

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ**

**ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ им А.Ю.ИШЛИНСКОГО  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**

**Н.Г. Бураго, И.С. Никитин, П.А. Юшковский**

**ИССЛЕДОВАНИЕ СВЕРХМНОГОЦИКЛОВОЙ УСТАЛОСТИ  
ДИСКОВ КОМПРЕССОРА ГАЗОТУРБИННОГО ДВИГАТЕЛЯ**

*Препринт № 1094*

**Москва 2015**

## АННОТАЦИЯ

В работе исследована долговечность диска переменной толщины при высокочастотном циклическом нагружении.

Предложен метод расчета трехмерного напряженно-деформированного состояния упругих дисков переменной толщины под действием циклических нагрузок от крутильных вибраций лопаток в компрессорах газотурбинных двигателей. Принято приближенное представление зависимости решения от координат по толщине диска и в окружном направлении. Для определения коэффициентов формул данного представления, зависящих от радиальной координаты, получена система дифференциальных уравнений, краевые задачи для которой решены с использованием неявной разностной схемы.

Рассчитанное НДС от вибраций было наложено на НДС полетных циклов и использовано для оценок долговечности безопасной эксплуатации и определения зон возникновения поврежденности рассматриваемых дисков на основе обобщенного критерия сверхмногоциклового усталостного разрушения.

Выявлено значительное падение долговечности на внешнем ободе (в зоне контакта диска и лопаток)

*Работа выполнена по проекту РФФИ № 15-08-02392-а.*

ISBN 978-5-91741-137-8

055(02)2 @ Институт проблем механики РАН 2015 г.

## Оглавление

Введение.....	4
1. Уравнения для расчета НДС диска переменной толщины .....	6
2. Постановка краевых задач.....	10
3. Примеры расчета НДС диска при вибрациях.....	13
4. Критерии усталостной прочности для режима СВМУ.....	16
5. Примеры расчета долговечности и локализации повреждений .....	18
Выводы.....	20
Приложение. Расчет НДС диска в полетных циклах.....	21
Список литературы.....	24

## Введение

Диски компрессоров газотурбинных двигателей подвергаются долговременным циклическим полетным (взлет-полет-посадка) и вибрационным (колебания лопаток) нагрузкам. Оценка времени их безопасной эксплуатации представляет значительный практический и теоретический интерес [1].

Для полетных циклов (МЦУ - малоцикловая усталость) в [2,3] было рассчитано напряженно-деформированное состояние (НДС) и получены оценки усталостной долговечности вращающегося диска переменной толщины под действием центробежных нагрузок в диске и лопатках. При этом были учтены дополнительные напряжения, связанные с изгибом лопаток под действием аэродинамических давлений. Аэродинамические давления были рассчитаны на основе гипотезы «изолированного профиля» с использованием известных решений об обтекании пластины с отрывом потока. Для оценки долговечности диска в полетных циклах нагружения были использованы известные критерии многоосного усталостного разрушения титановых сплавов. На основе этих критериев были получены распределения долговечности по диску, определены опасные зоны и сроки зарождения усталостной поврежденности в диске. Было показано, что усталостная долговечность титанового диска для характерных частот вращения может снижаться до критических значений  $N \sim 10^4$  полетных циклов (30000-50000 часов реального времени) в окрестности контактной зоны лопаток и обода диска.

Отметим, что конструкции, эксплуатируемые в течение многих лет, работают в упругом состоянии вплоть до появления зон усталостного разрушения. Поэтому для расчета долговечности на основе критериев усталостного разрушения НДС определяется по теории упругости.

В последнее время установлено [1,4], что низкоамплитудные вибрационные нагрузки, действующие в течение длительного времени,

тоже могут вызывать разрушение конструкций (СВМУ - сверхмногоцикловая усталость). Напряжения в дисках, вызванные вибрациями, существенно ниже не только предела текучести, но и предела усталости для МЦУ режима, то есть, по классическим представлениям теории малоциклового усталости такие вибрационные напряжения вообще не должны были бы представлять опасности. Однако, фрактографические исследования поверхностей излома разрушенных в процессе эксплуатации дисков показали, что первоначальное зарождение усталостного микроповреждения в дисках может происходить в циклических процессах обоих типов (механизмов): и МЦУ, и СВМУ. Отличительной особенностью разрушения по механизму СВМУ является то, что очаг зарождения микротрещин находится под поверхностью элемента конструкции, а не примыкает к ней, как в случае циклического процесса МЦУ. Эта особенность позволяет экспериментаторам различать данные механизмы при классификации первичного очага поврежденности. Отметим, что дальнейшее развитие усталостной трещины, как правило, происходит в режиме малоциклового усталости и наблюдается в виде усталостных бороздок на поверхности излома в соответствии с полетными циклами нагружения. Отсюда следует, что механизмы МЦУ и СВМУ являются альтернативными и зачастую взаимодополняющими и взаимоусиливающими друг друга. Обзор экспериментальных исследований в этом направлении можно найти в [1,4].

Таким образом, цель данной работы состоит в оценке долговечности диска переменной толщины в СВМУ циклическом процессе.

Следует заметить, что основное нагружение диска осуществляется в полетных циклах под действием на диск и лопатки центробежных сил и аэродинамических давлений на лопатки от набегающего потока. На этот силовой фон накладывается вибрационное нагружение вследствие крутильных колебаний лопаток. В принятой постановке мы не рассматриваем причины вибраций, такие, как действие пульсаций давления,

возбуждение собственных форм колебаний лопаток, переходные режимы работы двигателя и так далее, а считаем вибрации заданными. Данные по амплитудам и частотам вибраций дисков приведены в [1].

Задачи о колебаниях диска переменной толщины при крутильных колебаниях лопаток решаются численно. Рассчитанное решение в силу линейности задачи можно просуммировать с полученным ранее решением для полетных циклов нагружения [2]. Суммарные НДС от полетных циклов и вибраций для двух крайних положений лопатки при вибрационном кручении являются границами цикла в изучаемом процессе СВМУ.

Далее, на основе критерия усталостного разрушения определяются время и зона зарождения микроповреждения. Первые оценки для диска постоянной толщины были сделаны в [5].

В настоящее время не существует экспериментально обоснованных, общепринятых критериев разрушения в режиме СВМУ. Поэтому для оценок долговечности используется обобщение известных критериев [6] многоосного малоциклового усталостного разрушения ( $N < 10^5$ ) на исследуемый, относительно малоизученный режим сверхмногоциклового усталости ( $N > 10^8$ ).

Во избежание недоразумений, заметим, что далее при описании метода учета вибрационных воздействий рассматриваются напряжения, деформации и перемещения, дополнительные к основному напряженно-деформированному состоянию полетных циклов МЦУ, и слово “дополнительные” опущено. Полные напряжения определяются при расчете долговечности дисков наложением дополнительных напряжений на основные.

# 1. Уравнения для расчета трехмерного НДС диска переменной толщины

Ниже предлагается приближенный, численно-аналитический метод расчета упругих дисков переменной по радиальной координате толщины под действием циклических по времени и периодических по окружной координате нагрузок, обусловленных крутильными колебаниями лопаток и согласованных с ними по амплитуде.

В цилиндрической системе координат  $r, \vartheta, z$  рассматривается кольцевой диск  $a \leq r \leq b$  переменной толщины  $-h(r) \leq z \leq h(r)$ . Система уравнений динамической теории упругости в цилиндрической системе координат имеет вид [7]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{\vartheta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\vartheta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_{\vartheta}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta z}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

Напряжения связаны с деформациями законом Гука:

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \lambda\varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \lambda\varepsilon_{rr} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \lambda\varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{r\vartheta} = 2\mu\varepsilon_{r\vartheta}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\vartheta\vartheta} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{\vartheta z} = 2\mu\varepsilon_{\vartheta z}$$

Связь деформаций и смещений имеет вид:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{r\vartheta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial r} - \frac{u_{\vartheta}}{r} \right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad \varepsilon_{\vartheta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial z} \right)$$

Здесь  $\lambda$ ,  $\mu$  - модули Ламе,  $\rho$  - плотность материала диска. В дальнейшем используются безразмерные напряжения, отнесенные к  $\lambda + 2\mu$ , и безразмерные пространственные переменные, отнесенные к внутреннему радиусу диска  $a$ .

Граничные условия на свободных поверхностях при  $z = \pm h(r)$  имеют вид:

$$z = \pm h(r): \quad \sigma_{rz} - h' \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\vartheta z} - h' \sigma_{r\vartheta} = 0, \quad \sigma_{zz} - h' \sigma_{rz} = 0$$

Внутренний контур считается закрепленным:

$$r = a: \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

На внешнем контуре приложены периодические по окружной координате  $\vartheta$  и времени нагрузки  $\sigma_{r\theta_b}$  и  $\sigma_{rz_b}$ , обусловленные крутильными колебаниями лопаток

$$r = b: \quad \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\theta_b}, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{rz_b}$$

В силу периодичности всех искомым функций НДС по окружной координате  $\vartheta$  смещения ищем в виде рядов Фурье:

$$u_r = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} (u_n z + u_{3n} z^3) \sin n\vartheta$$

$$u_{\vartheta} = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (v_n z + v_{3n} z^3) \cos n\vartheta$$

$$u_z = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} (w_n + w_{2n} z^2 + w_{4n} z^4) \sin n\vartheta$$

Соответствующее представление напряжений имеет вид:

$$\sigma_{rr} = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n z + \sigma_{3n} z^3) \sin n\vartheta$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} (s_n z + s_{3n} z^3) \sin n\vartheta$$

$$\sigma_{zz} = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} (\Sigma_n z + \Sigma_{3n} z^3) \sin n\vartheta$$

$$\sigma_{r\vartheta} = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (\tau_n z + \tau_{3n} z^3) \cos n\vartheta$$

$$\sigma_{rz} = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} (p_n + p_{2n}z^2 + p_{4n}z^4) \sin n\vartheta$$

$$\sigma_{\vartheta z} = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (T_n + T_{2n}z^2 + T_{4n}z^4) \cos n\vartheta$$

Коэффициенты рядов Фурье являются новыми вспомогательными искомыми функциями радиальной переменной  $r$ , множитель  $e^{i\omega t}$  задает вибрации,  $\omega$ - частота вибраций.

Подставим выражения для смещений и напряжений в исходную систему и приравняем члены при одинаковых степенях  $z$ , вплоть до  $z^3$ . В итоге получим разрешающую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для вспомогательных переменных при различных  $n=0,1,2,\dots$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_n}{dr} &= \left[ \left( \frac{\lambda(1+h'^2)}{(1+\lambda)} - 1 \right) \frac{1}{r} - \frac{2h'}{h} \right] \sigma_n + \frac{n}{r} \tau_n + \frac{2}{h^2} p_n + \\ &\quad + \left[ \frac{(1-\lambda)(1+2\lambda)}{(1+\lambda)} \frac{1}{r^2} - \rho\omega^2 \right] u_n - \frac{n(1-\lambda)(1+2\lambda)}{(1+\lambda)} \frac{1}{r^2} v_n \\ \frac{d\tau_n}{dr} &= -\frac{n}{r} \frac{\lambda(1+h'^2)}{(1+\lambda)} \sigma_n - 2 \left( \frac{1}{r} + \frac{h'}{h} \right) \tau_n - \\ &\quad - \frac{n}{r^2} \frac{(1-\lambda)(1+2\lambda)}{(1+\lambda)} u_n + \left[ \frac{n}{r^2} \frac{(1-\lambda)(1+2\lambda)}{(1+\lambda)} + \frac{2\mu}{h^2} - \rho\omega^2 \right] v_n + \frac{2\mu n}{h^2 r} w_n \\ \frac{dp_n}{dr} &= -h'^2 \sigma_n - \frac{1}{r} p_n + \mu \frac{n}{r} v_n + \left( \mu \frac{n^2}{r^2} - \rho\omega^2 \right) w_n \\ \frac{du_n}{dr} &= \frac{(1-\lambda h'^2)}{(1-\lambda^2)} \sigma_n - \frac{\lambda}{(1+\lambda)} \frac{1}{r} u_n + \frac{\lambda}{(1+\lambda)} \frac{n}{r} v_n \\ \frac{dv_n}{dr} &= \frac{1}{\mu} \tau_n - \frac{n}{r} u_n + \frac{1}{r} v_n \\ \frac{dw_n}{dr} &= \frac{1}{\mu} p_n - u_n \end{aligned} \tag{1}$$

Подчеркнем, что данная система уравнений решается отдельно для каждой гармоники  $n$ . После того, как решения системы найдены, все остальные коэффициенты рядов Фурье для напряжений

$\sigma_{3n}, s_n, s_{3n}, \Sigma_n, \Sigma_{3n}, \tau_{3n}, p_{2n,4}, T_{2n}, T_{4n}$  и смещений  $u_{3n}, v_{3n}, w_{2n}, w_{4n}$  определяются по формулам

$$s_n = \frac{\lambda(1+h'^2)}{(1+\lambda)} \sigma_n + \frac{(1-\lambda)(1+2\lambda)}{(1+\lambda)} \frac{U_n}{r}$$

$$T_n = \mu v_n + \mu n w_n / r$$

$$w_{2n} = (\Sigma_n - \lambda u_n' - \lambda U_n / r) / 2$$

$$\Sigma_n = h'^2 \sigma_n + \Delta \Sigma_n, \quad \Delta \Sigma_n = h'^2 h^2 \sigma_{3n} - h^2 \Sigma_{3n}$$

$$T_{2n} = h' \tau_n / h - T_n / h^2 + \Delta T_{2n}, \quad \Delta T_{2n} = h' h \tau_{3n} - h^2 T_{4n}$$

$$p_{2n} = h' \sigma_n / h - p_n / h^2 + \Delta p_{2n}, \quad \Delta p_{2n} = h' h \sigma_{3n} - h^2 p_{4n}$$

$$u_{3n} = (p_{2n} / \mu - w_{2n}') / 3$$

$$v_{3n} = (T_{2n} / \mu - n w_{2n} / r) / 3$$

$$\tau_{3n} = \mu v_{3n}' - \mu V_{3n} / r$$

$$\Sigma_{3n} = - \left( p_{2n}' - n T_{2n} / r + p_{2n} / r + \rho \omega^2 w_{2n} \right) / 3$$

$$w_{4n} = (\Sigma_{3n} - \lambda u_{3n}' - \lambda U_{3n} / r) / 4$$

$$\sigma_{3n} = u_{3n}' + \lambda U_{3n} / r + 4 \lambda w_{4n}$$

$$s_{3n} = \lambda u_{3n}' + U_{3n} / r + 4 \lambda w_{4n}$$

$$p_{4n} = - \left( \sigma_{3n}' - n \tau_{3n} / r + (\sigma_{3n} - s_{3n}) / r + \rho \omega^2 u_{3n} \right) / 4$$

$$T_{4n} = - \left( \tau_{3n}' + n s_{3n} / r + 2 \tau_{3n} / r + \rho \omega^2 v_{3n} \right) / 4$$

где  $U_n = -n v_n + u_n$ ,  $V_n = -n u_n + v_n$ ,  $U_{3n} = -n v_{3n} + u_{3n}$ ,  $V_{3n} = -n u_{3n} + v_{3n}$

Отметим, что для того, чтобы получить выписанную замкнутую систему уравнений для вспомогательных искомым функций при каждом

значении  $n$  в граничных условиях при  $z = \pm h(r)$ , пришлось пренебречь членами малого порядка по толщине  $h$  следующего вида:  $\Delta\Sigma_n = h'^2 h^2 \sigma_{3n} - h^2 \Sigma_{3n}$ ,  $\Delta T_{2n} = h' h \tau_{3n} - h^2 T_{4n}$ ,  $\Delta p_{2n} = h' h \sigma_{3n} - h^2 p_{4n}$ . В дальнейшем, прямыми численными расчетами была подтверждена малость этих отброшенных членов по сравнению с учтенными.

В работе [2] аналогичный метод был разработан для расчета основного НДС диска переменной толщины для полетных циклов нагружения квазистатическими центробежными и аэродинамическими нагрузками, расчетные формулы даны в приложении.

## 2. Краевые задачи для НДС диска из-за крутильных колебаний лопаток

Для расчета НДС диска, обусловленного крутильными колебаниями лопаток, краевые условия для вспомогательных переменных (коэффициентов Фурье) на радиальных границах  $r = a$  и  $r = b$  имеют вид

$$\begin{aligned} r = a: & \quad u_n = 0, \quad v_n = 0, \quad w_n = 0 \\ r = b: & \quad \sigma_n = 0, \quad \tau_n = \tau_{bn}, \quad p_n = p_{bn} \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\tau_{bn}$  и  $p_{bn}$  заданные значения коэффициентов Фурье, учитывающие касательные к ободу диска напряжения в корневых сечениях лопаток при их кручении. Для определения значений  $\tau_{bn}$  и  $p_{bn}$  будем считать каждую лопатку пластиной прямоугольного сечения ширины  $d$  и используем решение известной задачи о кручении пластин прямоугольного поперечного сечения [8].

На Рис. 1 приведено распределение касательных напряжений в прямоугольном корневом сечении пластины при ее кручении с погонной круткой  $\gamma$  из [9].

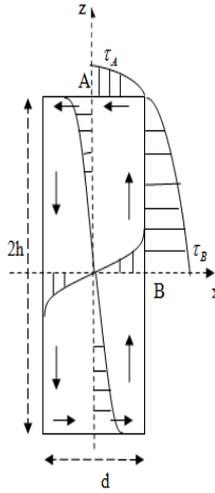


Рис. 1. Распределение касательных напряжений в корне лопатки

Максимальное касательное напряжение  $\tau_{rz}$  достигается в точках А и В (Рис.

1)

$$\tau_B = \tau_{\max} = \frac{K_1}{K_2} \mu \gamma d, \quad \tau_A = k \tau_B$$

где

$$K_1 \approx \frac{1}{3 + 2(d/h + d^2/h^2)}, \quad K_2 \approx \frac{1}{3 + 1.8d/h}$$

При рассматриваемых в дальнейшем значениях  $d/h \ll 1$  коэффициент  $k \approx 0.8$ .

Следовательно, можно принять, что  $\tau_B = \mu \gamma d$ ,  $\tau_A = 0.8 \tau_B$ .

Точное решение для касательных напряжений в корневом сечении представляется в виде достаточно сложных выражений [8]. Для задания граничных условий эти выражения упрощены

$$\sigma_{r\theta} = -\tau_A \frac{z}{h} \left[ 1 - \frac{4x^2}{d^2} \right], \quad |x| \leq d/2$$

$$\sigma_{rz} = \tau_B \frac{2x}{d} \left[ 1 - \frac{z^2}{h^2} \right], \quad |z| \leq h$$

где  $x = b(\theta - \theta_*)$  - локальная окружная координата,  $\theta_*$  отмечает положение срединной плоскости лопатки. Правые части граничных условий тогда принимают вид

$$\sigma_{r\theta_b} = Q_0 \left( 1 - \vartheta^2 / \delta^2 \right), \quad Q_0 = -0.8 \mu \gamma d / h, \quad |\vartheta| \leq \delta$$

$$\sigma_{rz\_b} = T_0 \vartheta / \delta, \quad T_0 = \mu \gamma d, \quad |\vartheta| \leq \delta$$

где полагается  $|\vartheta| \leq \delta$ ,  $\delta = d / (2b) \ll 1$ .

Пусть число лопаток на диске равно  $N_0$ . Разложим периодические функции распределения тангенциального напряжения  $\sigma_{r\theta\_b}$  и осевого касательного напряжения  $\sigma_{rz\_b}$  на внешнем контуре (при  $r=b$ ) в ряды Фурье (один период  $-\pi / N_0 < \vartheta < \pi / N_0$ )

$$\sigma_{r\theta\_b} = e^{i\omega t} \sum_n \tau_{bn} \cos(n\vartheta)$$

$$\sigma_{rz\_b} = e^{i\omega t} \sum_n p_{bn} \sin(n\vartheta) \quad (3)$$

где отличны от нуля коэффициенты с номерами  $n = 0, N_0, 2N_0, 3N_0, \dots$

$$\tau_{b0} = 2Q_0 N_0 \delta / (3\pi), \quad \tau_{bn} = \frac{4Q_0 N_0}{\pi n^2 \delta} \left( \frac{\sin(n\delta)}{n\delta} - \cos(n\delta) \right)$$

$$p_{b0} = 0, \quad p_{bn} = \frac{2N_0}{n\pi} T_0 \left( \frac{\sin(n\delta)}{n\delta} - \cos(n\delta) \right)$$

Таким образом, для различных  $n$  необходимо решать двухточечные краевые задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1) с граничными условиями (2) с учетом выражений (3) для коэффициентов разложения нагрузок в ряд Фурье по угловой координате. Решение этих краевых задач определялось численно конечно-разностным методом по неявной схеме. После этого компоненты напряжений определялись суммированием рядов Фурье. Количество членов рядов Фурье при суммировании для практической сходимости не превышало 20.

### 3. Примеры расчетов НДС диска при вибрациях

Рассматривается диск, сечение которого для  $\vartheta = const$  показано на Рис. 2. Приняты следующие значения параметров геометрии и материала диска и лопаток:  $a = 0.05$  м,  $b = 0.4$  м,  $d = 0.01$  м,  $h = 0.035$  м,  $\gamma = 0.1$  рад/м,  $\omega = 628$  1/с,

$\lambda = 78$  ГПа,  $\mu = 44$  ГПа,  $\rho = 4370$  кг/м<sup>3</sup> (титановый сплав). Число лопаток  $N_0 = 32$ .

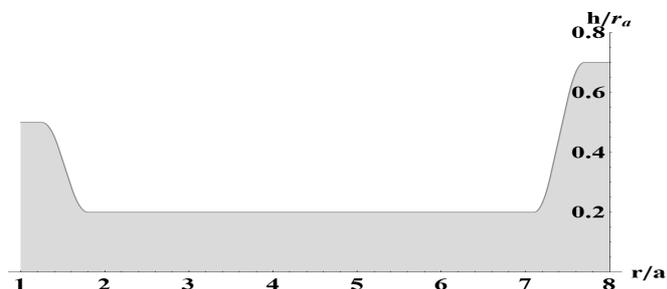


Рис. 2. Форма сечения диска для  $\nu = const$

На Рис. 3 показаны рассчитанные радиальные распределения компонент напряжений для точки сечения  $z=h$ ,  $\nu = 0$ , быстро затухающие при удалении от внешнего обода диска.

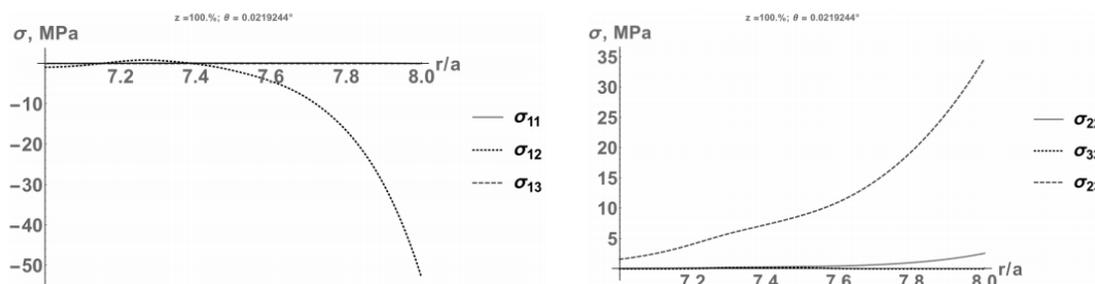


Рис. 3. Радиальные распределения амплитуд компонент напряжений для  $\nu = 0$

Из этих графиков видно, что максимальные значения компонент напряжений на обода диска имеют порядок 30-50 МПа, следовательно, размах их колебаний за цикл кручения лопатки равен 60-100 МПа.

Ранее в [2] уже было определено напряженно-деформированное состояние рассматриваемого диска в полетном цикле нагружения под действием центробежных сил из-за вращения диска и лопаток на внешнем

контуре с учетом дополнительных напряжений из-за изгиба лопаток под действием аэродинамических нагрузок.

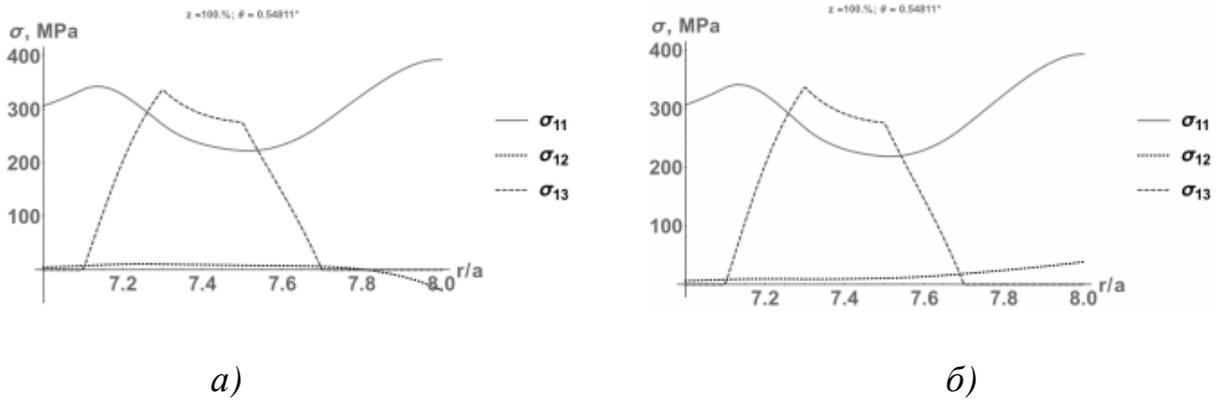


Рис. 4. Суммарные радиальные распределения напряжений  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$ .

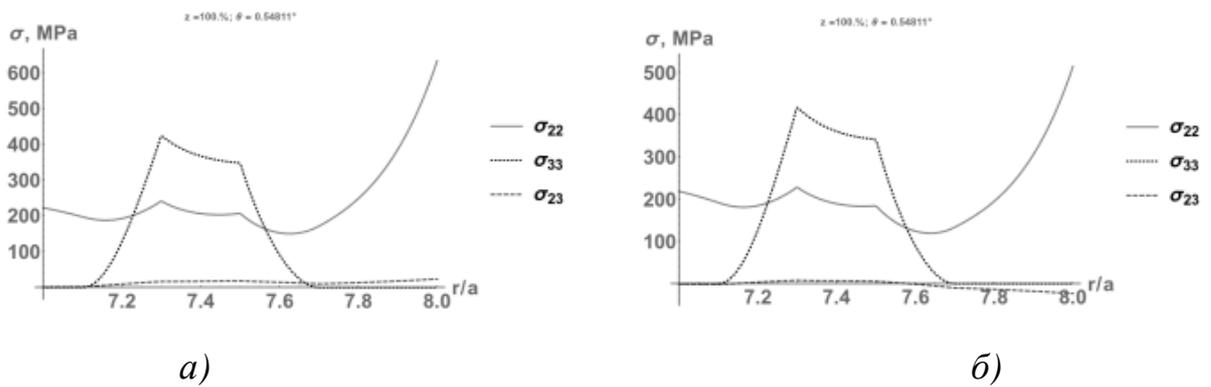


Рис. 5. Суммарные радиальные распределения напряжений  $\sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}$ .

Для исследования циклического режима, связанного с процессом СВМУ, необходимо наложить полученные значения амплитуд напряжений при крутильных колебаниях лопаток со знаками + и - на основное НДС, связанное с полетным циклом нагружения диска.

Радиальные распределения суммарных шести компонент напряжений для крайних положений цикла крутильных колебаний лопаток в окрестности внешнего обода диска приведены на Рис. 4 и Рис. 5. В обозначениях напряжений индексы 1,2,3 соответствуют координатам  $r, \theta, z$

Разница между значениями напряжений на левых (а) и правых (б) графиках на этих рисунках есть размах напряжений в высокочастотном

цикле, связанном с крутильными колебаниями лопаток. Далее эти результаты расчета НДС используются для определения зон зарождения поврежденности и оценки долговечности диска в режиме СВМУ..

#### 4. Критерии усталостной прочности для режима СВМУ

В настоящее время имеется несколько критериев многоосного усталостного разрушения для режима малоциклового (МЦУ) усталости, позволяющих оценить число циклов нагружения до появления разрушения для каждой точки элемента конструкции. Основой для определения параметров критериев многоосного усталостного разрушения являются экспериментальные кривые одноосных циклических испытаний при различных значениях параметра асимметрии цикла  $R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$ , где  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$  - максимальное и минимальное значения напряжения в цикле. При описании результатов одноосных испытаний на усталостную прочность принимаются следующие обозначения:  $\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / 2$  - амплитуда напряжения в цикле,  $\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$  - размах напряжений в цикле одноосного нагружения. Экспериментальные данные одноосных испытаний описываются кривыми Веллера (рис. 6).

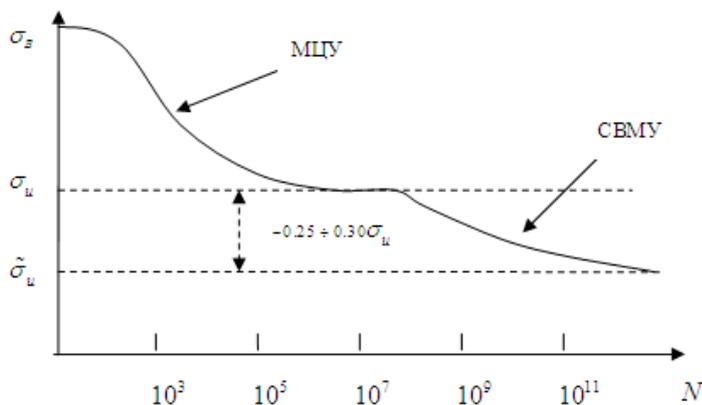


Рис. 6. Бимодальная усталостная кривая для режимов МЦУ и СВМУ

Левые ветви этих кривых при  $N < 10^7$  соответствуют малоцикловой усталости и аналитически могут быть представлены соотношением Баскина [3]  $\sigma = \sigma_u + \sigma_c N^\beta$ , где  $\sigma_u$  - предел усталости,  $\sigma_c$  - коэффициент усталостной прочности,  $\beta$  - показатель усталостной прочности,  $N$  - число циклов до разрушения.

Задача исследования усталостного разрушения состоит в определении пространственного распределения функции числа циклов до разрушения  $N$  в зависимости от НДС на основе уравнений типа Баскина, обобщенных на случай многоосного напряженного состояния и содержащих, наряду с числом циклов, рассчитанные напряжения в рассматриваемой конструкции.

Одним из общепринятых обобщений одноосной усталостной кривой в режиме МЦУ на случай многоосного напряженного состояния является критерий Сайнса [6]:

$$\Delta\tau/2 + \alpha_s \sigma_{\text{mean}} = S_0 + AN^\beta, \quad \sigma_{\text{mean}} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)_{\text{mean}},$$

$$\Delta\tau = \sqrt{(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2)^2 + (\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)^2 + (\Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_3)^2} / 3 \quad (4)$$

где  $\sigma_{\text{mean}}$  - сумма главных напряжений, осредненная за цикл нагружения,  $\Delta\tau$  - изменение октаэдрического касательного напряжения за цикл;  $\Delta\tau/2$  - его амплитуда;  $\alpha_s, S_0, A, \beta$  - параметры, определяемые по данным эксперимента.

Параметры модели (4), определенные по одноосным усталостным кривым при  $R = -1$  и  $R = 0$  приведены в [3]:

$$S_0 = \sqrt{2}\sigma_u / 3, \quad A = 10^{-3\beta} \sqrt{2}(\sigma_B - \sigma_u) / 3, \quad \alpha_s = \sqrt{2}(2k_{-1} - 1) / 3, \quad k_{-1} = \sigma_u / (2\sigma_{u0})$$

где  $\sigma_u$  и  $\sigma_{u0}$  - пределы усталости по кривым  $\sigma_a(N)$  при  $R = -1$  и  $R = 0$  соответственно,  $\sigma_B$  - предел прочности.

Альтернативный механизм сверхмногоциклового усталостного разрушения [1,4] (СВМУ) характеризуется правой ветвью бимодальной усталостной кривой (Рис. 6) при  $N > 10^8$ . В настоящее время отсутствуют экспериментально обоснованные критерии многоосной усталости для

режима СВМУ. Поэтому для оценок долговечности здесь применяется обычный критерий Сайнса (4), обобщенный на случай СВМУ с учетом подобия левой и правой ветвей бимодальных кривых.

Для определения параметров критерия Сайнса для режима СВМУ по одноосным усталостным кривым используем соображения, которые применялись при их определении для режима МЦУ [3]. При этом учтем подобие левой и правой ветвей усталостной кривой, заменяя  $\sigma_B \rightarrow \sigma_u$ ,  $\sigma_u \rightarrow \tilde{\sigma}_u$ ,  $\sigma_{u0} \rightarrow \tilde{\sigma}_{u0}$ , где  $\tilde{\sigma}_u$  и  $\tilde{\sigma}_{u0}$  - «новые» пределы усталости в соответствии с правой ветвью усталостной кривой для коэффициентов асимметрии цикла  $R = -1$  и  $R = 0$ . В результате значения параметров для обобщенной модели Сайнса (4) в режиме СВМУ имеют вид [5]:

$$S_0 = \sqrt{2\tilde{\sigma}_u} / 3, A = 10^{-8\beta} \sqrt{2(\sigma_u - \tilde{\sigma}_u)} / 3, \alpha_s = \sqrt{2(2k_{-1} - 1)} / 3, k_{-1} = \tilde{\sigma}_u / \tilde{\sigma}_{u0} / 2$$

## 5. Примеры расчета долговечности и локализации повреждений.

Для расчетов заданы следующие значения усталостных параметров титанового сплава в режиме СВМУ  $\sigma_u = 350$  МПа,  $\tilde{\sigma}_u = 250$  МПа,  $\tilde{\sigma}_{u0} = 200$  МПа,  $\beta = -0.3$ . На Рис.7 показаны вычисленные по критериям для сверхмногоциклового усталости [5] радиальные распределения логарифма долговечности (логарифма числа циклов  $N$  до разрушения) около внешнего обода диска для суммарного действия полетных циклов и вибраций без учета аэродинамических нагрузок на лопатки (а) и с учетом этих нагрузок (б). На этих графиках видно значительное (до  $10^{9.5} - 10^{10}$  циклов) падение долговечности на внешнем ободе (в зоне контакта диска и лопаток). При вибрациях период колебаний имеет порядок 0.01с. Поэтому реальное время до усталостного разрушения в результате вибраций лопаток может составить величину 10 000 - 30 000 часов, вполне достижимую в процессе эксплуатации.

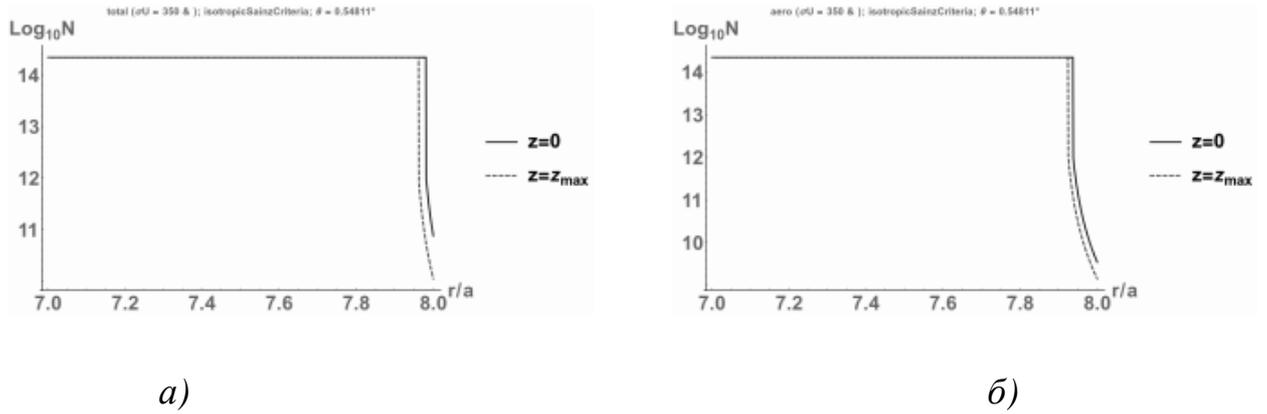


Рис. 7. Распределения логарифма долговечности по радиальной координате в окрестности внешнего обода диска

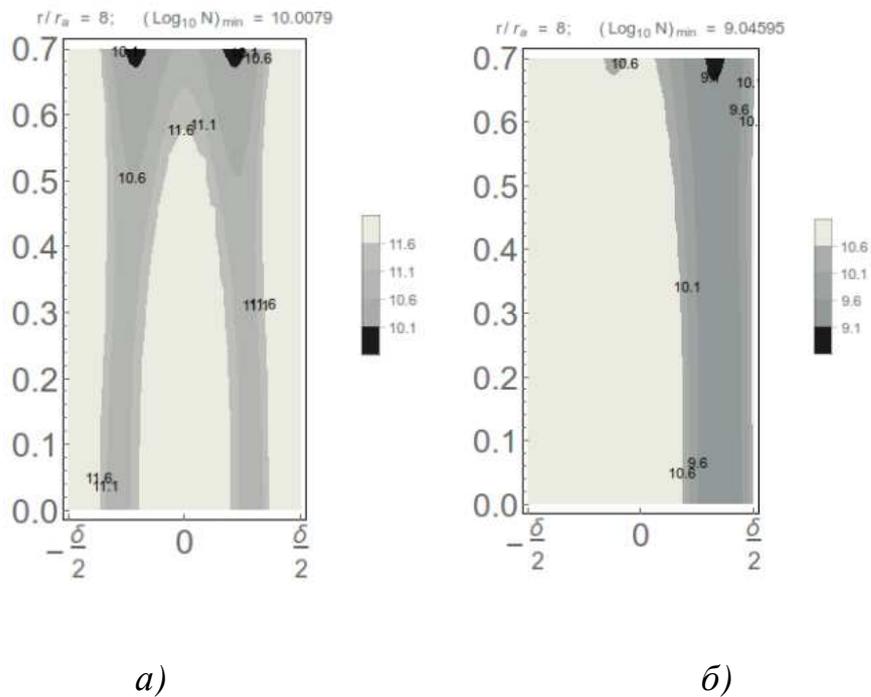


Рис. 8. Изолинии логарифма долговечности в прямоугольном сечении на внешнем ободе диска (под лопаткой)

На Рис. 8 наглядно показаны изолинии логарифма долговечности в прямоугольном сечении на внешнем ободе диска (под лопаткой) для СВМУ режима, наложенного на основной МЦУ, без учета аэродинамических нагрузок на лопатки (а) и с учетом этих нагрузок (б). Темным цветом выделены области минимальной долговечности, которые соответствуют зонам зарождения и возможного развития усталостной поврежденности.

Более реалистично выглядит правый график, расположение этой зоны соответствует данным фрактографических исследований поверхностей излома дисков, разрушенных в эксплуатации [1].

## **Выводы**

Предложен метод расчета трехмерного напряженно-деформированного состояния упругих дисков переменного сечения под действием циклических нагрузок от крутильных вибраций лопаток в компрессорах газотурбинных двигателей.

Принято приближенное представление зависимости решения от координат по толщине диска и в окружном направлении. Для определения коэффициентов формул данного представления, зависящих от радиальной координаты, получена система дифференциальных уравнений, краевые задачи для которой решены с использованием неявной разностной схемы.

Рассчитанное НДС от вибраций было наложено на НДС в полетных циклах и использовано для оценок долговечности эксплуатации и определения зон поврежденности рассматриваемых дисков на основе обобщенного критерия сверхмногоциклового усталостного разрушения.

Выявлено значительное падение долговечности на внешнем ободе (в зоне контакта диска и лопаток)

## Приложение. Расчет НДС диска в полетных циклах

Процесс нагружения полетных циклов является квазистатическим, так что инерционные члены в уравнения движения пренебрежимо малы. Перемещения кольцевого диска переменной толщины в полетных циклах нагружения, рассматриваемых в [2], ищутся в следующем виде:

$$u_r = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n + u_{2n}z^2 + u_{4n}z^4) \cos n\vartheta$$

$$u_{\vartheta} = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n + v_{2n}z^2 + v_{4n}z^4) \sin n\vartheta$$

$$u_z = \sum_{n=0}^{\infty} (w_{1n}z + w_{3n}z^3) \cos n\vartheta$$

Соответствующее представление напряжений имеет вид:

$$\sigma_{rr} = \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma_n + \sigma_{2n}z^2) \cos n\vartheta$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \sum_{n=0}^{\infty} (s_n + s_{2n}z^2) \cos n\vartheta$$

$$\sigma_{zz} = \sum_{n=0}^{\infty} (\Sigma_n + \Sigma_{2n}z^2 + \Sigma_{4n}z^4) \cos n\vartheta$$

$$\sigma_{r\vartheta} = \sum_{n=1}^{\infty} (\tau_n + \tau_{2n}z^2) \sin n\vartheta$$

$$\sigma_{rz} = \sum_{n=0}^{\infty} (p_{1n}z + p_{3n}z^3) \cos n\vartheta$$

$$\sigma_{\vartheta z} = \sum_{n=1}^{\infty} (T_{1n}z + T_{3n}z^3) \sin n\vartheta$$

Коэффициенты рядов Фурье  $\sigma_n, \tau_n, u_n, v_n$  являются новыми (вспомогательными) искомыми функциями радиальной переменной  $r$ .

Подставим выражения для смещений и напряжений в исходную систему уравнений равновесия, закона Гука и приравняем члены при одинаковых степенях  $z$ , вплоть до  $z^3$ . В итоге получим системы

обыкновенных дифференциальных уравнений для вспомогательных переменных при различных  $n=0,1,2,\dots$

$$\frac{d\sigma_n}{dr} = \left[ \frac{\lambda(1+h'^2)}{(1+\lambda)} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} - \frac{h'}{h} \right] \sigma_n - \frac{n}{r} \tau_n + \frac{(1-\lambda)(1+2\lambda)}{(1+\lambda)} \frac{U_n}{r^2}$$

$$\frac{d\tau_n}{dr} = n \frac{\lambda(1+h'^2)}{(1+\lambda)} \frac{1}{r} \sigma_n - \left[ \frac{2}{r} + \frac{h'}{h} \right] \tau_n + n \frac{(1-\lambda)(1+2\lambda)}{(1+\lambda)} \frac{U_n}{r^2}$$

$$\frac{dU_n}{dr} = \frac{(1-\lambda h'^2)}{(1-\lambda^2)} \sigma_n + \frac{n}{\mu} \tau_n - \frac{\lambda}{(1+\lambda)} \frac{U_n}{r} + n \frac{V_n}{r}$$

$$\frac{dV_n}{dr} = n \frac{(1-\lambda h'^2)}{(1-\lambda^2)} \sigma_n + \frac{1}{\mu} \tau_n - n \frac{\lambda}{(1+\lambda)} \frac{U_n}{r} + \frac{V_n}{r}$$

где

$$U_n = nv_n + u_n, \quad V_n = nu_n + v_n, \quad U_{2n} = nv_{2n} + u_{2n}, \quad V_{2n} = nu_{2n} + v_{2n}.$$

Подчеркнем, что данная система уравнений решается отдельно для каждой гармоники  $n$ . Все остальные искомые коэффициенты Фурье  $u_{2n}, u_{4n}, v_{2n}, v_{4n}, w_{1n}, w_{3n}, \sigma_{2n}, s_n, s_{2n}, \Sigma_n, \Sigma_{2n}, \Sigma_{4n}, \tau_{2n}, p_{1n}, p_{3n}, T_{1n}, T_{3n}$  определяются по вспомогательным искомым функциям  $\sigma_n, \tau_n, u_n, v_n$  после решения выписанной системы обыкновенных дифференциальных уравнений по формулам

$$s_n = \frac{\lambda(1+h'^2)}{(1+\lambda)} \sigma_n + \frac{(1-\lambda)(1+2\lambda)}{(1+\lambda)} \frac{U_n}{r}$$

$$\Sigma_n = h'^2 \sigma_n + \Delta \Sigma_n, \quad \Delta \Sigma_n = h'^2 h^2 \sigma_{2n} - h^2 \Sigma_{2n} - h^4 \Sigma_{4n}$$

$$p_{1n} = h' \sigma_n / h + \Delta p_{1n}, \quad \Delta p_{1n} = h' h \sigma_{2n} - h^2 p_{3n}$$

$$T_{1n} = h' \tau_n / h + \Delta T_{1n}, \quad \Delta T_{1n} = h' h \tau_{2n} - h^2 T_{3n}$$

$$w_{1n} = \Sigma_n - \lambda u'_n - \lambda U_n / r$$

$$\Sigma_{2n} = -(p_{1n}' + n T_{1n} / r + p_{1n} / r) / 2$$

$$u_{2n} = (p_{1n} / \mu - w_{1n}') / 2$$

$$v_{2n} = (T_{1n} / \mu + n w_{1n} / r) / 2$$

$$\tau_{2n} = \mu v_{2n}' - \mu V_{2n} / r$$

$$w_{3n} = (\Sigma_{2n} - \lambda u_{2n}' - \lambda U_{2n} / r) / 3$$

$$\sigma_{2n} = u_{2n}' + \lambda U_{2n} / r + 3\lambda w_{3n}$$

$$s_{2n} = \lambda u_{2n}' + U_{2n} / r + 3\lambda w_{3n}$$

$$p_{3n} = -\left(\sigma_{2n}' + n\tau_{2n} / r + (\sigma_{2n} - s_{2n}) / r\right) / 3$$

$$T_{3n} = -(\tau_{2n}' - ns_{2n} / r + 2\tau_{2n} / r) / 3$$

$$\Sigma_{4n} = -\left(p_{3n}' + nT_{3n} / r + p_{3n} / r\right) / 4$$

$$u_{4n} = (p_{3n} / \mu - w_{3n}') / 4$$

$$v_{4n} = (T_{3n} / \mu + nw_{3n} / r) / 4$$

Отметим, что для того, чтобы получить замкнутую краевую задачу для вспомогательных искомым функций при каждом значении  $n$ , в граничных условиях при  $z = \pm h(r)$  пришлось пренебречь членами малого порядка по толщине  $h$  следующего вида:  $\Delta\Sigma_n = h'^2 h^2 \sigma_{2n} - h^2 \Sigma_{2n} - h^4 \Sigma_{4n}$ ,  $\Delta T_{1n} = h' h \tau_{2n} - h^2 T_{3n}$ ,  $\Delta p_{1n} = h' h \sigma_{2n} - h^2 p_{3n}$ . В дальнейшем, прямыми численными расчетами подтверждена малость этих отброшенных членов по сравнению с учтенными.

Эти уравнения и соотношения были использованы в [2] для исследования режима малоциклового усталости (МЦУ), где была решена задача определения напряженно-деформированного состояния и оценки усталостной долговечности вращающегося диска переменного сечения под действием центробежных нагрузок в диске и лопатках, а также под действием аэродинамических давлений на лопатки от набегающего потока.

## Список литературы

1. Шанявский А.А. Моделирование усталостных разрушений металлов. Уфа. Изд-во научно-технической литературы «Монография». 2007. 498с.
2. Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С., Юшковский П.А. Влияние анизотропии усталостных свойств титанового сплава на долговечность элементов конструкций. Препринт ИПМех РАН № 1064. Москва. 2014. 35с.
3. Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С. Модели многоосного усталостного разрушения и оценка долговечности элементов конструкций. // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 6. С. 22-33.
4. Bathias C., Paris P.C. Gigacycle fatigue in mechanical practice. Marcel Dekker. New York. 2005. 304p.
5. Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С. Сверхмногоцикловое усталостное разрушение титановых дисков компрессора. // Вестник ПНИПУ. Механика. 2013. №1. С. 52-67.
6. Sines G. Behavior of metals under complex static and alternating stresses. Metal Fatigue. McGraw-Hill. 1959. Pp. 145-169.
7. Новацкий В. Теория упругости.- М.: Мир. 1975. 872 с.
8. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. - М.: Наука. 1979. 744с.
9. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Соппротивление материалов. - М: Наука. 1986. 500с.

Николай Георгиевич Бураго  
Илья Степанович Никитин  
Павел Анатольевич Юшковский

**ИССЛЕДОВАНИЕ СВЕРХМНОГОЦИКЛОВОЙ УСТАЛОСТИ  
ДИСКОВ КОМПРЕССОРА ГАЗОТУРБИННОГО ДВИГАТЕЛЯ**

ISBN 978-5-91741-137-8



9 785917 411378

Подписано к печати 29 января 2015 г. Заказ № 5-2015 Тираж 40 экз.

---

Отпечатано в УЧРЕЖДЕНИИ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
ИНСТИТУТЕ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ им. А.Ю.ИШЛИНСКОГО РАН  
119526 Москва, пр-т Вернадского, 101-1