На правах рукописи

САНДАКОВ Антон Евгеньевич

ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА В ПРОНИЦАЕМЫХ ПЛАСТАХ С УЧЕТОМ ВЫТЕСНЕНИЯ ОДНОЙ ЖИДКОСТИ ДРУГОЙ

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2009

Работа выполнена в Московском энергетическом институте (Государственном техническом университете).

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Гордеев Юрий Николаевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук Гремячкин Виктор Михайлович; доктор физико-математических наук, профессор Карамзин Юрий Николаевич
Ведущая организация:	Механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Защита диссертации состоится «22» октября 2009 г. в 15 часов 00 минут на заседании Диссертационного совета Д 002.240.01 при учреждении Российской академии наук Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН по адресу: 119526, Москва, проспект Вернадского, д.101, корп. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук.

Автореферат разослан «18» сентября 2009 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета
Д 002.240.01 при ИПМех РАН
кандидат физико-математических наук Е.Я. Сысоева

1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

1.1. Актуальность

С середины XX века получила широкое распространение теория гидравлического разрыва пласта (далее ГРП), как действенный метод интенсификации добычи нефти и газа в нефтегазовой промышленности. Под ГРП понимают процесс закачки в скважину жидкости разрыва с таким расходом, который скважина не успевает поглощать. В скважине происходит рост давления и при некотором критическом значении давления пласт рвется и в нем образуются и распространяются трещины гидроразрыва под действием расклинивающего потока жидкости или газа. На промыслах ГРП впервые был применен в 1947 году. Другие современные методы разрыва пласта, в том числе взрывной и ядерный, пока не могут вытеснить ГРП из промысловой практики.

Устойчивый интерес специалистов к проблеме ГРП связан, прежде всего, с постоянным развитием и усложнением технологии, что продиктовано необычайной сложностью его проведения. Дело в том, что ошибки, допущенные при определении основных факторов, влияющих на ГРП, приводят к выводу из эксплуатации дорогостоящих нефтяных и газовых скважин.

Основы теории ГРП были заложены в работах отечественных ученых С.А. Христиановича и Ю.П. Желтова в 1955 году (модель Желтова-Христиановича). Другой распространенной моделью трещин ГРП считают модель, предложенную исследователями T.K. Perkins и L.R. Kern в 1961 году (модель Перкинса-Керна).

Механико-математическая постановка задач о ГРП жидкостями или газами описывается при помощи нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. Поэтому получение аналитических решений модельных задач, направленных на более корректное прогнозирование процесса ГРП, а также повышение точности существующих механико-математических моделей, представляет большую научную ценность. Кроме того, точные решения модельных механико-математических задач являются хорошей возможностью тестирования различных численных алгоритмов.

1.2. Цели работы

1). Повышение точности физико-математической модели трещины гидроразрыва Перкинса-Керна за счет более корректного вычисления утечек жидкости разрыва в окружающий пласт по полю давления жидкости в пласте. Обобщение классической модели вертикальной трещины Перкинса-Керна на случай упругого взаимодействия между различными вертикальными сечениями трещины и нахождение более точного выражения для ее раскрытия.

2). Аналитическое решение задачи о распределении давления в упруго-деформируемом пласте вокруг растущей плоской трещины гидроразрыва при заданном распределении давления жидкости разрыва внутри трещины.

3). Аналитическое исследование модели поршневого изотермического вытеснения сжимаемой пластовой жидкости жидкостью разрыва в узкой осесимметричной трещине (щели) при больших скоростях движения.

4). Численное решение сопряженной задачи о развитии классической трещины Перкинса-Керна в проницаемом упруго-деформируемом пласте с учетом вытеснения пластовой жидкости жидкостью разрыва: распределение давления внутри трещины, а также ее фильтрация в пласте, вычисление утечек жидкости по полю давления в пласте, а также нахождение раскрытия трещины и характера роста ее длины.

1.3. Научная новизна

В диссертации получены следующие результаты, характеризующиеся научной новизной.

1). Получены точные решения автомодельной задачи о распределении давления в окрестности плоской трещины гидроразрыва в проницаемой среде при условии, что жидкость разрыва и окружающий пласт являются упруго-деформируемыми, а трещина растет по корневому закону. Получено распределение давления вне трещины в пласте в направлении ее распространения, а также в направлении, ортогональном ее распространению. Ценность полученных решений состоит в том, что они могут быть построены для любого заданного распределения давления жидкости внутри трещины.

2). В параметрическом виде построены точные решения автомодельной задачи о поршневом изотермическом вытеснении жидкостью разрыва пластовой жидкости в узкой радиальной трещине при больших скоростях движения в предположении сжимаемости обеих жидкостей. В результате были определены зависимости давления и скорости обеих жидкостей от автомодельной переменной.

3). С помощью асимптотического метода была найдена функция раскрытия трещины в обобщенной механико-математической модели Перкинса-Керна, которая, в отличие от классической модели, учитывает сопряжение полей упругости и давления жидкости в трещине, т.е. взаимодействие различных вертикальных сечений трещины между собой.

Полученная функция раскрытия (ширины) трещины является более точной, чем известная ранее.

4). Был создан численный комплекс программ, моделирующий сопряженную задачу распространения трещины гидроразрыва Перкинса-Керна в проницаемой среде. Проведено моделирование течения жидкости разрыва по трещине, фильтрации жидкости в пласте с учетом вытеснения пластовой жидкости жидкостью разрыва. В результате было численно рассчитано: распределение давления жидкости разрыва в трещине и в пласте, утечки жидкости разрыва в окружающий пласт через боковую поверхность трещины более точным способом, а также величина раскрытия трещины гидроразрыва и ее длина. В модели рассматривается случай постоянного давления закачиваемой жидкости разрыва на скважине.

1.4. Достоверность

Достоверность полученных научных данных обусловлена использованием в диссертации только известных физико-математических моделей, рецензированием результатов ведущими экспертами при публикации в научных журналах из перечня ВАК РФ, активным обсуждением результатов на научных конференциях, в том числе всероссийских и международных, а также на трех научных семинарах в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.

1.5. Положения, выносимые на защиту

1). Точные функционально-инвариантные решения задачи о распределении поля давления в окрестности плоской трещины гидроразрыва, растущей в проницаемой среде в направлении ее роста, а также в направлении ему ортогональном.

2). Точные решения автомодельной задачи поршневого изотермического вытеснения одной сжимаемой жидкости другой в узкой осесимметричной трещине при больших скоростях. Получены выражения для динамических величин: скорости и давления жидкостей.

3). Точные решения задачи о нахождении раскрытия трещины гидроразрыва Перкинса-Керна в более точной обобщенной механико-математической модели.

4). Численный комплекс программ, позволяющий моделировать распространение трещины гидроразрыва Перкинса-Керна в проницаемой среде, распределение давления жидкости в трещине, фильтрацию жидкости в пласте, утечки жидкости через боковую поверхность в пласт более корректным способом, вытеснение пластовой жидкости жидкостью разрыва, а также длину трещины.

1.6. Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 122 наименований, содержит 114 страниц, в том числе 11 рисунков и одно приложение на 4 страницах.

1.7. Апробация

Основные научные результаты, вошедшие в диссертацию, докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

1). На V-ой Всероссийской конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики» (Томск, 2006).

2). На XI-ой Международной конференции «Электромеханика, электротехнологии, электротехнические материалы и компоненты» (Украина, Алушта, 2006).

3). На «Научной сессии МИФИ» (Москва, 2007).

4). На XIV-ой Международной конференции «Ломоносов» (Москва, 2007).

5). На IV-ой Международной научно-практической конференции «Качество науки — качество жизни» (Тамбов, 2008).

6). На XLIV-ой Всероссийской конференции по проблемам математики, информатики, физики и химии (Москва, 2008).

7). На научном семинаре лаборатории «Механика сложных жидкостей» Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (Москва, 2008).

8). На научном семинаре лаборатории «Механика прочности и разрушения материалов и конструкций» Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (Москва, 2009).

9). На научном семинаре лаборатории «Термодинамика и горение» Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (Москва, 2009).

10). На научном семинаре кафедры «Волновая и газовая динамика» Механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (Москва, 2009).

2. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении диссертации кратко описывается сам процесс гидравлического разрыва пласта, основные механико-математические модели ГРП и основные трудности в их построении. Также определяются цели и задачи исследования, формулируются основные результаты работы и кратко излагается ее содержание по главам.

В первой главе рассматривается автомодельная задача о распределении поля давления в окрестности трещины гидроразрыва, развивающейся по корневому закону в проницаемой пористой среде.

Трещина в данной задаче считается тонкой областью (разрезом) вытянутой вдоль оси *Ox* с постоянной расклинивающей силой, действующей на ее берега. Задача заключается в нахождении возмущения поля давления в пласте, вызванного развитием трещины.

В предположении, что жидкость разрыва в трещине и окружающий трещину пласт являются упруго-деформируемыми, постановка задачи имеет вид (В.Н. Щелкачев, 1946):

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right),\ -\infty < x < \infty,\ y \ge 0,\ t \ge 0 \qquad (1)$$

$$p(x,y,t=0) = p_0,\ p(x,y=0,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, p_1\!\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + p_0,\ |x| \le l(t),$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x,y=0,t) = 0,\ \ |x| > l(t),\ l(t) = c\sqrt{t}\,.$$

Здесь $p(x,y,t)$ — давление жидкости, κ — коэффициент пьезопроводности, (x,y) — пространственные координаты, t — время, $l(t)$ — длина трещины, c — параметр, характеризующий скорость распространения трещины, а $p_0 = const$.

Таким образом, в первой главе решается смешанная краевая задача для уравнения пьезопроводности.

Было показано, что задача (1), после перехода к автомодельным переменным (X,Y), параметру ε и функции $\Phi(X,Y)$ по формулам

$$X = x\frac{\varepsilon}{c\sqrt{t}},\ Y = y\frac{\varepsilon}{c\sqrt{t}},\ \varepsilon = \frac{c}{2\sqrt{\kappa}},\ p = \frac{1}{\sqrt{t}}\big(p_1(0) - p_0\big)\Phi(X,Y) + p_0,$$

сводится к смешанной краевой задаче для уравнения Гельмгольца, решение которой было записано через гармоническую функцию. Далее, методами ТФКП было найдено решение исходной задачи:

в направлении распространения трещины при $Y = 0$

$$\Phi(X,0) = \begin{cases} \gamma(X), 0 \le X \le \varepsilon, \\ \dfrac{e^{-X^2/2}}{\pi}\displaystyle\int_0^{\varepsilon^2/2}\left[\arcsin\left(\frac{-4tX^2 + \varepsilon^2(X^2+2t)}{\varepsilon^2\left|2t - X^2\right|}\right) + C_1\right]\Lambda'(t,0)\,dt,\ X > \varepsilon, \end{cases}$$

а также в направлении ортогональном росту трещины при $X = 0$:

$$\Phi(0,Y) = \frac{e^{-Y^2/2}}{\pi}\int_0^{\varepsilon^2/2}\left[\arcsin\left(\frac{4tY^2 - \varepsilon^2(Y^2+2t)}{\varepsilon^2\left|2t - Y^2\right|}\right) + C_2\right]\Lambda'(t,0)\,dt,\ Y > 0.$$

Здесь функция $\Lambda'(t,0)=\frac{d}{dt}\left(e^t\gamma\left(\sqrt{2t}\right)\right)$, а $\gamma(X)$ — известное распределение давления жидкости в трещине.

Таким образом, было получено поле давления вокруг трещины для произвольного начального распределения давления внутри трещины $\gamma(X)$.

Были рассмотрены частные случаи модельного распределения давления в трещине, например, $\gamma(X)=\sqrt{\varepsilon^2-X^2}$. Распределение давления в этом случае было найдено численно по полученным выше формулам. Результаты расчетов давления при $Y=0$ в зависимости от параметра ε, пропорционального скорости роста трещины, приведены на рис. 1, а распределение давления в направлении, ортогональном роту трещины при $X=0$, представлено на рис. 2. .

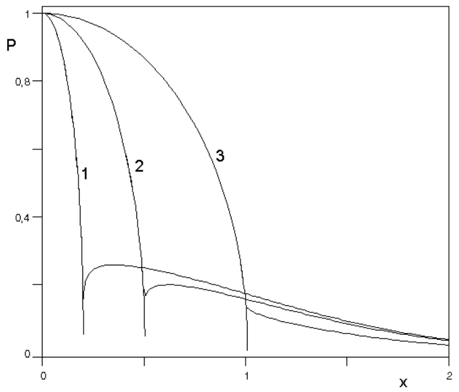

Рис. 1. Распределение давления внутри и вне трещины при $Y=0$. Линии 1—3 соответствуют значением параметра $\varepsilon=0.2,\ 0.5,\ 1.0$.

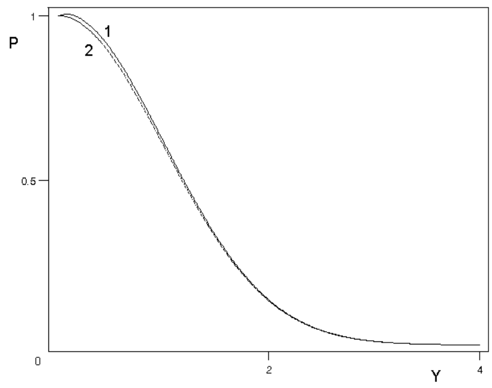

Рис. 2. Распределение давления в направлении ортогональном распространению трещины при $X=0$. Линии 1—2 соответствуют значениям параметра $\varepsilon=0.1,\ 0.5$.

На рис.1 видно, что при распространении трещины вблизи ее кончика в пласте возникает падение давления вплоть до нуля. Этот факт согласуется с высказанным В.М. Ентовым предположением, что давление в кончике сильновытянутой трещины может быть равным нулю.

Таким образом, в первой главе получены в квадратурах функционально-инвариантные решения задачи о гидравлическом разрыве пласта. Распределение давления жидкости разрыва в трещине задано. Оно может быть получено из решения задачи о течении жидкости в трещине. Найденное точное решение может быть использовано для вычисления утечек жидкости в пласт по полю давления жидкости в пласте, а также для тестирования численных алгоритмов распределения трещины гидроразрыва.

Во второй главе решается автомодельная задача о поршневом изотермическом вытеснении пластовой жидкости жидкостью разрыва в узкой радиальной трещине (щели) при больших скоростях в случае, когда обе жидкости предполагаются сжимаемыми.

Движение жидкостей описывается уравнением непрерывности и двучленным законом сопротивления Краснопольского (Форхгеймера). В задаче рассматривается случай, когда линейным слагаемым по скорости в двучленном законе можно пренебречь по сравнению с квадратичным, что справедливо при движении с большими скоростями.

Задача вытеснения для плоского случая была решена ранее (Ю.Н.Гордеев, Н.А. Кудряшов, В.В. Мурзенко, 1984). В данной работе было получено решение задачи для осесимметричного вытеснения, что справедливо для радиальных трещин гидроразрыва.

Постановка задачи имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(xu\rho\right)=0,\ \frac{\partial}{\partial x}p=-\frac{\lambda u^2\rho}{w^2},\ p=c^2\rho, \quad (2)$$

$$p(x=0,t)=p^*,\ p(x,t=0)=p_0,$$

$$p(x=L(t)-0,t)=p(x=L(t)+0,t),$$

$$u\left(x=L(t)-0,t\right)=u\left(x=L(t)+0,t\right)=dL/dt.$$

Здесь функции $\rho(x,t)$, $u(x,t)$ и $p(x,t)$ соответствуют плотности, скорости и давлению жидкостей соответственно, x — пространственная координата, t — время, c — изотермическая скорость звука в каждой из жидкостей, $L(t)$ — граница раздела между жидкостями, dL/dt — скорость движения границы раздела.

Задача (2), после перехода к автомодельным переменным, принимает вид:

$$\varphi'-\kappa\varphi^3+\theta\kappa\varphi^2+\frac{\varphi}{\theta}=0,\ f'+\kappa\varphi^2 f=0, \quad (3)$$

$$\lim_{\theta\to 0}(f\theta\varphi)=1,\ \lim_{\theta\to\infty} f=N=p_0/p^*,$$

$$f(\theta_0-0)=f(\theta_0+0),\ \varphi(\theta_0-0)=\varphi(\theta_0+0)=\theta_0.$$

Здесь $\varphi(\theta)$ и $f(\theta)$ — автомодельные функции скорости и давления от автомодельной переменной θ соответственно, параметр $\kappa=\left\{1,\ 0\le\theta\le\theta_0;\ \kappa_0=c_1^2/c_2^2,\ \theta_0<\theta<+\infty.\right\}$, а θ_0 — автомодельная координата границы раздела между двумя жидкостями.

Было показано, что первое уравнение задачи (3) сводится к уравнению Эйри: $y''=z\cdot y$, где $y=y(z)$, а z — новая переменная. Уравнение Эйри является точнорешаемым и имеет общее решение вида:

$$y(z)=\begin{cases} D_1\mathrm{Ai}(z)+D_2\mathrm{Bi}(z),\ 0\le\theta<\theta_0,\\ D_3\mathrm{Ai}(z)+D_4\mathrm{Bi}(z),\ \theta>\theta_0,\end{cases}$$

где $\mathrm{Ai}(z)$, $\mathrm{Bi}(z)$ — функции Эйри, а D_1 — D_4 являются неизвестными константами, подлежащими определению. Здесь первое решение справедливо для жидкости разрыва, а второе — для пластовой жидкости.

Второе уравнение задачи (3) позволяет выразить автомодельные функции давления f и скорости φ жидкостей через решение уравнения Эйри $y(z)$:

$$f=2/3\,y^2+4/3\,y'^3y^{-1}-4/3\,y'yz\,,$$
$$\varphi=\kappa^{-1}\theta^{-2}\left(1-2^{2/3}\kappa^{-1/3}y'/(y\theta)\right).$$

Зависимость между автомодельной переменной θ и z является обратно-пропорциональной:

$$y'^2y^{-2}=(2\kappa)^{-1/3}\theta^{-1}+z\,,$$

поэтому точке $\theta=0$ ставится в соответствие $z=z_0$, точкам $\theta=\theta_0\pm0$ соответствуют $z=z^{\pm}$, а точке $\theta\to\infty$ ставится в соответствие $z=z_1$.

Алгоритм построения аналитического решения автомодельной задачи (3) имеет следующий вид. Выбирается некоторое значение z_0, далее определяется функция $y(z)$ для вытесняющей жидкости разрыва. Таким образом, функции давления, скорости жидкости, а также зависимость $\theta(z)$ для жидкости разрыва на промежутке $z\in\left[z_0,z^-\right]$ получаются определенными. Далее по z_0 определяется z^-, а потом с помощью κ_0 и z^- находится значение z^+. С помощью условий на границе вычисляется $y(z)$, а также функции давления, скорости и зависимость $\theta(z)$ для пластовой жидкости на промежутке $z\in\left[z^+,z_1\right]$. Далее находится z_1 и определяется некоторое $\tilde{N}$, которое соответствует выбранному в начале z_0. То значение параметра z_0, которое отвечает заданному в задаче N, может быть определено методом «пристрелки», т.е. путем подбора с соответствующей точностью.

Были построены графические зависимости динамических характеристик жидкостей $f(\theta)$ и $\varphi(\theta)$ как функций автомодельной переменной θ при $\kappa_0=0.5$, $N=3.1$; $\kappa_0=1.0$, $N=2.85$; $\kappa_0=4.0$, $N=3.5$. Рис. 3 иллюстрирует зависимость давления жидкостей $f(\theta)$, а рис. 4 —

зависимость автомодельной скорости жидкости $\varphi(\theta)$. Пунктирная линия соответствует границе раздела $\varphi = \theta$.

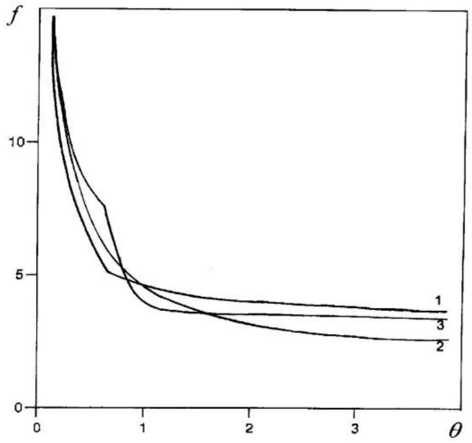

Рис. 3. Зависимость давления жидкостей $f(\theta)$ от автомодельной переменной θ. Линии 1—3 соответствуют $\kappa_0 = 0.5,\ N = 3.1;\ \kappa_0 = 1.0,\ N = 2.85;$ $\kappa_0 = 4.0,\ N = 3.5$.

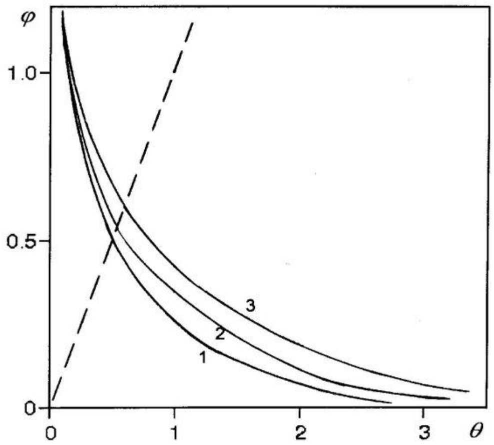

Рис. 4. Зависимость скорости жидкостей $\varphi(\theta)$ от автомодельной переменной θ. Линии 1—3 соответствуют $\kappa_0 = 0.5,\ N = 3.1;\ \kappa_0 = 1.0,\ N = 2.85;$ $\kappa_0 = 4.0,\ N = 3.5$. Пунктирной линии соответствует $\varphi = \theta$.

Было установлено, что границе раздела между жидкостями $\theta = \theta_0$ соответствует скачок производной функции давления $f(\theta)$. Если плотность пластовой жидкости больше плотности жидкости разрыва $(\kappa_0 > 1)$, то скачок производной отрицателен, а в случае меньшей плотности пластовой жидкости $(\kappa_0 < 1)$ скачок производной будет положителен. Функция скорости $\varphi(\theta)$ на границе раздела между жидкостями скачка производной не имеет.

Полученные решения могут успешно применяться для прогнозирования распределения давления в радиальных трещинах при вытеснении пластовой жидкости жидкостями разрыва с различными характеристиками при больших скоростях, а также для тестирования и отладки различных численных алгоритмов.

Третья глава диссертации посвящена исследованию обобщенной модели трещины гидроразрыва Перкинса-Керна, которая, в отличие от классической модели, учитывает сопряжение полей упругости и давления жидкости в трещине.

Рассматривается симметричная относительно скважины вертикальная трещина постоянной высоты $2H$ и большой протяженности в горизонтальном направлении $2L >> 2H$, занимающая в плоскости $y = 0$ область G, где $2L$ — ее характерная длина. Упругие постоянные пласта и горных пород считаются одинаковыми, длина трещины $2L$ и распределение давления жидкости в ней $p(x)$ полагаются известными. Заданными также считаются значения постоянного бокового горного давления в массиве σ и модуля сцепления K, характеризующего трещиностойкость пласта и окружающих его пород, а также $H^+, H^- = const$.

Определение раскрытия трещины $2w(x,z)$ сводится к решению уравнений равновесия упругой породы, что эквивалентно решению интегро-дифференциального уравнения относительно смещения поверхности трещины $w(x,z) \geq 0$, совпадающей с границей полупространства $y > 0$ (Р.В. Гольдштейн, В.М. Ентов, 1989):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \iint_G \frac{w(x',z')dx'dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (z-z')^2}} = -2\pi\beta\left(p(x) - \sigma\right), \qquad (4)$$

$$\beta = 2(1-\nu^2)/E, \ (x,z) \in G.$$

Здесь $w(x,z)$ — раскрытие (ширина) трещины, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона пласта и вмещающих его пород, σ — постоянное боковое горное давление в массиве, а $p(x)$ — известное распределение давления жидкости разрыва в трещине.

Задача (4) решается асимптотическим методом, предложенным Р.В. Гольдштейном (Р.В. Гольдштейн, Л.Б. Корельштейн, 1987): интегро-дифференциальный оператор раскладывается по малому параметру $\varepsilon = H/L$. После перехода к безразмерным переменным (X, Z), таким, что $-1 \leq X \leq 1$, $-1 \leq Z \leq 1$, при помощи преобразования Фурье и аппарата обобщенных функций установлено, что уравнение (4) может быть преобразовано к уравнению свертки относительно безразмерной функции раскрытия $W(X,Z,\varepsilon)$:

$$\Phi(X,Z,\varepsilon) * W(X,Z,\varepsilon) = -2\pi\Psi(X), \ (X,Z) \in G',$$

$$\text{где } \Phi * W = \iint_{G'} \Phi(\xi - X, \zeta - Z, \varepsilon) W(\xi, \zeta, \varepsilon) d\xi d\zeta,$$

$$\Phi(X,Z,\varepsilon) = \Phi_0(X,Z) + \varepsilon^2 \ln\left(2/\varepsilon\right)\delta''(X) + \varepsilon^2 \Phi_2(X,Z) + o(\varepsilon^2),$$

$$\Phi_0(X,Z) = -2\delta(X)\frac{\partial}{\partial Z}\mathrm{P}\frac{1}{Z}, \ \Phi_2(X,Z) = \delta''(X)\left(1 - \ln|Z|\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial X^2}\mathrm{P}\frac{1}{|X|}.$$

Здесь δ и δ'' — дельта-функция Дирака и ее вторая производная соответственно, а $\mathrm{P}\left(1/Z\right)$ — обобщенная функция.

Раскрытие трещины представляется в виде следующего разложения:

$$W(X,Z,\varepsilon)=W_0(X,Z)+\varepsilon^2\ln\left(2/\varepsilon\right)W_1(X,Z)+\varepsilon^2 W_2(X,Z)+o(\varepsilon^2).$$

Была получена система уравнений свертки относительно неизвестных функций $W_0(X,Z)$, $W_1(X,Z)$ и $W_2(X,Z)$, которая решалась последовательно.

В итоге была определена функция $W_0(X,Z)$, которая является решением классической задачи Перкинса-Керна и была известна ранее, а также функции-поправки $W_1(X,Z)$ и $W_2(X,Z)$, которые учитывают упругое взаимодействие различных вертикальных сечений трещины между собой:

$$W_0(X,Z)=\pi^2\Psi(X)\sqrt{1-Z^2}\,,\; W_1(X,Z)=\frac{\pi^2}{4}\sqrt{1-Z^2}\,\frac{d^2}{dX^2}\Psi(X),$$

$$W_2(X,Z)=\frac{\pi^2}{8}\sqrt{1-Z^2}\cdot\int_{-1}^{1}\frac{d^2\Psi(\xi)}{d\xi^2}\frac{d\xi}{X-\xi}+$$

$$+\frac{\pi}{2}\frac{d^2\Psi(X)}{dX^2}\cdot\int_{-1}^{1}\ln\left(\frac{\sqrt{(Z+1)(1-\xi)}+\sqrt{(\xi+1)(1-Z)}}{\sqrt{2|Z-\xi|}}\right)\cdot\gamma_2(\xi)d\xi,$$

где интеграл $\gamma_2(\xi)=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\eta^2}\ln\left(\frac{e}{|\xi-\eta|}\right)d\eta$, а $\Psi=\left(p-\sigma\right)/\sigma_\infty$.

Здесь соответствующие сингулярные интегралы следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Полученные результаты полезны для более точного прогнозирования раскрытия трещины Перкинса-Керна на средних стадиях гидроразрыва.

В четвертой главе диссертации проводилось численное моделирование распространения классической трещины ГРП Перкинса-Керна в проницаемой пористой среде. Построен численный комплекс программ, позволяющий рассчитывать распределение давления жидкости разрыва внутри трещины и ее фильтрацию в окружающем ее пласте, величину утечек жидкости разрыва через боковую поверхность трещины в пласт, длину трещины и толщину так называемой «корки». Под «коркой» здесь понимается тонкий слой фильтрующегося раствора (жидкости разрыва), который проникает в окружающий трещину пласт и вытесняет пластовую жидкость.

Течение жидкости разрыва внутри трещины («внутренняя задача») задается уравнением непрерывности

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(wu)=-2q_L,$$

где скорость жидкости $u(x,t)$ определяется уравнением движения

$$u=-\frac{w^2}{12\mu}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}.$$

Здесь $p(x,t)$ — давление жидкости разрыва внутри трещины, $w(x,t)$ — раскрытие (ширина) трещины, q_L — утечки жидкости разрыва через боковые поверхности трещины в окружающий ее пласт, x — координата вдоль трещины (начало координат было выбрано в центре трещины, а течение жидкости вдоль нее предполагается симметричным), t — время, μ — вязкость жидкости.

Задача решается с подвижной правой границей $0 \le x \le l(t)$, где $l(t)$ — длина трещины.

В начальный момент времени задается начальное давление $p(x,t=0)=p_\infty$, равное начальному пластовому давлению. Через начало координат закачивается жидкость разрыва с постоянным давлением $p(x=0,t)=p_0$, а в кончике трещины задается условие $p(x=l(t),t)=\sigma$, где σ — постоянное боковое горное давление.

Уравнение непрерывности, после перехода к безразмерным переменным (ξ,ζ), решается численно при помощи неявной четырехточечной схемы с применением итераций со следующими граничными и начальными условиями:

$$P(\xi=0,\tau)=1,\ P(\xi=L,\tau)=0,\ P(\xi,\tau=0)=0,$$

где $P(\xi,\tau)$ — безразмерная функция давления жидкости разрыва в трещине, а $L(\tau)$ — безразмерная длина трещины, а τ — безразмерное время.

Фильтрация жидкости разрыва в окружающем трещину упруго-деформируемом пласте («внешняя задача») описывается уравнением пьезопроводности

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\kappa\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right),$$

где $p(x,y,t)$ — давление жидкости разрыва в пласте, y — координата ортогональная берегам трещины, κ — коэффициент пьезопроводности.

После перехода к безразмерным переменным (ξ,ζ), решение данного уравнения определяется на квадратной области: $0 \le \xi \le 1$, $0 \le \zeta \le 1$.

Уравнение пьезопроводности «внешней задачи» решается вместе со следующими граничными и начальными условиями:

$$\frac{\partial P(\xi=0,\zeta,\tau)}{\partial \xi}=0,\ P(\xi=1,\zeta,\tau)=0,$$

$$P(\xi,\zeta=0,\tau)=P(\xi,\tau),\ \xi\in[0,L]$$

$$\frac{\partial P(\xi,\zeta=0,\tau)}{\partial \zeta}=0,\ \xi\in[L,1],$$

$$P(\xi,\zeta=1,\tau)=0,\ P(\xi,\zeta,\tau=0)=0.$$

При решении «внешней задачи» граничное условие внутри трещины полагается равным решению «внутренней задачи» $P(\xi,\tau)$, т.е.

$$P(\xi,\zeta=0,\tau)=P(\xi,\tau),\ \xi\in[0,L].$$

Для численного решения полученной задачи применяется метод дробных шагов (продольно-поперечная разностная схема).

Толщина «корки» (узкого слоя бурового раствора, проникающего в пласт и вытесняющего пластовую жидкость) $b(x,t)$ определяется выражением

$$b(x,T)=\frac{1}{m}\int_0^T q_L(x,t)dt,$$

где m — пористость породы.

Раскрытие трещины $w(x,t)$ определяется соотношением вида:

$$w(x,t)=\frac{4(1-\nu)H}{\pi G}\left(p(x,t)-\sigma\right).$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона, H — постоянная высота трещины, а G — модуль сдвига.

Критерий роста трещины определяется из условия $p(x=l,t)>\sigma$, т.е. трещина растет, если давление жидкости разрыва в кончике трещины превосходит постоянное вертикальное давление в пласте σ.

Утечки жидкости разрыва из трещины в окружающий ее пласт q_L вычисляются после решения «внешней задачи» по полю давления жидкости в пласте следующим способом:

$$q_L = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p(x,y,t)}{\partial y}, \;\; x \in (-l(t), l(t)),$$

где k — коэффициент проницаемости пласта.

Таким образом, алгоритм расчета сводится к следующему:

- в начальный момент времени задается пластовое давление в трещине $p(x,t=0)=p_\infty$ и в пласте $p(x,y,t=0)=p_\infty$.
- Происходит повышение давления на скважине $p(x=0,t)=p_0$ и жидкость разрыва начинает втекать в трещину. Предполагается, что на начальном этапе «корки» нет, т.к. она начинает формироваться с течением времени.
- Решается «внутренняя задача», т.е. производится вычисление распределения давления внутри трещины с применением итераций.
- Затем решается «внешняя задача», т.е. вычисляется пластовое давление вне трещины на первом временном шаге.
- По полю давления (по решению «внешней задачи») определяются утечки жидкости разрыва из трещины.
- Начинает формироваться «корка», толщина которой рассчитывается по утечкам жидкости в окружающий трещину пласт.
- Вычисляется давление в трещине на следующем временном шаге и т.д.

На рис. 5 представлен один из кадров полученного трехмерного решения распределения жидкости разрыва в трещине и пласте, выполненного с помощью программы MatLab 7.0 в виде трехмерной анимации. На рис. 6—8 представлены численные расчеты соответствующих зависимостей задачи. На каждом из рисунков, кроме рис.8, построены несколько решений в различные моменты времени.

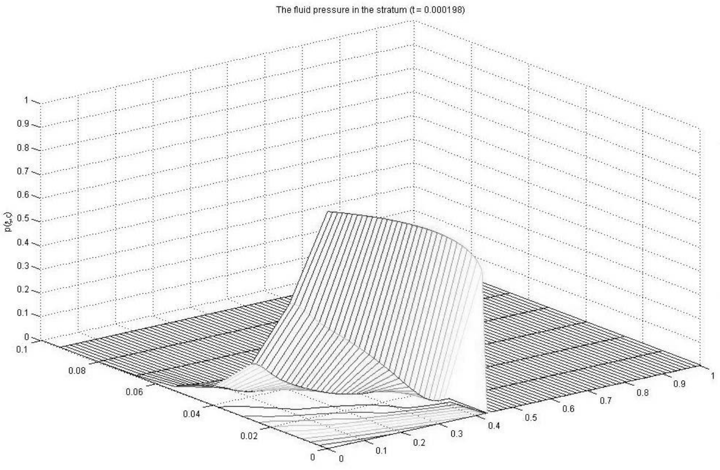

Рис. 5. Распределение давления жидкости в трещине и пласте в определенный момент времени.

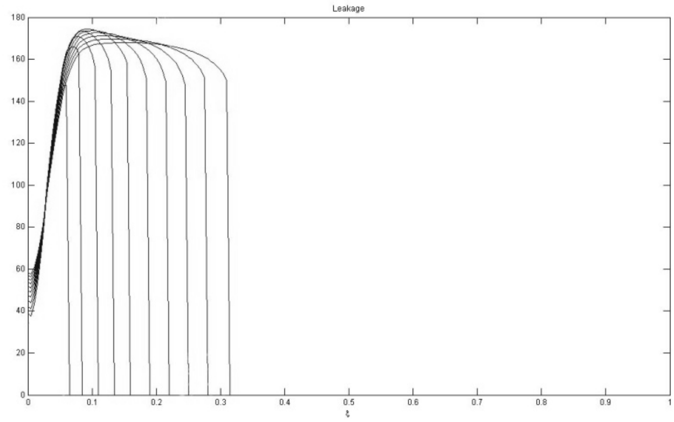

Рис. 6. Боковые утечки жидкости разрыва в пласт

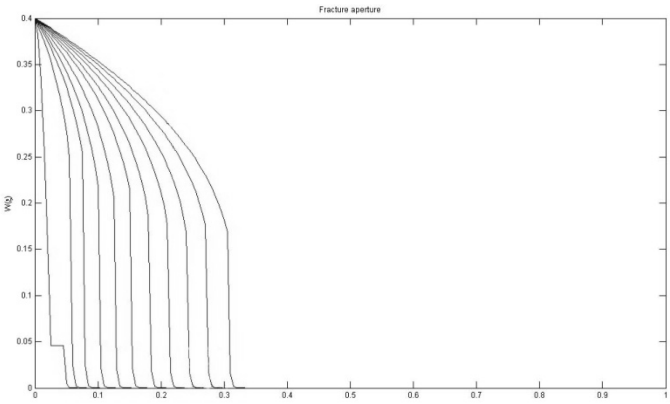

Рис. 7. Раскрытие (ширина) трещины

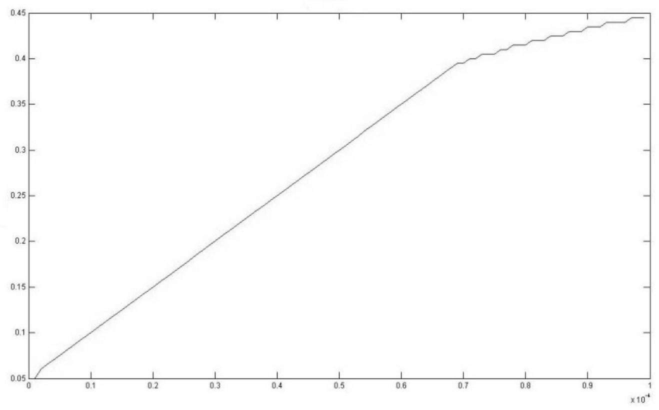

Рис. 8. Зависимость длины трещины от времени.

В заключении перечислены основные результаты работы.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

В диссертации построен ряд точных аналитических решений для плоских и осесимметричных трещин гидроразрыва, найдено более точное выражение для раскрытия трещины Перкинса-Керна в случае упругого взаимодействия ее вертикальных сечений, а также проведено численное моделирование распространения трещины гидроразрыва Перкинса-Керна в проницаемой среде. Предложенный численный алгоритм является более точным за счет вычисления утечек жидкости по полю давления жидкости в пласте.

Основные результаты диссертационной работы сводятся к следующему:

1. Построены точные функционально-инвариантные решения задачи о распределении давления в окрестности плоской трещины, растущей в проницаемой пористой среде. Получено распределение давления внутри и вне трещины в направлении ее роста, а также распределение давления в направлении, ортогональном ее росту.

2. Получены точные решения задачи поршневого вытеснения одной изотермической жидкостью другой в осесимметричной трещине в пористой среде при больших скоростях. Определены зависимости давления и скорости для каждой из жидкостей. Установлено, что границе раздела между жидкостями соответствует скачок производной функции давления. В случае меньшей плотности жидкости разрыва скачок будет отрицательным, а случае большей – положительным. При одинаковых плотностях жидкостей скачок не наблюдается.

3. С помощью асимптотического метода было найдено раскрытие трещины гидроразрыва Перкинса-Керна в ее обобщенной механико-

математической модели, которая учитывает сопряжение полей упругости и давления жидкости в трещине, т.е. взаимодействие различных вертикальных сечений трещины.

4. Создан численный комплекс программ, описывающий распространение трещины гидроразрыва Перкинса-Керна в проницаемой среде. В результате было рассчитано распределение давления жидкости разрыва в трещине и в пласте, утечки жидкости в пласт, а также величина раскрытия (ширина) и длина трещины. Утечки жидкости разрыва в окружающий пласт определяются из задачи сопряжения поля давления в пласте и жидкости разрыва в трещине.

В модели рассмотрен случай постоянного давления закачиваемой жидкости разрыва на скважине.

ССЫЛКИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ.

Гордеев Ю.Н., Кудряшов Н.А., Мурзенко В.В. Автомодельные решения одномерных задач движения газа в пористой среде при двучленном законе сопротивления // ИФЖ. 1984. Т.47. №3.

Гольдштейн Р.В., Корельштейн Л.Б. Асимптотическое решение задач теории упругости о трещинах, вытянутых вдоль пространственной кривой // ПММ. 1987. Т.51. Вып.5. С. 858-865.

Гольдштейн Р.В., Ентов В.М. Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989. 224 С.

Желтов Ю.П., Христианович С.А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. ОТН. 1955. №5. С.3-41.

Щелкачев В.Н. Основные уравнения движения упругой жидкости в упругой пористой среде// Докл. АН СССР. 1946. Т.52. №.2. С. 103-106.

Kern L.R., Perkins T.K. Width of hydraulic fractures // J.Petrol. Technol. 1961. Vol.13. P.937-949.

4. ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Гордеев Ю.Н., Сандаков А.Е.* «О распределении давления в окрестности растущей трещины с постоянной расклинивающей силой» // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 4. С. 121-126.

2. *Гордеев Ю.Н., Сандаков А.Е., Чижов Ю.Л.* «Автомодельные решения задачи вытеснения одного газа другим в осесимметричном случае при квадратичном законе сопротивления» // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т.49. №5. С. 87-92.

3. *Гордеев Ю.Н., Сандаков А.Е.* «Обобщенная модель трещины гидроразрыва Перкинса – Керна» // Экологический вестник научных центров ЧЭС. №4. 2007. С.38-42.

4. *Гордеев Ю.Н., Сандаков А.Е.* «О численном моделировании трещины гидроразрыва Перкинса — Керна, распространяющейся в проницаемой среде». Препринт № 009-2007. М.: МИФИ. 2007. 16с.

5. *Гордеев Ю.Н., Сандаков А.Е.* «О распределении давления в окрестности растущей трещины в проницаемой среде с постоянной расклинивающей силой». V Всероссийская научная конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики». Томск. 2006 . Сборник научных трудов. С. 257-258.

6. *Сандаков А.Е.* «Задача о вытеснении одного газа другим в осесимметричном канале при нелинейном законе сопротивления». Материалы XIV Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2007». Т.2. С.108. Москва, СП «Мысль». 2007.

7. *Гордеев Ю.Н., Сандаков А.Е.* «Распространение трещины гидроразрыва в проницаемой среде с постоянной расклинивающей силой». XI Международная конференция «Электромеханика, электротехнологии, электротехнические материалы и компоненты». 2006 г. Крым. Алушта. Сборник научных трудов. Часть 2. С.297.

8. *Гордеев Ю.Н., Сандаков А.Е.* «Распределение давления жидкости в окрестности растущей трещины гидроразрыва». Научная сессия МИФИ - 2007. Сборник научных трудов. Т.5. С.79-80. Москва, 2007.

9. *Гордеев Ю.Н. Сандаков А.Е.* «Численное моделирование распространения трещины гидроразрыва». Научная сессия МИФИ - 2007. Сборник научных трудов. Т.5, С.81-82. Москва. 2007.

10. *Сандаков А.Е.* «Задача поршневого вытеснения одного газа другим в осесимметричной трещине». Сборник материалов 4-й Международной научно-практической конференции «Качество науки – качество жизни». 2008 – Тамбов: ТАМБОВПРИНТ, 2008. С.118-120.

11. *Сандаков А.Е.* «Нахождение ширины трещины гидроразрыва в обобщенной модели Перкинса — Керна. Сборник материалов 4-й Международной научно-практической конференции «Качество науки – качество жизни». 2008 – Тамбов: ТАМБОВПРИНТ, 2008. С.117-118.

12. *Сандаков А.Е.* «Точные решения задачи вытеснения одного газа другим в осесимметричном канале при больших числах Рейнольдса». XLIV Всероссийская конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии: Тезисы докладов. Секция физики. М.: РУДН. 2008. С.105-106.

ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА В ПРОНИЦАЕМЫХ ПЛАСТАХ
С УЧЕТОМ ВЫТЕСНЕНИЯ ОДНОЙ ЖИДКОСТИ
ДРУГОЙ

Сандаков Антон Евгеньевич

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано к печати 10 сентября 2009. Заказ № 19-2009. Тираж 120 экз.

Отпечатано на ризографе Учреждения Российской академии наук
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
117526, Москва, проспект Вернадского, д.101, корп.1.