

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
ВОЕННЫЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНЖЕНЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Актуальные проблемы  
прикладной математики,  
информатики и механики**

*Сборник трудов  
Международной конференции*

Воронеж,  
26–28 ноября 2012 г.

Часть 1

Издательско-полиграфический центр  
Воронежского государственного университета  
2012

УДК 531(063)+51-7(063)

ББК 22.2я5+22.1я5

А43

*Издание осуществлено при поддержке Российского фонда  
фундаментальных исследований по проекту 12-01-06109-г.*

**Оргкомитет:**

**Почетный председатель**

Ивлев Д.Д. – д.ф.-м.н., проф., засл. деятель науки РФ

**Сопредседатели:**

Ендовицкий Д.А. – д.э.н., ректор ВГУ,

Шаткин А.И. – д.ф.-м.н., проф., декан ф-та ПММ ВГУ

**Заместители:**

Зябров Г.В., Чертов Е.Д., Чернышов А.Д.

**Члены:**

Буренин А.А., Ивлев В.М., Моисеев Е.И., Морозов Н.Ф., Петросян Л.А., Илюлов Мамадило, Ломакин Е.В., Кушмарев А.С., Wilfried Grecksch, Алгазинов Э.К., Автипов С.Т., Артемов М.А., Баев А.Д., Витюков В.К., Жабко А.П., Залорожный В.Г., Зубчанинов В.Г., Леденева Т.М., Лозгачев Г.И., Махортов С.Д., Матвеев М.Г., Маркин А.А., Матченко Н.М., Мирсалимов В.М., Пободра Б.Б., Радасев Ю.П., Ревауженко А.Ф., Рыжских В. И., Сирота А.А., Спорыхин А.П., Ускова О.Ф., Чигарев А.В., Язенин А.В.

**Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики** : сборник трудов Международной конференции, Воронеж, 26–28 ноября 2012 г. : в 2 ч. Ч. 1. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. – 436 с.

ISBN 978-5-9273-1972-5

Ч. 1. – 436 с.

ISBN 978-5-9273-1973-2

В сборнике предлагаются научные работы, доклады и лекции, представленные на Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», проводимой Воронежским государственным университетом.

Сборник предназначен для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

УДК 531(063)+51-7(063)

ББК 22.2я5 + 22.1я5

© Воронежский государственный университет, 2012

© Факультет ПММ ВГУ, 2012

ISBN 978-5-9273-1973-2 (ч. 1) © Издательско-полиграфический центр  
ISBN 978-5-9273-1972-5 Воронежского государственного университета, 2012

специалистам – такого рода информация обычно представляется в виде разбиения.

Наиболее популярным для анализа связи внутри кластера является индекс Дэвиса – Болдина [1].

Для валидации нечетких кластеров применяется сумма квадратов степеней принадлежности объектов кластерам и различные производные критерии, поскольку эта величина характеризует степень близости объектов соответствующим центроидам в методе средних.

Что касается внешних критериев валидации, то наиболее популярным является так называемый отрегулированный индекс Рэнда [1].

#### Литература

1. *Мандель И.Д.* Кластерный анализ. – М.: Финансы и статистика, 1988. – 176 с.
2. *Воронцов К.В.* Лекции по алгоритмам кластеризации и многомерного шкалирования. М.: 2007. – 18 с.

## ДОЛГОВЕЧНОСТЬ ДИСКОВ КОМПРЕССОРА ГТД ПРИ МАЛОЦИКЛОВОЙ И СВЕРХМНОГОЦИКЛОВОЙ УСТАЛОСТИ<sup>1</sup>

Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С. (Москва)

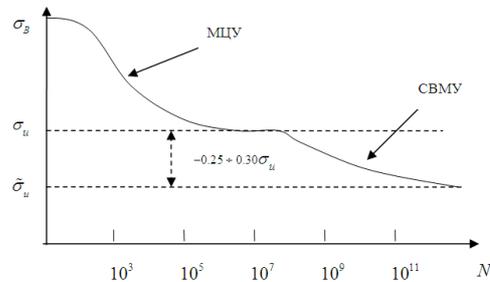
1. Модели многоосного усталостного разрушения в режиме МЦУ. Основой для определения параметров моделей многоосного усталостного разрушения являются экспериментальные кривые одноосных циклических испытаний при различных значениях параметра асимметрии цикла  $R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$ , где  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$  – максимальное и минимальное значения напряжения в цикле. При описании результатов одноосных испытаний на усталостную прочность принимаются следующие обозначения:  $\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2$  – амплитуда напряжения в цикле,  $\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$  – размах напряжений в цикле одноосного нагружения.

<sup>1</sup>Исследование выполнено по плану ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 годы и проектов РФФИ 12-08-00366-а, 12-08-01260-а

Экспериментальные данные одноосных испытаний описываются кривыми Веллера, которые аналитически могут быть представлены соотношением Баскина [1-3]

$$\sigma = \sigma_u + \sigma_c N^\beta \quad (1.1)$$

где  $\sigma_u$  - предел усталости,  $\sigma_c$  - коэффициент усталостной прочности,  $\beta$  - показатель усталостной прочности,  $N$  - число циклов до разрушения. Общий вид усталостной кривой представлен на фиг. 1, в данном режиме представляет интерес левая ветвь при  $N < 10^7$ .



Фиг. 1

Задача исследования усталостного разрушения состоит в определении пространственного распределения функции числа циклов до разрушения  $N$  из уравнений типа (1.1), обобщенных на случай многоосного напряженного состояния и содержащих рассчитанные напряжения в рассматриваемой конструкции. Основные варианты обобщения результатов одноосных испытаний на общий случай многоосного напряженного состояния приведены в [2].

Обобщение одноосной усталостной кривой (1.1) на случай многоосного напряженного состояния согласно модели Сайнса [3] имеет вид:

$$\Delta\tau/2 + \alpha_s \sigma_{\text{mean}} = S_0 + AN^\beta, \quad \sigma_{\text{mean}} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)_{\text{mean}} \quad (1.2)$$

где  $\sigma_{\text{mean}}$  - сумма главных напряжений, осредненная за цикл нагружения,  $\Delta\tau$  - изменение октаэдрического касательного напряжения за цикл;  $\Delta\tau/2$  - его амплитуда.

Обобщение одноосной усталостной кривой на случай многоосного напряженного состояния согласно модели Кроссланда [4] имеет вид:

$$\Delta\tau/2 + \alpha_c(\bar{\sigma}_{\max} - \Delta\tau/2) = S_0 + AN^\beta, \quad \bar{\sigma}_{\max} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)_{\max} \quad (1.3)$$

где  $\bar{\sigma}_{\max}$  - сумма главных напряжений, максимальная за цикл нагружения.

Обобщение одноосной усталостной кривой на случай многоосного напряженного состояния по модели Финдли имеет вид [5]:

$$(\Delta\tau_s/2 + \alpha_F\sigma_n)_{\max} = S_0 + AN^\beta \quad (1.4)$$

где  $\tau_s$ ,  $\sigma_n$  - модуль касательного напряжения и нормальное напряжение на площадке с нормалью  $n_i$ , индекс  $\max$  означает выбор площадки, на которой комбинация  $\Delta\tau_s/2 + \alpha_F\sigma_n$  принимает максимальное значение.

Параметры  $\alpha_s$ ,  $\alpha_c$ ,  $\alpha_F$ ,  $S_0$ ,  $A$  определяются через  $\sigma_u$  и  $\sigma_{u0}$  - пределы усталости по кривым  $\sigma_a(N)$  при  $R = -1$  и  $R = 0$  соответственно и предел прочности  $\sigma_B$  [2].

Имея в виду конкретный расчетный пример, рассмотренный далее, приведем приближенные значения параметров для титанового сплава Ti-6Al-4V [2]: предел прочности  $\sigma_B = 1100$  МПа; пределы усталости по кривым  $\sigma_a(N)$  при  $R = -1$  и  $R = 0$  соответственно:  $\sigma_u = 450$  МПа и  $\sigma_{u0} = 350$  МПа; показатель степенной зависимости от числа циклов  $\beta = -0.45$ ; модуль Юнга  $E = 116$  ГПа; модуль сдвига  $G = 44$  ГПа; коэффициент Пуассона  $\nu = 0.32$ .

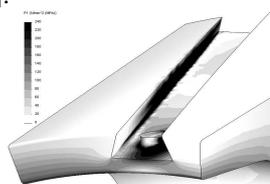
**2. Пример расчета многоосного напряженного состояния и оценки долговечности элементов конструкций в полетном цикле нагружения (МЦУ).** В качестве примера рассмотрим задачу усталостного разрушения диска компрессора газотурбинного двигателя в полетных циклах нагружения в условиях малоциклового усталости. Предполагается, что циклом многоосного нагружения системы дископатка является полетный цикл нагружения (ПЦН), состоящий в достижении максимальных нагрузок на крейсерской скорости полета воз-

душного судна и соответствующих угловых скоростях вращения диска компрессора. Задача состоит в определении долговечности диска  $N$  (число ПЦН до разрушения) из соотношений (1.2), (1.3), (1.4). Для этого необходимо произвести расчет НДС системы диск-лопатка при действии комбинации внешних нагрузок, представленных центробежными силами, распределенными аэродинамическими давлениями на лопатки и силами нелинейного контактного взаимодействия диска, лопаток и иных дополнительных учитываемых элементов конструкции, о которых говорится ниже.

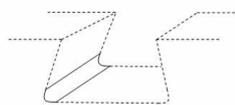
В данной работе анализ трехмерного напряженно-деформированного состояния контактной системы диска и лопаток компрессора (фиг. 2-а) выполнен численно с помощью конечно-элементного пакета программ [6].

Параметры расчета принимались такими: угловая скорость вращения  $\omega = 314$  рад/с (3000 об/мин), скоростной напор на бесконечности  $\rho v_\infty^2 / 2 = 26000$  Н/м<sup>2</sup>, что соответствует скорости потока 200 м/с при плотности 1.3 кг/м<sup>3</sup>. Свойства материалов принимались следующими: диск (титановый сплав):  $E=116$  GPa,  $\nu=0.32$ ,  $\rho = 4370$  кг/м<sup>3</sup>; лопатки (алюминиевый сплав):  $E=69$  GPa,  $\nu=0.33$ ,  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>; фиксирующие штифты (сталь):  $E=207$  GPa,  $\nu=0.27$ ,  $\rho = 7860$  кг/м<sup>3</sup>.

Расчеты показали, что наиболее опасными с точки зрения зарождения усталостных трещин, являются окрестности зон контакта диска и лопаток, имеющих вид соединения типа «ласточкин хвост» [6]. На фиг. 2-а показана зона концентрации максимальных растягивающих напряжений в левом (скругленном) углу паза в диске, в который вставляется лопатка. Видно, что концентрация напряжений нарастает от фронтальной к тыльной части паза, что совпадает с данными о расположении зон зарождения усталостных трещин в тыльной части диска [1].



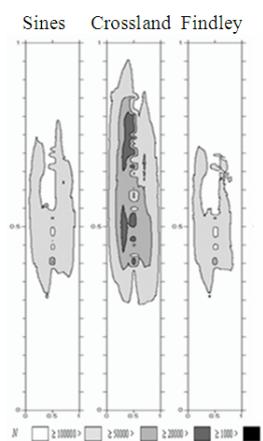
Фиг.2-а



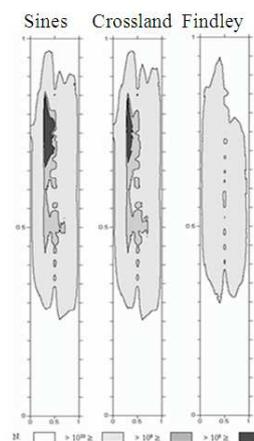
Фиг. 2-б

На фиг. 3-а для окрестности левого угла контактного соединения диска и лопатки типа «ласточкин хвост» (в зонах максимальной концентрации напряжений) показаны рассчитанные величины числа

полетных циклов до разрушения  $N$  для выбранных критериев и моделей многоосного усталостного разрушения. На фиг. 2-б рассматриваемая окрестность левого угла контактного паза диска выделена сплошной линией. На фиг. 3-а по горизонтальной оси отложена безразмерная координата закругления левого угла паза, по вертикальной оси отложена безразмерная координата по глубине паза.



Фиг.3-а. Оценка МЦУ долговечности.



Фиг.3-б. Оценка СВМУ долговечности.

Критерии Сайнса и Финдли дали оценку долговечности дисков ГТД на уровне 20 000 - 50 000 циклов. Критерий Кроссланда предсказал возможность усталостного разрушения менее, чем в 20 000 полетных циклов. В целом, все эти критерии дали сходное расположение зон усталостного разрушения.

**3. Пример расчета многоосного напряженного состояния и оценки долговечности элементов конструкций при низкоамплитудных осевых воздействиях.** Дополнительно исследовался альтернативный механизм усталостного нагружения, связанный с наблюдаемыми высокочастотными осевыми колебаниями бандажных полок. Амплитуды этих колебаний и вызываемые ими возмущения напряженного состояния в окрестности концентратора напряжений относительно невелики, однако число циклов при высокой частоте колебаний за время эксплуатации может достичь величин  $10^9 \div 10^{10}$ , что приво-

дит к необходимости исследования режима сверхмногоциклового усталости (СВМУ) и возможности усталостного разрушения при уровне напряжений, меньшем классического предела усталости материала [1].

В настоящее время отсутствуют экспериментально обоснованные модели многоосной усталости в режиме СВМУ. Поэтому для оценок долговечности применялись известные критерии многоосного усталостного разрушения МЦУ (1.2), (1.3) и (1.4) с учетом общих предположений о характере поведения усталостных кривых в рассматриваемом режиме. Характерный вид усталостной кривой показан на фиг.1, в данном режиме представляет интерес правая ветвь при  $N > 10^8$ . Значения параметров для обобщенных моделей Сайнса, Кроссланда и Финдли в режиме СВМУ определялись с учетом подобия левой и правой ветвей усталостной кривой и с заменами  $\sigma_B \rightarrow \sigma_u$ ,  $\sigma_u \rightarrow \tilde{\sigma}_u$ ,  $\sigma_{u0} \rightarrow \tilde{\sigma}_{u0}$ , где  $\tilde{\sigma}_u$  и  $\tilde{\sigma}_{u0}$  - «новые» пределы усталости на правой ветви усталостной кривой для коэффициентов асимметрии  $R = -1$  и  $R = 0$ . Для расчетов выбраны значения усталостных параметров титанового сплава в режиме СВМУ  $\sigma_u = 450 \text{ МПа}$ ,  $\tilde{\sigma}_u = 250 \text{ МПа}$ ,  $\tilde{\sigma}_{u0} = 200 \text{ МПа}$ ,  $\beta = -0.3$ .

Осевые смещения бандажных полок связаны с волновыми возмущениями, которые распространяются по угловой координате. На полный набор лопаток обычно укладывается 12-16 полуволн. Это дает возможность ввести в качестве крайних состояний элементарного цикла данного типа нагружения два положения сектора диска с одной лопаткой. В этих положениях при нулевом осевом смещении правого конца бандажной полки осевые смещения левого конца направлены в противоположных направлениях и в режимах эксплуатации достигают величины порядка 1мм. Рассматриваемые низкоамплитудные воздействия накладываются на основное напряженное состояние в полетном цикле нагружения, определяемое крейсерской скоростью полета и базовой частотой вращения диска компрессора 3000 об/мин., которое рассчитано в разделе 2.

На фиг. 3-6 для окрестности левого угла контактного соединения диска и лопатки (в зонах максимальной концентрации напряжений) показаны рассчитанные величины числа циклов до разрушения  $N$  для трех выбранных критериев по напряженному состоянию (Сайнса, Кроссланда и Финдли) в режиме СВМУ. Несмотря на относительно невысокий уровень амплитуд напряжений в цикле, расчетами показано, что и в этом случае возникают зоны возможного усталост-

ного разрушения, расположенные в тыльной зоне левого угла паза диска, примерно там же, где и в случае полетных циклов нагружения. Величина  $N$ , при которой они появляются, имеет порядок  $10^9 \div 10^{10}$ , что в пересчете на реальное время процесса с периодом цикла 0.02 с (при выбранной частоте колебаний) дает величину 50 000 час, вполне достижимую в процессе эксплуатации. Эти оценки указывают на принципиальную возможность развития усталостного разрушения в указанных зонах диска компрессора как по механизму МЦУ (полетный цикл нагружения), так и по механизму СВМУ (низкоамплитудные вибрации элементов конструкции).

**4. Аналитические оценки долговечности кольцевого диска для механизмов МЦУ и СВМУ разрушения.** С целью дополнительного наглядного подтверждения полученных результатов аналитически решены две модельные задачи теории упругости о нагружении кольцевого диска.

В первой задаче к диску приложена центробежная нагрузка, а на внешнем контуре переменное по углу радиальное напряжение, моделирующее центробежную нагрузку от лопаток и согласованное с ней по амплитуде (аналог режима МЦУ). Уравнение для функции Эри  $F$  и граничные условия задачи имеют вид [7]:

$$\begin{aligned} \Delta^2 F = 0 \quad \sigma_{rr} = F_r / r + F_{\theta\theta} / r^2 \quad \sigma_{r\theta} = F_\theta / r^2 - F_{r\theta} / r \\ \sigma_{rr} = 0 \quad \sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{при } r = a \\ \sigma_{rr} = \rho \omega^2 (b_1^2 - b^2)(1 + \cos n\theta) / 4 \quad \sigma_{r\theta} = 0 \quad \text{при } r = b \end{aligned}$$

где  $a$  и  $b$  - внутренний и внешний радиусы диска,  $b_1$  - внешний радиус лопатки,  $n$  - число лопаток. Предполагается, что циклом многоосного нагружения диска является аналог полетного цикла нагружения (ПЦН), состоящий в достижении максимальных нагрузок на максимальных угловых скоростях вращения диска компрессора при нулевых напряжениях в начале цикла.

Во второй задаче решается уравнение для изгиба диска под действием переменных по углу крутящих моментов на внешнем контуре. Эти моменты моделируют влияние колебаний лопаток (аналог режима СВМУ). В квазистатическом приближении уравнение для изгибных смещений диска  $w$  и граничные условия задачи имеют вид:

$$\Delta^2 w = 0 \quad V_r = (M_\theta + 2\partial M_{r\theta} / \partial \theta - \partial(rM_r) / \partial r) / r$$

$$\begin{aligned}
M_r &= -D_0(w_{rr} + \nu w_{\theta\theta} / r^2 + \nu w_r / r) \\
M_{r\theta} &= D_0(1-\nu)(w_{r\theta} / r - w_\theta / r^2) \\
V_r &= 0 & M_r &= 0 & \text{при } r &= a \\
V_r &= 2\partial M_{r\theta}^* / \partial \theta / r & M_r &= 0 & \text{при } r &= b
\end{aligned}$$

где  $M_{r\theta}^* = M_0 \sin n\theta$ , а величина амплитуды крутящего момента равна  $M_0 = \pm G\gamma\delta^2 h / 3$  и определяется из решения задачи о кручении пластины эллипсоидального поперечного сечения с полуосями  $\delta$  и  $h$  и с погонным углом кручения  $\pm \gamma$  в предположении  $\delta \ll h$  [8].

Крайними состояниями цикла являются два положения лопатки, закрученной на максимальный угол по- и против часовой стрелки. Рассматриваемые низкоамплитудные колебания накладываются на напряженное состояние в полетном цикле нагружения, определяемое базовой частотой вращения диска. В обоих случаях максимальные главные напряжения резко возрастают в окрестности внешнего контура и приводят к появлению зон усталостного разрушения при значениях параметров, соответствующих титановому сплаву Ti-6Al-4V. Оценки долговечности по критерию Сайнса также указывают, что усталостное разрушение в любом из этих режимов может происходить за примерно одинаковый период реального времени, оцениваемый как произведение числа  $N$  на период цикла нагружения МЦУ или СВМУ.

**Выводы.** В работе проведен сравнительный анализ и оценка долговечности диска компрессора ГТД для двух альтернативных механизмов усталостного разрушения МЦУ и СВМУ. Выполненные расчеты указывают на близкое расположение зон усталостного разрушения и близость оценок долговечности для МЦУ и СВМУ в реальном времени.

Исследование выполнено по планам ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы и проектов РФФИ 12-08-00366-а, 12-08-01260-а.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шанявский А.А. Моделирование усталостных разрушений металлов. - Уфа. Изд-во научно-технической литературы «Монография». 2007. 498с.

2. *Burago N.G., Zhuravlev A.B., Nikitin I.S.* Models of Multiaxial Fatigue Fracture and Service Life Estimation of Structural Elements. // *Mechanics of Solids*. 2011. Vol. 46. No. 6. Pp. 828–838.
3. *Sines G.* Behavior of metals under complex static and alternating stresses. *Metal fatigue*. McGraw-Hill. 1959. Pp. 145–169.
4. *Crossland B.* Effect of large hydrostatic pressures on torsional fatigue strength of an alloy steel. // *Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals*. London. 1956. Pp.138–149.
5. *Findley W.N.* A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending. *J. of Eng. for Industry*. 1959. Pp. 301–306.
6. *Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С.* Анализ напряженного состояния контактной системы «диск-лопатка» газотурбинного двигателя. // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2011. Т. 4. № 2. С. 5–16.
7. *Новоцкий В.* Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872 с.
8. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1979. 744 с.

### ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ ПО РАЗМАХУ НЕСТРЕЛОВИДНОГО КРЫЛА НА ЗАКРИТИЧЕСКИХ УГЛАХ АТАКИ

Бураго С.Г. (Москва)

Практика создания некоторых летательных аппаратов (ЛА) требует знания подъемной силы и ее распределения по размаху крыла большого удлинения на закритических углах атаки. Известны работы [1–6], в которых разработаны методы расчета распределения подъемной силы по размаху нестреловидного крыла большого удлинения на закритических углах атаки. Однако, методы [1–5] неудобны для расчетов с использованием ЭВМ. В работе [6] приводятся результаты расчетов в виде графиков зависимостей коэффициента подъемной силы  $C_y$  от угла атаки  $\alpha$ , однако, нет описания формы крыльев и нет расчетных формул. Поэтому можно только догадываться о том, что по методу [6] можно рассчитывать рас-

Научное издание

Актуальные проблемы  
прикладной математики,  
информатики и механики

*Сборник трудов  
Международной конференции*

Воронеж,  
26–28 ноября 2012 г.

Часть 1

Подписано в печать 03.09.12. Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 25,34.  
Тираж 120 экз. Заказ 843.

Отпечатано с готового оригинал-макета  
в типографии Издательско-полиграфического центра  
Воронежского государственного университета.  
394000, г. Воронеж, ул. Пушкинская, 3