УДК 539.3

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В НЕДИССИПАТИВНОЙ ТЕРМОМЕХАНИКЕ[1]

© 2008 С.А. Лычев, Д.А. Семенов[2]

Теория недиссипативной термоупругости типа Грина–Нахди описывает термоупругую деформацию среды как недиссипативный процесс. Это позволяет использовать вариационный принцип Гамильтона и получить законы сохранения из условия инвариантности интеграла действия. В работе последовательно развивается теория недиссипативной термоупругости в рамках двух методологий. Первая подразумевает постулирование законов сохранения и выбор специального термодинамического базиса; вторая — постулирование инвариантности интеграла действия (специализированного для исследуемой теории). Сформулированы точные нелинейные и линеаризованные в окрестности заданного напряженно-деформированного состояния уравнения движения и теплопроводности, а также соответствующие краевые условия. Построены порождаемые линеаризованными уравнениями пары взаимно сопряженных пучков, определяющие биортогональные системы собственных и присоединенных функций. Показано, что если законы сохранения формально переписать в полевых величинах классической термоупругости, то они трансформируются в уравнения баланса с источниками, роль которых выполняют формальные поля температурных сил и диссипации.

1. Классические соотношения теории упругости

Классическая линейная теория термоупругости [1] основана на определяющем соотношении Дюгамеля—Неймана

$$\boldsymbol{T} = 2\mu\boldsymbol{E} + \lambda\boldsymbol{I}\mathrm{tr}\,[\boldsymbol{E}] - \gamma\boldsymbol{I}\theta', \quad \theta' = \theta - \theta_0, \quad \theta_0 = \mathrm{const} \tag{1.1}$$

и законе теплопроводности Фурье

$$\boldsymbol{h} = -\kappa\boldsymbol{\nabla}\theta, \tag{1.2}$$

которые устанавливают линейные отношения между тензором напряжений Коши $\boldsymbol{T}$, тензором малых деформаций

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla u} + (\boldsymbol{\nabla u})^*\right),$$

[1]Представлена доктором физико-математических наук, профессором Ю.Н. Радаевым.

[2]Лычев Сергей Александрович (lychev@ssu.samara.ru), Семенов Денис Анатольевич (semenow@ssu.samara.ru), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

приращениями температуры θ' и вектором потока тепла $\boldsymbol{h}$. В соотношениях (1.1), (1.2) λ, μ — упругие модули Ламе, γ — термомеханический модуль, κ — коэффициент теплопроводности, $\boldsymbol{u}$ — перемещения среды, $\boldsymbol{\nabla}$ — пространственный оператор Гамильтона, $\boldsymbol{I}$ — единичный тензор.

Система дифференциальных уравнений движения и теплопроводности, вытекающая из (1.1), (1.2) и классических законов сохранения, имеет *параболический тип* [1], а порождаемые этими уравнениями дифференциальные операторы оказываются *несамосопряженными* [2]. Параболические уравнения допускают возможность мгновенного распространения теплового сигнала, что противоречит общим физическим представлениям. На этот парадокс впервые обратил внимание Б. Риман [3], а затем Дж. Максвелл (1867 г.) указал, что можно избежать парадокса, если обобщить закон Фурье следующим образом:

$$\tau\dot{\boldsymbol{h}} + \boldsymbol{h} = -\kappa\boldsymbol{\nabla}\theta. \tag{1.3}$$

Здесь τ — время релаксации, учитывающее "инерцию" теплового потока[3]. Исчерпывающий исторический обзор развития неклассических теорий теплопроводности приведен в работе [4].

Очевидным обобщением (1.3) является закон состояния Каттанео–Джеффриса (1948 г.):

$$\tau\dot{\boldsymbol{h}} + \boldsymbol{h} = -\kappa\boldsymbol{\nabla}\theta - \tau\kappa_1\boldsymbol{\nabla}\dot{\theta}.$$

Следующее обобщение закона Фурье (1.2) было осуществлено М.Е. Гертиным и А.С. Пипкиным [5] (1968 г.), которые предложили учесть предысторию температурных полей при определении теплового потока и связать вектор потока тепла $\boldsymbol{h}$ с градиентом температуры интегральным оператором:

$$\boldsymbol{h}(t) = -\int_0^\infty a(s)\boldsymbol{g}(s-t)\,ds, \qquad \boldsymbol{g}(t) = \boldsymbol{\nabla}\theta(t). \tag{1.4}$$

В частном случае экспоненциального ядра оператор (1.4) принимает вид

$$\boldsymbol{h}(t) = -\frac{\kappa}{\tau}\int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{t-s}{\tau}\right)\boldsymbol{\nabla}\theta(\boldsymbol{X}, s)\,ds, \tag{1.5}$$

который эквивалентен дифференциальному закону (1.3).

В 1938 г. было экспериментально установлено, что при определенных условиях тепловое возмущение распространяется подобно звуковой волне, в частности, происходит его отражение от границы среды. Эти эффекты наблюдались в жидком гелии и получили название второго звука. Впервые на это явление обратил внимание В.П. Пешков, обнаружив, что волны "второго звука" могут распространяться в жидком гелии при температуре ниже 2,2°K. Соответствующие экспериментальные результаты подробно изложены в работе [6]. Впоследствии В.П. Пешков предсказал, что подобный эффект должен наблюдаться в кристаллических телах при условии, что рассеяние звуковых квантов на включениях и неоднородностях достаточно мало. Это предположение было подтверждено несколькими годами позже в экспериментах С.С. Аскермана (1969 г.) [4]. Таким образом, экспериментально установлено, что *волновое распространение теплового сигнала характерно для*

[3]Выяснилось, однако, что в квазистатическом приближении константа τ мала и ей можно пренебречь. В этой связи необходимость учета тепловой инерции возникает только при моделировании нестационарных динамических процессов.

жидких сред и твердых тел, разумеется, при определенных условиях, обеспечивающих "идеальность" их микроскопической структуры.

Для объяснения механизма второго звука были построены различные теории [7]. Для жидкого гелия впервые теоретическое обоснование было предложено Дж.В. Тисса (1938 г.) и Л.Д. Ландау (1941 г.) [8]. В указанной работе жидкий гелий рассматривается как смесь "нормальной" жидкости, переносящей энтропию, и "супержидкости", не переносящей энтропию. Тепловые потоки в жидкости объяснялись как "внутренний конвективный механизм", в котором потоки "нормальной" жидкости и "супержидкости" происходят во встречных направлениях без суммарного переноса массы. Уравнения движения "смеси" приводят к *волновому уравнению для температуры.*

В 1989 г. А.Е. Грин и П.М. Нахди отметили, что если в качестве термодинамической переменной использовать температурное смещение, введенное в еще 1921 г. Ван Данцигом [9]

$$\underset{.}{\theta}(t) = \int_{t_0}^{t} \theta(\tau)d\tau + \underset{.}{\theta}^0, \quad \underset{.}{\theta}^0 = \text{const}, \tag{1.6}$$

то макроскопические уравнения движения фононного газа могут быть получены в рамках стандартных построений для консервативных систем. Получаемая при этом модель была названа недиссипативной термоупругостью [10]. Одно из основных свойств теории Грина–Нахди состоит в отсутствии термической диссипации, что позволяет использовать вариационный принцип Гамильтона и получать законы сохранения из условий инвариантности интеграла действия при преобразованиях координат и полей, соответствующих сдвигам и вращениям материального и физического многообразий [9, 11].

Целью настоящей работы являются последовательное построение континуальной теории недиссипативной термоупругости и формулировка соответствующих краевых задач, допускающих решения в замкнутой форме. К числу последних авторы относят представления в форме спектральных разложений по системам собственных и присоединенных функций пучков дифференциальных операторов, порождаемых линеаризованными уравнениями движения и теплопроводности [12]. Поскольку исследование процесса нелинейного деформирования может быть сведено к пошаговому анализу последовательности линеаризованных краевых задач, в статье особое внимание уделено линеаризациям уравнений движения и недиссипативной теплопроводности в окрестности известного конечного напряженно-деформированного состояния и соответствующим парам взаимно сопряженных операторных пучков, определяющих системы собственных и присоединенных функций.

Работа имеет следующую структуру. Разделы 2–4 носят реферативный характер. В них осуществлен вывод локальных соотношений из классических законов сохранения, постулируемых в интегральной форме. На основании этих соотношений и принципа термодинамической независимости в разделах 5–7 определяются специализированные для теории бездиссипативной термоупругости законы состояния, осуществляются линеаризация уравнений и построение взаимно сопряженных пучков дифференциальных операторов. В разделе 8 рассматривается формулировка наиболее простого варианта нелинейных уравнений, из которых в частном случае отсутствия тепловых потоков вытекают известные уравнения движения гиперупругой среды типа Синьорини. Эту формулировку следует рассматривать как наиболее простой "тестовый пример" нелинейных дифференциальных уравнений, порождаемых теорией бездиссипативной термоупругости. В разделах 9–12 из условий инвариантности интеграла действия выводятся законы сохранения, обобщающие законы, постулированные в разделах 2–4. В последнем разделе производится сопоставление соотношений классической и недиссипативной термоупругости. Показано, что если законы сохранения формально переписать в полевых величинах классической термоупругости, то они трансформируются в уравнения баланса с источниками, роль которых выполняют формальные поля температурных сил и диссипации.

Предварительно введем основные обозначения. Рассматривается произвольная конечная часть среды $\mathscr{B}$, материальные точки которой идентифицируются их местами $\boldsymbol{X}$ в фиксированной отсчетной конфигурации $\varkappa_0$. Часть $\mathscr{B}$ в текущей конфигурации занимает объем $\mathscr{P}$ в евклидовом пространстве, ограниченный замкнутой поверхностью $\partial\mathscr{P}$. Места материальных точек в текущей конфигурации $\varkappa$ обозначаются символом $\boldsymbol{x}$.

Движение тела определяется достаточно гладким отображением $\boldsymbol{\chi}$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X}, t).$$

Градиент места $\boldsymbol{F}$, пространственный градиент скорости $\boldsymbol{L}$, скорость деформаций $\boldsymbol{D}$ и спин–тензор $\boldsymbol{W}$ определяются стандартным образом [13]

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi})^*, \quad \boldsymbol{L} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}, \quad \dot{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^*, \quad \boldsymbol{W} = -\boldsymbol{W}^*,$$

где $\boldsymbol{D}^*$ обозначает сопряженный к $\boldsymbol{D}$ тензор. Предполагается, что

$$J = \det \boldsymbol{F} > 0$$

и, следовательно, существует единственное обратное отображение

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\chi}^{-1}(\boldsymbol{x}, t).$$

В этой связи все поля могут быть записаны в материальной и пространственной формах. В частности, скорость может быть определена в пространственном $\boldsymbol{v}$ и отсчетном $\boldsymbol{v}_R$ описаниях следующими формулами [13]:

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{\chi}}(\boldsymbol{X}, t), \quad \boldsymbol{v}_R = -\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{v}, \tag{1.7}$$

где точка обозначает материальную производную по времени. Отметим также, что символы $\boldsymbol{\nabla}_R$, $\boldsymbol{\nabla}$ далее обозначают отсчетный и пространственный операторы Гамильтона соответственнно ($\boldsymbol{\nabla}_R = \boldsymbol{F}^*\cdot\boldsymbol{\nabla}$).

В заключение кратко остановимся на основных положениях классической континуальной теории второго звука [6, 8, 14] с тем, чтобы иметь возможность сопоставить их с результатами настоящей работы.

Тепловое движение в твердых телах при низких температурах сводится к существованию в теле фононов — звуковых квантов. Фононы характеризуются энергией, связанной с частотой звука, и аналогом импульса — квазиимпульсом. Фононы могут взаимодействовать, причем при взаимодействии сохраняется энергия и суммарный квазиимпульс. В этом смысле совокупность фононов аналогична газу, по которому может распространяться своеобразный звук. Этот звук "второго порядка" называется вторым звуком. Поскольку фононный газ по сути есть носитель теплового движения, величина, которая колеблется в волне второго звука, — температура. В этом смысле второй звук — незатухающая тепловая волна [6].

Для математического описания движения газа фононов вводится переменная, которая позволяет учесть среднее значение течения микроскопических возмущений атомов в материале — фононов. Предполагается, что возмущения распространяются в среде как частицы[4].

[4]Строго говоря, они могут считаться частицами только в квантово-механическом смысле [8].

Пусть m обозначает число возмущений на единицу массы, $\boldsymbol{w}$ — среднюю скорость движения фононов относительно среды, ν — производство фононов на единицу массы. Пусть $\mathscr{P}$ — часть пространства, которую занимает в момент времени t заданная часть тела. Поток фононов через границу $\partial\mathscr{P}$ составляет $\rho m\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}$ на единицу площади, где $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к границе $\partial\mathscr{P}$. Таким образом, мы можем записать уравнение баланса для плотности фононного газа:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathscr{P}} \rho m\, dV + \int\limits_{\partial\mathscr{P}} \rho m\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}\, dA = \int\limits_{\mathscr{P}} \rho\nu\, dV. \tag{1.8}$$

Импульс, переносимый фононами по отношению к отсчетной конфигурации, определяется на единицу массы как $m\boldsymbol{w}$. Постулируется баланс импульса

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathscr{P}} \rho m\boldsymbol{w}\, dV + \int\limits_{\partial\mathscr{P}} \rho m\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}\, dA = \int\limits_{\mathscr{P}} \rho\nu\boldsymbol{w}\, dV + \int\limits_{\mathscr{P}} \rho\,(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{f})\; dV. \tag{1.9}$$

Первое слагаемое в левой части выражения (1.9) определяет изменение полного импульса фононов в $\mathscr{P}$, второй — поток импульса через $\partial\mathscr{P}$; правая часть определяет источники импульса: первое слагаемое возникает в силу обобщенной массовой силы $\boldsymbol{c}$, вызванной внешним воздействием, второе — из–за возможных внутренних сил $\boldsymbol{f}$, возникающих в силу внутреннего механизма, и последнее представляет приращение импульса из–за создания новых фононов. Кинетическая энергия фононов на единицу массы определяется стандартным образом

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}.$$

Представляет интерес сравнение этого определения с теорией "двух жидкостей" для гелия–II [8], согласно которой жидкость представляет смесь "нормальной" жидкости с плотностью ρ_n и скоростью $\boldsymbol{v}_n$ и "супержидкости" с плотностью ρ_s и скоростью $\boldsymbol{v}_s$. При этом кинетическая энергия смеси определяется соотношением

$$\frac{1}{2}\rho_n\boldsymbol{v}_n\cdot\boldsymbol{v}_n + \frac{1}{2}\rho_s\boldsymbol{v}_s\cdot\boldsymbol{v}_s. \tag{1.10}$$

Выражение (1.10) может быть записано в виде

$$\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\left(\rho\frac{\rho_n}{\rho_s}\right)(\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}),$$

где $\rho = \rho_n+\rho_s$, $\rho\boldsymbol{v} = \rho_n\boldsymbol{v}_n+\rho_s\boldsymbol{v}_s$. Таким образом, введенная выше дополнительная кинетическая энергия, связанная с движением фононов, согласуется с теорией "двух жидкостей", если принять

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}, \quad m = \frac{\rho_n}{\rho_s}.$$

Постулируется уравнение баланса энергии

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathscr{P}} \rho\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + \frac{1}{2}m\boldsymbol{w}^2 + \varepsilon\right) dV + \int\limits_{\partial\mathscr{P}} \frac{1}{2}\rho m(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n})^2\, dA =$$
$$= \oint\limits_{\partial\mathscr{P}} \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{v}\, dA + \int\limits_{\mathscr{P}} \rho\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{w})\; dV \int\limits_{\mathscr{P}} \rho\nu\boldsymbol{w}\, dV, \tag{1.11}$$

где ε — внутренняя энергия на единицу массы, $\boldsymbol{t}$ — вектор напряжений на единицу площади. Интеграл по объему в левой части равенства представляет полную энергию в $\mathscr{P}$, поверхностный интеграл определяет поток кинетической энергии, вызванный движением фононов через $\partial\mathscr{P}$. Слагаемые в правой части, отличные от классических, определяют мощность обобщенных массовых сил $\boldsymbol{c}$ и возрастание кинетической энергии, вызванное созданием фононов.

Уравнения баланса (1.8), (1.9), (1.11) дополняются классическими уравнениями баланса импульса и момента импульса сплошной среды. Соответствующие локальные соотношения имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\rho_0\dot{m} + \boldsymbol{\nabla}_R\cdot\left(\rho_0 m\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{w}\right) = \rho_0\nu,\\
&m\dot{\boldsymbol{w}} + m(\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{w} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{f},\\
&\rho_0\dot{\varepsilon} - \boldsymbol{P}:\dot{\boldsymbol{F}} + \rho_0\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0},\\
&\rho J = \rho_0,\\
&\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{P} - \rho_0\dot{\boldsymbol{v}} + \rho_0\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0},\\
&\boldsymbol{P}^*\cdot\boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{P}.
\end{aligned}
$$

Здесь $\boldsymbol{P}$ — тензор напряжений Пиола–Кирхгофа.

Отметим, что указанная система уравнений состоит из шести законов сохранения, первые три из которых специализированны для рассматриваемой теории и определяют движение газа фононов в деформируемой среде. Как показано в работе [14], линеаризация уравнений движения в окрестности естественного состояния (разумеется, при выборе специализированных законов состояния) приводит к следующей гиперболической системе:

$$\mu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{u} + (\lambda+\mu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} - \alpha\boldsymbol{\nabla}\theta - \rho\ddot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}, \tag{1.12}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2\theta - \beta\ddot{\theta} - \gamma\boldsymbol{\nabla}\cdot\ddot{\boldsymbol{u}} = 0, \tag{1.13}$$

где μ, λ, α, β, γ — материальные константы, $\boldsymbol{u}$ — перемещения.

Таким образом, уравнения гиперболической термоупругости, допускающие волновой характер распространения теплового возмущения, могут быть построены посредством учета дополнительного поля "микроскопических возмущений", пояснение физического смысла которых возможно только в рамках квантомеханических представлений [8].

В настоящей статье будет использован иной формализм вывода уравнений типа (1.12–(1.13), основанный полностью на макроскопическом описании среды с расширенным набором независимых термодинамических переменных, в число которых включается температурное смещение (1.6). Как будет показано, линеаризованные в окрестности естественного состояния уравнения движения и теплопроводности совпадают с линейными уравнениями теории второго звука (1.12)–(1.13). Этот факт служит своего рода "верификацией" используемого в работе формализма.

2. Пространственное описание

Следуя классической методологии механики сплошных сред [13, 15], постулируем закон сохранения массы

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathscr{P}}\rho\,dV = 0, \tag{2.1}$$

а также уравнения баланса импульса, момента импульса и полной энергии соответственно:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathscr{P}}\rho\boldsymbol{v}\,dV = \oint\limits_{\partial\mathscr{P}}\boldsymbol{t}\,dA + \int\limits_{\mathscr{P}}\rho\boldsymbol{b}\,dV, \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathscr{P}}\rho\boldsymbol{\chi}\times\boldsymbol{v}\,dV = \oint\limits_{\partial\mathscr{P}}\boldsymbol{\chi}\times\boldsymbol{t}\,dA + \int\limits_{\mathscr{P}}\boldsymbol{\chi}\times\rho\boldsymbol{b}\,dV, \tag{2.3}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathscr{P}}\rho\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}+\varepsilon\right)dV = \int\limits_{\mathscr{P}}\rho\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}+r)\;dV + \oint\limits_{\partial\mathscr{P}}(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{v}-q)\;dA. \tag{2.4}$$

Здесь ρ — плотность среды в текущем состоянии, ε — внутренняя энергия, отнесенная к единице массы, q — поверхностная плотность скорости теплового потока, определяющая теплообмен через поверхность $\partial\mathscr{P}$, r — массовая плотность скорости подвода теплоты извне, $\boldsymbol{t}$ — векторное поле напряжений, $\boldsymbol{b}$ — плотность массовых сил.

Оставаясь в рамках классической методологии, принимая принцип разрезания Эйлера–Коши и постулат Коши [13], устанавливаем линейные соотношения между единичной внешней нормалью $\boldsymbol{n}$ к поверхности $\mathscr{P}$ и вектором напряжений $\boldsymbol{t}$, а также поверхностной плотностью скорости подвода тепла q:

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}, \quad q = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{h}. \tag{2.5}$$

Используя формулу для материальной производной интеграла по физическому объему [13] и теорему о дивергенции

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathscr{P}} \phi\, dV = \int\limits_{\mathscr{P}} \left(\dot\phi + \phi\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\right) dV, \qquad \oint\limits_{\partial\mathscr{P}} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}\, dA = \int\limits_{\mathscr{P}} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}\, dV,$$

преобразуем уравнения баланса (2.1)–(2.4) к локальной форме[5]

$$\dot\rho + \rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0, \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} - \rho\dot{\boldsymbol{v}} + \rho\boldsymbol{b} - (\dot\rho + \rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}, \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}:\boldsymbol{T} + \boldsymbol{\chi}\times(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} - \rho\dot{\boldsymbol{v}} + \rho\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{\chi}\times\boldsymbol{v}\,(\dot\rho + \rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}, \tag{2.8}$$

$$\boldsymbol{T}:\boldsymbol{L} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{h} - \rho\dot\varepsilon + \rho r + (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} - \rho\dot{\boldsymbol{v}} + \rho\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{v} - \left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + \varepsilon\right)(\dot\rho + \rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}) = 0. \tag{2.9}$$

Уравнения (2.6)–(2.9) независимы. Однако, если полагать, что интегральные соотношения (2.1)–(2.4) и, следовательно, локальные соотношения (2.6)–(2.9) выполняются в совокупности, то последние приводятся к компактному (и хорошо узнаваемому [15]) виду:

$$\dot\rho + \rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0, \tag{2.10}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} - \rho\dot{\boldsymbol{v}} + \rho\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}, \tag{2.11}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}:\boldsymbol{T} = 0 \quad \text{или} \quad \boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{T}, \tag{2.12}$$

$$\boldsymbol{T}:\boldsymbol{L} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{h} - \rho\dot\varepsilon + \rho r = 0. \tag{2.13}$$

На этом этапе построения теории вводится новая термодинамическая переменная — плотность энтропии, обозначаемая далее символом η, связанная с поверхностной плотностью скорости подвода тепла соотношением[6]

$$q = \eta\theta. \tag{2.14}$$

Аналог теории напряжений Коши (принцип разрезания, постулат Коши) обусловливает существование вектора потока энтропии $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ (подробное изложение этих вопросов и доказательства соответствующих теорем приведены в работе [16]):

$$\eta = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}}, \tag{2.15}$$

[5]Здесь использовано следующе преобразование:

$$\oint\limits_{\partial\mathscr{P}} \boldsymbol{\chi}\times(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T})\, dA = -\int\limits_{\mathscr{P}} \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{\chi})\, dV = \int\limits_{\mathscr{P}} [\boldsymbol{\chi}\times(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T}) + \boldsymbol{\epsilon}:\boldsymbol{T}]\, dV,$$

где $\boldsymbol{\epsilon}$ — тензор Леви–Чивита.

[6]Это соотношение достаточно строго обосновывается в статистической теории идеального газа (См. Гиббс, Дж. Термодинамические работы / Дж. Гиббс. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950) и несколько "формально" переносится на сплошные среды с более сложной реологической структурой (См. Циглер, Г. Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды / Г. Циглер. – М.: Мир, 1966).

причем из (2.15) и второго равенства (2.5) в силу *произвольности* поверхности $\partial\mathscr{P}$ и, соответственно, нормали $\boldsymbol{n}$ вытекает линейное соотношение (см. [16, p. 110])

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{\mathcal{S}}\theta. \tag{2.16}$$

Отметим, что соотношение (2.16), устанавливающее коллинеарность векторов потока тепла и энтропии, для достаточного широкого класса материалов может быть получено непосредственно, с помощью метода множителей Лагранжа в форме принципа Мюллера–Лю [17].

Энтропия полагается функцией состояния, что позволяет постулировать закон сохранения энтропии в форме:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathscr{P}} \rho\eta\, dV = -\oint\limits_{\partial\mathscr{P}} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}}\, dA + \int\limits_{\mathscr{P}} \rho s\, dV, \quad s = s_i + s_e. \tag{2.17}$$

Здесь s — производство энтропии, которое допускает аддитивное разложение на внутреннюю s_i и внешнюю s_e составляющие. Постулируется, что эти составляющие независимы, причем внутреннее производство энтропии связано с внутренними необратимыми процессами и в силу второго закона термодинамики неотрицательно[7]. В локальной форме баланс энтропии формулируется следующим образом:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}} + \rho\dot{\eta} + (\dot{\rho} + \rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})\,\eta = \rho s_i + \rho s_e. \tag{2.18}$$

В совокупности с уравнениями (2.6)–(2.9) и соотношением (2.16), локальное уравнение баланса (2.18) приводит к следующей системе:

$$\dot{\rho} + \rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0, \tag{2.19}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} - \rho\dot{\boldsymbol{v}} + \rho\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}, \tag{2.20}$$

$$\boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{T}, \tag{2.21}$$

$$\boldsymbol{T}:\boldsymbol{L} - \boldsymbol{\mathcal{S}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta - \rho\left(\dot{\psi} + \eta\dot{\theta}\right) + \rho r = \theta\rho s_i + \theta\rho s_e, \tag{2.22}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}} + \rho\dot{\eta} = \rho s_i + \rho s_e. \tag{2.23}$$

3. Отсчетное описание

Принимая во внимание, что элемент поверхности dA в текущей конфигурации связан с элементом поверхности dA_R в отсчетной конфигурации формулой Нансона [13]

$$\boldsymbol{n}\, dA = J\boldsymbol{n}_R\cdot\boldsymbol{F}^{-1}\, dA_R,$$

где $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}_R$ — единичные нормали в текущей и отсчетной конфигурациях соответственно, а элементарный объем dV в текущей конфигурации связан с объемом в отсчетной конфигурации соотношением

$$dV = J dV_R,$$

[7] Отметим, что s_i обращается в нуль в обратимом процессе, который как раз и моделируется в рамках теории ”второго звука”. В этой связи для построения последней следует потребовать выполнения соотношения $s_i = 0$.

осуществим замену переменных в уравнениях баланса (2.1)–(2.4), (2.17) переходя от пространственных координат $\boldsymbol{x}$ к отсчетным $\boldsymbol{X}$:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathscr{B}} \rho J\, dV_R = 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathscr{B}} \rho \boldsymbol{v} J\, dV_R = \oint\limits_{\partial\mathscr{B}} J\boldsymbol{n}_R\cdot\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{T}\, dA_R + \int\limits_{\mathscr{B}} \rho\boldsymbol{b}J\, dV_R, \tag{3.2}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathscr{B}} \rho\boldsymbol{\chi}\times\boldsymbol{v} J\, dV_R = \oint\limits_{\partial\mathscr{B}} \boldsymbol{\chi}\times J\boldsymbol{n}_R\cdot\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{T}\, dA_R + \int\limits_{\mathscr{B}} \boldsymbol{\chi}\times\rho\boldsymbol{b}J\, dV_R, \tag{3.3}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathscr{B}} \rho\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}+\varepsilon\right) J\, dV_R = \tag{3.4}$$

$$= \int\limits_{\mathscr{B}} \rho\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}+r)\, J\, dV_R + \oint\limits_{\partial\mathscr{B}} \Big(J\boldsymbol{n}_R\cdot\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v} - J\boldsymbol{n}_R\cdot\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{h}\Big)\, dA_R, \tag{3.5}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathscr{B}} \rho\eta\, dV_R = -\oint\limits_{\partial\mathscr{B}} J\boldsymbol{n}_R\cdot\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}}_{\boldsymbol{R}}\, dA_R + \int\limits_{\mathscr{B}} \rho_0\,(s_i+s_e)\; dV_R. \tag{3.6}$$

Вводя обозначения ρ_0 для плотности среды в отсчетной конфигурации, $\boldsymbol{P}$ для тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа, $\boldsymbol{h}_R$ для материального вектора потока тепла и $\boldsymbol{\mathcal{S}}_{\boldsymbol{R}}$ для материального вектора потока энтропии:

$$\rho_0 = J\rho, \quad \boldsymbol{P} = J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{T}, \quad \boldsymbol{h}_R = J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{h}, \quad \boldsymbol{\mathcal{S}}_{\boldsymbol{R}} = J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{S}}, \tag{3.7}$$

применяя формулу для материальной производной интеграла по материальному объему и теорему о дивергенции

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathscr{B}} \phi\, dV_R = \int\limits_{\mathscr{P}} \dot{\phi}\, dV_R, \qquad \oint\limits_{\partial\mathscr{B}} \boldsymbol{n}_R\cdot\boldsymbol{A}\, dA_R = \int\limits_{\mathscr{B}} \boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{A}\, dV_R,$$

приходим к независимым отсчетным уравнениям баланса в локальной форме

$$\dot{\rho_0} = 0, \tag{3.8}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{P} - \rho_0\dot{\boldsymbol{v}} + \rho_0\boldsymbol{b} - \dot{\rho_0}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}, \tag{3.9}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}:(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{F}) + \boldsymbol{\chi}\times(\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{P} - \rho_0\dot{\boldsymbol{v}} + \rho_0\boldsymbol{b}) - \dot{\rho_0}\boldsymbol{\chi}\times\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}, \tag{3.10}$$

$$\boldsymbol{P}:\dot{\boldsymbol{F}} - \boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{h}_R - \rho_0\dot{\varepsilon} + \rho_0 r + (\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{P} - \rho_0\dot{\boldsymbol{v}} + \rho_0\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{v} - \dot{\rho_0}\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}+\varepsilon\right) = 0, \tag{3.11}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}}_{\boldsymbol{R}} + -\rho_0\,(s_i+s_e) + \rho_0\dot{\eta} + \dot{\rho_0}\eta = 0. \tag{3.12}$$

Если полагать, что все уравнения баланса удовлетворяются в совокупности, то из соотношений (3.8)–(3.12) вытекает следующая система уравнений

$$\dot{\rho_0} = 0, \tag{3.13}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{P} - \rho_0\dot{\boldsymbol{v}} + \rho_0\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}, \tag{3.14}$$

$$\boldsymbol{P}^*\cdot\boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{P}, \tag{3.15}$$

$$\boldsymbol{P}:\dot{\boldsymbol{F}} - \boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{h}_R - \rho_0\dot{\varepsilon} + \rho_0 r = 0, \tag{3.16}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}}_{\boldsymbol{R}} - \rho_0\,(s_i+s_e) + \rho_0\dot{\eta} = 0. \tag{3.17}$$

В результате исключения материального вектора потока тепла $\boldsymbol{h}_R$ посредством соотношения, вытекающего из (2.15)

$$\boldsymbol{h}_R = \theta\boldsymbol{\mathcal{S}}_{\boldsymbol{R}}, \tag{3.18}$$

равенство (3.16) может быть преобразовано к виду

$$\boldsymbol{P}:\dot{\boldsymbol{F}} - \boldsymbol{\mathcal{S}}_{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{\nabla}_R\theta - \rho_0\dot{\psi} - \rho_0\theta\,(s_i + s_e) - \rho_0\eta\dot{\theta} + \rho_0 r = 0. \tag{3.19}$$

Здесь ψ — свободная энергия:

$$\psi = \varepsilon - \theta\eta. \tag{3.20}$$

Отметим, что локальные соотношения, в пространственном описании, (2.10)–(2.13), (2.19)–(2.23), равно как и локальные соотношения, связанные с отсчетным описанием (3.13)–(3.17), (3.19), являются следствием:

i. законов сохранения массы, импульса, момента импульса, полной энергии и энтропии, постулированных в интегральной форме (2.1)–(2.4),
ii. принципа разрезания и постулата Коши, применяемого к напряжениям, тепловым и энтропийным потокам,
iii. предположения о достаточной гладкости полей, допускающих применение формулы Остроградского–Гаусса,
iv. коллинеарности потоков тепла и энтропии (2.16).

4. Каноническое описание

В предыдущих разделах были получены уравнения баланса в пространственном и отсчетном описаниях. Однако наиболее естественной для соотношений, вытекающих из условий инвариантности интеграла действия, является третья форма уравнений — каноническая, введенная в механику сплошной среды Дж. Эшелби. Дело в том, что в отсчетном описании не осуществляется полный пересчет к отсчетной конфигурации, поскольку фигурирующий в формулировках вектор скорости $\boldsymbol{v}$ — пространственный, а тензор Пиолы–Кирхгофа $\boldsymbol{P}$ — смешанный (в естественном диадном разложении первый элемент представляет собой отсчетный вектор, второй — пространственный). Полный пересчет к отсчетной конфигурации осуществляется в каноническом описании. Следует отметить, что каноническому формализму термомеханики посвящен ряд работ Ж.А. Маженна, в частности [18]. Произведем соответствующие преобразования.

Уравнение баланса энергии (3.16) может быть преобразовано к виду

$$\dot{\mathscr{H}} - \boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{U} = \rho_0\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}. \tag{4.1}$$

Здесь $\boldsymbol{U}$ — вектор Умова–Пойнтинга

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{v} - \boldsymbol{h}_R, \tag{4.2}$$

$\mathscr{H}$ — отсчетная плотность гамильтониана

$$\mathscr{H} = K + \rho_0\varepsilon, \tag{4.3}$$

K — плотность кинетической энергии в отсчетном описании

$$K = \rho_0\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}. \tag{4.4}$$

Умножим левую и правую части уравнения баланса импульса (3.9) на скорость $\boldsymbol{v}$. Имеем:

$$\frac{d(\rho_0\boldsymbol{v})}{dt}\cdot\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{P})\cdot\boldsymbol{v} = \rho_0\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}. \tag{4.5}$$

В результате перегруппировки слагаемых приходим к выражению для скорости изменения кинетической энергии

$$\frac{dK}{dt} - \boldsymbol{\nabla}_R \cdot (\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} - \rho_0 \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v} = 0, \tag{4.6}$$

которое, по аналогии с соответствующим выражением в аналитической механике, может быть названо "законом изменения кинетической энергии" [18].

Учитывая, что $\varepsilon = \psi + \theta\eta$, и полагая, что $r = 0$, из (3.16) получаем каноническое уравнение баланса энергии [18]

$$\frac{d(\eta\theta)}{dt} + \boldsymbol{\nabla}_R \cdot \boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}^{\text{int}}, \quad \boldsymbol{h}^{\text{int}} = \boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} - \frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{4.7}$$

Далее умножим левую и правую части уравнения баланса импульса (3.9) на градиент места $\boldsymbol{F}$:

$$\frac{d(\rho_0 \boldsymbol{v})}{dt} \cdot \boldsymbol{F} - (\boldsymbol{\nabla}_R \cdot \boldsymbol{P}) \cdot \boldsymbol{F} = \rho_0 \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{F}. \tag{4.8}$$

Произведем вспомогательные вычисления. Поскольку

$$\frac{d(\rho_0 \boldsymbol{v})}{dt} \cdot \boldsymbol{F} =$$
$$= \frac{d(\rho_0 \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F})}{dt} - \rho_0 \boldsymbol{v} \cdot \frac{d(\rho_0 \boldsymbol{v})}{dt} \cdot \boldsymbol{F} = \frac{d(\rho_0 \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F})}{dt} - \boldsymbol{\nabla}_R \left(\frac{1}{2}\rho_0 \boldsymbol{v}^2\right) + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 \boldsymbol{\nabla}_R \rho_0, \tag{4.9}$$

то равенство (4.8) принимает вид

$$-\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} - \boldsymbol{\nabla}_R \left(\frac{1}{2}\rho_0 \boldsymbol{v}^2\right) + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 \boldsymbol{\nabla}_R \rho_0 - \boldsymbol{\nabla}_R \cdot (\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{F}) + \boldsymbol{P} : (\boldsymbol{\nabla}_R \boldsymbol{F})^* = \rho_0 \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{F}, \tag{4.10}$$

где введена новая величина $\boldsymbol{K}$ — канонический импульс:

$$\boldsymbol{K} = -\rho_0 \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}. \tag{4.11}$$

Соотношение (4.10) за счет добавления к левой и правой части отсчетного градиента внутренней энергии может быть преобразовано к виду

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} + \boldsymbol{\nabla}_R \cdot \left[\left(\frac{\rho_0}{2}\boldsymbol{v}^2 - \rho_0\psi\right)\boldsymbol{I} + \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{F}\right] = -\rho_0 \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{F} + \boldsymbol{P} : (\boldsymbol{\nabla}_R \boldsymbol{F})^* + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 \boldsymbol{\nabla}_R \rho_0 - \boldsymbol{\nabla}_R (\rho_0\psi). \tag{4.12}$$

Выражение в квадратных скобках определяет тензор напряжений Эшелби

$$\boldsymbol{B} = -\left(\frac{1}{2}\rho_0 \boldsymbol{v}^2 - \rho_0\psi\right)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{F} = -\mathscr{L}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{F}, \quad \mathscr{L} = K - \rho_0\psi, \tag{4.13}$$

где $\mathscr{L}$ — плотность Лагранжиана в отсчетном описании, и соотношение (4.12) записывается в следующем каноническом виде:

$$\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}_R \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{f}^{\text{int}} + \boldsymbol{f}^{\text{ext}} + \boldsymbol{f}^{\text{inh}}, \tag{4.14}$$

где $\boldsymbol{f}^{\text{int}}$ — внутренняя сила в отсчетном описании

$$\boldsymbol{f}^{\text{int}} = \boldsymbol{P} : (\boldsymbol{\nabla}_R \boldsymbol{F})^* - \boldsymbol{\nabla}_R (\rho_0\psi)\big|_{\text{impl}}, \quad \boldsymbol{\nabla}_R (\rho_0\psi)\big|_{\text{impl}} = \boldsymbol{\nabla}_R (\rho_0\psi) - \frac{\partial \rho_0\psi}{\partial \boldsymbol{\chi}}, \tag{4.15}$$

$\boldsymbol{f}^{\text{ext}}$ — массовая сила в отсчетном описании

$$\boldsymbol{f}^{\text{ext}} = -\rho_0 \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{F}, \tag{4.16}$$

$\boldsymbol{f}^{\text{inh}}$ —сила, действующая на материальную неоднородность (сила Эшелби)

$$\boldsymbol{f}^{\text{inh}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{X}} = \frac{\boldsymbol{v}^2}{2}\boldsymbol{\nabla}_R \rho_0 - \frac{\partial \rho_0\psi}{\partial \boldsymbol{X}}. \tag{4.17}$$

Следует отметить, что выражение для внутренней силы $\boldsymbol{f}^{\mathrm{int}}$ определяется неявным градиентом $\boldsymbol{\nabla}_R\psi|_{\mathrm{impl}}$, вычисление которого возможно только при вполне определенном выборе аргументов функционала свободной энергии ψ. Таким образом, явная форма уравнений баланса в каноническом описании, в отличие от пространственного и отсчетного описаний, определяется выбором независимых термодинамических переменных.

5. Определяющие соотношения

Все полученные выше системы уравнений не являются полными: количество уравнений в них меньше количества независимых полевых величин. Дальнейшее построение теории требует дополнительных соотношений, устанавливающих связи между термодинамическими переменными — определяющих соотношений. Для этого необходимо выбрать некоторый набор независимых термодинамических переменных (образующих т.н. термодинамический базис), причем выбор того или иного базиса определяет, вообще говоря, различные окончательные формулировки уравнений, т.е. вносит некоторую субъективность в производимые построения.

Теория Грина–Нахди отличается от классической связанной термоупругости специальным выбором независимых термодинамических переменных, в число которых вместо традиционно используемого со времен Фурье градиента температуры входит градиент первообразной температуры — температурного смещения (1.6), т.е. выбирается термодинамический базис

$$\left\{\boldsymbol{X}, \underset{\cdot}{\theta}, \boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta}, \boldsymbol{F}\right\}. \tag{5.1}$$

Свободная энергия ψ функционально зависит от следующих полей

$$\psi = \psi\left(\boldsymbol{X}, \underset{\cdot}{\theta}, \underset{\cdot}{\dot{\theta}}, \boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta}, \boldsymbol{F}\right) = \psi\left(\boldsymbol{X}, \underset{\cdot}{\theta}, \theta, \boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta}, \boldsymbol{F}\right). \tag{5.2}$$

Для построения законов состояния воспользуемся формализмом, предложенным Б.Д. Колеманом и В. Ноллом [13]. Вычисляя производную по времени выражения (5.2)

$$\dot{\psi} = \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta}}\cdot\boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\dot{\theta}} + \frac{\partial\psi}{\partial\underset{\cdot}{\dot{\theta}}}\underset{\cdot}{\ddot{\theta}} + \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{F}}:\dot{\boldsymbol{F}} + \frac{\partial\psi}{\partial\underset{\cdot}{\theta}}\underset{\cdot}{\dot{\theta}} = \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta}}\cdot\boldsymbol{\nabla}_R\theta + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{F}}:\dot{\boldsymbol{F}} + \frac{\partial\psi}{\partial\underset{\cdot}{\theta}}\theta$$

и подставляя результат в уравнение баланса энергии (3.19), приходим к соотношению

$$\boldsymbol{P}:\dot{\boldsymbol{F}} - \boldsymbol{\mathcal{S}_R}\cdot\boldsymbol{\nabla}_R\theta - \rho_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta}}\cdot\boldsymbol{\nabla}_R\theta + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{F}}:\dot{\boldsymbol{F}} + \frac{\partial\psi}{\partial\underset{\cdot}{\theta}}\theta + \eta\dot{\theta}\right) + \rho_0 r = \\ = \theta\rho_0 s_i + \theta\rho_0 s_e. \tag{5.3}$$

Это равенство должно выполняться для любых термодинамически допустимых процессов. Учитывая постулированную выше независимость внутреннего и внешнего производства энтропии, получаем необходимые и достаточные условия (5.3) в форме следующих соотношений:

$$\eta = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad \boldsymbol{P} = \rho_0\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{F}}, \quad \boldsymbol{\mathcal{S}_R} = -\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta}}, \quad s_i = \frac{\partial\psi}{\partial\underset{\cdot}{\theta}}, \quad s_e = \theta^{-1}r. \tag{5.4}$$

Из третьего равенства (5.4) и соотношения (2.16) вытекает закон для материального вектора потока тепла

$$\boldsymbol{h}_R = -\rho_0 \theta \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \dot{\theta}}. \tag{5.5}$$

Если полагать, что внутренняя энергия явно не зависит от температурного смещения, то внутреннее производство энтропии обращается в нуль. Именно такой случай был впервые рассмотрен А.Е. Грином и П.М. Нахди в работе [10], а соответствующая теория термоупругости была названа недиссипативной. Еще одна отличительная черта недиссипативной термоупругости состоит в том, что все зависимые термодинамические переменные, как и в классической гиперупругости, определяются единственным потенциалом свободной энергии ψ.

Переход к отсчетному описаниию приводит к следующим определяющим соотношениям для тензора напряжений Коши, потоков энтропии и тепла в пространственном описании:

$$\boldsymbol{T} = \rho \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{F}}, \quad \boldsymbol{\mathcal{S}} = -\rho \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \dot{\theta}}, \quad \boldsymbol{h} = -\rho \theta \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \dot{\theta}}. \tag{5.6}$$

Переход к каноническому описанию позволяет найти соответствующие законы для вектора Умова–Пойнтинга и тензора Эшелби:

$$\boldsymbol{U} = \rho_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{v} + \theta \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \dot{\theta}} \right), \quad \boldsymbol{B} = \left(\psi - \rho_0 \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} \right) \boldsymbol{I} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}. \tag{5.7}$$

Определяющие соотношения (5.4)–(5.7) вытекают из предписанного выбора термодинамического базиса. В этой связи может показаться, что существуют иные варианты набора независимых термодинамических переменных, также приводящие к отсутствию термической диссипации, но к соотношениям, отличным от (5.4)–(5.7). Следующие рассуждения показывают, что, по крайней мере, при ограничении расширения термодинамического базиса гиперупругого тела одной скалярной скрытой переменной состояния это не так.

Рассмотрим т.н. энергетическое описание [19]. Соответствующий термодинамический базис определяется градиентом места, плотностью энтропии и градиентом некоторой скалярной полевой величины — абстрактной скрытой переменной состояния ϑ, т.е.

$$\{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{F}, \eta, \nabla_R \vartheta\}. \tag{5.8}$$

Внутренняя энергия ε функционально зависит от указанных полей

$$\varepsilon = \varepsilon\,(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{F}, \eta, \nabla_R \vartheta). \tag{5.9}$$

Вновь используя формализм В. Нолла [13], вычисляя производную по времени плотности внутренней энергии

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \nabla_R \vartheta} \cdot \nabla_R \dot{\vartheta} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{F}} : \dot{\boldsymbol{F}} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \dot{\eta}, \qquad \rho_0 \dot{\eta} = \rho_0 s_i + \rho_0 s_e - \nabla_R \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}}_{\boldsymbol{R}}$$

и подставляя результат в уравнение баланса энергии (3.16), приходим к равенству:

$$\boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} - \nabla_R \cdot \left(\boldsymbol{h}_R - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \boldsymbol{\mathcal{S}}_{\boldsymbol{R}} \right) - \rho_0 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \nabla_R \vartheta} \cdot \nabla_R \dot{\vartheta} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{F}} : \dot{\boldsymbol{F}} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} (s_i + s_e) \right) - \\ - \left(\nabla_R \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right) \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}}_{\boldsymbol{R}} + \rho_0 r = 0. \tag{5.10}$$

Полученное соотношение должно выполняться для любых термодинамически допустимых процессов. Следовательно, необходимы и достаточными условиями (5.3) (в предположении о независимости внешнего и внутреннего производства энтропии) являются законы:

$$\boldsymbol{h}_R = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}\boldsymbol{\mathcal{S}_R}, \quad \boldsymbol{P} = \rho_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{F}}, \quad s_e = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}\right)^{-1} r \tag{5.11}$$

и соотношение для внутреннего производства энтропии

$$\rho_0 s_i = -\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}\right)^{-1} \left[\rho_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{\nabla}_R \vartheta} \cdot \boldsymbol{\nabla}_R \dot{\vartheta} + \left(\boldsymbol{\nabla}_R \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}\right) \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}_R}\right]. \tag{5.12}$$

Внутренее производство энтропии обращается в нуль, если

$$\dot{\vartheta} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}, \quad \boldsymbol{\mathcal{S}_R} = -\rho_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{\nabla}_R \vartheta}. \tag{5.13}$$

Таким образом, для построения модели недиссипативной термоупругости в рамках энергетического описания достаточно дополнить термодинамический базис скалярной скрытой переменной состояния, производная по времени которой представляет собой частную производную внутренней энергии по плотности энтропии, т.е. термодинамической температурой в каноническом описании [19]. В этой связи энергетическое описание оказывается эквивалентным температурному (Грина–Нахди).

Для полноты изложения остановимся еще на одном варианте термодинамического базиса, соответствующего т.н. энтропийному описанию [19]

$$\{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{F}, \varepsilon, \boldsymbol{\nabla}_R \vartheta\}. \tag{5.14}$$

Функциональная зависимость для плотности энтропии η имеет вид

$$\eta = \eta(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{F}, \varepsilon, \boldsymbol{\nabla}_R \vartheta). \tag{5.15}$$

Производная по времени плотности энтропии может быть записана следующим образом:

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{\nabla}_R \vartheta} \cdot \boldsymbol{\nabla}_R \dot{\vartheta} + \frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{F}} : \dot{\boldsymbol{F}} + \frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon},$$

следовательно, скорость изменения внутренней энергии определяется равенством

$$\rho_0 \dot{\varepsilon} = \rho_0 \left(\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} \left(\dot{\eta} - \frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{\nabla}_R \vartheta} \cdot \boldsymbol{\nabla}_R \dot{\vartheta} - \frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{F}} : \dot{\boldsymbol{F}}\right). \tag{5.16}$$

Используя соотношение

$$\rho_0 \dot{\eta} = \rho_0 s_i + \rho_0 s_e - \boldsymbol{\nabla}_R \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}_R}, \tag{5.17}$$

приходим к выражению для скорости изменения внутренней энергии

$$\rho_0 \dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} \left(\rho_0 s_i + \rho_0 s_e - \boldsymbol{\nabla}_R \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}_R} - \rho_0 \frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{\nabla}_R \vartheta} \cdot \boldsymbol{\nabla}_R \dot{\vartheta} - \rho_0 \frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{F}} : \dot{\boldsymbol{F}}\right). \tag{5.18}$$

Подстановка полученного соотношения в уравнение баланса энергии приводит к равенству

$$\boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} - \boldsymbol{\nabla}_R \cdot \left(\boldsymbol{h}_R - \left(\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} \boldsymbol{\mathcal{S}_R}\right) - \rho_0 \left(\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon}\right)^{-1} \left(-\frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{\nabla}_R \vartheta} \cdot \boldsymbol{\nabla}_R \dot{\vartheta} - \frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{F}} : \dot{\boldsymbol{F}} + s_i + s_e\right) - \\ - \left(\boldsymbol{\nabla}_R \left(\frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon}\right)^{-1}\right) \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}_R} + \rho_0 r = 0, \tag{5.19}$$

которое должно выполняться для любых термодинамически допустимых процессов, следовательно, имеют место следующие законы:

$$\boldsymbol{h}_R = \left(\frac{\partial\eta}{\partial\varepsilon}\right)^{-1} \boldsymbol{\mathcal{S}}_{\boldsymbol{R}}, \quad \boldsymbol{P} = -\rho_0 \left(\frac{\partial\eta}{\partial\varepsilon}\right)^{-1} \frac{\partial\eta}{\partial\boldsymbol{F}}, \quad \rho_0 s_e = \frac{\partial\eta}{\partial\varepsilon} r \tag{5.20}$$

и выражение для внутреннего производства энтропии:

$$\rho_0 s_i = \rho_0 \frac{\partial\eta}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\dot{\vartheta}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_R\dot{\vartheta} - \frac{\partial\eta}{\partial\varepsilon}\left[\boldsymbol{\nabla}_R\left(\frac{\partial\eta}{\partial\varepsilon}\right)^{-1}\right] \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}}_{\boldsymbol{R}}, \tag{5.21}$$

которое обращается в нуль при условии

$$\dot{\vartheta} = \left(\frac{\partial\eta}{\partial\varepsilon}\right)^{-1}, \quad \boldsymbol{\mathcal{S}}_{\boldsymbol{R}} = \rho_0 \left(\frac{\partial\eta}{\partial\varepsilon}\right)^{-1} \frac{\partial\eta}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\dot{\vartheta}}. \tag{5.22}$$

Производная $\left(\frac{\partial\eta}{\partial\varepsilon}\right)^{-1}$ представляет собой термодинамическую температуру в энтропийном описании, в связи с чем можно сделать вывод об эквивалентности (с точностью до пересчета канонических производных) энтропийного и температурного (Грина–Нахди) описаний.

Таким образом, различные варианты выбора термодинамического базиса при условиях, что классический базис гиперупругого тела расширяется посредством одной скалярной переменной состояния и внутреннее производство энтропии при любых термодинамически допустимых процессах обращается в нуль, приводят к моделям, которые эквивалентны модели Грина–Нахди.

Следует отметить, что принцип материальной индифферентности сужает класс допустимых законов состояния [10].

В заключение укажем, что для для определения законов состояния теории Грина–Нахди дополнительно к постулатам i–iv (раздел 3) потребовались следующие:

v. выбор термодинамического базиса,
vi. постулирование независимости внешнего и внутреннего производства энтропии,
vii. условие обращения в нуль внутреннего производства энтропии,
viii. принцип материальной индифферентности.

6. Линеаризованные уравнения

Настоящий раздел посвящен линеаризации точных уравнений движения и недиссипативной теплопроводности в окрестности заданного напряженно-деформированного состояния. Отметим, что процедура линеаризации уравнений классической термоупругости с учетом начальных напряжений изложена в работах [20,21], а уравнений теории Грина–Нахди в работе [22]. Излагаемые ниже построения в некотором смысле обобщают результаты [22] и позволяют сформулировать линейные уравнения и наиболее общие краевые условия, соответствующие пространственному и отсчетному описаниям, в специальном виде, предназначенном для построения взаимно сопряженных пучков линейных дифференциальных операторов.

Следуя известной методологии [20, 21], рассматривается текущая и возмущенная текущая конфигурации. Все величины, относящиеся к возмущенной конфигурации, обозначаются пятилучевой звездочкой.

Вектор места $\boldsymbol{\chi}^\star$ и температура $\theta^\star$ в возмущенной конфигурации могут быть записаны в следующей инкрементальной форме:

$$\boldsymbol{\chi}^\star = \boldsymbol{\chi} + \varsigma\boldsymbol{\chi}', \quad \theta^\star = \theta + \varsigma\theta'. \tag{6.1}$$

Здесь ς — малый параметр, характеризующий отклонение возмущенной текущей конфигурации от невозмущенной, $\boldsymbol{\chi}'$, θ' — приращение вектора места и температуры, $\boldsymbol{\chi}$, θ — место и температура в текущей невозмущенной конфигурации.

Инкрементальная форма температурного смещения вытекает из (6.1)

$$\underset{.}{\theta}^\star = \int\limits_{t_0}^{t} [\theta(\tau) + \varsigma\theta'(\tau)]\, d\tau = \underset{.}{\theta} + \varsigma\underset{.}{\theta}', \quad \underset{.}{\theta}' = \int\limits_{t_0}^{t} \theta'(\tau)\, d\tau, \tag{6.2}$$

так же как и инкрементальная форма градиента места

$$\boldsymbol{F}^\star = \left(\boldsymbol{\nabla}_R \cdot \boldsymbol{\chi}^\star\right)^* = (\boldsymbol{\nabla}_R \cdot (\boldsymbol{\chi} + \varsigma\boldsymbol{\chi}'))^* = \boldsymbol{F} + \varsigma\boldsymbol{F}', \quad \boldsymbol{F}' = (\boldsymbol{\nabla}_R \cdot \boldsymbol{\chi}')^*, \tag{6.3}$$

и градиента температурного смещения

$$\boldsymbol{\nabla}_R \underset{.}{\theta}^\star = \boldsymbol{\nabla}_R \underset{.}{\theta} + \varsigma \boldsymbol{\nabla}_R \underset{.}{\theta}'. \tag{6.4}$$

Разложение свободной энергии в окрестности невозмущенного текущего состояния представим с точностью до величин более высокого порядка малости, чем ς^2:

$$\begin{aligned}
\psi^\star = \psi + \varsigma \left[\frac{d\psi^\star}{d\varsigma}\right]_{\varsigma=0} + \frac{\varsigma^2}{2}\left[\frac{d^2\psi^\star}{d\varsigma^2}\right]_{\varsigma=0} + o(\varsigma^2) = \\
= \psi + \varsigma \left[\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{F}} : \boldsymbol{F}' + \frac{\partial\psi}{\partial(\boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta})} \cdot \boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta}' + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\theta'\right] + \\
+ \frac{\varsigma^2}{2}\Bigg[\boldsymbol{F}' : \frac{\partial^2\psi}{\partial\boldsymbol{F}^2} : \boldsymbol{F}' + \boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta}' \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial(\boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta})^2} \cdot \boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta}' + \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}(\theta')^2 + \\
+ \boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta}' \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial(\boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta})\partial\boldsymbol{F}} : \boldsymbol{F}' + \theta' \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial\boldsymbol{F}} : \boldsymbol{F}' + \boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta}' \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial(\boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta})\partial\theta}\theta'\Bigg] + o(\varsigma^2).
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Для сокращения письма введем следующие обозначения тензорных коэффициентов:

$$\mathfrak{A} = \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{F}}, \quad \mathfrak{B} = \frac{\partial\psi}{\partial(\boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta})}, \quad \mathfrak{C} = \frac{\partial\psi}{\partial\theta},$$

$$\mathfrak{E} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\boldsymbol{F}^2}, \quad \mathfrak{D} = \frac{\partial^2\psi}{\partial(\boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta})^2}, \quad \mathfrak{F} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2},$$

$$\mathfrak{H} = \frac{\partial^2\psi}{\partial(\boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta})\partial\boldsymbol{F}}, \quad \mathfrak{K} = \frac{\partial^2\psi}{\partial(\boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta})\partial\theta}, \quad \mathfrak{L} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial\boldsymbol{F}}.$$

Ввиду допускаемой перестановочности операции дифференцирования указанные тензорные коэффициенты обладают симметриями:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^{(3412)}, \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{D}^*, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}^{(231)}. \tag{6.6}$$

В принятых обзначениях выражение для плотности свободной энергии имеет вид

$$\begin{aligned}
\psi^\star = \psi + \varsigma\left[\mathfrak{A} : \boldsymbol{F}' + \mathfrak{B} \cdot \boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta}' + \mathfrak{C}\theta'\right] + \\
+ \frac{\varsigma^2}{2}\left[\boldsymbol{F}' : \mathfrak{E} : \boldsymbol{F}' + \boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta}' \cdot \mathfrak{D} \cdot \boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta}' + \mathfrak{F}(\theta')^2 + 2\boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta}' \cdot \mathfrak{H} : \boldsymbol{F}' + 2\theta'\mathfrak{L} : \boldsymbol{F}' + 2\boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta}'\mathfrak{K}\theta'\right] + o(\varsigma^2).
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Для получения явных представлений приращений полей напряжений и энтропии вычислим производные

$$\frac{\partial \psi^\star}{\partial \boldsymbol{F}^\star} = \mathfrak{A} + \varsigma\Big(\mathfrak{E}:\boldsymbol{F}' + \mathfrak{H}\cdot\nabla_{\!R}\theta' + \mathfrak{L}\theta'\Big), \tag{6.8}$$

$$\frac{\partial \psi^\star}{\partial (\nabla_{\!R}\theta)^\star} = \mathfrak{B} + \varsigma\Big(\mathfrak{D}\cdot\nabla_{\!R}\theta' + \mathfrak{H}:\boldsymbol{F}' + \mathfrak{K}\theta'\Big), \tag{6.9}$$

$$\frac{\partial \psi^\star}{\partial \theta^\star} = \mathfrak{C} + \varsigma\Big(\mathfrak{F}\theta' + \mathfrak{L}:\boldsymbol{F}' + \nabla_{\!R}\theta'\mathfrak{K}\Big). \tag{6.10}$$

Учитывая, что тензорные коэффициенты $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ определяют соответствующие величины в невозмущенном текущем состоянии

$$\mathfrak{A} = \rho_0\boldsymbol{P}, \quad \mathfrak{B} = -\rho_0\boldsymbol{\mathcal{S}_R}, \quad \mathfrak{C} = -\eta, \tag{6.11}$$

получим следующие инкрементальные соотношения

$$\boldsymbol{P}^\star = \rho_0\frac{\partial \psi^\star}{\partial \boldsymbol{F}^\star} = \boldsymbol{P} + \varsigma\boldsymbol{P}', \quad \boldsymbol{P}' = \rho_0\Big(\mathfrak{E}:\boldsymbol{F}' + \mathfrak{H}\cdot\nabla_{\!R}\theta' + \mathfrak{L}\theta'\Big),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{S}_R}^\star = -\rho_0\frac{\partial \psi^\star}{\partial (\nabla_{\!R}\theta)^\star} = \boldsymbol{\mathcal{S}_R} + \varsigma\boldsymbol{\mathcal{S}_R}', \quad \boldsymbol{\mathcal{S}_R}' = -\rho_0\Big(\mathfrak{D}\cdot\nabla_{\!R}\theta' + \mathfrak{H}:\boldsymbol{F}' + \mathfrak{K}\theta'\Big),$$

$$\eta^\star = -\frac{\partial \psi^\star}{\partial \theta^\star} = \eta + \varsigma\eta', \quad \eta' = -\Big(\mathfrak{F}\theta' + \mathfrak{L}:\boldsymbol{F}' + \nabla_{\!R}\theta'\mathfrak{K}\Big).$$

Поскольку поток энтропии при $\nabla_{\!R}\theta' = \mathbf{0}$ и $\theta' = 0$ должен обращаться в нуль, то необходимо ввести дополнительное ограничение

$$\mathfrak{H} = \mathbf{0}. \tag{6.12}$$

Окончательно выражения для инкрементов $\boldsymbol{P}'$, $\boldsymbol{\mathcal{S}_R}'$, η' принимают вид:

$$\boldsymbol{P}' = \rho_0\,(\mathfrak{E}:\boldsymbol{F}' + \mathfrak{L}\theta')\,, \ \boldsymbol{\mathcal{S}_R}' = -\rho_0\Big(\mathfrak{D}\cdot\nabla_{\!R}\theta' + \mathfrak{K}\theta'\Big), \ \eta' = -\Big(\mathfrak{F}\theta' + \mathfrak{L}:\boldsymbol{F}' + \nabla_{\!R}\theta'\mathfrak{K}\Big). \tag{6.13}$$

Из уравнений (3.14)–(3.16) вытекают соответствующие инкрементальные уравнения

$$\nabla_{\!R}\cdot\boldsymbol{P}' - \rho_0\ddot{\boldsymbol{\chi}}' + \rho_0\boldsymbol{b}' = \mathbf{0}, \tag{6.14}$$

$$\nabla_{\!R}\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}_R}' + \rho_0\dot{\eta}' = 0. \tag{6.15}$$

Здесь $\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{b}^\star - \boldsymbol{b}$ — инкремент массовых сил, вызванных возмущением текущей конфигурации. С учетом соотношений (6.13) уравнения движения могут быть записаны в виде

$$\nabla_{\!R}\cdot(\rho_0\mathfrak{E}:(\nabla_{\!R}\boldsymbol{\chi}')^* + \rho_0\mathfrak{L}\theta') - \rho_0\ddot{\boldsymbol{\chi}}' + \rho_0\boldsymbol{b}' = \mathbf{0}, \tag{6.16}$$

$$\nabla_{\!R}\cdot\Big[\rho_0\Big(\mathfrak{D}\cdot\nabla_{\!R}\theta' + \mathfrak{K}\theta'\Big)\Big] - \rho_0\Big(\mathfrak{F}\dot{\theta}' + \mathfrak{L}:(\nabla_{\!R}\dot{\boldsymbol{\chi}}')^* + \nabla_{\!R}\theta'\cdot\mathfrak{K}\Big) = 0. \tag{6.17}$$

Дифференцируя по времени последнее уравнение и выполняя несложные преобразования, приходим к уравнению

$$\nabla_{\!R}\cdot(\rho_0\mathfrak{D}\cdot\nabla_{\!R}\theta') + (\nabla_{\!R}\cdot\rho_0\mathfrak{K})\,\dot{\theta}' - \rho_0\Big(\mathfrak{F}\ddot{\theta}' + \mathfrak{L}:(\nabla_{\!R}\ddot{\boldsymbol{\chi}}')^*\Big) = 0. \tag{6.18}$$

Итак, линеаризованная система уравнений движения и теплопроводности (в отсчетном описании) имеет вид

$$\nabla_{\!R}\cdot(\rho_0\mathfrak{E}:(\nabla_{\!R}\boldsymbol{\chi}')^* + \rho_0\mathfrak{L}\theta') - \rho_0\ddot{\boldsymbol{\chi}}' + \rho_0\boldsymbol{b}' = \mathbf{0}, \tag{6.19}$$

$$\nabla_{\!R}\cdot(\rho_0\mathfrak{D}\cdot\nabla_{\!R}\theta') + (\nabla_{\!R}\cdot\rho_0\mathfrak{K})\,\dot{\theta}' - \rho_0\Big(\mathfrak{F}\ddot{\theta}' + \mathfrak{L}:(\nabla_{\!R}\ddot{\boldsymbol{\chi}}')^*\Big) = 0. \tag{6.20}$$

Построим линеаризацию уравнений, сформулированных в пространственном описании. Для этой цели воспользуемся выражением для тензора напряжений Коши

$$\boldsymbol{T}^\star = \left(J^\star\right)^{-1} \boldsymbol{F}^\star \cdot \boldsymbol{P}^\star. \tag{6.21}$$

Представление тензора напряжений Коши в инкрементальной форме можно получить, если воспользоваться разложением якобиана $\boldsymbol{J}^\star$

$$\left(J^\star\right)^{-1} = J^{-1}\left(1 - \varsigma \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\chi}'\right) + o(\varsigma). \tag{6.22}$$

Имеем:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}^\star &= J^{-1}\left(1 - \varsigma\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\chi}'\right)\left(\boldsymbol{F} + \varsigma(\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}')^*\right)\cdot\left(\boldsymbol{P} + \varsigma\rho_0\mathfrak{E} : (\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}')^* + \varsigma\rho_0\mathfrak{L}\theta'\right) + o(\varsigma) = \\ &= \boldsymbol{T} + J^{-1}\varsigma\left[(\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}')^*\cdot\boldsymbol{P} - (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\chi}')\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{P} + \rho_0\boldsymbol{F}\cdot\mathfrak{E} : (\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}')^* + \rho_0\mathfrak{L}\theta'\right] + o(\varsigma). \end{aligned} \tag{6.23}$$

Учитывая связь отсчетного и пространственного набла–операторов Гамильтона

$$(\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}')^* = (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\chi}')\cdot\boldsymbol{F}, \tag{6.24}$$

приходим к выражению для инкремента тензора напряжений Коши

$$\boldsymbol{T}' = (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\chi}')^*\cdot\boldsymbol{T} - (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\chi}')\boldsymbol{T} + \rho\tilde{\mathfrak{E}} : (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\chi}')^* + \rho\mathfrak{L}\theta'. \tag{6.25}$$

Здесь введено обозначение следующего тензорного коэффициента:

$$\tilde{\mathfrak{E}} = \boldsymbol{F}\cdot\mathfrak{E}\cdot\boldsymbol{F}^*. \tag{6.26}$$

Поток энтропии в пространственном описании

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}^\star = \left(J^\star\right)^{-1} \boldsymbol{F}^\star\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}_R}^\star \tag{6.27}$$

может быть представлен в виде

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}^\star = J^{-1}\left(1 - \varsigma\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\chi}'\right)\left(\boldsymbol{F} + \varsigma(\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}')^*\right)\cdot\left(\boldsymbol{\mathcal{S}_R} + \varsigma\boldsymbol{\mathcal{S}_R}'\right) + o(\varsigma). \tag{6.28}$$

Следовательно, приращение потока энтропии формулируется следующим образом:

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}' = (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\chi}')^*\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}} - (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\chi}')\boldsymbol{\mathcal{S}} + J^{-1}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}_R}'. \tag{6.29}$$

Последнее слагаемое вычисляется по (6.13). Окончательно

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}' = (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\chi}')^*\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}} - (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\chi}')\boldsymbol{\mathcal{S}} - \rho\tilde{\mathfrak{D}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta' - \rho\tilde{\mathfrak{K}}\theta', \tag{6.30}$$

где

$$\tilde{\mathfrak{D}} = \boldsymbol{F}\cdot\mathfrak{D}\cdot\boldsymbol{F}^*, \quad \tilde{\mathfrak{K}} = \boldsymbol{F}\cdot\mathfrak{K}. \tag{6.31}$$

Наконец, запишем выражение для плотности энтропии в пространственном описании:

$$\eta' = -\left(\mathfrak{F}\theta' + \tilde{\mathfrak{L}} : (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\chi}')^* + \boldsymbol{\nabla}\underset{\cdot}{\theta}'\tilde{\mathfrak{K}}\right), \quad \tilde{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}\cdot\boldsymbol{F}^*. \tag{6.32}$$

Из соотношения (2.11), (2.13) и выражений (6.25), (6.30) вытекают линеаризованные в пространственном описании уравнения движения и теплопроводности

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\chi}')^*\cdot\boldsymbol{T} - (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\chi}')\boldsymbol{T} + \rho\tilde{\mathfrak{E}} : (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\chi}')^* + \rho\mathfrak{L}\theta'\right] - \rho\ddot{\boldsymbol{\chi}}' + \rho\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{0}, \tag{6.33}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[(\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\boldsymbol{\chi}}')\boldsymbol{\mathcal{S}} - (\boldsymbol{\nabla}\dot{\boldsymbol{\chi}}')^*\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}} + \rho\tilde{\mathfrak{D}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta'\right] + \left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\rho\tilde{\mathfrak{K}}\right)\dot{\theta}' - \\ -\rho\left(\mathfrak{F}\ddot{\theta}' + \tilde{\mathfrak{L}} : (\boldsymbol{\nabla}\ddot{\boldsymbol{\chi}}')^*\right) = 0. \end{aligned} \tag{6.34}$$

Если линеаризацию точных уравнений осуществлять в окрестности "естественного" начального состояния (в отсутствие начальных напряжений и потоков энтропии), то линейные уравнения, соответствующие отсчетному описанию

(6.19)–(6.20), совпадают с линейными уравнениями, соответствующими пространственному описанию (6.33)–(6.34) и в случае изотропной и однородной среды:

$$\rho = \text{const}, \quad \boldsymbol{T} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\mathcal{S}} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{F} \approx \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{\nabla}_R \approx \boldsymbol{\nabla},$$
$$\tilde{\mathfrak{E}} \approx \mathfrak{E} = \frac{\lambda}{\rho}\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} + \frac{2\mu}{\rho}(\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I})^{(1324)}, \quad \tilde{\mathfrak{L}} \approx \mathfrak{L} = \frac{\alpha}{\rho}\boldsymbol{I},$$
$$\tilde{\mathfrak{D}} \approx \mathfrak{D} = \frac{\Lambda}{\rho}\boldsymbol{I}, \quad \tilde{\mathfrak{F}} \approx \mathfrak{F} = \frac{\varkappa}{\rho}\boldsymbol{I}, \quad \tilde{\mathfrak{K}} \approx \mathfrak{K} = \text{const}$$

принимают вид

$$\mu\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{\chi}' + (\lambda + \mu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\chi}' - \alpha\boldsymbol{\nabla}\theta' - \rho\ddot{\boldsymbol{\chi}}' = \mathbf{0},$$
$$\boldsymbol{\nabla}^2\theta' - \frac{\varkappa}{\Lambda}\ddot{\theta}' - \frac{\alpha}{\Lambda}\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\ddot{\boldsymbol{\chi}}' = 0,$$

совпадающий с точностью до переобозначений переменных с уравнениями теории второго звука (1.12)–(1.13).

Как уже было отмечено, этот факт служит своего рода "верификацией" формализма, основанного на выборе специализированного термодинамического базиса и условии нулевого внутреннего производства энтропии.

7. Дифференциальные операторы

Линейные уравнения (6.19)–(6.20), (6.33)–(6.34) при указании соответствующих краевых и начальных условий определяют линейные начально-краевые задачи, решение которых может быть найдено в форме спектральных разложений по системам собственных и присоединенных функций пучков дифференциальных операторов, порождаемых исследуемыми краевыми задачами [12, 23].

На множестве комплекснозначных 4-мерных вектор–функций, определенных в $\mathscr{B}$, введем гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ со скалярным произведением

$$\langle(\boldsymbol{\chi}_1, \theta_1), (\boldsymbol{\chi}_2, \theta_2)\rangle = \int_{\mathscr{B}} (\boldsymbol{\chi}_1\cdot\boldsymbol{\chi}_2 + \theta_1\theta_2)\, dV_0. \tag{7.1}$$

Система линейных уравнений (6.19)–(6.20) порождает пучок дифференциальных операторов $\mathcal{L}_\nu$ (ν — спектральный параметр пучка):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\nu(\boldsymbol{\chi}', \theta') &= \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nabla}_R\cdot\rho_0\mathfrak{E} : (\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}')^* - \nu^2\rho_0\boldsymbol{\chi}' & \boldsymbol{\nabla}_R\cdot\rho_0\mathfrak{L}\theta' \\ -\nu^2\rho_0\mathfrak{L} : (\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}')^* & \boldsymbol{\nabla}_R\cdot(\rho_0\mathfrak{D}\cdot\boldsymbol{\nabla}_R\theta') + \nu(\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\rho_0\mathfrak{K})\theta' - \nu^2\rho_0\mathfrak{F}\theta' \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{A} \vdots \boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}' + \mathbb{B} : \boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}' & \mathbb{D}\theta' + \mathbb{C}\cdot\boldsymbol{\nabla}_R\theta' \\ 0 & \mathbb{E} : \boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\nabla}_R\theta' + \mathbb{F}\cdot\boldsymbol{\nabla}_R\theta' \end{pmatrix} + \\ &\qquad + \nu\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{G}\theta' \end{pmatrix} - \nu^2\begin{pmatrix} \rho_0\boldsymbol{\chi}' & 0 \\ \mathbb{K} : \boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}' & \mathbb{H}\theta' \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{7.2}$$

Здесь введены следующие тензорные коэффициенты:

$$\mathbb{A} = \rho_0\mathfrak{E}^{(2143)}, \quad \mathbb{B} = \boldsymbol{\nabla}_R\cdot\rho_0\mathfrak{E}^{(1243)}, \quad \mathbb{C} = \rho_0\mathfrak{L}, \quad \mathbb{D} = \boldsymbol{\nabla}_R\cdot\rho_0\mathfrak{L}, \tag{7.3}$$
$$\mathbb{E} = \rho_0\mathfrak{D}, \quad \mathbb{F} = \boldsymbol{\nabla}_R\cdot\rho_0\mathfrak{D}, \quad \mathbb{G} = \boldsymbol{\nabla}_R\cdot\rho_0\mathfrak{K}, \quad \mathbb{H} = \rho_0\mathfrak{F}, \quad \mathbb{K} = \rho_0\mathfrak{L}^*. \tag{7.4}$$

Будем полагать, что область определения $\mathcal{D}$ операторного пучка $\mathcal{L}_\nu$ задается оператором краевых условий $\mathcal{B}$, явный вид которого будет определен далее.

Построим пучок дифференциальных операторов, сопряженный к (7.2), исходя из общего соотношения:

$$\forall(\boldsymbol{\chi}_1,\theta_1)\ \forall(\boldsymbol{\chi}_2,\theta_2)\ \left((\boldsymbol{\chi}_1,\theta_1)\in\mathcal{D}\wedge(\boldsymbol{\chi}_2,\theta_2)\in\mathcal{D}^*_\lambda\right)\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\left\langle\mathcal{L}(\boldsymbol{\chi}_1,\theta_1),(\boldsymbol{\chi}_2,\theta_2)\right\rangle=\left\langle(\boldsymbol{\chi}_1,\theta_1),\mathcal{L}^*(\boldsymbol{\chi}_2,\theta_2)\right\rangle. \quad (7.5)$$

Для построения сопряженного оператора в явном виде воспользуемся следующими соотношениями, вытекающими из теоремы о дивергенции:

$$\int\limits_{\mathscr{B}}(\boldsymbol{\nabla}_R\cdot[\rho_0\mathfrak{E}:(\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}_1)^*])\cdot\boldsymbol{\chi}_2\,dV_0= \\ =\oint\limits_{\partial\mathscr{B}}\boldsymbol{n}_0\cdot\left\{(\rho_0\mathfrak{E}:(\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}_1)^*)\cdot\boldsymbol{\chi}_2-\boldsymbol{\chi}_1\cdot\rho_0\mathfrak{E}^{(4321)}:(\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}_2)^*\right\}dA_0+ \\ +\int\limits_{\mathscr{B}}\boldsymbol{\chi}_1\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\left[\rho_0\mathfrak{E}^{(4321)}:(\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}_2)^*\right]\right)\cdot\boldsymbol{\chi}_2\,dV_0, \quad (7.6)$$

$$\int\limits_{\mathscr{B}}(\boldsymbol{\nabla}_R\cdot(\rho_0\mathfrak{L}\theta_1))\cdot\boldsymbol{\chi}_2\,dV_0=\oint\limits_{\partial\mathscr{B}}\boldsymbol{n}_0\cdot\rho_0\mathfrak{L}\theta_1\cdot\boldsymbol{\chi}_2\,dA_0-\int\limits_{\mathscr{B}}\rho_0\mathfrak{L}^*\theta_1:\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}_2\,dV_0, \quad (7.7)$$

$$\int\limits_{\mathscr{B}}(\boldsymbol{\nabla}_R\cdot(\rho_0\mathfrak{D}\cdot\boldsymbol{\nabla}_R\theta_1))\,\theta_2\,dV_0=\oint\limits_{\partial\mathscr{B}}\boldsymbol{n}_0\cdot\{\rho_0\mathfrak{D}\cdot(\boldsymbol{\nabla}_R\theta_1)\theta_2-\rho_0\mathfrak{D}^*\theta_1\cdot\boldsymbol{\nabla}_R\theta_2\}\,dA_0+ \\ +\int\limits_{\mathscr{B}}\theta_1\boldsymbol{\nabla}_R\cdot(\rho_0\mathfrak{D}^*\cdot\boldsymbol{\nabla}_R\theta_2)\,dV_0, \quad (7.8)$$

$$\int\limits_{\mathscr{B}}\rho_0\mathfrak{L}:(\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}_1)^*\theta_2\,dV_0=\oint\limits_{\partial\mathscr{B}}\boldsymbol{n}_0\cdot\rho_0\mathfrak{L}^*\cdot\boldsymbol{\chi}_1\theta_2\,dA_0-\int\limits_{\mathscr{B}}\boldsymbol{\chi}_1\boldsymbol{\nabla}_R\cdot(\rho_0\mathfrak{L}^*\theta_2)\,dV_0. \quad (7.9)$$

Трансформируя левую часть равенства (7.5)

$$\left\langle\mathcal{L}(\boldsymbol{\chi}_1,\theta_1),(\boldsymbol{\chi}_2,\theta_2)\right\rangle=\left\langle(\boldsymbol{\chi}_1,\theta_1),\mathcal{L}^*(\boldsymbol{\chi}_2,\theta_2)\right\rangle+[(\boldsymbol{\chi}_1,\theta_1),(\boldsymbol{\chi}_2,\theta_2)], \quad (7.10)$$

с учетом соотношений (7.6)–(7.9) приходим к явному выражению для дифференциального выражения операторного пучка $\mathcal{L}^*$:

$$\mathcal{L}^*_\nu(\boldsymbol{\chi}',\theta')= \\ =\begin{pmatrix}\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\rho_0\mathfrak{E}^{(4321)}:(\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}')^*-\nu^2\rho_0\boldsymbol{\chi}' & -\nu^2\boldsymbol{\nabla}_R\cdot(\rho_0\mathfrak{L}^*\theta') \\ \rho_0\mathfrak{L}^*:(\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}')^* & \boldsymbol{\nabla}_R\cdot(\rho_0\mathfrak{D}^*\cdot\boldsymbol{\nabla}_R\theta')+\nu(\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\rho_0\mathfrak{K})\theta'-\nu^2\rho_0\mathfrak{F}\theta'\end{pmatrix}= \\ =\begin{pmatrix}\mathbb{A}^*\,\vdots\,\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}'+\mathbb{B}^*:\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}' & \mathbb{C}^*\cdot\boldsymbol{\nabla}_R\theta' \\ \mathbb{K}:\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}' & \mathbb{E}^*:\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\nabla}_R\theta'+\mathbb{F}\cdot\boldsymbol{\nabla}_R\theta'\end{pmatrix}+ \\ +\nu\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathbb{G}\theta'\end{pmatrix}-\nu^2\begin{pmatrix}\rho_0\boldsymbol{\chi}' & \mathbb{D}\theta'\\ 0 & \mathbb{H}\theta'\end{pmatrix}. \quad (7.11)$$

Здесь

$$\mathbb{A}^*=\rho_0\mathfrak{E}^{(3412)},\quad \mathbb{B}^*=\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\rho_0\mathfrak{E}^{(3421)},\quad \mathbb{C}^*=\rho_0\mathfrak{L}^*,\quad \mathbb{E}^*=\rho_0\mathfrak{D}^*. \quad (7.12)$$

Последнее слагаемое в правой части равенства (7.10) определяется поверхностными интегралами, заданными на границе области $\partial\mathscr{B}$ (по терминологии [23] —

внеинтегральные слагаемые)

$$[(\boldsymbol{\chi}_1,\theta_1),(\boldsymbol{\chi}_2,\theta_2)]_{\partial\mathscr{B}} = \oint\limits_{\partial\mathscr{B}} \rho_0 \boldsymbol{n}_0\cdot\Big\{(\mathfrak{E}:(\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}_1)^*)\cdot\boldsymbol{\chi}_2 - \boldsymbol{\chi}_1\cdot\mathfrak{E}^{(4321)}:(\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}_2)^* + \\ + \mathfrak{L}\theta_1\cdot\boldsymbol{\chi}_2 + \mathfrak{D}\cdot(\boldsymbol{\nabla}_R\theta_1)\theta_2 - \mathfrak{D}^*\theta_1\cdot\boldsymbol{\nabla}_R\theta_2 + \mathfrak{L}^*\cdot\boldsymbol{\chi}_1\theta_2\Big\}\, dA_0. \quad (7.13)$$

Согласно (7.5), сопряженный операторный пучок определяется дифференциальным выражением (7.11) и краевыми условиями, обеспечивающими обращение в нуль соотношений (7.13), причем этим краевым условиям должна соответствовать наиболее широкая область определения $\mathcal{D}^*$, что и определяет сопряженные операторы краевых условий [12].

Система уравнений, соответствующих пространственному описанию, порождает пучок дифференциальных операторов

$$\mathcal{L}_\nu(\boldsymbol{\chi}',\theta') = \\ = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\chi}')^*\cdot\boldsymbol{T} - (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\chi}')\,\boldsymbol{T} + \rho\tilde{\mathfrak{E}}:(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\chi}')^*\right] - \nu^2\rho\boldsymbol{\chi}' & \dots \\ \nu\boldsymbol{\nabla}\cdot[(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\chi}')\,\boldsymbol{\mathcal{S}} - (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\chi}')^*\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}}] - \nu^2\rho\tilde{\mathfrak{L}}:(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\chi}')^* & \dots \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dots & \boldsymbol{\nabla}\cdot\rho\tilde{\mathfrak{L}}\theta' \\ \dots & \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\rho\tilde{\mathfrak{D}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta'\right) + \nu\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\rho\tilde{\mathfrak{K}}\right)\theta' - \nu^2\rho_0\mathfrak{F}\theta' \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \mathbb{A}\,\vdots\,\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\chi}' + \mathbb{B}:\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\chi}' & \mathbb{D}\theta' + \mathbb{C}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta' \\ 0 & \mathbb{E}:\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\theta' + \mathbb{F}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta' \end{pmatrix} + \\ + \nu\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{G}\theta' \end{pmatrix} - \nu^2\begin{pmatrix} \rho_0\boldsymbol{\chi}' & 0 \\ \mathbb{K}:\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\chi}' & \mathbb{H}\theta' \end{pmatrix}. \quad (7.14)$$

Здесь

$$\mathbb{A} = \rho\tilde{\mathfrak{E}}^{(2143)}, \quad \mathbb{B} = \boldsymbol{\nabla}_R\cdot\rho_0\mathfrak{E}^{(1243)}, \quad \mathbb{C} = \rho_0\mathfrak{L}, \quad \mathbb{D} = \boldsymbol{\nabla}_R\cdot\rho_0\mathfrak{L}, \\ \mathbb{E} = \rho_0\mathfrak{D}, \quad \mathbb{F} = \boldsymbol{\nabla}_R\cdot\rho_0\mathfrak{D}, \quad \mathbb{G} = \boldsymbol{\nabla}_R\cdot\rho_0\mathfrak{K}, \quad \mathbb{H} = \rho_0\mathfrak{F}, \quad \mathbb{K} = \rho_0\mathfrak{L}^*.$$

Структура соответствующего сопряженного пучка аналогична (7.11).

8. Модель типа Синьорини

В настоящем разделе рассматривается формулировка наиболее простого варианта нелинейных уравнений, из которых в частном случае отсутствия тепловых потоков вытекают известные уравнения движения гиперупругой среды типа Синьорини. Эту формулировку следует рассматривать как наиболее простой ”тестовый пример” нелинейных дифференциальных уравнений, порождаемых теорией бездиссипативной термоупругости.

Для изотропной и однородной среды свободная энергия является функцией главных инвариантов тензора деформации Альманси

$$\boldsymbol{g} = (\boldsymbol{F}^*)^{-1}\cdot\boldsymbol{F}^{-1} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u})^* + (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u})^*,$$

нормы градиента температурного смещения и температуры, т.е.

$$\psi = \psi(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5),$$

где

$$I_1 = I_1(\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{I}:\boldsymbol{g}, \quad I_2 = I_2(\boldsymbol{g}) = \frac{1}{2}\Big((\boldsymbol{I}:\boldsymbol{g})^2 - \boldsymbol{I}:(\boldsymbol{g}^2)\Big),$$
$$I_3 = I_3(\boldsymbol{g}) = \frac{1}{3}\boldsymbol{I}:\Big(\boldsymbol{g}^3 - I_1\boldsymbol{g}^2 + I_2\boldsymbol{g}\Big),$$
$$I_4 = I_4(\underset{\cdot}{\boldsymbol{\nabla}}\theta) = (\underset{\cdot}{\boldsymbol{\nabla}}\theta\cdot\underset{\cdot}{\boldsymbol{\nabla}}\theta)^{\frac{1}{2}}, \quad I_5 = \theta.$$

Вычисляя соответствующие производные

$$\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{g}} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial\psi}{\partial I_2} + I_2\frac{\partial\psi}{\partial I_3}\right)\boldsymbol{I} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial I_2} + I_1\frac{\partial\psi}{\partial I_3}\right)\boldsymbol{g} + \frac{\partial\psi}{\partial I_3}\boldsymbol{g}^2,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial(\underset{\cdot}{\boldsymbol{\nabla}}\theta)} = \frac{1}{I_4}\frac{\partial\psi}{\partial I_4}\underset{\cdot}{\boldsymbol{\nabla}}\theta, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\partial\psi}{\partial I_4},$$

найдем выражение для тензора напряжений Коши

$$\boldsymbol{T} = J^{-1}\boldsymbol{F}\cdot\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{F}} = -2\rho\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{g}}\cdot\boldsymbol{g} = -2\rho\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial\psi}{\partial I_2}\right)\boldsymbol{g} - \frac{\partial\psi}{\partial I_2}\boldsymbol{g}^2 + \frac{\partial\psi}{\partial I_3}\Big(\boldsymbol{g}^3 - I_1\boldsymbol{g}^2 + I_2\boldsymbol{g}\Big)\right],$$

причем в силу теоремы Кэли–Гамильтона

$$\boldsymbol{g}^3 - I_1\boldsymbol{g}^2 + I_2\boldsymbol{g} = I_3\boldsymbol{I}$$

это выражение может быть преобразовано к виду:

$$\boldsymbol{T} = -2\rho\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial\psi}{\partial I_2}\right)\boldsymbol{g} - \frac{\partial\psi}{\partial I_2}\boldsymbol{g}^2 + \frac{\partial\psi}{\partial I_3}I_3\boldsymbol{I}\right].$$

Поток энтропии в пространственном описании определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = J^{-1}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}_R} = J^{-1}\boldsymbol{F}\cdot\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial(\underset{\cdot}{\boldsymbol{\nabla}}_R\theta)} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial(\underset{\cdot}{\boldsymbol{\nabla}}\theta)} = \rho\frac{1}{I_4}\frac{\partial\psi}{\partial I_4}\underset{\cdot}{\boldsymbol{\nabla}}\theta,$$

а энтропия в пространственном описании выражением:

$$\eta = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\psi}{\partial I_5}.$$

Рассмотрим аппроксимацию свободной энергии, согласованной с соответствующей аппроксимацией в гиперупругой среде типа Синьорини:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{I_3}}\Big(m_0 + m_1I_1 + m_2I_2 + m_{11}I_1^2 + m_{44}I_4^2 + m_{55}I_5^2 + m_{15}I_1I_5). \tag{8.1}$$

При этом тензор напряжений Коши может быть сформулирован в виде

$$\boldsymbol{T} = \rho_0\Big[\Big(m_0 + m_1I_1 + m_2I_2 + \\ + m_{11}I_1^2 + m_{44}I_4^2 + m_{55}I_5^2 + m_{15}I_1I_5)\boldsymbol{I} - \\ - (m_1 + (m_2 + 2m_{11})I_1 + m_{15}I_5)\,\boldsymbol{g} + m_2\boldsymbol{g}^2\Big].$$

Следующие соотношения определяют поток энтропии

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = 2m_{44}\rho_0\underset{\cdot}{\boldsymbol{\nabla}}\theta$$

и ее плотность в пространственном описании

$$\eta = -2m_{55}I_5 - m_{15}I_1.$$

Вычисляя явное выражение для квадрата тензора деформации Альманси

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{g}^2 = \boldsymbol{I} - 2\nabla\boldsymbol{u} - 2\,(\nabla\boldsymbol{u})^* + 3\,(\nabla\boldsymbol{u})\cdot(\nabla\boldsymbol{u})^* + (\nabla\boldsymbol{u})^*\cdot(\nabla\boldsymbol{u}) + \\
+ (\nabla\boldsymbol{u})\cdot(\nabla\boldsymbol{u}) + (\nabla\boldsymbol{u})^*\cdot(\nabla\boldsymbol{u})^* - (\nabla\boldsymbol{u})\cdot(\nabla\boldsymbol{u})^*\cdot(\nabla\boldsymbol{u}) - \\
- (\nabla\boldsymbol{u})\cdot(\nabla\boldsymbol{u})^*\cdot(\nabla\boldsymbol{u})^* - (\nabla\boldsymbol{u})\cdot(\nabla\boldsymbol{u})\cdot(\nabla\boldsymbol{u})^* - (\nabla\boldsymbol{u})^*\cdot(\nabla\boldsymbol{u})\cdot(\nabla\boldsymbol{u})^* + \\
+ (\nabla\boldsymbol{u})\cdot(\nabla\boldsymbol{u})^*\cdot(\nabla\boldsymbol{u})\cdot(\nabla\boldsymbol{u})^*
\end{aligned}
$$

и явное выражение для инвариантов

$$
I_1 = 3 - 2\nabla\cdot\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u}):(\nabla\boldsymbol{u}),
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 = \frac{1}{2}\Big\{6 + 4\,(\nabla\cdot\boldsymbol{u})^2 + (\nabla\boldsymbol{u}:\nabla\boldsymbol{u})^2 - 8\nabla\cdot\boldsymbol{u} + 2\nabla\boldsymbol{u}:\nabla\boldsymbol{u} - \\
- 4\,(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\,(\nabla\boldsymbol{u}:\nabla\boldsymbol{u}) - 2\nabla\boldsymbol{u}:(\nabla\boldsymbol{u})^* + \\
+ 2\boldsymbol{I}:\big[\nabla\boldsymbol{u}\cdot((\nabla\boldsymbol{u})^*\cdot(\nabla\boldsymbol{u}) + (\nabla\boldsymbol{u})\cdot(\nabla\boldsymbol{u})^*) + (\nabla\boldsymbol{u})\cdot(\nabla\boldsymbol{u})^*:(\nabla\boldsymbol{u})\cdot(\nabla\boldsymbol{u})^*\big]\Big\},
\end{aligned}
$$

приходим к следующим нелинейным уравнениям движения и недиссипативной теплопроводности (выписаны только слагаемые первого и второго порядков):

$$
\begin{aligned}
a\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{u} + b\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u} - c\nabla\theta + d\nabla\underset{\cdot}{\theta} + (\nabla\nabla\boldsymbol{u}):(e(\nabla\boldsymbol{u}) + f(\nabla\boldsymbol{u})^*) + \\
+ (\nabla\cdot\boldsymbol{u})\,(g\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u} + h\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{u}) + (\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u})\cdot(j\nabla\boldsymbol{u} + k(\nabla\boldsymbol{u})^*) + \\
+ \nabla\cdot\big[l(\nabla\boldsymbol{u})\cdot(\nabla\boldsymbol{u}) + m(\nabla\boldsymbol{u})^*\cdot(\nabla\boldsymbol{u}) + n(\nabla\boldsymbol{u})\cdot(\nabla\boldsymbol{u})^* + o(\nabla\boldsymbol{u})^*\cdot(\nabla\boldsymbol{u})^*\big] + \\
+ p\theta\nabla\theta + q\theta\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u} + s(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\nabla\theta - \\
- \rho\frac{\partial^2\boldsymbol{\chi}}{\partial t^2} - \rho\left(\frac{\partial\boldsymbol{\chi}}{\partial t}\right)\cdot\nabla\frac{\partial\boldsymbol{\chi}}{\partial t} + \rho\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0},
\end{aligned}
\tag{8.2}
$$

$$
t\nabla\cdot\nabla\theta + u\ddot{\theta} + v\nabla\cdot\ddot{\boldsymbol{u}} + w\,(\nabla\dot{\boldsymbol{u}}):(\nabla\boldsymbol{u}) = 0,
\tag{8.3}
$$

где $a, b, \ldots, w$ — постоянные коэффициенты (явный их вид ввиду громоздкости не приводится), представляющие собой алгебраические комбинации констант, определяющих потенциал (8.1).

9. Интеграл действия

Для недиссипативной термоупругой среды типа Грина–Нахди интеграл действия $\mathscr{J}$ может быть записан в виде:

$$
\mathscr{J} = \int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathscr{B}} \mathscr{L}\, dV_R dt, \qquad \mathscr{L} = \mathscr{L}\Big(\boldsymbol{X}, t, \boldsymbol{\chi}, \dot{\boldsymbol{\chi}}, \nabla_R\boldsymbol{\chi}, \underset{\cdot}{\theta}, \dot{\underset{\cdot}{\theta}}, \nabla_R\underset{\cdot}{\theta}\Big),
\tag{9.1}
$$

где интегрирование осуществляется по произвольному интервалу времени t_1, t_2 и произвольной отсчетной области $\mathscr{B}$.

Согласно теореме Нетер [24], если интеграл действия является инфинитезимальным инвариантом некоторой непрерывной группы преобразований $\mathfrak{G}$, (группы Ли, [24]), то существует закон сохранения соответствующей полевой величины. Таким образом, для формулировки законов сохранения достаточно указать группы инвариантности интеграла действия.

Преобразование координат и полей, являющихся аргументами плотности лагранжиана (9.1), которые вызваны действием элемента группы $g(\varepsilon) \in \mathfrak{G}$, в общем случае могут быть представлены в виде

$$\left\{\boldsymbol{X}, t, \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X}, t), \underset{\cdot}{\theta}(\boldsymbol{X}, t)\right\} \mapsto g(\varepsilon) \circ \left\{\boldsymbol{X}, t, \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X}, t), \underset{\cdot}{\theta}(\boldsymbol{X}, t)\right\} = \\ = \left\{\tilde{\boldsymbol{X}}(\varepsilon), \tilde{t}(\varepsilon), \tilde{\boldsymbol{\chi}}(\tilde{\boldsymbol{X}}(\varepsilon), \tilde{t}(\varepsilon); \varepsilon), \underset{\cdot}{\tilde{\theta}}(\tilde{\boldsymbol{X}}(\varepsilon), \tilde{t}(\varepsilon); \varepsilon)\right\}, \quad (9.2)$$

причем групповые свойства преобразования задаются соотношениями

$$g(0) \circ \boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{X}, \ldots\}, \quad g(\varepsilon) \circ g(\mu) \circ \{\boldsymbol{X}, \ldots\} = g(\varepsilon + \mu) \circ \{\boldsymbol{X}, \ldots\}. \quad (9.3)$$

Здесь ε — параметр группы $\mathfrak{G}$.

Преобразование интеграла действия $\mathscr{J}$, вызванное преобразованиями координат и полей, может быть записано следующим образом:

$$\tilde{\mathscr{J}}(\varepsilon) = \int\limits_{\tilde{t}_1(\varepsilon)}^{\tilde{t}_2(\varepsilon)} \int\limits_{\tilde{\mathscr{B}}(\varepsilon)} \mathscr{L}\left(\tilde{\boldsymbol{X}}(\varepsilon), \tilde{t}(\varepsilon), \tilde{\boldsymbol{\chi}}(\tilde{\boldsymbol{X}}(\varepsilon), \tilde{t}(\varepsilon); \varepsilon), \ldots\right) d\tilde{V}_R(\varepsilon) d\tilde{t}(\varepsilon). \quad (9.4)$$

Соответствующие вариации пространственных и временны́х координат имеют вид

$$\delta \boldsymbol{X} = \left.\frac{d\tilde{\boldsymbol{X}}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon = \left.\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{X}}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon, \quad \delta t = \left.\frac{d\tilde{t}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon = \left.\frac{\partial\tilde{t}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon. \quad (9.5)$$

Полные вариации полей мест и температурного смещения выражаются через частичные вариации следующим образом [25]:

$$\delta\boldsymbol{\chi} = \left.\frac{d\tilde{\boldsymbol{\chi}}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon = \left[\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{\chi}}}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\tilde{\boldsymbol{X}}}{\partial\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\nabla}_R \boldsymbol{\chi} + \frac{\partial\tilde{t}}{\partial\varepsilon}\dot{\boldsymbol{\chi}}\right]_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon = \\ = \bar{\delta}\boldsymbol{\chi} + \delta\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{\nabla}_R \boldsymbol{\chi} + \delta t\, \dot{\boldsymbol{\chi}}, \quad (9.6)$$

$$\delta\underset{\cdot}{\theta} = \left.\frac{d\underset{\cdot}{\tilde{\theta}}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon = \left[\frac{\partial\underset{\cdot}{\tilde{\theta}}}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\tilde{\boldsymbol{X}}}{\partial\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\nabla}_R \underset{\cdot}{\theta} + \frac{\partial\tilde{t}}{\partial\varepsilon}\dot{\underset{\cdot}{\theta}}\right]_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon = \\ = \bar{\delta}\underset{\cdot}{\theta} + \delta\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{\nabla}_R \underset{\cdot}{\theta} + \delta t\, \dot{\underset{\cdot}{\theta}}. \quad (9.7)$$

Здесь символом вариации с чертой обозначаются частичные вариации:

$$\bar{\delta}\boldsymbol{\chi} = \left[\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{\chi}}(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon, \qquad \bar{\delta}\underset{\cdot}{\theta} = \left[\frac{\partial\underset{\cdot}{\tilde{\theta}}(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon. \quad (9.8)$$

Выражение для вариации интеграла действия (учитывающее, что при варьировании изменяется область интегрирования $\tilde{\mathscr{B}}(\varepsilon)$, [25, с. 173] может быть записано в форме:

$$\delta\mathscr{J} = \left[\frac{d\tilde{\mathscr{J}}}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon = \left[\int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{V} \left(\frac{d\tilde{\mathscr{L}}}{d\varepsilon} + \mathscr{L}\boldsymbol{\nabla}_R \cdot \frac{\partial\tilde{\boldsymbol{X}}}{\partial\varepsilon} + \mathscr{L}\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{t}}{\partial\varepsilon}\right) dV\, dt\right]_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon = \\ = \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{V} \left(\delta\mathscr{L} + \mathscr{L}\boldsymbol{\nabla}_R \cdot \delta\boldsymbol{X} + \mathscr{L}\frac{d}{dt}\delta t\right) dV\, dt, \quad (9.9)$$

где $\delta\mathscr{L}$ — вариация плотности лагранжиана, вычисляемая согласно цепному правилу дифференцирования по формуле:

$$
\begin{aligned}
\delta\mathscr{L} &= \left[\frac{d\tilde{\mathscr{L}}}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}\delta\varepsilon = \\
&= \Bigg[\nabla_R\mathscr{L}\cdot\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{X}}}{\partial\varepsilon} + \frac{d\mathscr{L}}{dt}\frac{\partial\tilde{t}}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\chi}}\cdot\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{\chi}}}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\nabla_R\boldsymbol{\chi}}:\frac{\partial\nabla_R\tilde{\boldsymbol{\chi}}}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{\chi}}}\cdot\frac{\partial\dot{\tilde{\boldsymbol{\chi}}}}{\partial\varepsilon} + \\
&\quad + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{\cdot}{\theta}}\cdot\frac{\partial\tilde{\underset{\cdot}{\theta}}}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\nabla_R\underset{\cdot}{\theta}}:\frac{\partial\nabla_R\tilde{\underset{\cdot}{\theta}}}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\underset{\cdot}{\theta}}}\cdot\frac{\partial\dot{\tilde{\underset{\cdot}{\theta}}}}{\partial\varepsilon}\Bigg]_{\varepsilon=0}\delta\varepsilon = \qquad (9.10)\\
&= \nabla_R\mathscr{L}\cdot\delta\boldsymbol{X} + \frac{d\mathscr{L}}{dt}\delta t + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\chi}}\cdot\delta\boldsymbol{\chi} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\nabla_R\boldsymbol{\chi}}:\delta\nabla_R\boldsymbol{\chi} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{\chi}}}\cdot\delta\dot{\boldsymbol{\chi}} + \\
&\quad + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{\cdot}{\theta}}\cdot\delta\underset{\cdot}{\theta} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\nabla_R\underset{\cdot}{\theta}}\cdot\delta\nabla_R\underset{\cdot}{\theta} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\underset{\cdot}{\theta}}}\delta\dot{\underset{\cdot}{\theta}}.
\end{aligned}
$$

Для получения законов сохранения из условия инвариантности интеграла действия, запишем две специальных формы для его вариации. Первая из них вытекает из соотношения, которое может быть получено в результате подстановки (9.10) в правую часть равенства (9.9) с последующей перегруппировкой членов:

$$
\begin{aligned}
\delta\mathscr{J} = \int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathscr{B}} &\Bigg\{\nabla_R\cdot\left(\mathscr{L}\delta\boldsymbol{X} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\nabla_R\boldsymbol{\chi}}\cdot\delta\boldsymbol{\chi} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\nabla_R\underset{\cdot}{\theta}}\delta\underset{\cdot}{\theta}\right) + \\
&+ \frac{d}{dt}\left(\mathscr{L}\delta t + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{\chi}}}\delta\boldsymbol{\chi} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\underset{\cdot}{\theta}}}\delta\underset{\cdot}{\theta}\right) + \\
&+ \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\chi}} - \nabla_R\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\nabla_R\boldsymbol{\chi}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{\chi}}}\right)\cdot\left(\delta\boldsymbol{\chi} - \delta\boldsymbol{X}\cdot\nabla_R\boldsymbol{\chi} - \delta t\frac{d}{dt}\boldsymbol{\chi}\right) + \qquad (9.11)\\
&+ \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{\cdot}{\theta}} - \nabla_R\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\nabla_R\underset{\cdot}{\theta}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\underset{\cdot}{\theta}}}\right)\left(\delta\underset{\cdot}{\theta} - \delta\boldsymbol{X}\cdot\nabla_R\underset{\cdot}{\theta} - \delta t\frac{d}{dt}\underset{\cdot}{\theta}\right)\Bigg\}\,dV_R dt.
\end{aligned}
$$

С учетом выражений для частичных вариаций полей мест и температурного смещения

$$
\bar{\delta}\boldsymbol{\chi} = \delta\boldsymbol{\chi} - \delta\boldsymbol{X}\cdot\nabla_R\boldsymbol{\chi} - \delta t\frac{d}{dt}\boldsymbol{\chi}, \quad \bar{\delta}\underset{\cdot}{\theta} = \delta\underset{\cdot}{\theta} - \delta\boldsymbol{X}\cdot\nabla_R\underset{\cdot}{\theta} - \delta t\frac{d}{dt}\underset{\cdot}{\theta}, \qquad (9.12)
$$

а также обозначений для компонент тока Нетер[8]

$$
\delta\boldsymbol{J}_1 = \mathscr{L}\delta\boldsymbol{X} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\nabla_R\boldsymbol{\chi}}\cdot\delta\boldsymbol{\chi} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\nabla_R\underset{\cdot}{\theta}}\delta\underset{\cdot}{\theta}, \qquad (9.13)
$$

$$
\delta\boldsymbol{J}_2 = \mathscr{L}\delta t + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{\chi}}}\delta\boldsymbol{\chi} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\underset{\cdot}{\theta}}}\delta\underset{\cdot}{\theta} \qquad (9.14)
$$

и операторов Эйлера–Лагранжа

$$
\mathscr{E}_{\boldsymbol{\chi}} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\chi}} - \nabla_R\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\nabla_R\boldsymbol{\chi}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{\chi}}}, \qquad \mathscr{E}_{\vartheta} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{\cdot}{\theta}} - \nabla_R\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\nabla_R\underset{\cdot}{\theta}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\underset{\cdot}{\theta}}} \qquad (9.15)
$$

---

[8]Более естественно вводить ток Нетер как поток в 4-мерном пространстве Минковского [28,29]. При этом вектор (9.13) определяет пространственную часть 4–вектора тока Нетер, а (9.14) — его временну́ю часть.

выражение для вариации интеграла действия (9.11) принимает вид:

$$\delta\mathscr{J} = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\mathscr{B}} \left\{ \boldsymbol{\nabla}_R \cdot \delta \boldsymbol{J}_1 + \frac{d}{dt}\delta \boldsymbol{J}_2 + \mathscr{E}_{\boldsymbol{\chi}} \cdot \bar{\delta}\boldsymbol{\chi} + \mathscr{E}_{\vartheta}\bar{\delta}\underset{\cdot}{\theta} \right\} dV_R dt. \tag{9.16}$$

Для получения второй формы вариации интеграла действия вычислим градиент лагранжевой плотности

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}_R\mathscr{L} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\chi}} + \boldsymbol{\nabla}_R\dot{\boldsymbol{\chi}}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{\chi}}} + \boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi} : \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}} + \\ + \boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{\cdot}{\theta}} + \boldsymbol{\nabla}_R\dot{\underset{\cdot}{\theta}}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\underset{\cdot}{\theta}}} + \boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta}}, \end{aligned} \tag{9.17}$$

$$\frac{d\mathscr{L}}{dt} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t} + \dot{\boldsymbol{\chi}}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\chi}} + \ddot{\boldsymbol{\chi}}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{\chi}}} + \boldsymbol{\nabla}_R\dot{\boldsymbol{\chi}} : \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}} + \dot{\underset{\cdot}{\theta}}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{\cdot}{\theta}} + \ddot{\underset{\cdot}{\theta}}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\underset{\cdot}{\theta}}} + \boldsymbol{\nabla}_R\dot{\underset{\cdot}{\theta}}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta}}, \tag{9.18}$$

и, используя коммутационные соотношения

$$\delta\boldsymbol{\nabla\chi} = \boldsymbol{\nabla}\delta\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{X}\cdot\boldsymbol{\nabla\chi} - \boldsymbol{\nabla}\delta t\otimes\dot{\boldsymbol{\chi}}, \qquad \delta\boldsymbol{\nabla}\underset{\cdot}{\theta} = \boldsymbol{\nabla}\delta\underset{\cdot}{\theta} - \boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{X}\cdot\boldsymbol{\nabla}\underset{\cdot}{\theta} - \boldsymbol{\nabla}\delta t\dot{\underset{\cdot}{\theta}},$$

$$\delta\frac{d\boldsymbol{\chi}}{dt} = \frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{\chi} - \dot{\boldsymbol{\chi}}\frac{d}{dt}\delta\tilde{t} - \frac{d}{dt}\delta\mathbf{X}\cdot\boldsymbol{\nabla\chi}, \qquad \delta\frac{d\underset{\cdot}{\theta}}{dt} = \frac{d}{dt}\delta\underset{\cdot}{\theta} - \dot{\underset{\cdot}{\theta}}\frac{d}{dt}\delta t - \frac{d}{dt}\delta\mathbf{X}\cdot\boldsymbol{\nabla}\underset{\cdot}{\theta},$$

приходим к равенству (более подробно см. [28])

$$\begin{aligned} \delta\mathscr{J} = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\mathscr{B}} \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{X}}\cdot\delta\boldsymbol{X} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}\delta t + \left(\mathscr{L}\boldsymbol{I} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi})^* - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta}}\otimes\boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta}\right) : \boldsymbol{\nabla}_R\delta\boldsymbol{X} + \\ + \left(\mathscr{L} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{\chi}}}\cdot\dot{\boldsymbol{\chi}} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\underset{\cdot}{\theta}}}\dot{\underset{\cdot}{\theta}}\right)\frac{d}{dt}\delta t + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\chi}}\cdot\delta\boldsymbol{\chi} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{\chi}}}\cdot\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{\chi} - \\ - \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{\chi}}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi})^* + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\underset{\cdot}{\theta}}}\boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta}\right)\cdot\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{X} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}} : \boldsymbol{\nabla}_R\delta\boldsymbol{\chi} - \\ - \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}}\cdot\dot{\boldsymbol{\chi}} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta}}\dot{\underset{\cdot}{\theta}}\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}_R\delta t + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{\cdot}{\theta}}\delta\underset{\cdot}{\theta} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\underset{\cdot}{\theta}}}\frac{d}{dt}\delta\underset{\cdot}{\theta} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta}}\cdot\boldsymbol{\nabla}_R\delta\underset{\cdot}{\theta}\, dV_R dt. \end{aligned} \tag{9.19}$$

Соотношение (9.19) принимает более информативный вид, если ввести обозначения полей, соответствующих класическим полям механики сплошных сред. Именно ведем обозначение $\boldsymbol{B}$ для тензора напряжений Эшелби

$$\boldsymbol{B} = \mathscr{L}\boldsymbol{I} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi})^* - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta}}\otimes\boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta}, \tag{9.20}$$

$\mathscr{H}$ для плотности гамильтониана

$$\mathscr{H} = \mathscr{L} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{\chi}}}\cdot\dot{\boldsymbol{\chi}} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\underset{\cdot}{\theta}}}\dot{\underset{\cdot}{\theta}} = \mathscr{L} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{\chi}}}\cdot\boldsymbol{v} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\theta}\theta, \tag{9.21}$$

$\boldsymbol{U}$ для вектора потока энергии (вектора Умова—Пойнтинга)

$$\boldsymbol{U} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}}\cdot\dot{\boldsymbol{\chi}} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta}}\dot{\underset{\cdot}{\theta}} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}}\cdot\boldsymbol{v} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta}}\theta, \tag{9.22}$$

$\boldsymbol{K}$ для плотности канонического импульса

$$\boldsymbol{K} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{\chi}}} \cdot (\boldsymbol{\nabla}_R \boldsymbol{\chi})^* + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\theta}} \boldsymbol{\nabla}_R \theta = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{\chi}}} \cdot (\boldsymbol{\nabla}_R \boldsymbol{\chi})^* + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta} \boldsymbol{\nabla}_R \theta, \tag{9.23}$$

$\boldsymbol{p}$ для плотности физического импульса

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{\chi}}}, \tag{9.24}$$

$\boldsymbol{P}$ для тензора напряжений Пиола–Кирхгофа

$$\boldsymbol{P} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\nabla}_R \boldsymbol{\chi}}, \tag{9.25}$$

η для плотности энтропии

$$\eta = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta}, \tag{9.26}$$

и, наконец, $\boldsymbol{\mathcal{S}_R}$ для потока энтропии

$$\boldsymbol{\mathcal{S}_R} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\nabla}_R \theta}. \tag{9.27}$$

В обозначениях (9.20)–(9.27) вторая форма вариации интеграла действия (9.19) принимает вид:

$$\begin{aligned} \delta \mathscr{J} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_V \Bigg(& \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{X}} \cdot \delta \boldsymbol{X} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t} \delta t + \boldsymbol{B} : \boldsymbol{\nabla}_R \delta \boldsymbol{X} + \\ & + \mathscr{H} \frac{d}{dt} \delta t + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \cdot \delta \boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{p} \cdot \frac{d}{dt} \delta \boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{K} \cdot \frac{d}{dt} \delta \boldsymbol{X} + \\ & + \boldsymbol{P} : \boldsymbol{\nabla}_R \delta \boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{\nabla}_R \delta t + \\ & + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta} \delta \theta + \eta \frac{d}{dt} \delta \theta + \boldsymbol{\mathcal{S}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_R \delta \theta \Bigg) dV dt. \end{aligned} \tag{9.28}$$

Отметим, что в выражение (9.28) в качестве множителей входят полные вариации координат и полей, а также их градиенты. В этой связи форма представления (9.28) оказывается наиболее удобной для получения законов сохранения, соответствующих заданной группе преобразований.

10. Уравнения поля

Если варьированию подвергаются только физические поля внутри области V (на границе поля закреплены), то интеграл от дивергенции тока Нетер исчезает:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\mathscr{B}} \left(\boldsymbol{\nabla}_R \cdot \delta \boldsymbol{J}_1 + \frac{d}{dt} \delta \boldsymbol{J}_2 \right) dV_R dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \oint\limits_{\partial \mathscr{B}} \delta \boldsymbol{J}_1 \cdot \boldsymbol{N} \, dA_R dt + \int\limits_V \delta \boldsymbol{J}_2 \, dV_R \Bigg|_{t_1}^{t_2} = 0 \tag{10.1}$$

и, следовательно,

$$\delta \mathscr{J} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_V \left(\mathscr{E}_{\boldsymbol{\chi}} \cdot \delta \boldsymbol{\chi} + \mathscr{E}_{\vartheta} \delta \theta \right) dV dt. \tag{10.2}$$

Инвариантность интеграла действия $\delta\mathscr{J}=0$ и независимость полей приводит к уравнениям Эйлера–Лагранжа (уравнениям поля)

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\chi}}-\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{\chi}}}=\mathbf{0},\tag{10.3}$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{\cdot}{\theta}}-\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\underset{\cdot}{\theta}}}=0,\tag{10.4}$$

или в указанных выше обозначениях

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\chi}}+\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{P}-\dot{\boldsymbol{p}}=\mathbf{0},\tag{10.5}$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{\cdot}{\theta}}-\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}}-\dot{\eta}=0.\tag{10.6}$$

11. Условия инвариантности интеграла действия

Преобразование, соответствующее сдвигу материальных координат, может быть задано следующим образом:

$$\tilde{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{X}+\varepsilon\boldsymbol{X}_0,\tag{11.1}$$

где $\boldsymbol{X}_0$ — произвольный фиксированный вектор. Вычисляя вариации $\delta\mathbf{X}$, $\frac{d}{dt}\delta\mathbf{X}=0$ и градиента $\boldsymbol{\nabla}_R\delta\mathbf{X}=0$ из (9.28), получим условие инвариантности интеграла действия в следующем виде:

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{X}}=\mathbf{0}.\tag{11.2}$$

Таким образом, условием инвариантности интеграла действия при сдвигах материальных координат является равенство нулю явного градиента соответствующей лагранжевой плотности.

Зададим аналогичное преобразование для времени

$$\tilde{t}=t+\varepsilon t_0.\tag{11.3}$$

Вычисляя вариации и учитывая $\frac{d}{dt}\delta t=\mathbf{0}$ и $\boldsymbol{\nabla}\delta t=0$, получим следующее условие инвариантности:

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}=0,\tag{11.4}$$

т.е. при сдвигах времени условием инвариантности интеграла действия является равенство нулю частной производной по времени, соответствующей лагранжевой плотности.

Преобразование, соответствующее вращению касательного пространства материального многообразия, может быть записано следующим образом:

$$\tilde{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{O}(\varepsilon)\cdot\boldsymbol{X},\quad \boldsymbol{O}(\varepsilon)\cdot\boldsymbol{O}^T(\varepsilon)=\boldsymbol{I},\quad \det\boldsymbol{O}(\varepsilon)=+1,\tag{11.5}$$

где $\boldsymbol{O}(\varepsilon)$ — специальный ортогональный тензор.

Вариации материальных координат и их градиенты могут быть вычислены по формулам

$$\delta\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{X}\delta\varepsilon,\quad \boldsymbol{\nabla}_R\delta\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\omega}\delta\varepsilon,\quad \boldsymbol{\omega}^*=-\boldsymbol{\omega},\tag{11.6}$$

а равенство (9.28) может быть преобразовано к виду

$$\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{X}} \otimes \boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}^*\right) : \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}. \tag{11.7}$$

Так как тензор $\boldsymbol{\omega}$ является произвольным антисимметрическим, то

$$\operatorname{Asym}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{X}} \otimes \boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}^*\right] = \boldsymbol{0}. \tag{11.8}$$

Выражение Asym [...] означает антисимметричную часть тензора [...].

Рассмотрим преобразования, связанные с пространством мест. Группа сдвигов определяется преобразованием:

$$\tilde{\boldsymbol{\chi}}(\varepsilon) = \boldsymbol{\chi} + \varepsilon \boldsymbol{\chi}_0, \tag{11.9}$$

где $\boldsymbol{\chi}_0$ — фиксированный пространственный вектор.

Инфинитезимальные образующие, их производные по времени и градиенты имеют вид

$$\delta \boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}_0 \delta\varepsilon, \quad \boldsymbol{\nabla}_R \delta \boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{0}, \quad \frac{d}{dt}\delta \boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{0}. \tag{11.10}$$

В результате подстановки этих соотношений в (9.28) имеем

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\chi}} = \boldsymbol{0}. \tag{11.11}$$

Преобразования пространства мест, соответствующие вращениям, имеют вид

$$\tilde{\boldsymbol{\chi}} = \boldsymbol{O}(\varepsilon) \cdot \boldsymbol{\chi}, \quad \boldsymbol{O}(\varepsilon)^* = \boldsymbol{O}^{-1}(\varepsilon). \tag{11.12}$$

Градиенты и производные по времени инфинитезимальных образующих есть:

$$\delta \boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\chi} \delta\varepsilon, \quad \boldsymbol{\nabla}_R \delta \boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nabla}_R \boldsymbol{\chi} \delta\varepsilon, \quad \frac{d}{dt}\delta \boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{\omega}^* = -\boldsymbol{\omega}. \tag{11.13}$$

Подставив эти выражения в (9.28), получаем

$$\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \otimes \boldsymbol{\chi} + \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\nabla}_R \boldsymbol{\chi}}\right)^* \cdot \boldsymbol{\nabla}_R \boldsymbol{\chi}\right) : \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0} \tag{11.14}$$

и, учитывая произвольность антисимметричного тензора $\boldsymbol{\omega}$,

$$\operatorname{Asym}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \otimes \boldsymbol{\chi} + \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\nabla}_R \boldsymbol{\chi}}\right)^* \cdot \boldsymbol{\nabla}_R \boldsymbol{\chi}\right] = \boldsymbol{0}. \tag{11.15}$$

Еще одна группа преобразований связана с полем температурных смещений $\underset{\cdot}{\theta}$. Преобразования, связанные с этим полем, называются калибровочными. Поле $\underset{\cdot}{\theta}$ скалярное и для него имеет смысл рассматривать только преобразование сдвига, которое имеет вид:

$$\tilde{\underset{\cdot}{\theta}}(\varepsilon) = \underset{\cdot}{\theta} + c\varepsilon. \tag{11.16}$$

Инфинитезимальные образующие, их производные по времени и градиенты примут вид

$$\delta \underset{\cdot}{\theta} = c\delta\varepsilon, \quad \boldsymbol{\nabla}_R \delta \underset{\cdot}{\theta} = \boldsymbol{0}, \quad \frac{d}{dt}\delta \underset{\cdot}{\theta} = 0. \tag{11.17}$$

Приходим к следующему условию инвариантности:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{\cdot}{\theta}} = 0. \tag{11.18}$$

12. Законы сохранения

Если считать, что уравнения поля выполняются, то законы сохранения могут быть преобразованы к дивергентной форме. Законы сохранения в такой форме называются сильными (поскольку, в отличие от слабых, они выполняются только на экстремалях функционала действия). Для этой цели вычислим дивергенцию тензора Эшелби $\boldsymbol{B}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}_R\mathscr{L} - \left(\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}}\right)\cdot(\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi})^* - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}}:\boldsymbol{\nabla}_R(\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi})^* -& \\ - \boldsymbol{\nabla}_R\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta}}\boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta}}\cdot\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta},&\end{aligned} \tag{12.1}$$

полную производную по времени канонического импульса $\boldsymbol{K}$:

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{\chi}}}\right)\cdot(\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi})^* + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{\chi}}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}_R\dot{\boldsymbol{\chi}})^* + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\underset{\cdot}{\theta}}}\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\underset{\cdot}{\theta}}}\cdot\boldsymbol{\nabla}_R\dot{\underset{\cdot}{\theta}}, \tag{12.2}$$

дивергенцию потока энергии $\boldsymbol{U}$:

$$\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\nabla}_R\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}}\cdot\dot{\boldsymbol{\chi}} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}}:\boldsymbol{\nabla}_R\dot{\boldsymbol{\chi}} + \boldsymbol{\nabla}_R\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta}}\dot{\underset{\cdot}{\theta}} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta}}\boldsymbol{\nabla}_R\dot{\underset{\cdot}{\theta}} \tag{12.3}$$

и производную гамильтониана $\mathscr{H}$:

$$\frac{d\mathscr{H}}{dt} = \frac{d\mathscr{L}}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{\chi}}}\right)\cdot\dot{\boldsymbol{\chi}} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{\chi}}}\cdot\ddot{\boldsymbol{\chi}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\underset{\cdot}{\theta}}}\right)\dot{\underset{\cdot}{\theta}} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\underset{\cdot}{\theta}}}\ddot{\underset{\cdot}{\theta}}. \tag{12.4}$$

Приходим к дифференциальным тождествам

$$\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{B} - \frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}\cdot\mathscr{E}_{\boldsymbol{\chi}} + \boldsymbol{\nabla}_R\underset{\cdot}{\theta}\cdot\mathscr{E}_{\vartheta}, \tag{12.5}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{U} - \frac{d\mathscr{H}}{dt} = -\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t} - \dot{\boldsymbol{\chi}}\cdot\mathscr{E}_{\boldsymbol{\chi}} - \theta\cdot\mathscr{E}_{\vartheta}. \tag{12.6}$$

Если выполняются уравнения поля и законы сохранения канонического импульса и энергии, то имеют место законы сохранения:

$$\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{B} - \dot{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{0}, \tag{12.7}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{U} - \dot{\mathscr{H}} = 0. \tag{12.8}$$

13. Сопоставление с классической теорией

Математическая формулировка недиссипативной теории термоупругости сводится к двум уравнениям поля и некоторым ограничениями на функциональную структуру лагранжиана. В отличие от этой теории классическая термоупругость не допускает формализма теории поля (по крайней мере, формализма Лагранжа–Гамильтона), однако основные соотношения вытекают из постулируемых законов сохранения, аналогичных полученным выше. По этой причине представляет интерес сопоставление соотношений этих двух теорий. Напомним, что скрытая переменная–температурное смещение, используемая в теории Грина–Нахди, связана с температурой соотношением:

$$\dot{\underset{.}{\theta}} = \theta. \tag{13.1}$$

Будем считать, что в классической теории упругости плотность лагранжиана зависит от следующих величин:

$$\mathscr{L}^{\mathrm{mech}} = \mathscr{L}^{\mathrm{mech}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}, \dot{\boldsymbol{\chi}}, \theta) = \mathscr{L}\left(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}, \dot{\boldsymbol{\chi}}, \dot{\underset{.}{\theta}}, \boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta} = \boldsymbol{0}\right). \tag{13.2}$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{\nabla}_R\mathscr{L}^{\mathrm{mech}} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{\nabla}_R\dot{\boldsymbol{\chi}}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{\chi}}} + \boldsymbol{\nabla}_R\dot{\underset{.}{\theta}}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\underset{.}{\theta}}} + \boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}:\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}}. \tag{13.3}$$

где индекс mech означает, что величина не зависит от скрытых переменных состояния[9]. В теории недиссипативной термоупругости

$$\boldsymbol{\nabla}_R\mathscr{L} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{\nabla}_R\dot{\boldsymbol{\chi}}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{\chi}}} + \boldsymbol{\nabla}_R\dot{\underset{.}{\theta}}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\underset{.}{\theta}}} + \boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}:\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}} + \boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta}}. \tag{13.4}$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{\nabla}_R\mathscr{L} - \boldsymbol{\nabla}_R\mathscr{L}^{\mathrm{mech}} = \boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta}} = \boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta}\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}}. \tag{13.5}$$

Аналогично имеем

$$\frac{d}{dt}\mathscr{L} - \frac{d}{dt}\mathscr{L}^{\mathrm{mech}} = \boldsymbol{\nabla}_R\dot{\underset{.}{\theta}}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta}} = \boldsymbol{\nabla}_R\dot{\underset{.}{\theta}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}}. \tag{13.6}$$

Тензор напряжений Эшелби в классической теории имеет вид

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{mech}} = \mathscr{L}^{\mathrm{mech}}\boldsymbol{I} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\chi})^* = \mathscr{L}^{\mathrm{mech}}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{F}. \tag{13.7}$$

Дивергенция тензора Эшелби вычисляется в форме

$$\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{B}^{\mathrm{mech}} - \boldsymbol{\nabla}_R\cdot(\boldsymbol{\mathcal{S}}\otimes\boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta}) + \boldsymbol{\nabla}_R\boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta}\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}} = \boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{B}^{\mathrm{mech}} - (\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}})\boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta} \tag{13.8}$$

В силу уравнений поля

$$-(\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{\mathcal{S}}) = \dot{\eta} \tag{13.9}$$

получаем

$$\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{B}^{\mathrm{mech}} + \dot{\eta}\boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta}. \tag{13.10}$$

Канонический импульс в теории Грина–Нахди связан с каноническим импульсом классической теории соотношением

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}^{\mathrm{mech}} + \eta\boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta}. \tag{13.11}$$

Таким образом, производная по времени канонического импульса имеет вид

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \dot{\boldsymbol{K}}^{\mathrm{mech}} + \dot{S}\,\boldsymbol{\nabla}_R\underset{.}{\theta} + S\,\boldsymbol{\nabla}_R\dot{\underset{.}{\theta}}. \tag{13.12}$$

Закон сохранения канонического импульса теперь может быть представлен в форме

$$\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{B} - \frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \boldsymbol{\nabla}_R\cdot\boldsymbol{B}^{\mathrm{mech}} - \dot{\boldsymbol{K}}^{\mathrm{mech}} - \eta\boldsymbol{\nabla}_R\dot{\underset{.}{\theta}} = 0. \tag{13.13}$$

[9]Эти величины были получены в разделе 4, где для краткости письма индекс mech не использовался.

Вводя обозначение для формальной "температурной" силы, аналогичной силе Эшелби, связанной с неоднородностью

$$\mathbf{f}^{\mathrm{th}} = \eta \boldsymbol{\nabla}_R \dot{\underset{.}{\theta}} = \eta \boldsymbol{\nabla}_R \theta, \tag{13.14}$$

приходим к уравнению

$$\boldsymbol{\nabla}_R \cdot \boldsymbol{B}^{\mathrm{mech}} - \dot{\boldsymbol{K}}^{\mathrm{mech}} = \mathbf{f}^{\mathrm{th}}. \tag{13.15}$$

Обратимся теперь к вектору Умова–Пойнтинга

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{mech}} = \boldsymbol{P} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} = \boldsymbol{U} - \boldsymbol{\mathcal{S}} \dot{\underset{.}{\theta}} \tag{13.16}$$

и гамильтониану:

$$\mathscr{H}^{\mathrm{mech}} = \mathscr{L}^{\mathrm{mech}} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{\chi}}} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\underset{.}{\theta}}} \dot{\underset{.}{\theta}}. \tag{13.17}$$

Вычислим дивергенцию вектора Умова–Пойтинга

$$\boldsymbol{\nabla}_R \cdot \boldsymbol{U} = \boldsymbol{\nabla}_R \cdot \boldsymbol{U}^{\mathrm{mech}} + \boldsymbol{\nabla}_R \cdot \boldsymbol{P} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} \tag{13.18}$$

и производную гамильтониана

$$\dot{\mathscr{H}} = \dot{\mathscr{H}}^{\mathrm{mech}} + \boldsymbol{\nabla}_R \dot{\underset{.}{\theta}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}}. \tag{13.19}$$

Закон сохранения энергии теперь может быть записан в виде

$$\boldsymbol{\nabla}_R \cdot \boldsymbol{U} - \dot{\mathscr{H}} = \boldsymbol{\nabla}_R \cdot \boldsymbol{U}^{\mathrm{mech}} - \dot{\mathscr{H}}^{\mathrm{mech}} - \dot{\eta} \underset{.}{\theta} = 0 \tag{13.20}$$

или

$$\boldsymbol{\nabla}_R \cdot \boldsymbol{U}^{\mathrm{mech}} - \dot{\mathscr{H}}^{\mathrm{mech}} = \Phi, \qquad \Phi = \dot{\eta} \underset{.}{\theta}. \tag{13.21}$$

Таким образом, если формально переписать законы сохранения канонического импульса и энергии теории Грина–Нахди в классических величинах, то законы сохранения трансформируются в уравнения баланса с членами, определяющими формальные источники: поле температурных сил и диссипацию.

Обратим внимание на то, что для построения нелинейных уравнений движения и недиссипативной теплопроводности в рамках вариационного формализма Э. Нетер потребовалась следующая система гипотез:

- i'. предположение о существовании вариационного принципа (стационарности интеграла действия, определенного как интеграл по отсчетной области от некоторой *скалярной* плотности лагранжиана);
- ii'. выбор термодинамического базиса, включающего в качестве независимой термодинамической переменной скалярное поле температурного смещения;
- iii'. постулирование инвариантности интеграла действия при трансляционных; ортогональных преобразований поля места и калибровочных преобразований поля температурного смещения,
- iv'. принципа материальной индифферентности.

Выводы

Приведенные в статье построения, по крайней мере по мнению авторов, демонстрируют лаконичность и преимущества подхода, основанного на вариационном формализме Э. Нетер при выводе точных нелинейных уравнений движения недиссипативных систем, к которым, в частности, относится теория Грина–Нахди.

Кроме того, явная формулировка выражения для вариации интеграла действия позволяет в наиболее естественной форме определить зависимые термодинамические поля в каноническом описании.

В числе результатов, претендующих на новизну, отметим установленную эквивалентность (с точностью до пересчета канонических термодинамических производных) энергетического и энтропийного описаний классическому температурному описанию, введенному А.Е. Грином и П.М. Нахди, а также построение взаимно сопряженных линейных операторных пучков, позволяющих представить приращения полей напряжений и температур в окрестности заданного конечного напряженно-деформированного состояния в форме биортогональных спектральных разложений.

Авторы выражают благодарность проф. Ю.Н. Радаеву за постоянное внимание и конструктивную критику работы.

Литература

[1] Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

[2] Лычев, С.А. Связанная динамическая задача для конечного цилиндра / С.А. Лычев // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. – 2003. – №4(30). – С. 112-124.

[3] Шашков, А.Г. Волновые явления теплопроводности: Системно-структурный подход / А.Г. Шашков, В.А. Бубнов, С.Ю. Яновский. – М: Едиториал УРСС, 2004. – 296 с.

[4] Joseph, D.D. Heat waves / D.D. Joseph, L. Preziosi // Mod. Phys., 1989. – Vol. 61. – No. 1. – P. 41–73.

[5] Gurtin, M.E., A General Theory of Heat Conduction with Finite Wave Speeds / M.E. Gurtin, A.C. Pipkin // Geom., Cont. and Micros., II. 2000. – Vol. 58. – No. 2. – P. 171–180.

[6] Питаевский, Л.П. Второй звук в твердом теле / Л.П. Питаевский // Успехи физических наук. – 1968. – Т. 95. – Вып. 1. – С. 139–144.

[7] Hetnarski, R.B. Nonclassical dynamical thermoelasticity / R.B. Hetnarski, J. Ignaczak // Int. J. of Solids and Structures. – 2000. – V. 37. – P. 215–224.

[8] Ландау, Л.Д. Теория сверхтекучести гелия–II / Л.Д. Ландау // Успехи физических наук. – 1967. – No. 11. – С. 495–520.

[9] Kalpakides, V.K., Canonical Formulation and Conservation Laws of Thermoelasticity without Dissipation / V.K. Kalpakides, G.A. Maugin //Reports in Mathematical Physics. – 2004. – V. 53. – P. 371–391.

[10] Green, A.E., Thermoelasticity without energy dissipation / A.E. Green, P.M. Naghdi. – Journal of Elasticity. – 1993. – V. 61. – P. 189–208.

[11] Maugin, G.A., Towards an analytical mechanics of dissipative materials / Maugin, G.A. – Geom., Cont. and Micros., II. 2000. – Vol. 58. – No. 2. – P. 171–180.

[12] Лычев, С.А. Несимметричные интегральные преобразования и их приложения к задачам вязкоупругости / С.А. Лычев, Ю.Э. Сеницкий. – Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. – 2002. – Спец. вып. – С. 16–38.

[13] Truesdell, C. The classical field theories / C. Truesdell, R.A. Toupin // Handbuch der Physik. – Band III/l. – 1960. – P. 226–858.

[14] Atkin, R.J., A continuum approach to the second-sound effect / N. Fox, M.W. Vasey // Journal of Elasticity. – 1975. – Vol. 5. – P. 237–248.

[15] Седов, Л.И. Механика сплошной среды: в 2 т. / Л.И. Седов. – СПб.: Лань, 2004. – 1088 с.

[16] Gurtin, M.E. An Axiomatic Foundation for Continuum Thermodynamics / M.E. Gurtin, W.O. Williams // Arch. for Rational Mech. and Anal. – 1967. – V. 26. – No. 2. – P. 83–117.

[17] Bargmann, S. Classical results for a non-classical theory: remarks on thermodynamic relations in Green–Naghdi thermo-hyperelasticity / S. Bargmann, P. Steinmann // Continuum Mech. Thermodyn. – 2007. – V. 19. – P. 59–66.

[18] Maugin, G.A. On canonical equations of continuum thermomechanics / G.A. Maugin // Mechanics Research Communications. – 2006. – V. 33. – P. 705–710.

[19] Radayev, Yu.N. Thermodynamical Model of Anisotropic Damage Growth Part I. / Yu.N. Radayev // Canonical Dynamic State Variables of Continuum Damage Mechanics and Thermodynamical Functions of Three-Dimensional Anisotropic Damage State. J. Non-Equilib. Thermodyn. – 1996. – V. 21. – No. 21. – P. 129–152.

[20] Green, A.E., Thermoelastic stresses in initially stressed bodies / A.E. Green // Proc. Roy. Soc. Ser. A. – 1962. – V. 266. – P. 1–19.

[21] Iesan, D. Incremental equations in thermoelasticity / D. Iesan // J. Thermal Stresses. – 1980. – V. 3. – P. 41–56.

[22] Wang, J., Thermoelasticity without energy dissipation for initially stressed bodies / J. Wang, S.P. Slattery //IJMMS. – No. 31/6. – 2002. – P. 321–327.

[23] Сеницкий Ю.Э., Обобщенные биортогональные конечные интегральные преобразования и их приложение к нестационарным задачам механики / Ю.Э. Сеницкий. – Доклады РАН. – 1995. – Т. 341. – No. 4. – С. 474–477.

[24] Олвер, П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. – М.: Мир, 1989. – 640 с.

[25] Гельфанд, И.М. Вариационное исчисление / И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. – 1961.

[26] Chen, J.K. Ultrafast thermoelasticity for short-pulse laser heating / J.K. Chen, J.E. Beraun, C.L. Tham // Int. J. of Eng. Sci. – 2004. – V. 42. – P. 793–807.

[27] Bargmann, S. Theoretical and computational aspects of non-classical thermoelasticity / S. Bargmann, P. Steinmann // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 2006. – V. 196. – P. 516–527.

[28] Лычев С.А., Законы сохранения недиссипативной микроморфной термоупругости / С.А. Лычев – Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. – 2007. – №4. – С. 225–262.

[29] Maugin, G.A. Material inhomogeneities in elasticity / G.A. Maugin // Chapman and Hall. – London. – 1993.

Поступила в редакцию 3/*III*/2008;
в окончательном варианте — 15/*III*/2008.

ON CONSERVATION LAWS OF NONDISSIPATIVE THERMOELASTICITY[10]

© 2008 S.A. Lychev, D.A. Semenov[11]

This work is concerned with the derivation of conservation laws, nonlinear and linear equations of motion and heat conduction for the Green-Naghdi theory of thermoelasticity without dissipation. Two methodologies are under consideration: the classical system of conservation laws, which have been postulated ad hoc, and variational Lagrange formalism. The lack of dissipation allows for a variational formulation which is to be used for the application of Noether's theorem. A linear theory of thermoelasticity without energy dissipation for prestressed bodies is derived. The cojugate pairs of differential pencils, generated by linear equations, are obtained. Also, the relationship with the "classical" theory is examined. An appearance of formal temperature force and dissipation in context of the classical thermoelastic relations is shown.

Paper received 3/*III*/2008.
Paper accepted 15/*III*/2008.

[10]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Yu.N. Radayev.

[11]Lychev Sergey Alexandrovich, Semenov Denis Anatol'evich, Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.