных траекторий нагружений.

Образцы представляют собой кубы из песчаника со стороной 5 см. В каждом образце просверлено два отверстия диаметром 8 мм, расстояние между центрами отверстий составляет 16 мм. Образцы были подвергнуты постепенно возрастающему сжатию (соотношение по осям выдерживалось $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 0.2 : 0.5 : 1$, при этом оси отверстий были ориентированы параллельно оси Ox_2, таким образом поддерживалось плоское напряженно-деформированное состояние), до начала разрушения. После этого изъятые образцы были залиты эпоксидной смолой и распилены. Сечение образцов было зашлифовывано и изучено.

Исследованные структуры разрушения были разделены на два класса – отколы на краях отверстий и трещины сдвига. Вид и расположение обоих типов структур разрушения согласуется с данными численного моделирования.

В **п. 1.9** подведены итоги проведенных в Главе 1 исследований.

В **Главе 2** метод мультипольных разложений применен для решения задачи о двояко-периодической решетке отверстий в упругой плоскости. Исследовано поведение концентрации напряжений в решетке в зависимости от периодов решетки и ее ориентации относительно приложенных нагрузок.



Фиг. 2.

В **п. 2.1** дается постановка задачи о бесконечной двояко-периодической решетке одинаковых отверстий в упругой плоскости (фиг. 2). Радиус отверстий также полагается единичным, края отверстий свободны от нагрузок. На бесконечности плоскость подвергается двухосному нагружению. Как и в предыдущей задаче, требуется найти смещения на краях отверстий, распределение полей напряжений и деформаций в среде. Также требуется найти наиболее вероятные точки зарождения трещин и ориентацию отверстий (по отношению к нагрузке), при которой возникновение трещин наиболее вероятно.

В **п. 2.2** получены выражения для упругих потенциалов $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, а также для интегральных ядер $K(t,t')$ и $L(t,t')$.

В **п. 2.3** с помощью разложения (4) найдены выражения для $K_n(t')$ и $L_n(t')$. Вычислены значения G_k, в т.ч. доказано, что для нечетных значений k величины G_k и g_n обращаются в нуль.

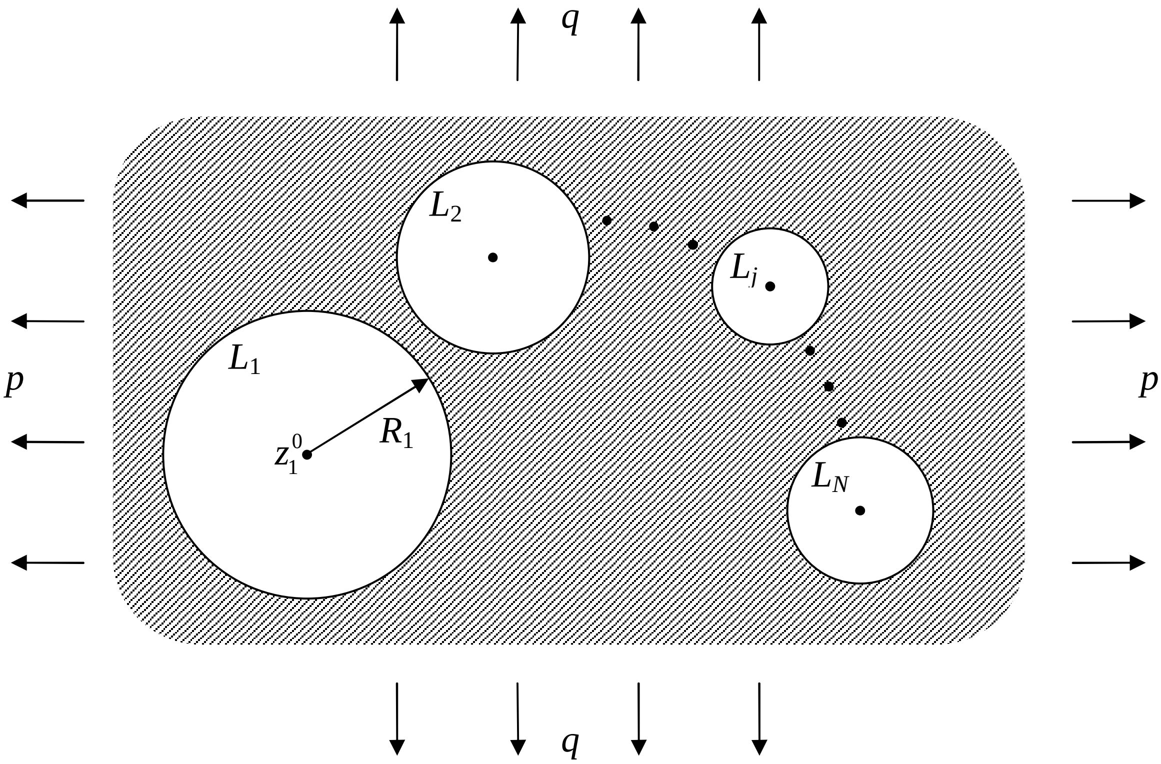
В **п. 2.4** рассмотрен случай квадратной решетки отверстий с периодами $|\omega_I| = |\omega_{II}| = 3$ при одноосном сжатии и чистом сдвиге. Исследованы поля напряжений для различных углов α между ω_I и Ox. В силу симметрии задачи рассмотрен только диапазон $0 \le \alpha \le \pi/4$. Построены поля первого главного и максимального сдвигового напряжений для $\alpha = 0^o, 15^o, 30^o$ и 45^o.

В **п. 2.5** исследовано поведение коэффициента концентрации напряжений в квадратной решетке при одноосном растяжении. Показано, что при определенных условиях и нагрузках запас прочности решетки тесно расположенных отверстий может быть больше, чем у решетки с большими периодами, или у плоскости с одним отверстием.

В **п. 2.6** подведены итоги исследований, проведенных в Главе 2.

В **Главе 3** метод мультипольных разложений расширен на более общий тип задач: упругая плоскость с отверстиями произвольного радиуса и расположения.

В **п. 3.1** поставлена более общая задача. В упругой плоскости расположено конечное число круговых отверстий L_j произвольных радиусов R_j (фиг. 3). Плоскость на бесконечности подвергается нагрузкам p и q.



Фиг. 3.

В **п. 3.2** выведены основные уравнения, описывающие задачу. Поскольку в данном случае задача не обладает симметрией, для каждого контура L_j определена своя функция смещений $g_j(\xi_j)$.

Граничное условие также будет удобно записать в виде сингулярного интегрального уравнения, однако для каждой пары отверстий (j, m) будет определена своя пара интегральных ядер $K^{jm}(\xi,\eta)$ и $L^{jm}(\xi,\eta)$, где ξ принадлежит j-му контуру, а η – m-му. Вычислены значения ядер.

В **п. 3.3** с использованием разложений

$$g'_j(\xi)=\sum_n g_n^j \xi^n$$

сингулярное ГИУ сведено к системе линейных уравнений

$$\sum_{n,j}\left[g_n^j K_{nk}^{jm}+\bar{g}_n^j L_{nk}^{jm}\right]=A_k^m$$

Значения коэффициентов K_{nk}^{jm} и L_{nk}^{jm} вычислены.

В **п. 3.4** с помощью метода мультипольных разложений решен ряд задач теории упругости – рассчитаны поля напряжений вокруг кольца отверстий, цепочки отверстий, а также группы малых отверстий в области влияния одного или двух больших. Во всех случаях исследованы точки концентрации напряжений, определены возможные сценарии начала разрушения.

Также отмечены некоторые частные эффекты: "экранирование" напряжений кольцом отверстий, "вытеснение" концентрации напряжений на крайние отверстия вертикальной цепочки при вертикальном стесненном сжатии. Также для исследованных задач о малых отверстиях в поле больших получено, что риск возникновения трещины сдвига выше для малых отверстий, а трещины разрыва – для больших.

В **п. 3.5** подробно исследован вопрос о точности полученного решения. Для задачи о паре отверстий в плоскости получен ряд приближенных решений при различных максимальных порядках учтенных в решении мультиполей. Показано, что минимум функционала интегральной квадратичной невязки F уменьшается экспоненциально с увеличением порядка учтенных в решении мультиполей. Поскольку F соответствует среднеквадратичному отклонению приближенного решения от истинного, сделан вывод, что уменьшение погрешности решения также имеет экспоненциальный характер.

В **п. 3.6** подведены итоги проведенных в Главе 3 исследований.

В **Главе 4** рассмотрен ряд теоретических вопросов, связанных с мультипольным разложением.

В **п. 4.1** даны определения ансамбля отверстий, разделенных ансамблей, внешнего поля ансамбля.

В **п. 4.2** доказана теорема о мультипольной разложимости внешнего поля. Тем самым показано, что вне определенной области поле группы отверстий может быть представлено одним мультипольным разложением, то есть, ряд мультиполей может быть использован не только для описания поля одного отверстия, но и поля группы взаимодействующих отверстий.

В **п. 4.3** приведены примеры внешних полей ансамблей: для пары отверстий и для колец из 3, 4 и 5 отверстий. Исследованы спектры разложений, проведено сравнение спектров отдельных отверстий и ансамблей. Показано, что геометрическая симметрия ансамбля отражается в спектре его мультипольного разложения.

В **п. 4.4** подытожены результаты Главы 4.

В **Главе 5** продемонстрировано применение метода мультипольных разложений для изучения механизма разрушения пористых сред – произведен расчет области трещиноватости в окрестности конца макротрещины.

В **п. 5.1** приведены области трещиноватости, рассчитанная по модели сплошной среды. Рассмотрены случаи первой, второй и смешанных мод.

В **п. 5.2** рассчитаны области трещиноватости для модели редкопористой среды.

В **п. 5.3** рассчитаны области трещиноватости для двух моделей высокопористых сред. Проводится сравнение результатов, полученных для пористых сред, с результатами для сплошной среды, отмечено существенное увеличение размеров области трещиноватости и изменение ее формы.

В **п. 5.4** подводятся итоги Главы 5.

В **Заключении** сформулированы выводы и перечислены основные научные результаты диссертации.

В **Приложении** приведены поля напряжений, создаваемые отдельными мультиполями.

ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Предложен метод мультипольных разложений – метод представления полей напряжений, создаваемых отверстиями, в виде ряда мультиполей, базовых решений уравнений упругости. Метод позволяет учитывать взаимовлияние близко расположенных отверстий, анализировать поля, определяя вклад в них основных видов напряженно-деформированного состояния: всестороннее растяжение, чистый сдвиг и др., а также исследовать асимптотическое поведение полей на расстоянии.

2. Разработан и программно реализован математический алгоритм построения напряженного поля для заданной группы отверстий и заданной нагрузки с использованием метода мультипольных разложений. Также разработан и программно реализован математический алгоритм контроля точности и пошагового уточнения решения.

3. С использованием созданных программных средств исследован ряд задач теории упругости для различных наборов круговых отверстий: два одинаковых отверстия, двояко-периодическая система одинаковых отверстий, кольцо отверстий, цепочка отверстий, группа малых отверстий в поле большого, группа малых отверстий в поле двух больших. В каждом случае построены распределения всех компонент поля напряжений, а также максимальных главного и сдвигового напряжений. Для двух отверстий исследована зависимость напряжений на контурах отверстий от ориентации пары относительно приложенных на бесконечности нагрузок и расстояния между отверстиями. Для решётки отверстий исследовано поведение концентрации напряжений при повороте решётки и изменении периодов.

4. Рассмотрены некоторые теоретические вопросы мультипольного разложения. В частности, показано, что поле группы отверстий вне охватывающего группу контура может быть представлено одним разложением и выведены формулы коэффициентов этого разложения.

5. Продемонстрировано применение метода мультипольных разложений для изучения механических свойств пористых сред.

ПУБЛИКАЦИИ

Основные результаты диссертации отражены в следующих публикациях:

1. *Мокряков В.В*. Применение метода мультиполей для решения задачи о двух близко расположенных отверстиях // Изв. РАН. МТТ. 2007. №5.
2. *Мокряков В.В.* Плоская задача о напряженном состоянии, возникающем при взаимовлиянии двух близко расположенных отверстий. – Препринт ИПМех РАН № 774. Москва. 2005. 30с.
3. *Мокряков В.В.* Задача о напряженном состоянии, возникающем в упругой плоскости, ослабленной бесконечной периодической системой близко расположенных отверстий. – Препринт ИПМех РАН № 806. Москва. 2006. 34с.
4. *Мокряков В.В*. Применение метода мультиполей для решения задачи о нескольких отверстиях произвольного радиуса – Препринт ИПМех РАН № 849. Москва. 2007. 34с.
5. *Мокряков В.В.* Плоская задача о напряженном состоянии, возникающем при взаимовлиянии двух близко расположенных

отверстий. – Труды Международной Молодежной Научной Конференции «XXX Гагаринские чтения». Москва. 2004.

6. *Мокряков В.В.* Плоская задача о напряженном состоянии, возникающем в периодической системе близко расположенных отверстий. – Труды Международной Молодежной Научной Конференции «XXXII Гагаринские чтения». Москва. 2006.