

Возмущенное вращение Земли

Л.Д. Акуленко, С.А. Кумакшев, А.М. Шматков

1. Предисловие. В основе многих астрометрических исследований лежит динамическая теория вращения Земли относительно центра масс [1–5]. Известно из астрономических наблюдений (со второй половины 19 в., а, возможно, существенно раньше), что ось вращения Земли с течением времени изменяет свою ориентацию как по отношению к связанной, так и инерциальной системам координат. Это означает, что полюса и широты эволюционируют в заметных пределах в течение года.

Измерения свидетельствуют, что в весьма сложном колебательном процессе содержатся составляющие с сильно различающимися частотными и амплитудными характеристиками. Так малые колебания вектора угловой скорости в некоторой связанной с Землей системе координат (референц-системе) содержат основную составляющую, амплитуда которой достигает величины $0.20'' - 0.25''$, а период равен приблизительно 430-440 звездных суток [1-4]. Значительное отличие чандлеровского периода от предписываемой классической теорией твердого тела (от периода прецессии Эйлера 305 суток для недеформируемой фигуры Земли) потребовало объяснения. Оно было частично осуществлено на основе модели деформируемой Земли в исследованиях В. Томсона, С. Ньюкома, А. Пуанкаре, Г. Джеффриса, А. Лява, Ф.А. Слудского, М.С. Молоденского и др. [4]. Исторически принято называть указанное движение свободной нутацией деформируемой Земли или чандлеровским колебанием полюса (для определенности Северного полюса).

Было установлено также существование заметной составляющей с амплитудой $0.07'' - 0.08''$ и резко выраженным периодом, равным одному году (около 365.25 звездных суток). Наблюдаемые колебания полюса имеют характер биений. Траектория движения полюса на поверхности Земли представляет собой свертывающуюся и развертывающуюся спираль с периодом, близким к 6-ти годам.

Анализ траектории полюса и прогноз его движения представляют значи-

тельный интерес в естественнонаучном и прикладном аспектах. Построение высокоточной теоретической модели вращения деформируемой Земли, идентификация ее параметров на основе данных измерений МСВЗ и надежный прогноз движения полюса весьма важны при решении задач инерциальной навигации [6] на достаточно длительных для практических целей интервалах времени и при исследованиях ряда астрометрических и геофизических проблем [1–5].

Приведем ряд предварительных замечаний, относящихся к постановке задачи. Для описания вращательного движения деформируемой Земли и колебаний ее полюса рассматривается механическая модель вязкоупругого твердого тела [7]. Планета представляется двухслойной, состоящей из абсолютно твердого ядра (шара) и вязкоупругой мантии. Какое-либо усложнение модели фигуры Земли не представляется оправданным, поскольку в этом случае определение требуемых физико-механических характеристик планеты на основе измерений не может быть проведено с требуемой точностью. Авторы придерживаются очевидного положения, что сложность модели на всех этапах ее построения должна строго соответствовать решаемой задаче и уровню точности данных наблюдений.

С позиций теоретической механики проблема анализа процесса колебаний полюса Земли аналогичен задаче исследования движений оси гироскопа под действием возмущающих моментов сил и с учетом вязкоупругих деформаций в квазистатическом приближении.

На начальном этапе исследования движения полюса и его эволюции под действием возмущающих моментов рассматривается пространственный вариант задачи двух тел [7, 8]. Считается, что центр масс деформированной планеты (Земли) и точечный спутник (Луна) совершают известное взаимное поступательно-вращательное движение вокруг общего центра масс (барицентра), который перемещается по эллиптической орбите вокруг Солнца.

На основе асимптотического анализа уравнений движения в оскулирующих переменных действие-угол ниже определяются стабильные характеристики вращательно-колебательного движения деформируемой Земли относительно

центра масс в квазистатическом приближении. Сперва находятся уточненные периоды (частоты) осевого вращения и чандлеровского колебания и проводятся сопоставление с данными спектрального анализа [1–3]. Даются оценки амплитуд свободных колебаний вектора угловой скорости в связанной системе координат и сравниваются с наблюдаемыми значениями.

С помощью кинетических и динамических уравнений Эйлера строится математическая модель первого приближения чандлеровского колебания полюса. В заключение излагаются результаты численного определения параметров движения методом наименьших квадратов на основе ежедневных данных измерений МСВЗ [2], даются построение траектории и прогноз движения полюса Земли в сопоставлении с экспериментальными данными МСВЗ.

2. Математическая модель колебаний полюса первого приближения. Для построения модели вращательного движения относительно центра масс представим уравнения в форме классических динамических уравнений Эйлера с переменным тензором инерции J [1, 3–5, 7–9]

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}, \quad \boldsymbol{\omega} = (p, q, r)^T, \quad J = J^* + \delta J, \quad J^* = \text{const} \quad (2.1)$$

$$J^* = \text{diag}(A^*, B^*, C^*), \quad \delta J = \delta J(t), \quad \|\delta J\| \ll \|J^*\|$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости в некоторой связанной с Землей системе координат (референц-системе [4]), которая приближенно совпадает с главными центральными осями инерции J^* "замороженной" Земли с учетом "экваториального выступа" [1–5, 7]. Дополнительные возмущающие члены, получающиеся при дифференцировании вектора кинетического момента деформируемой Земли (см. [8, 9]), отнесены к вектору возмущающего момента сил \mathbf{M} весьма сложной структуры. Считается, что малые вариации тензора инерции δJ могут содержать различные гармонические составляющие, обусловленные влиянием гравитационных суточных приливов от Солнца и Луны и, возможно, другие (годовые, полугодовые, месячные, полусуточные). В качестве основных факторов возмущающих внешних моментов сил \mathbf{M} , вызывающих нутационные колебания, принимаются гравитационные воздействия. Возможное наличие слагаемого типа $\dot{J}\boldsymbol{\omega}$ не приводит к уточнению модели первого приближения. Попытки строгой оценки этих членов путем учета гео-

физических факторов затруднительна и не приводит к удовлетворительным результатам. Анализ их влияния в известной литературе часто носит сугубо спекулятивный и схоластический характер, поскольку не связан с определением моментов сил (их амплитудой, направлением, частотными и фазовыми характеристиками).

Кинематические уравнения Эйлера, задающие ориентацию связанных осей относительно орбитальной системы координат, имеют вид [10]

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi - \omega_0(\nu) \sin \psi, & \dot{\nu} &= \omega_0(\nu) = \omega_*(1 + e \cos \nu)^2 \\ \dot{\psi} &= \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\sin \theta} - \omega_0(\nu) \operatorname{ctg} \theta \cos \psi, & e &= 0.0167 \\ \dot{\varphi} &= r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta + \omega_0(\nu) \frac{\cos \psi}{\sin \theta}\end{aligned}\quad (2.2)$$

Здесь $\nu(t)$ — истинная аномалия, e — эксцентриситет орбиты, ω_* — постоянная, определяемая гравитационным и фокальным параметрами. При исследовании системы (2.1), (2.2) в ситуации, отвечающей движению полюса, пропорциональные ω_0 члены уравнений (2.2) оказываются существенно большими по сравнению с p, q (приблизительно в 300 раз) и определяющими для $\dot{\theta}, \dot{\varphi}$. В научной литературе это важное свойство не отмечено, а указанные выше члены не учитывались без должного обоснования (орбитальное и вращательное движения разделялись) [1–5].

Вычислим годичную компоненту вынужденных колебаний полюса Земли. Структура выражений для компонент момента сил гравитации от Солнца имеет вид [9]

$$\begin{aligned}M_q &= 3\omega^2 [(A^* + \delta A - (C^* + \delta C))\gamma_r\gamma_p + \delta J_{pq}\gamma_r\gamma_q + \\ &+ \delta J_{pr}(\gamma_r^2 - \gamma_p^2) - \delta J_{rq}\gamma_p\gamma_q], & \omega &= \omega_*(1 + e \cos \nu)^{3/2} \\ \gamma_p &= \sin \theta \sin \varphi, & \gamma_q &= \sin \theta \cos \varphi, & \gamma_r &= \cos \theta\end{aligned}\quad (2.3)$$

Для вычисления $M_{p,r}$ в (2.3) делается циклическая перестановка индексов p, q, r . Из анализа (2.3) следует, что годичная компонента колебаний полюса может быть обусловлена слагаемым, содержащим произведения направляющих косинусов $\gamma_p\gamma_r$ и $\gamma_q\gamma_r$. Для их вычисления в первом приближении

интегрируются уравнения (2.3)

$$r = r^0, \quad \varphi \approx rt + \varphi^0, \quad \nu \approx \omega_* t + \nu^0, \quad \cos \theta(\nu) = a(\theta^0, \psi^0) \cos \nu$$

$$\theta(0) = \theta^0 = 66^\circ 33', \quad 0.4 \leq a \leq 1, \quad 0 \leq \psi^0 \leq 2\pi \quad (2.4)$$

$$\cos \theta \sin \theta = b(\theta^0, \psi^0) \cos \nu + d \cos 3\nu + \dots, \quad 0.4 \leq b \leq \frac{4}{3\pi}, \quad |d| \ll 1$$

Вторая и более высокие гармоники по ν приводят к величинам, меньшим основных в $10^2 - 10^3$ раз и поэтому не учитываются. Величина $B^* - A^*$ также существенно меньше, чем $C^* - A^*$ (приблизительно в 160 раз). Оценка членов уравнений (2.1) для p, q приводит с учетом выражений (2.4) после усреднения по быстрой фазе φ к упрощенной аналитической модели вида

$$\dot{p} + N_p q = \mathfrak{A}_p r^2 + 3b\omega_*^2 \chi_p \cos \nu, \quad N_{p,q} \approx N = 2\pi/T_1 \approx (0.84 - 0.85)\omega_*$$

$$\dot{q} - N_q p = -\mathfrak{A}_q r^2 - 3b\omega_*^2 \chi_q \cos \nu, \quad p(0) = p^0, \quad q(0) = q^0 \quad (2.5)$$

Здесь $\mathfrak{A}_p, \mathfrak{A}_q$ — средние значения $\delta J_{pr}/B^*, \delta J_{qr}/A^*$, которые могут быть медленными функциями. Величины χ_p, χ_q получаются в результате усреднения по φ коэффициентов при $\cos \nu$ в компонентах момента гравитационных сил от Солнца, причем $\chi_p = \chi_q$. Они обусловлены, как отмечалось, суточными приливами. Моменты сил гравитации от Луны не учитываются из-за относительной малости их влияния на нутационные колебания вследствие значительного различия частот. Правые части уравнений (2.5) содержат в явной форме гармоническое воздействие с годичным периодом, объясняющее механизм нутационных колебаний, регистрируемых наблюдениями МСВЗ. Хотя чувствительность коэффициентов $\mathfrak{A}_{p,q}$ на 5 порядков выше, чем $\chi_{p,q}$, однако явный регулярный механизм годичного (силомоментного) воздействия с требуемой согласно оценкам амплитудой $M_h \sim 10^{20} \text{ кг м}^2 \text{ с}^{-2}$ посредством внутренних геофизических факторов (атмосферных, океанических, сезонных) представляется несостоятельным в механическом аспекте. Частотный анализ годичной компоненты колебаний также свидетельствует о несостоятельности геофизической интерпретации [1].

Проблема построения гравитационно-приливного механизма колебаний с периодом, весьма близким к чандлеровскому, требует отдельного исследования.

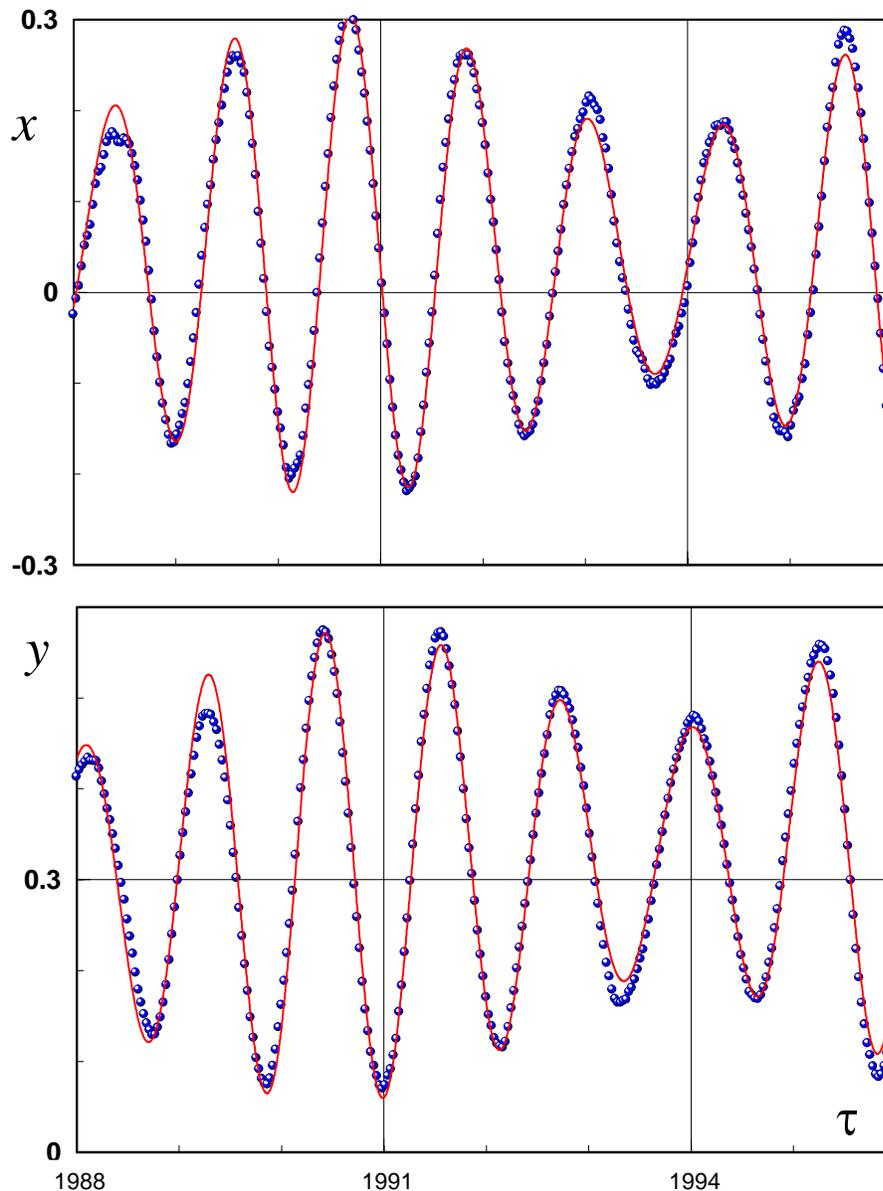
3. Результаты численного моделирования задач интерполяции и прогноза. Представляет интерес исследование эффективности интерполяции и прогноза движения полюса с помощью следующей весьма простой математической модели

$$x(\tau) = (\xi, f(\tau)), \quad y(\tau) = (\eta, f(\tau))$$

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_6)^T, \quad \eta = (\eta_1, \dots, \eta_6)^T \quad (3.1)$$

$$f(\tau) = (1, \tau, \cos 2\pi\Omega\tau, \sin 2\pi\Omega\tau, \cos 2\pi\tau, \sin 2\pi\tau)^T, \quad \Omega = 0.845$$

на основе известных ежедневных данных измерений МСВЗ [2].

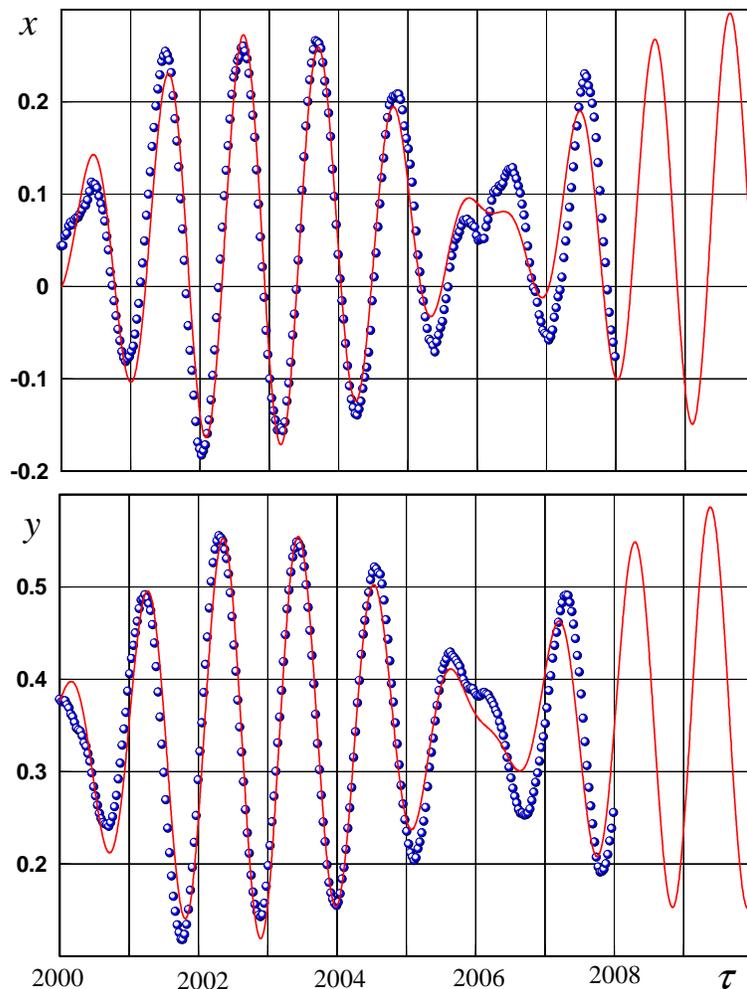


Фиг. 01.

На фиг. 1 приводятся теоретические кривые $x^*(\tau)$, $y^*(\tau)$ интерполяции ежедневных измерений на 8-летнем промежутке времени $0 \leq \tau \leq 8$, начиная с 1988 г. по конец 1995 г.; светлыми точками обозначены данные измерений. Среднеквадратические отклонения равны $\sigma_x = 0.014$, $\sigma_y = 0.017$, что свидетельствует об удовлетворительной точности построенной модели (3.1) отвечающей оптимальным значениям ξ^* , η^*

$$\begin{aligned} \xi^* &= (-0.041, -0.0004, -0.034, 0.194, -0.023, -0.065)^T \\ \eta^* &= (0.300, 0.005, 0.193, 0.033, -0.060, 0.020)^T \end{aligned} \quad (3.2)$$

Сравнение коэффициентов ξ_3^* и η_4^* , ξ_4^* и η_3^* , определяющих чандлеровские составляющие колебаний, а также ξ_5^* и η_6^* , ξ_6^* и η_5^* , (с учетом множителя $\Omega = 0.845$), отвечающих годичной компоненте в (3.2) подтверждает указанное выше структурное свойство модели (3.1).



Фиг. 02.

В ежегодных отчетах [2] и на основе оперативных данных МСВЗ предпринимает попытки построить прогноз движения полюса на 100-150 суток вперед (IERS, EOP Product Center, http://hpiers.obspm.fr/iers/eop/eopc04_05/eopc04ху.gif). Принятые МСВЗ собственные модель и методика приводят к весьма неточному и неустойчивому прогнозу, требующему еженедельной коррекции. Разница в прогнозах может составлять величину, сравнимую с максимальным отклонением полюса.

На фиг. 2 авторами представлены интерполяция наблюдаемого процесса колебаний полюса на 8-летнем интервале ежедневных данных наблюдений МСВЗ (2000–2007 гг.). Соответствующие оптимальные значения ξ^* , η^* и среднеквадратические отклонения σ_x , σ_y равны

$$\xi^* = (0.0407, 0.0032, 0.2306, 0.1205, -0.6452, -0.7881)^T, \quad \sigma_x = 0.1029$$

$$\eta^* = (0.3282, 0.0040, 0.1222, -0.0288, -0.0746, 0.0593)^T, \quad \sigma_y = 0.09597$$

Начиная с 2008 г. представлен прогноз движения полюса на 2 года (до конца 2010 г.).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов: 08-01-00411, 08-08-00292, 07-02-01010) и Программы НШ-4315.2008.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Munk W.H., Macdonald G.J.F.* The Rotation of the Earth. Cambridge: Univ. Press, 1960. 323 p.
2. IERS Annual Reports, 1990 July 1991 bis 2000 July 2001. Central Bureau of IERS. Observatoire de Paris.
3. *Moritz H. and Mueller I.I.* Earth Rotation: Theory and Observation. N.-Y.: Ungar, 1987. 617 p.
4. *Авсюк Ю.Н.* Приливные силы и природные процессы. М.: Изд-во ОИФЗ РАН, 1996. 188 с.
5. *Сидоренков Н.С.* Физика неустойчивостей вращения Земли. М.: Наука, Физматлит, 2002. 384 с.
6. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
7. *Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г., Рыжлова Л.В.* Модель движения полюса деформируемой Земли, адекватная астрометрическим данным// Астрон. ж. 2002. Т. 79. N 1. С. 81-89.
8. *Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г., Рыжлова Л.В.* Прогноз движения полюса деформируемой Земли// Астрон. ж. 2002. Т. 79. N 10. С. 952-960.
9. *Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г.* Движение полюса Земли// Докл. РАН. 2002. Т. 382. N 2. С. 199-205.
10. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
11. *Линник Ю.В.* Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз, 1962. 352 с.