КОНВОЛЮТИВНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД

Манжиров А.В.[1], Лычев С.А.[1], Гупта Н.К.[2]

[1] *Учреждение Российской академии наук*
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
Москва, Россия
[2] *Индийский институт технологии*
Дели, Индия

Излагается общая методология построения вариационных принципов на основе функционала свертки (конволюции) и других билинейных симметричных форм. Предлагаются новые вариационные принципы для упругих, термоупругих и вязкоупругих сред. Рассматриваются постановки как в линейном приближении, так и в конечных деформациях.

Введение

Большая часть вариационных принципов, соответствующих краевым задачам механики сплошных сред, могут быть сформулированы в рамках следующих рассуждений. Известно, что с линейным оператором A, который определен **на** гильбертовом пространстве $H(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \int\limits_{\Omega} u\, v\, d\mu \quad (u, v \in H(\Omega))\,, \tag{1}$$

связан квадратичный функционал

$$I[\vartheta] = \frac{1}{2}\,(\vartheta, A[\vartheta]) \quad (\vartheta \in H(\Omega))\,, \tag{2}$$

причем, если оператор A является **самосопряженным**

$$(Au, v) = (u, Av),$$

этот функционал достигает своих экстремальных значений на функциях, принадлежащих ядру оператора A:

$$A[\vartheta] = 0, \tag{3}$$

и только на них [1]. Таким образом, задача (3) эквивалентна вариационному принципу

$$\delta I[\vartheta] = 0.$$

Утверждение остается верным, если оператор A определен **в** $H(\Omega)$, но его область определения D_A плотна в пространстве $H(\Omega)$ [1].

Аналогичным образом формулируются вариационные принципы для нелинейных операторов, которые в линейном приближении оказываются самосопряженными. Согласно теореме Вайнберга [2] функционал, достигающий экстремальных значений на решениях нелинейной задачи

$$\mathfrak{A}[\vartheta] = 0 \tag{4}$$

имеет вид

$$I[\vartheta] = \left(\vartheta, \int\limits_0^1 \mathfrak{A}[\lambda\vartheta]\, d\lambda\right). \tag{5}$$

Здесь $\mathfrak{A}$ — нелинейный дифференцируемый оператор, такой, что его производная Гато

$$\mathfrak{A}'[x,h] = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathfrak{A}(x+\varepsilon h) - \mathfrak{A}(x)}{\varepsilon}$$

является самосопряженным оператором

$$(\mathfrak{A}'[x,u], v) = (u, \mathfrak{A}'[x,v]).$$

с плотной в $H(\Omega)$ областью определения. Такие операторы называются потенциальными [2].

Замечание 1. Если в задаче (4) явно выделены неоднородные члены и она формулируется в виде

$$\mathfrak{A}[\vartheta] = f, \quad \vartheta \in D_{\mathfrak{A}},$$

то функционал (5) может быть записан следующим образом [2]:

$$I(\vartheta) = \left(\vartheta - \vartheta_0, \int\limits_0^1 \mathfrak{A}\left[\vartheta_0 + \lambda(\vartheta - \vartheta_0)\right]\, d\lambda\right) - (\vartheta, f)\,, \quad \vartheta_0 \in D_{\mathfrak{A}}.$$

Данная методология, основанная на использовании классического (евклидова) скалярного произведения, имеет следующие ограничения.

Во–первых, вариационная формулировка для **начальных** и **начально–краевых** задач не может быть получена, поскольку начальные условия формулируются на одном конце рассматриваемого интервала времени, а при использовании функционала, построенного на основе скалярного произведения (1), подразумевается, что заданы условия в начальной и конечной точках (как, например, в принципе Остроградского–Гамильтона). Это приводит к известным неопределенностям и затруднениям в динамических задачах механики сплошных сред [3].

Во–вторых, операторы, возникающие в задачах механики сплошных сред, часто оказываются непотенциальными (т.е. несамосопряженными в линейном приближении по отношению к скалярному произведению соответствующего гильбертова пространства). Таковыми, например, являются операторы, порождаемые уравнениями связанной термоупругости, вязкоупругости, ползучести. Как правило, для подобных задач предлагались не вариационные принципы, а вариационные уравнения (например, вариационное уравнение Био для термоупругих сред [4]).

Если наряду с евклидовым скалярным произведением (1) использовать функционал свертки (конволюцию) [5]

$$\langle \vartheta, \omega \rangle = \int\limits_0^t \vartheta(t-\tau)\omega(\tau)\, d\tau, \tag{6}$$

то область применения изложенного выше вариационного формализма может быть расширена [6, 7, 8].

Известно, что свертка обладает свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности

$$\langle\vartheta,\omega\rangle = \langle\omega,\vartheta\rangle, \tag{7}$$
$$\langle\vartheta,\langle\omega,\varphi\rangle\rangle = \langle\langle\vartheta,\omega\rangle,\varphi\rangle, \tag{8}$$
$$\langle\vartheta,(\omega+\varphi)\rangle = \langle\vartheta,\omega\rangle + \langle\vartheta,\varphi\rangle. \tag{9}$$

Соотношения (7)–(9) проверяются непосредственным вычислением соответствующих интегралов. В силу теоремы Титчмарша [5] имеет место импликация

$$\vartheta \not\equiv 0 \wedge \omega \not\equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \langle\vartheta,\omega\rangle \not\equiv 0,$$

а так называемое свойство отделимости [5]

$$\forall\vartheta \quad \langle\vartheta,\omega\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega \equiv 0 \tag{10}$$

представляет собой аналог основной леммы классического операционного исчисления. Вариационные принципы, построенные на основе функционала свертки называются **конволютивными** [6].

Впервые свертка была использована для формулировки вариационного принципа, порождаемого начально–краевой задачей, М. Гертиным в 1964 г. [6]. В работе [9] М. Гертин предложил конволютивный вариационный принцип, порождаемый начально–краевой задачей динамической теории упругости (напомним, что хорошо известный вариационный принцип Остроградского–Гамильтона определяет не начально–краевую, а краевую задачу, что, в частности, приводит к необходимости указывать значения варьируемых функций в начальный и конечный моменты времени). Позже, в развитие принципа Гертина, были предложены конволютивные принципы для термоупругости [10], пьезоупругости [11] и ряда других задач континуальной механики [12].

Идея, высказанная М. Гертиным, была развита Э. Тонти (1969 г.). В работе [7] Тонти показал, что в функционалах (2) или (5) может быть использована любая билинейная форма[1]

$$B(\vartheta,\omega), \tag{11}$$

если она удовлетворяет условиям симметричности

$$B(\vartheta,\omega) = B(\omega,\vartheta)$$

и отделимости

$$\forall\vartheta \quad B(\vartheta,\omega) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega \equiv 0.$$

Таким образом, если линейный оператор A (с плотной в $H(\Omega)$ областью определения D_A) оказывается самосопряженным относительно билинейной формы (11), т.е.

$$\forall\vartheta,\omega \in D_A \quad B(A[\vartheta],\omega) = B(\omega, A[\vartheta])$$

[1] Билинейная форма может быть определена не о всем пространстве $H(\Omega)$, а лишь в некоторой плотно вложенной в $H(\Omega)$ области, которая содержит область определения рассматриваемого оператора.

то порождаемый этим оператором вариационный принцип может быть сформулирован следующим образом

$$I[\vartheta] = \frac{1}{2} B(A[\vartheta], \vartheta), \quad \delta I[\vartheta] = 0.$$

Соответственно, вариационный принцип для нелинейного оператора $\mathfrak{A}$, производная которого является самосопряженной по отношению к билинейной форме (11), имеет вид

$$I[\vartheta] = B\left(\vartheta, \int\limits_0^1 \mathfrak{A}[\lambda\vartheta]\, d\lambda\right).$$

В настоящей работе в рамках единой методологии построены новые конволютивные вариационные принципы для упругих, термоупругих и вязкоупругих сред.

1. Вариационные принципы для элементарных операторов

Представляется целесообразным вначале подробно рассмотреть вариационные принципы, порождаемые элементарными дифференциальными и интегральными операторами, которые служат 'образующими элементами' более сложных операторов механики сплошных сред.

Пример 1. Пусть оператор A определен дифференциальной операцией первого порядка, а его область определения D_A однородным начальным условием:

$$A = \frac{d}{dt}, \quad D_A = \{\vartheta : \vartheta(0) = 0\}. \tag{12}$$

Очевидно, оператор A не является самосопряженным относительно евклидова скалярного произведения (1). Однако относительно конволютивной билинейной формы (6) оператор A самосопряжен. Действительно, в результате интегрирования по частям, учитывая, что функции ϑ и ω в точке $t = 0$ обращаются в ноль, приходим к соотношению

$$\langle A\vartheta, \omega\rangle = -\int\limits_0^t \frac{d\vartheta(t-\tau)}{d\tau}\omega(\tau)\, d\tau = -\vartheta(t-\tau)\omega(\tau)\Big|_0^t + \int\limits_0^t \vartheta(t-\tau)\frac{d\omega(\tau)}{d\tau}\, d\tau = \langle \vartheta, A\omega\rangle.$$

Теперь, согласно общей теории, может быть построен функционал, определяющий соответствующий вариационный принцип

$$I[\vartheta] = \frac{1}{2}\langle \vartheta, A\vartheta\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \vartheta, \frac{d\vartheta}{dt}\right\rangle = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \vartheta(t-\tau)\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau}\, d\tau; \quad \delta I[\vartheta] = 0. \tag{13}$$

Конечно, обоснование вариационного принципа (13) может быть произведено путем непосредственного вычисления вариации функционала I с помощью формальной 'δ'

процедуры:

$$\delta I[\vartheta] = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left\{ \delta\vartheta(t-\tau)\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} + \vartheta(t-\tau)\delta\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} \right\} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\vartheta(t-\tau)\delta\vartheta(\tau)\Big|_0^t + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left\{ \delta\vartheta(t-\tau)\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} - \frac{d}{d\tau}\left[\vartheta(t-\tau)\right]\delta\vartheta(\tau) \right\} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\vartheta(t-\tau)\delta\vartheta(\tau)\Big|_0^t + \int\limits_0^t \delta\vartheta(t-\tau)\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau}\, d\tau,$$

В силу произвольности функции $\delta\vartheta(t)$ приходим к условиям стационарности в форме уравнения Эйлера–Лагранжа и однородного начального условия:

$$\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} = 0, \quad \vartheta(0) = 0,$$

которые полностью определяют исходный оператор (12).

Пример 2. Пусть теперь оператор $\mathfrak{A}$ задан в области $D_{\mathfrak{A}}$, определяемой неоднородными начальными условиями

$$\mathfrak{A} = \frac{d}{dt}, \quad D_{\mathfrak{A}} = \{\vartheta : \vartheta(0) = \vartheta_0\}. \tag{14}$$

В силу неоднородности оператор $\mathfrak{A}$ нелинеен, но его производная Гато совпадает с рассмотренным выше однородным оператором A (12). Таким образом, вариационный принцип порождается функционалом

$$I[\vartheta] = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \vartheta(t-\tau)\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau}\, d\tau - \frac{1}{2}\vartheta_0\vartheta(t). \tag{15}$$

Для его обоснования вновь воспользуемся формальной 'δ' процедурой и вычислим вариацию δI:

$$\delta I[\vartheta] = \frac{1}{2}\vartheta(t-\tau)\delta\vartheta(\tau)\Big|_0^t + \frac{1}{2}\vartheta_0\delta\vartheta(t) + \int\limits_0^t \delta\vartheta(t-\tau)\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau}\, d\tau.$$

Так как при $t = 0$ устанавливается начальное условие, и, следовательно, $\delta\vartheta(0) = 0$, внеинтегральные члены принимают вид

$$\frac{1}{2}\delta\vartheta(t)\left(\vartheta_0 - \vartheta(0)\right).$$

В силу произвольности $\delta\vartheta(t)$ приходим к условиям стационарности функционала в виде дифференциального уравнения Эйлера–Лагранжа и неоднородного начального условия

$$\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} = 0, \quad \vartheta_0 = \vartheta(0),$$

которае полностью определяют исходный оператор $\mathfrak{A}$ (14).

Пример 3. Рассмотрим дифференциальный оператор, порождаемый дифференциальным выражением второго порядка и однородными начальными данными

$$A = \frac{d^2}{dt^2}, \quad D_A = \{\vartheta : \vartheta(0) = 0 \wedge \frac{d}{dt}\vartheta(0) = 0\}. \tag{16}$$

Оператор A самосопряжен относительно конволютивной билинейной формы. Действительно, выполняя интегрирования по частям и учитывая однородные начальные условия, приходим к соотношению

$$\langle A\vartheta, \omega\rangle = \int\limits_0^t \frac{d^2\vartheta(t-\tau)}{d\tau^2}\omega(\tau)\,d\tau =$$

$$= \left[\frac{d\vartheta(t-\tau)}{d\tau}\omega(\tau) - \vartheta(t-\tau)\frac{d\omega(\tau)}{d\tau}\right]\Bigg|_0^t + \int\limits_0^t \vartheta(t-\tau)\frac{d^2\omega(\tau)}{d\tau^2}\,d\tau = \langle\vartheta, A\omega\rangle\,. \tag{17}$$

Установленная самосопряженность оператора A относительно конволютивной билинейной формы позволяет сформулировать вариационный принцип

$$I[\vartheta] = \frac{1}{2}\left\langle \vartheta, \frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right\rangle = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \vartheta(t-\tau)\frac{d^2\vartheta(\tau)}{d\tau^2}\,d\tau, \delta I[\vartheta] = 0.$$

Вариация построенного функционала может быть вычислена следующим образом

$$\delta I[\vartheta] = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left\{\delta\vartheta(t-\tau)\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} + \vartheta(t-\tau)\delta\frac{d^2\vartheta(\tau)}{d\tau^2}\right\}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\vartheta(t-\tau)\delta\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} - \frac{d\vartheta(t-\tau)}{d\tau}\delta\vartheta(\tau)\right]\Bigg|_0^t + \int\limits_0^t \delta\vartheta(t-\tau)\frac{d^2\vartheta(\tau)}{d\tau^2}\,d\tau,$$

что приводит к уравнениям Эйлера–Лагранжа и двум однородным начальным условиям

$$\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2} = 0, \quad \vartheta(0) = 0, \quad \frac{d}{dt}\vartheta\Big|_{t=0} = 0,$$

полностью определяющими рассматриваемый оператор (16).

Замечание 2. Интегрируя по частям, можно преобразовать функционал $I(\vartheta)$ к виду

$$I[\vartheta] = \frac{1}{2}\vartheta(t-\tau)\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau}\Bigg|_0^t - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left(\frac{d}{d\tau}\vartheta(t-\tau)\right)\frac{d}{d\tau}\vartheta(\tau)\,d\tau,$$

причем внеинтегральные слагаемые в силу однородных начальных условий обращаются в нуль. Таким образом, имеем:

$$I[\vartheta] = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left(\frac{d}{d\varsigma}\vartheta(\varsigma)\right)\Bigg|_{\varsigma=t-\tau}\frac{d}{d\tau}\vartheta(\tau)\,d\tau, \tag{18}$$

или, вводя обозначение для 'скорости' $\eta(\tau) = \frac{d}{d\tau}\vartheta(\tau)$

$$I[\vartheta] = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \eta(t-\tau)\eta(\tau)\,d\tau,$$

в котором несложно угадать аналог выражения для 'кинетической энергии'.

Далее для краткости будем использовать следующее обозначение для неполной производной сложной функции:

$$\dot{\vartheta}(a(\tau)) = \frac{d\vartheta(\varsigma)}{d\varsigma}\Big|_{\varsigma=a(\tau)},$$

где $a(\tau)$ — некоторая 'внутреняя' функция переменной t. Очевидно

$$\dot{\vartheta}(t-\tau) = -\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau}.$$

В этих обозначениях функционал (18) может быть записан в виде

$$I[\vartheta] = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \dot{\vartheta}(t-\tau)\dot{\vartheta}(\tau)\,d\tau.$$

Пример 4. Рассмотрим теперь оператор с неоднородными краевыми условиями:

$$A = \frac{d^2}{dt^2}, \quad D_A = \{\vartheta : \vartheta(0) = \vartheta_0 \wedge \frac{d}{dt}\vartheta(0) = \eta_0\}. \tag{19}$$

Соответствующий функционал имеет вид

$$I[\vartheta] = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \vartheta(t-\tau)\frac{d^2\vartheta(\tau)}{d\tau^2}\,d\tau - \frac{1}{2}\vartheta_0\frac{d\vartheta(t)}{dt} - \frac{1}{2}\eta_0\vartheta(t). \tag{20}$$

Здесь, в отличие от (15), присутствуют два дополнительных слагаемых, которые определяются неоднородными начальными условиями. Для обоснования вариационного принципа вычислим вариацию функционала I

$$\delta I[\vartheta] = \frac{1}{2}\left[\vartheta(t-\tau)\delta\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} - \frac{d\vartheta(t-\tau)}{d\tau}\delta\vartheta(\tau)\right]\Bigg|_0^t -$$

$$-\frac{1}{2}\vartheta_0\delta\frac{d\vartheta(t)}{dt} - \frac{1}{2}\eta_0\delta\vartheta(t) + \int\limits_0^t \delta\vartheta(t-\tau)\frac{d^2\vartheta(\tau)}{d\tau^2}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\vartheta_0 - \vartheta(0)\Big]\delta\frac{d\vartheta(t)}{dt} + \frac{1}{2}\Big[\eta_0 - \frac{d\vartheta(t)}{dt}\Big|_{t=0}\Big]\delta\vartheta(t) + \int\limits_0^t \delta\vartheta(t-\tau)\frac{d^2\vartheta(\tau)}{d\tau^2}\,d\tau.$$

Отсюда получим уравнения Эйлера–Лагранжа и неоднородные начальные условия

$$\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2} = 0, \quad \vartheta(0) = \vartheta_0, \quad \frac{d}{dt}\vartheta\Big|_{t=0} = \eta_0.$$

Замечание 3. В 'симметризованном' варианте функционал (20) преобразуется путем интегрирования по частям:

$$I[\vartheta] = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \dot{\vartheta}(t-\tau)\dot{\vartheta}(\tau)\,d\tau - \eta_0\vartheta(t).$$

Нет ничего удивительного в том, что из формулировки 'исчезло' начальное значение функции ϑ. Достаточно лишь того, что оно фиксировано. Ведь функционал теперь зависит только от производной $\dot{\vartheta}$ инвариантен относительно сдвига $\vartheta(t) \mapsto \vartheta(t) + \vartheta_0$.

Пример 5. Очевидно обобщение на операторы высших порядков

$$A = \frac{d^n}{dt^n}, \quad D_A = \{\vartheta : \vartheta(0) = \vartheta_0 \wedge \frac{d}{dt}\vartheta(0) = \vartheta_1 \wedge \ldots \wedge \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\vartheta(0) = \vartheta_{n-1}\}.$$

Соответствующий функционал имеет вид

$$I[\vartheta] = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \vartheta(t-\tau)\frac{d^n\vartheta(\tau)}{d\tau^n}\,d\tau - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\vartheta_k\frac{d^k\vartheta(t)}{dt^k}. \tag{21}$$

Пример 6. Наконец, рассмотрим интегральный оператор Фредгольма с разностным ядром $K(t,\tau) = K(t-\tau)$ следующего вида

$$A[\vartheta] = \int\limits_0^t K(t-\tau)\vartheta(\tau)\,d\tau = \langle K, \vartheta\rangle, \quad D_A = H. \tag{22}$$

Самосопряженность оператора (22) относительно конволютивной билинейной формы может быть доказана непосредственным вычислением

$$\langle A\vartheta, \omega\rangle = \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-\tau} K(t-\tau-\varsigma)\vartheta(\varsigma)\,d\varsigma\,\omega(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \vartheta(\tau)\int\limits_0^{t-\tau} K(t-\varsigma-\tau)\omega(\varsigma)\,d\varsigma\,d\tau = \langle\vartheta, A\omega\rangle,$$

С другой стороны самосопряженность оператора A является следствием ассоциативности свертки:

$$\langle A[\vartheta], \omega\rangle = \langle\langle K, \vartheta\rangle, \omega\rangle = \langle\vartheta, \langle K, \omega\rangle\rangle.$$

Теперь не составляет труда построить функционал, определяющий вариационный принцип. Согласно общей теории он имеет вид

$$I[\vartheta] = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \vartheta(t-\tau)\int\limits_0^\tau K(\tau-\varsigma)\vartheta(\varsigma)\,d\varsigma\,d\tau. \tag{23}$$

Вычисление вариации

$$\delta I(\vartheta) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \delta\vartheta(t-\tau)\int\limits_0^\tau K(\tau-\varsigma)\vartheta(\varsigma)\,d\varsigma\,d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \vartheta(t-\tau)\int\limits_0^\tau K(\tau-\varsigma)\delta\vartheta(\varsigma)\,d\varsigma\,d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \delta\vartheta(t-\tau)\int\limits_0^\tau K(\tau-\varsigma)\vartheta(\varsigma)\,d\varsigma\,d\tau$$

приводит к уравнениям Эйлера–Лагранжа

$$\int\limits_0^\tau K(\tau-\varsigma)\vartheta(\varsigma)\,d\varsigma = 0,$$

которое полностью определяют оператор A (22).

2. Вариационный принцип в теории упругости

Приступим к формулировке вариационных принципов для начально–краевых задач механики сплошных сред. Пусть $\mathcal{B}$ — область евклидова пространства, занимаемого упругим телом в отсчетной конфигурации. Будем полагать, что что область $\mathcal{B}$ ограничена и имеет регулярную границу $\partial\mathcal{B}$.

Рассмотрим следующую билинейную форму

$$\langle \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\rangle = \int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau)\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau\,dV. \tag{24}$$

Эта форма по пространственным переменным $\boldsymbol{x}$ евклидова, а по времени t— конволютивна. Таким образом, симметричность и отделимость вытекают из соответствующих свойств евклидова скалярного произведения и свойств (7), (10) свертки.

Линейные уравнения движения сплошной упругой анизотропной среды могут быть записаны в виде [4]:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{C}}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u} + \rho\boldsymbol{K} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}. \tag{25}$$

Здесь $\boldsymbol{u}$ — перемещения, $\boldsymbol{K}$ — массовые силы, $\boldsymbol{\nabla}$ — пространственный оператор Гамильтона, $\boldsymbol{\mathfrak{C}} = \boldsymbol{\mathfrak{C}}(\boldsymbol{x})$ — тензор упругих модулей, которые удовлетворяют соотношению симметрии (условию сущетвования упругого потенциала)

$$\boldsymbol{\mathfrak{C}} = \boldsymbol{\mathfrak{C}}^{(3412)}. \tag{26}$$

Замечание 4. Классическое определение тензора упругих модулей несколько иное: вводится тензор $\boldsymbol{E}$, который связан с $\boldsymbol{\mathfrak{C}}$ соотношением

$$\boldsymbol{\mathfrak{C}} = \boldsymbol{E}:\boldsymbol{1}^s.$$

Здесь $\boldsymbol{1}^s$ — симметрирующая тензорная единица, преобразующая любой тензор второго ранга $\boldsymbol{A}$ в его симметричную часть, т.е.

$$\boldsymbol{1}^s:\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*\right).$$

Использование тензора $\boldsymbol{\mathfrak{C}}$ вместо $\boldsymbol{E}$ в контексте настоящей работы позволяет уменьшить громоздкость выкладок.

Для постановки начально–краевой задачи кроме дифференциальных уравнений требуется указать начальные данные, определяющие начальные перемещения $\boldsymbol{u}_0$ и начальные скорости $\boldsymbol{v}_0$:

$$\boldsymbol{u}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0, \quad \frac{d}{dt}\boldsymbol{u}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0, \tag{27}$$

а также краевые условия, которые могут быть сформулированы следующим образом

$$\boldsymbol{u}\Big|_{\partial\mathcal{B}_1} = \hat{\boldsymbol{u}}, \quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{C}}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}\Big|_{\partial\mathcal{B}_2} = \hat{\boldsymbol{f}}, \quad \partial B_1\cup\partial B_2 = \partial B. \tag{28}$$

Здесь ∂B_1 — часть границы, на которой заданы перемещения $\hat{\boldsymbol{u}}$, ∂B_2 — часть границы, на которой задано поле поверхностных сил плотностью $\hat{\boldsymbol{f}}$.

Дифференциальные уравнения (25), начальные (27) и краевые условия (28) определяют начально–краевую задачу, которая порождает дифференциальный оператор

$$\mathfrak{A}[\boldsymbol{u}] = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{C}}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u} + \rho\boldsymbol{K} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}},$$

определенный в области $D_{\mathfrak{A}}$:

$$D_{\mathfrak{A}} = \left\{\boldsymbol{u} : \boldsymbol{u}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0 \wedge \frac{d}{dt}\boldsymbol{u}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0 \wedge \boldsymbol{u}\Big|_{\partial\mathcal{B}_1} = \hat{\boldsymbol{u}} \wedge \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{C}}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}\Big|_{\partial\mathcal{B}_2} = \hat{\boldsymbol{f}}\right\}.$$

Оператор $\mathfrak{A}$, в силу неоднородности, нелинейный. Его производная $\mathfrak{A}' = A$ имеет вид

$$A[\boldsymbol{u}] = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{C}}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}},$$
$$D_A = \left\{\boldsymbol{u} : \boldsymbol{u}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{u}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{0} \wedge \boldsymbol{u}\Big|_{\partial\mathcal{B}_1} = \boldsymbol{0} \wedge \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{C}}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}\Big|_{\partial\mathcal{B}_2} = \boldsymbol{0}\right\}$$

В силу симметрии тензора упругих модулей (26) оператор A самосопряжен в конволютивной билинейной форме (24), в чем легко убедиться, если воспользоваться теоремой о дивергенции, интегрированием по частям относительно переменной t (аналогично преобразованию (17)) и учесть однородность начальных и краевых условий:

$$\begin{aligned}
\langle A[\boldsymbol{u}], \boldsymbol{v}\rangle &= \int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{C}}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}(t-\tau) - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}(t-\tau)\}\cdot\boldsymbol{v}(\tau)\,d\tau\,dV = \\
&= \int\limits_{\partial\mathcal{B}}\int\limits_0^t \boldsymbol{n}\cdot\{\boldsymbol{\mathfrak{C}}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}(t-\tau)\cdot\boldsymbol{v}(\tau) - \boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{v}(\tau):\boldsymbol{\mathfrak{C}}\cdot\boldsymbol{u}(t-\tau)\}\,d\tau\,dA - \\
&\qquad - \int\limits_{\mathcal{B}}\rho\left[\frac{d\boldsymbol{u}(t-\tau)}{d\tau}\boldsymbol{v}(\tau) - \boldsymbol{u}(t-\tau)\frac{d\boldsymbol{v}(\tau)}{d\tau}\right]\Bigg|_0^t dV + \\
&\qquad + \int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \boldsymbol{u}(t-\tau)\cdot\{\boldsymbol{\nabla}\cdot[\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{v}(\tau):\boldsymbol{\mathfrak{C}}] - \rho\ddot{\boldsymbol{v}}(\tau)\}\,d\tau\,dV = \langle\boldsymbol{u}, A[\boldsymbol{v}]\rangle. \qquad (29)
\end{aligned}$$

Теперь может быть сформулировать вариационный принцип, порождаемый оператором $\mathfrak{A}$ и однородными начальными и краевыми условиями

$$\begin{aligned}
I[\boldsymbol{u}] &= \frac{1}{2}\langle\boldsymbol{u}, A[\boldsymbol{u}]\rangle + \langle\boldsymbol{u}, \rho\boldsymbol{K}\rangle = \\
&= \int\limits_{\mathcal{B}}\left\{\int\limits_0^t \boldsymbol{u}(t-\tau)\Big[\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{C}}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}(\tau) + \rho\boldsymbol{K}(\tau) - \frac{1}{2}\rho\ddot{\boldsymbol{u}}(\tau)\Big]\,d\tau\right\}dV, \quad \delta I[\boldsymbol{u}] = 0.
\end{aligned}$$

Для неоднородных начальных и краевых условий функционал $I[\boldsymbol{u}]$ формулируется следующим образом:

$$I[\boldsymbol{u}] = \int\limits_{\mathcal{B}} \left\{ \int\limits_0^t \boldsymbol{u}(t-\tau)\Big[\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathfrak{C}\colon\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}(\tau) + \rho\boldsymbol{K}(\tau) - \frac{1}{2}\rho\ddot{\boldsymbol{u}}(\tau)\Big]\, d\tau \right\} dV -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathcal{B}_1}\int\limits_0^t \boldsymbol{n}\cdot\mathfrak{C}\colon\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}(t-\tau)\cdot\hat{\boldsymbol{u}}(\tau)d\tau\, dA + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathcal{B}_2}\int\limits_0^t \hat{\boldsymbol{f}}(t-\tau)\cdot\boldsymbol{u}(\tau)d\tau\, dA +$$

$$+ \frac{\rho}{2}\int\limits_{\mathcal{B}} \left\{\boldsymbol{u}_0\cdot\dot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{u}(t)\right\}\, dV. \quad (30)$$

В результате применения теоремы о дивергенции и интегрированию по частям по переменной t (аналогично преобразованию (18)), функционал $I[\boldsymbol{u}]$ может быть приведен к виду

$$I[\boldsymbol{u}] = -\int\limits_{\mathcal{B}} \left\{ \int\limits_0^t \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}(t-\tau)\colon\mathfrak{C}\colon\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}(\tau) - \rho\boldsymbol{u}(t-\tau)\cdot\boldsymbol{K}(\tau) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\rho\dot{\boldsymbol{u}}(t-\tau)\dot{\boldsymbol{u}}(\tau)\Big]\, d\tau \right\} dV + \int\limits_{\partial\mathcal{B}_2}\int\limits_0^t \hat{\boldsymbol{f}}(t-\tau)\cdot\boldsymbol{u}(\tau)d\tau\, dA + \rho\int\limits_{\mathcal{B}} \boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{u}(t)\, dV. \quad (31)$$

Следует отметить, что в функционале (31), в отличие от (30), отсутствуют слагаемые, которые содержат перемещения $\hat{\boldsymbol{u}}$, заданные на границе, и начальные смещения $\boldsymbol{u}_0$. Причина этого уже обсуждалась в разделе 2. Функционал (31) существенно отличается от функционала, определяемого в вариационном принципе Остроградского–Гамильтона [3], по структуре близок к функционалу, определяемому в вариационном принципе Гертина [9], но не совпадает с ним. Если предположить, что все поля не зависят от времени (т.е. рассматривается статическое состояние), то из вариационного принципа, постулирующего стационарность функционала (31), вытекает известный принцип виртуальной работы в приближении малых деформаций [13].

Перейдем теперь к нелинейным уравнениям движения сплошной упругой среды, которые в отсчетной конфигурации могут быть записаны следующим образом [13]

$$\boldsymbol{\nabla}_R\cdot\frac{\partial\psi(\boldsymbol{\nabla}_R\otimes\boldsymbol{\chi})}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\otimes\boldsymbol{\chi}} + \rho_0\boldsymbol{K} - \rho_0\ddot{\boldsymbol{\chi}} = \boldsymbol{0}.$$

Здесь $\boldsymbol{\nabla}_R$ — отсчетный оператор Гамильтона, $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X}, t)$ — место частицы $\boldsymbol{X}$ в момент t, ψ — функция запасенной энергии (упругий потенциал), $\boldsymbol{K}$ — массовые силы.

Оператор $\mathfrak{A}$ задается дифференциальным выражением

$$\mathfrak{A}[\boldsymbol{\chi}] = \boldsymbol{\nabla}_R\cdot\frac{\partial\psi(\boldsymbol{\nabla}_R\otimes\boldsymbol{\chi})}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\otimes\boldsymbol{\chi}} + \rho_0\boldsymbol{K} - \rho_0\ddot{\boldsymbol{\chi}}$$

начальными данными

$$\boldsymbol{\chi}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{\chi}_0, \quad \frac{d}{dt}\boldsymbol{\chi}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0$$

и краевыми условиями

$$\boldsymbol{\chi}\Big|_{\partial\mathcal{B}_1} = \hat{\boldsymbol{\chi}}, \quad \boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial\psi(\boldsymbol{\nabla}_R\otimes\boldsymbol{\chi})}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R\otimes\boldsymbol{\chi}}\Big|_{\partial\mathcal{B}_2} = \hat{\boldsymbol{f}},$$

где $\boldsymbol{n}$ — вектор внешней единичной нормали к границе тела в отсчетной конфигурации, $\hat{\boldsymbol{f}}$ — плотность приложенной поверхностной силы на единицу площади в отсчетной конфигурации.

Область определния оператора $\mathfrak{A}$ может быть задана следующим образом:

$$D_{\mathfrak{A}} = \left\{ \boldsymbol{\chi} : \boldsymbol{\chi}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{\chi}_0 \wedge \frac{d}{dt}\boldsymbol{\chi}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0 \wedge \boldsymbol{\chi}\Big|_{\partial\mathcal{B}_1} = \hat{\boldsymbol{\chi}} \wedge \boldsymbol{n}\cdot \frac{\partial\psi(\boldsymbol{\nabla}_R \otimes \boldsymbol{\chi})}{\partial \boldsymbol{\nabla}_R \otimes \boldsymbol{\chi}}\Big|_{\partial\mathcal{B}_2} = \hat{\boldsymbol{f}} \right\}.$$

Производная $\mathfrak{A}' = A$ имеет вид

$$A_{\boldsymbol{\chi}}[\boldsymbol{\chi}^\star] = \boldsymbol{\nabla}_R\cdot \left(\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{\nabla}_R \otimes \boldsymbol{\chi})}{(\partial\boldsymbol{\nabla}_R \otimes \boldsymbol{\chi})(\partial\boldsymbol{\nabla}_R \otimes \boldsymbol{\chi})} \right) : \boldsymbol{\nabla}_R \otimes \boldsymbol{\chi}^\star - \rho_0 \ddot{\boldsymbol{\chi}}^\star,$$

$$D_A = \Big\{ \boldsymbol{\chi}^\star : \boldsymbol{\chi}^\star(0) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{\chi}^\star(0) = \mathbf{0} \wedge \boldsymbol{\chi}^\star_{\partial\mathcal{B}_1} = \mathbf{0} \wedge \\ \wedge\, \boldsymbol{n}\cdot \left(\frac{\partial^2\psi(\boldsymbol{\nabla}_R \otimes \boldsymbol{\chi})}{(\partial\boldsymbol{\nabla}_R \otimes \boldsymbol{\chi})(\partial\boldsymbol{\nabla}_R \otimes \boldsymbol{\chi})} \right) : \boldsymbol{\nabla}_R \otimes \boldsymbol{\chi}^\star = \mathbf{0} \Big\},$$

и является самосопряженным оператором относительно конволютивной билинейной формы. Действительно, вводя обозначение для тензора упругости

$$\boldsymbol{\mathfrak{M}} = \frac{\partial^2\psi}{(\partial\boldsymbol{\nabla}_R \otimes \boldsymbol{\chi})(\partial\boldsymbol{\nabla}_R \otimes \boldsymbol{\chi})}$$

фактически повторяем вычисления (29). При условии $\boldsymbol{\mathfrak{M}} = \boldsymbol{\mathfrak{M}}^{(3412)}$ которое обеспечивается двукратной дифференцируемостью функции запасенной энергии, имеем

$$\langle A_{\boldsymbol{\chi}}[\boldsymbol{u}], \boldsymbol{v}\rangle = \int\limits_{\mathcal{B}} \int\limits_0^t \left\{ \boldsymbol{\nabla}_R \left(\boldsymbol{\mathfrak{M}} : \boldsymbol{\nabla}_R \otimes \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t-\tau) \right) - \rho_0 \ddot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{X}, t-\tau) \right\} \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}, \tau)\, d\tau\, dV =$$

$$= \int\limits_{\partial\mathcal{B}} \int\limits_0^t \boldsymbol{n}\cdot \left[(\boldsymbol{\mathfrak{M}} : \boldsymbol{\nabla}_R \otimes \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t-\tau)) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}, \tau) - \boldsymbol{\nabla}_R \otimes v(\boldsymbol{X}, \tau) : \boldsymbol{\mathfrak{M}} \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t-\tau) \right] d\tau\, dA +$$

$$+ \int\limits_{\mathcal{B}} \int\limits_0^t \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t-\tau) \cdot \left\{ \boldsymbol{\nabla}_R \cdot (\boldsymbol{\nabla}_R \otimes \boldsymbol{v}(\tau) : \boldsymbol{\mathfrak{M}}) - \rho_0 \ddot{\boldsymbol{v}}(\tau) \right\} d\tau\, dV = \langle \boldsymbol{u}, A_{\boldsymbol{\chi}}[v] \rangle.$$

Таким образом, функционал, определяющий вариационный принцип, имеет вид

$$I(\boldsymbol{\chi}) = \left\langle \boldsymbol{\chi}, \int\limits_0^1 \mathfrak{A}[\lambda\boldsymbol{\chi}]\, d\lambda \right\rangle =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{B}} \int\limits_0^t \boldsymbol{\chi}(t-\tau) \cdot \left\{ \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\nabla}_R \cdot \frac{\partial\psi(\lambda\boldsymbol{\nabla}_R \otimes \boldsymbol{\chi}(\tau))}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R \otimes \boldsymbol{\chi}(\tau)} \right] d\lambda + \rho_0 \boldsymbol{K}(\tau) - \frac{1}{2}\rho_0 \ddot{\boldsymbol{\chi}}(\tau) \right\} d\tau\, dV -$$

$$- \int\limits_{\partial\mathcal{B}_1} \int\limits_0^t \boldsymbol{n}\cdot \int\limits_0^1 \frac{1}{\lambda} \frac{\partial\psi(\lambda\boldsymbol{\nabla}_R \otimes \boldsymbol{\chi}(t-\tau))}{\partial\boldsymbol{\nabla}_R \otimes \boldsymbol{\chi}(t-\tau)}\, d\lambda \cdot \hat{\boldsymbol{\chi}}(\tau) d\tau\, dA +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{\partial\mathcal{B}_2} \int\limits_0^t \hat{\boldsymbol{f}}(t-\tau) \cdot \boldsymbol{\chi}(\tau) d\tau\, dA + \frac{\rho_0}{2} \int\limits_{\mathcal{B}} \left\{ \boldsymbol{\chi}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}}(t) + \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{\chi}(t) \right\} dV.$$

Осуществляя преобразования, основанные на дивергентной теореме и интегрировании по частям по переменной t, приходим к следующему выражению для функционала $I(\boldsymbol{\chi})$:

$$I(\boldsymbol{\chi}) = \int\limits_{\mathcal{B}} \left\{ \int\limits_0^t \boldsymbol{\nabla}_R \otimes \boldsymbol{\chi}(t-\tau) : \int\limits_0^1 \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \psi(\lambda \boldsymbol{\nabla}_R \otimes \boldsymbol{\chi}(\tau))}{\partial \boldsymbol{\nabla}_R \otimes \boldsymbol{\chi}(\tau)} \, d\lambda + \rho_0 \boldsymbol{\chi}(t-\tau) \cdot \boldsymbol{K}(\tau) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} \rho_0 \dot{\boldsymbol{\chi}}(t-\tau) \dot{\boldsymbol{\chi}}(\tau) \, d\tau \right\} dV + \int\limits_{\partial \mathcal{B}_2} \int\limits_0^t \hat{\boldsymbol{f}}(t-\tau) \cdot \boldsymbol{\chi}(\tau) d\tau \, dA + \rho_0 \int\limits_{\mathcal{B}} \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{\chi}(t) \, dV. \quad (32)$$

Отметим, что в случае статического деформирования из вариационного принципа, постулирующего стационарность функционала (32), вытекает известный принцип виртуальной работы в отсчетной конфигурации [13].

3. Вариационный принцип в теории связной термоупругости

Предварительно введем следующую билинейную форму:

$$\langle \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) \rangle_1 = \int\limits_{\mathcal{B}} \int\limits_0^t \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t-\tau) \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \tau) \, d\tau \, dV. \quad (33)$$

В симметричности формы (33) легко убедиться непосредственным вычислением. Действительно, интегрируя по частям, приходим к соотношению

$$\int\limits_{\mathcal{B}} \int\limits_0^t \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t-\tau) \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \tau) \, d\tau \, dV = \int\limits_{\mathcal{B}} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t-\tau) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \tau) \, dV \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} -$$
$$- \int\limits_{\mathcal{B}} \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t-\tau) \right) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \tau) \, d\tau \, dV.$$

Поскольку симметричность должна выполняться на функциях, которые которые обращаются в нуль в концевых точках интервала времени, внеинтегральные слагаемые исчезают, т.е.

$$\langle \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) \rangle_1 = \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) \rangle_1 .$$

Рассмотрим линейные уравнения движения и теплопроводности термоупругой среды [4]:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathfrak{C} : \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{u} + \rho \boldsymbol{K} - \rho \ddot{\boldsymbol{u}} - \mathfrak{B} \cdot \boldsymbol{\nabla} \theta = \boldsymbol{0},$$
$$\frac{1}{T_0} \boldsymbol{\Lambda} : \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\nabla} \theta - \frac{c}{T_0} \dot{\theta} - \mathfrak{B} : \boldsymbol{\nabla} \otimes \dot{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{T_0} \varpi = 0$$

Здесь $\boldsymbol{u}$ — перемещения, θ — избыточная температура, $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{(3412)}$ — тензор упругих модулей, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^*$ — тензор термомеханических модулей (определяющих температурное расширение), $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}^*$ — тензор теплопроводности, c — теплоемкость при постоянной деформации, $\boldsymbol{K}$ — плотность массовых сил, ϖ — мощность источников тепла, T_0 — отсчетная температура.

Для постановки начально–краевой задачи кроме дифференциальных уравнений требуется указать начальные распределения перемещений, скоростей и температуры:

$$\boldsymbol{u}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0, \quad \frac{d}{dt} \boldsymbol{u}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0, \quad \theta\Big|_{t=0} = \theta_0$$

и краевые условия, которые в наиболее общем виде могут быть сформулированы следующим образом:

$$\boldsymbol{u}\Big|_{\partial\mathcal{B}_1} = \hat{\boldsymbol{u}}, \quad \boldsymbol{n}\cdot(\mathfrak{C}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u} - \mathfrak{B}\theta)\Big|_{\partial\mathcal{B}_2} = \hat{\boldsymbol{f}},$$
$$\theta\Big|_{\partial\mathcal{B}_3} = \hat{\theta}, \quad \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{\Lambda}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta)\Big|_{\partial\mathcal{B}_4} = \hat{q},$$
$$\partial B_1 \cup \partial B_2 = \partial B, \quad \partial B_3 \cup \partial B_4 = \partial B.$$

Здесь ∂B_1 — часть границы ∂B, на которой заданы перемещения $\hat{\boldsymbol{u}}$, ∂B_2 — часть границы, на которой задано векторное поле поверхностных сил плотностью $\hat{\boldsymbol{f}}$, ∂B_3 — часть границы, на которой задана избыточная температура $\hat{\theta}$, ∂B_4 — часть границы, на которой задан тепловой поток $\hat{q}$.

Оператор $\mathfrak{A}$ может быть представлен в следующей матричной форме

$$\mathfrak{A}[(\boldsymbol{u},\theta)] = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathfrak{C}:\boldsymbol{\nabla}\otimes - \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} & -\mathfrak{B}\cdot\boldsymbol{\nabla} \\ -\mathfrak{B}:\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\otimes & \frac{1}{T_0}\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla} - \frac{c}{T_0}\frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho\boldsymbol{K} \\ \varpi \end{pmatrix}.$$

Область определния оператора $\mathfrak{A}$ определяется начальными и краевыми условиями

$$D_{\mathfrak{A}} = \Big\{ \boldsymbol{u} : \boldsymbol{u}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0 \wedge \frac{d}{dt}\boldsymbol{u}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0 \wedge \theta\Big|_{t=0} = \theta_0 \wedge \boldsymbol{u}\Big|_{\partial\mathcal{B}_1} = \hat{\boldsymbol{u}} \wedge$$
$$\wedge\, \boldsymbol{n}\cdot\mathfrak{C}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}\Big|_{\partial\mathcal{B}_2} = \hat{\boldsymbol{f}} \wedge \theta\Big|_{\partial\mathcal{B}_3} = \hat{\theta} \wedge \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{\Lambda}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta)\Big|_{\partial\mathcal{B}_4} = \hat{q} \Big\}.$$

Производная $\mathfrak{A}' = A$ задается однородным дифференциальным выражением

$$A[(\boldsymbol{u},\theta)] = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathfrak{C}:\boldsymbol{\nabla}\otimes - \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} & -\mathfrak{B}\cdot\boldsymbol{\nabla} \\ -\mathfrak{B}:\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\otimes & \frac{1}{T_0}\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla} - \frac{c}{T_0}\frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \theta \end{pmatrix} \tag{34}$$

и однородными начально–краевыми условиями, т.е.

$$D_A = \Big\{ \boldsymbol{u} : \boldsymbol{u}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{u}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{0} \wedge \theta\Big|_{t=0} = 0 \wedge$$
$$\wedge\, \boldsymbol{u}\Big|_{\partial\mathcal{B}_1} = \boldsymbol{n}\cdot\mathfrak{C}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}\Big|_{\partial\mathcal{B}_2} = \boldsymbol{0} \wedge \theta\Big|_{\partial\mathcal{B}_3} = \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{\Lambda}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta)\Big|_{\partial\mathcal{B}_4} = 0 \Big\}.$$

Рассмотрим следующую билинейную форму[2]:

$$\langle(\boldsymbol{u}_1,\theta_1),(\boldsymbol{u}_2,\theta_2)\rangle_2 = \langle\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\rangle_1 - \langle\theta_1,\theta_2\rangle = \langle\boldsymbol{u}_1,\dot{\boldsymbol{u}}_2\rangle - \langle\theta_1,\theta_2\rangle =$$
$$= \int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \{\boldsymbol{u}_1(t-\tau)\cdot\dot{\boldsymbol{u}}_2(\tau) - \theta_1(t-\tau)\theta_2(\tau)\}\, d\tau\, dV. \tag{35}$$

[2]В вариационном принципе Белли использована классическая конволютивная форма, а соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа — интегродифференциальные. В этом состоит главное отличие предлагаемого вариационного принципа от принципа Белли [10].

Докажем, что оператор (34) самосопряжен относительно билинейной формы (35):

$$\langle A[(\boldsymbol{u}_1,\theta_1)],(\boldsymbol{u}_2,\theta_2)\rangle =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathfrak{C}:\boldsymbol{\nabla}\otimes - \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} & -\mathfrak{B}\cdot\boldsymbol{\nabla} \\ -\mathfrak{B}:\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\otimes & \frac{1}{T_0}\boldsymbol{\Lambda}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla} - \frac{c}{T_0}\frac{\partial}{\partial t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1\\ \theta_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_2\\ \theta_2\end{pmatrix}\right\rangle =$$

$$= \langle \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathfrak{C}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}_1 - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}_1,\dot{\boldsymbol{u}}_2\rangle + \langle -\mathfrak{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta_1,\dot{\boldsymbol{u}}_2\rangle -$$

$$- \langle -\mathfrak{B}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\dot{\boldsymbol{u}}_1,\theta_2\rangle - \left\langle \frac{1}{T_0}\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla}\theta_1 - \frac{c}{T_0}\dot{\theta}_1,\theta_2\right\rangle.$$

Первое слагаемое (подобное преобразование уже было рассмотрено в упругом случае) преобразуется следующим образом:

$$\langle \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathfrak{C}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}_1 - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}_1,\dot{\boldsymbol{u}}_2\rangle =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathfrak{C}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}_1(t-\tau) - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}_1(t-\tau)\}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}_2(\tau)\,d\tau\,dV =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \dot{\boldsymbol{u}}_1(t-\tau)\cdot\{\boldsymbol{\nabla}\cdot[\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}_2(\tau):\mathfrak{C}] - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}_2(\tau)\}\cdot\,d\tau\,dV =$$

$$= \langle \dot{\boldsymbol{u}}_1, \boldsymbol{\nabla}\cdot[\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}_2:\mathfrak{C}] - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}_2\rangle.$$

Второе слагаемое преобразуется аналогично сделанному выше:

$$\langle -\mathfrak{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta_1,\dot{\boldsymbol{u}}_2\rangle =$$

$$= -\int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \mathfrak{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta_1(t-\tau)\cdot\dot{\boldsymbol{u}}_2(\tau)\,d\tau\,dV = \int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \theta_1(t-\tau)\mathfrak{B}^*:\boldsymbol{\nabla}\otimes\dot{\boldsymbol{u}}_2(\tau)\,d\tau\,dV =$$

$$= \langle \theta_1, \mathfrak{B}^*:\boldsymbol{\nabla}\dot{\boldsymbol{u}}_2\rangle.$$

Наконец, для третьего и четвертого слагаемых справедливы соотношения

$$\langle -\mathfrak{B}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\dot{\boldsymbol{u}}_1,\theta_2\rangle =$$

$$= -\int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \mathfrak{B}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\dot{\boldsymbol{u}}_1(t-\tau)\,\theta_2(\tau)\,d\tau\,dV = \int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \dot{\boldsymbol{u}}_1(t-\tau)\cdot\mathfrak{B}^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta_2(\tau)\,d\tau\,dV =$$

$$= \langle \dot{\boldsymbol{u}}_1, \mathfrak{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta_2\rangle,$$

$$\left\langle \frac{1}{T_0}\boldsymbol{\Lambda}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla}\theta_1 - \frac{c}{T_0}\dot{\theta}_1,\theta_2\right\rangle =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \left\{\frac{1}{T_0}\boldsymbol{\Lambda}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla}\theta_1(t-\tau) - \frac{c}{T_0}\dot{\theta}_1(t-\tau)\right\}\,\theta_2(\tau)\,d\tau\,dV =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \theta_1(t-\tau)\,\left\{\frac{1}{T_0}\boldsymbol{\Lambda}^*:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla}\theta_2(\tau) - \frac{c}{T_0}\dot{\theta}_1(\tau)\right\}\,d\tau\,dV =$$

$$= \left\langle \theta_1, \frac{1}{T_0}\boldsymbol{\Lambda}^*:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla}\theta_2 - \frac{c}{T_0}\dot{\theta}_2\right\rangle.$$

Таким образом,

$$\langle A[(\boldsymbol{u}_1,\theta_1)],(\boldsymbol{u}_2,\theta_2)\rangle =$$
$$= \left\langle \begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1\\ \theta_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathfrak{C}^{(3412)}:\boldsymbol{\nabla}\otimes - \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} & -\mathfrak{B}^*\cdot\boldsymbol{\nabla} \\ -\mathfrak{B}^*:\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\otimes & \frac{1}{T_0}\boldsymbol{\Lambda}^*:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla} - \frac{c}{T_0}\frac{\partial}{\partial t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_2\\ \theta_2\end{pmatrix}\right\rangle$$

и при условиях

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{(3412)}, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}^*, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}^*$$

оператор A самосопряжен относительно билинейной формы (35):

$$\langle A[(\boldsymbol{u}_1,\theta_1)],(\boldsymbol{u}_2,\theta_2)\rangle_2 = \langle(\boldsymbol{u}_1,\theta_1),A[(\boldsymbol{u}_2,\theta_2)]\rangle_2\,.$$

Это позволяет сформулировать вариационный принцип следующим образом:

$$I[(\boldsymbol{u},\theta)] = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \Bigg\{\dot{\boldsymbol{u}}(t-\tau)\cdot\Big[\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathfrak{C}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}(\tau) + 2\rho\boldsymbol{K} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}(\tau) - \mathfrak{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta(\tau)\Big] -$$
$$- \theta(t-\tau)\Big[\frac{1}{T_0}\boldsymbol{\Lambda}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla}\theta(\tau) - \frac{c}{T_0}\dot{\theta}(\tau) - \mathfrak{B}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\dot{\boldsymbol{u}}(\tau) + \frac{2}{T_0}\varpi\Big]\Bigg\}\,d\tau\,dV -$$
$$- \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathcal{B}_1}\int\limits_0^t \boldsymbol{n}\cdot(\mathfrak{C}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}(t-\tau) - \mathfrak{B}\theta(t-\tau))\cdot\hat{\boldsymbol{u}}(\tau)d\tau\,dA +$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathcal{B}_2}\int\limits_0^t \hat{\boldsymbol{f}}(t-\tau)\cdot\boldsymbol{u}(\tau)d\tau\,dA + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathcal{B}_3}\int\limits_0^t \boldsymbol{n}\cdot\left(\frac{1}{T_0}\boldsymbol{\Lambda}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta(t-\tau)\right)\hat{\theta}(\tau)d\tau\,dA -$$
$$- \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathcal{B}_4}\int\limits_0^t \hat{q}(t-\tau)\theta(\tau)d\tau\,dA + \int\limits_{\mathcal{B}}\left\{\frac{\rho}{2}\left(\boldsymbol{u}_0\cdot\dot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{u}(t)\right) - \frac{c}{2T_0}\theta_0\theta(t)\right\}\,dV.$$

Наличие антисимметричных относительно дивергентного преобразования членов

$$\int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \dot{\boldsymbol{u}}(t-\tau)\cdot\mathfrak{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta(\tau)\,d\tau\,dV = -\int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \theta(t-\tau)\mathfrak{B}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\dot{\boldsymbol{u}}(\tau)\,d\tau\,dV$$

позволяет упростить вид функционала (слагаемые, определяемые неоднородными краевыми и начальными условиями, не выписаны)

$$I[(\boldsymbol{u},\theta)] = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \Bigg\{\dot{\boldsymbol{u}}(t-\tau)\cdot\Big[\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathfrak{C}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}(\tau) + 2\rho\boldsymbol{K} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}(\tau) - 2\mathfrak{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta(\tau)\Big] -$$
$$- \theta(t-\tau)\Big[\frac{1}{T_0}\boldsymbol{\Lambda}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla}\theta(\tau) - \frac{c}{T_0}\dot{\theta}(\tau) + \frac{2}{T_0}\varpi\Big]\Bigg\}\,d\tau\,dV.$$

4. Вариационный принцип в теории вязкоупругости

Обсуждаемая методология позволяет построить вариационные принципы и для существенно диссипативных процессов, таких как движение вязкоупругой и наследственно–упругой среды [14]. Ниже приведем краткую схему построения подобных вариационных принципов.

Линейные уравнения движения сплошной вязкоупругой анизотропной среды дифференциального типа могут быть сформулированы следующим образом:

$$\nabla\cdot\sum_{k=0}^{n}\mathfrak{C}_k:\nabla\otimes\frac{d^k\boldsymbol{u}}{dt^k}+\rho\boldsymbol{K}-\rho\ddot{\boldsymbol{u}}=\mathbf{0}.$$

Здесь $\mathfrak{C}_k=\mathfrak{C}_k^{(3412)}$ — тензоры вязкоупругих модулей среды.

Из обобщения соотношения (21) вытекает самосопряженность однородных операторов, порождаемых этими уравнениями. Соответствующий вариационный принцип имеет вид (слагаемые, определяемые неоднородными краевыми и начальными условиями, не выписаны):

$$I[\boldsymbol{u}]=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{B}}\left\{\int\limits_0^t\boldsymbol{u}(t-\tau)\Big[\sum_{k=0}^{n}\nabla\cdot\mathfrak{C}_k:\nabla\otimes\frac{d^k}{d\tau^k}\boldsymbol{u}(\tau)+2\rho\boldsymbol{K}-\rho\ddot{\boldsymbol{u}}(\tau)\Big]\,d\tau\right\}dV,\ \delta I[\boldsymbol{u}]=0.$$

Линейные уравнения движения сплошной наследственной анизотропной среды, могут быть записаны в следующей форме

$$\nabla\cdot\int\limits_0^t\mathfrak{C}(t-\tau):\nabla\otimes\boldsymbol{u}(\tau)\,d\tau+\rho\boldsymbol{K}-\rho\ddot{\boldsymbol{u}}=\mathbf{0}.$$

Здесь $\mathfrak{C}=\mathfrak{C}(t-\tau)$ — тензорное разностное ядро, определяющее закон состояния наследственно–упругих сред. Из обобщения (23) следует самосопряженность однородных операторов, порождаемых этими уравнениями. Соответствующий вариационный принцип имеет вид (слагаемые, определяемые неоднородными краевыми и начальными условиями, не выписаны):

$$I[\boldsymbol{u}]=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{B}}\left\{\int\limits_0^t\boldsymbol{u}(t-\tau)\Big[\int\limits_0^\tau\nabla\cdot\mathfrak{C}(\tau-\varsigma):\nabla\otimes\boldsymbol{u}(\varsigma)\,d\varsigma+2\rho\boldsymbol{K}-\rho\ddot{\boldsymbol{u}}(\tau)\Big]\,d\tau\right\}dV,\ \delta I[\boldsymbol{u}]=0.$$

Заключение

Авторам работы представляется целесообразным применение изложенного общего подхода к построению новых вариационных принципов и новых моделей сплошных сред, в частности, моделей непрерывно растущих тел [15]. Следует также отметить, что формулировка задачи в форме вариационного принципа позволяет использовать прямые вариационные методы для построения замкнутых решений краевых задач [16], получать с помощью формальных алгоритмов новые уравнения и краевые условия с усложненной кинематикой, возникающие, например, в теории пласти и оболочек [17], осуществлять контроль сходимости решений, получаемых методами спектральных разложений [18] и т.д. и потому является весьма ценной формой представления задачи как для теории, так и для приложений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-01-91302-ИНД-а, 08-01-00553-а, 09-08-01194-а).

Список литературы

[1] Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.

[2] Вайнберг М.М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М.: ГИТТЛ, 1956. 344 с.

[3] Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.

[4] Новацкий В. Теория упругости. М.:Мир, 1975. 872 с.

[5] Микусинский Я. Операторное исчисление. М.: Изд–во иностр. лит-ры, 1956. 366 с.

[6] Gurtin M.E. Variational principles for linear initial–value problems // Quart. Appl. Math. 1964. № 22. P. 252–256.

[7] Tonti E. On the variational formulation for linear initial value problems // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 1973. Vol.95. № 1. P. 231–259.

[8] Reddy J.N. A note on mixed variational principles for initial–value problems // Quart. J. Mech. Appl. 1975. № 28. P. 123–132.

[9] Gurtin M.E. Variational principles for linear elastodynamics // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1964. Vol.16. № 1. P. 34–50.

[10] Belli G., Morosi C. A variational principle for the dynamic problem of linear coupled thermoelasticity // Meccanica. 1974. Vol.9. № 4. P. 239–243.

[11] Buchanan G.R. A note on a variational principle for crystal physics // Computational Mechanics. 1987. № 2. P. 163–166.

[12] Boshi E. A variational theorem in the theory of porous media // Il nuovo cimento. 1973. Vol. 16. № 2. P. 301–310.

[13] Сьярле Ф. Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992. 471 с.

[14] Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Изд-во РА, 1999. 320 с.

[15] Manzhirov A.V., Lychev S.A. Mathematical modeling og growth processes in nature and engineering: A variational approach // Journal of Physics: Conference Series. 2009. In press.

[16] Лычев С.А., Салеев С.В. Замкнутое решение задач об изгибе жестко закрепленной прямоугольной пластины // Вестник Самарского гос. ун-та. Естественнонаучная серия. 2006. № 2. С. 62–73.

[17] Лычев С.А., Сайфутдинов Ю.Н. Уравнения движения трехслойной вязкоупругой сферической оболочки // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2005. № 6. С. 70–88.

[18] Лычев С.А. Связанная задача динамики для термовязкоупругого тела // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 5. С. 95–113.