УДК 539.3

Динамика трехслойных сферических оболочек несимметричной структуры

Сеницкий Ю. Э., Лычев С. А.

Получены новые волновые уравнения движения, на их основе построено точное решение соответствующей начально-краевой задачи и произведен анализ осесимметричной динамической реакции трехслойной сферической оболочки. Рассмотрен наиболее общий случай упругого закрепления опорного контура.

В отличие от известных работ [1], [2], [3], [4], [5] исследование выполнено для оболочек с несимметричной структурой слоев и при более строгой формулировке граничных условий трехслойной конструкции. Существенным также представляется возможность учета внутренних резонансов (кратных собственных частот). Для этой цели применяются специально разработанные конечные интегральные преобразования (КИП) с матричным ядром, осуществляющие разложение по полной системе собственных и присоединенных вектор-функций.

1. На основе гипотезы ломанной нормали и в предположении, что средний слой толщиной h_1 испытывает деформации сдвига и инерцию вращения, а внешние слои (h_2, h_3) - мембранное напряженно-деформированное состояние, сформулируем начально-краевую задачу в безразмерной форме. Введем безразмерное время $t = \tilde{t}R^{-1}\left[\rho_1\left(1-\nu_1^2\right)/E_1\right]^{-1/2}$, и относительные физико-геометрические параметры:

$$E_* = E_2h_2/\left(E_1h_1\right),\ E^* = E_3h_3/\left(E_1h_1\right),\ \rho_* = \rho_2h_2/\left(\rho_1h_1\right),\ \rho^* = \rho_3h_3/\left(\rho_1h_1\right),\ R^* = R/h_1.$$

Здесь E_n - модуль упругости, ν_n - коэффициент Пуассона, ρ_n удельная масса материала n-го слоя**,** h_n - толщины слоев, R - радиус кривизны оболочки.

Меридиональные $u^{(n)}$ и нормальные $w^{(n)}$ перемещения произвольной точки n-го слоя связаны с соответствующими перемещениями u, w нейтральной поверхности Ω и углом поворота нормали к ней ψ соотношениями:

$$u^{(1)} = u + z\psi, \quad u^{(2)} = u - h_+\psi, \quad u^{(3)} = u + h_-\psi; \quad w^{(1)} = w^{(2)} = w^{(3)}; \quad h_+ + h_- = h_1.$$

Индекс 1 относится к среднему а индексы 2, 3 - к внутреннему и наружному слоям оболочки; h_+, h_- - расстояния от Ω до внешней и внутренней лицевых поверхностей.

Из принципа Гамильтона-Остроградского получены уравнения осесимметричного движения:

$$\mathbf{L}[\vec{y}(\theta,t)] - \mathbf{H}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{y}(\theta,t) = \vec{f}(\theta,t), \quad \mathbf{L} \equiv \mathbf{a}_0\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \mathbf{a}_1(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{a}_2(\theta), \tag{1}$$

$$\mathbf{a}_0 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1(\theta) = \begin{pmatrix} A\,\mathrm{ctg}\theta & B+K & 0 \\ -(B+K) & K\,\mathrm{ctg}\theta & K-J \\ 0 & J-K & D\,\mathrm{ctg}\theta \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a}_2(\theta) = \begin{pmatrix} C - A/\sin^2\theta - K & 0 & K-J \\ -(B+K)\,\mathrm{ctg}\theta & -2B & K\,\mathrm{ctg}\theta \\ J-K & 0 & F - K - D/\sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & I_2 \\ 0 & I_1 & 0 \\ I_2 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

соответствующие граничные и начальные условия:

$$\left[\mathbf{b}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{y}(\theta,t) + \mathbf{c}(\theta)\vec{y}(\theta,t) - \mathbf{Z}_1\vec{y}(\theta,t)\right]_{\theta=\theta_1} = 0, \quad \left[\mathbf{b}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{y}(\theta,t) + \mathbf{c}(\theta)\vec{y}(\theta,t) + \mathbf{Z}_2\vec{y}(\theta,t)\right]_{\theta=\theta_2} = 0, \tag{3}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}(\theta) = \begin{pmatrix} (A-C)\,\mathrm{ctg}\theta & 2B & J\,\mathrm{ctg}\theta \\ -K & 0 & K \\ J\,\mathrm{ctg}\theta & J & (D-F)\,\mathrm{ctg}\theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}_{1,2} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,2} & 0 & \chi_{1,2} \\ 0 & \beta_{1,2} & 0 \\ \chi_{1,2} & 0 & \gamma_{1,2} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\vec{u}|_{t=0} = \left(R\,\tilde{u}_0, R\,\tilde{w}_0, \psi_0\right), \quad \tfrac{\partial}{\partial t}\vec{u}\big|_{t=0} = \left(R\,\dot{\tilde{u}}_0, R\,\dot{\tilde{w}}_0, \dot{\psi}_0\right). \tag{5}$$

где

$$A = 1 + E_*\frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_2^2} + E^*\frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_3^2}, \qquad D = \frac{1}{4R^{*2}}\left[\tfrac{1}{3} + \hat{h}^2 + E_*\frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_2^2}\left(1+\hat{h}\right) + E^*\frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_3^2}\left(1-\hat{h}\right)\right],$$

$$B = \left(1+\nu_1\right)\left[1 + E_*\frac{1-\nu_1}{1-\nu_2} + E^*\frac{1-\nu_1}{1-\nu_3}\right], \quad F = \frac{1-\nu_1}{4R^{*2}}\left[\tfrac{1}{3} + \hat{h}^2 + E_*\frac{1+\nu_1}{1+\nu_2}\left(1+\hat{h}\right) + E^*\frac{1+\nu_1}{1+\nu_3}\left(1-\hat{h}\right)\right],$$

$$C = \left(1-\nu_1\right)\left[1 + E_*\frac{1+\nu_1}{1+\nu_2} + E^*\frac{1+\nu_1}{1+\nu_3}\right], \quad J = \frac{1-\hat{h}}{R^*}\left[\left(\nu_1-\nu_3\right)E^*\frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_3^2} - \left(\nu_1-\nu_2\right)E_*\frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_2^2}\right],$$

$$K = \frac{\kappa^2}{2}\left(1-\nu_1\right), \quad \kappa = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}, \quad \hat{h} = 1 - \frac{1}{A}\left[1 + 2E_*\frac{1-\nu_1^2}{1-\nu_2^2}\right], \quad h_+ = \frac{h_1}{2}\left(1-\hat{h}\right), \quad h_- = \frac{h_1}{2}\left(1+\hat{h}\right),$$

$$I_1 = 1 - \frac{\hat{h}}{R^*} + \frac{\hat{h}^2 + 1/3}{4R^{*2}} + \rho_*\left[1 - \frac{1+\hat{h}}{2R^*}\right]^2 + \rho^*\left[1 + \frac{1-\hat{h}}{2R^*}\right]^2,$$

$$I_2 = \frac{1}{2R^*}\left\{\frac{\hat{h}^2 + 1/3}{R^*} - \hat{h} - \frac{\hat{h}^3 + \hat{h}}{4R^{*2}} - \rho_*\left[1 - \frac{1+\hat{h}}{2R^*}\right]^2\left(1+\hat{h}\right) + \rho^*\left[1 + \frac{1-\hat{h}}{2R^*}\right]^2\left(1-\hat{h}\right)\right\},$$

$$I_3 = \frac{1}{4R^{*2}}\left\{1/3 + \hat{h}^2 + \frac{\hat{h}^3 + \hat{h}}{R^*} + \frac{\hat{h}^4 + \hat{h}^2 + 1/10}{2R^{*2}} + \rho_*\left[1 - \frac{1+\hat{h}}{2R^*}\right]^2\left(1+\hat{h}\right)^2 + \rho^*\left[1 + \frac{1-\hat{h}}{2R^*}\right]^2\left(1-\hat{h}\right)^2\right\}.$$

Здесь $\hat{h}$ - смещение нейтральной поверхности, определяющее положение Ω, κ - коэффициент поперечного сдвига. Упругие характеристики опорного контура $\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}, \gamma_{1,2}, \chi_{1,2}$ представляют собой реакции на соответствующие единичные перемещения. Внешние воздействие $\vec{\mathbf{f}}(\theta,t)$ запишем в виде:

$$\vec{\mathbf{f}}(\theta,t)=\frac{1-\nu_1^2}{R^2\,E_1h_1}\begin{pmatrix} R\,R_+\,\tilde{f}_\theta^{+}(\theta,t)+R\,R_-\,\tilde{f}_\theta^{-}(\theta,t)\\ R\,R_+\,\tilde{f}_z^{+}(\theta,t)+R\,R_-\,\tilde{f}_z^{-}(\theta,t)\\ h_+R_+\,\tilde{f}_\theta^{+}(\theta,t)-h_-R_-\,\tilde{f}_\theta^{-}(\theta,t)\end{pmatrix},\quad R_+=R+h_++h_3,\quad R_-=R-h_--h_2,$$

где $\tilde{f}_z^{+}(\theta,t),\ \tilde{f}_\theta^{+}(\theta,t),\ \tilde{f}_z^{-}(\theta,t),\ \tilde{f}_\theta^{-}(\theta,t)$ - соответственно проекции распределенных сил, приложенных к лицевым поверхностям, на нормаль и касательную к меридиану.

Внутренние усилия могут быть вычислены по формулам:

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_{\theta\theta}^{(n)}&=\frac{E_nh_n}{1-\nu_n^2}\left\{\frac{\partial u}{\partial\theta}+(\nu_n+1)w+\nu_n\,\mathrm{ctg}\theta\,u-\frac{e^{(n)}}{2}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\nu_n\,\mathrm{ctg}\theta\,\psi\right]\right\},\\
\tilde{N}_{\varphi\varphi}^{(n)}&=\frac{E_nh_n}{1-\nu_n^2}\left\{\mathrm{ctg}\theta\,u+(\nu_n+1)w+\nu_n\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{e^{(n)}}{2}\left[\mathrm{ctg}\theta\,\psi+\nu_n\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right]\right\},\\
\tilde{Q}_\theta&=\frac{E_1h_1\kappa^2}{2+2\,\nu_1}\left[\frac{\partial w}{\partial\theta}+\psi-u\right],\quad e^{(1)}=h_1\hat{h},\quad e^{(2)}=h_1(\hat{h}+1),\quad e^{(3)}=h_1(\hat{h}-1),
\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}
M_{\theta\theta}&=\frac{E_1h_1^2}{R(1-\nu_1^2)}\left\{\frac{h_1(1+3\hat{h})}{12}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\nu_1\,\mathrm{ctg}\theta\,\psi\right]-\frac{\hat{h}}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial\theta}+(\nu_1+1)w+\nu_1\,\mathrm{ctg}\theta\,u\right]\right\},\\
M_{\varphi\varphi}&=\frac{E_1h_1^2}{R(1-\nu_1^2)}\left\{\frac{h_1(1+3\hat{h})}{12}\left[\mathrm{ctg}\theta\,\psi+\nu_1\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right]-\frac{\hat{h}}{2}\left[\mathrm{ctg}\theta\,u+(\nu_1+1)w+\nu_1\frac{\partial u}{\partial\theta}\right]\right\}.
\end{aligned}\tag{7}$$

Следует отметить, что в случае симметричной структуры слоев $\hat{h}=0$ а уравнения (1), (2), краевые условия (3), (4) и формулы (6), (7) преобразуются к известному виду [2].

2. Для построения общего решения, учитывающего кратные собственные частоты, в соответствии с алгоритмической процедурой КИП [6] получаем следующее представление для трансформанты с соответствующей формулой обращения:

$$\begin{aligned}
\vec{\varphi}(\lambda,t)=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathbf{Y}(\theta,\lambda)^{\mathrm{T}}\Big\{&\mathrm{H}\left[\vec{y}_0(\theta)\cos\left(\lambda^{1/2}t\right)+\lambda^{-1/2}\dot{\vec{y}}_0(\theta)\sin\left(\lambda^{1/2}t\right)\right]-\\
&-\lambda^{-1/2}\int_0^t\vec{f}(\theta,\tau)\sin\left(\lambda^{1/2}(t-\tau)\right)d\tau\Big\}\sin\theta\,d\theta,
\end{aligned}\tag{8}$$

$$\vec{\mathbf{y}}(\theta,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{Y}(\theta,\lambda_i)\,\mathbf{V}(\lambda_i)\,\vec{\varphi}(\lambda_i,t),\quad \lambda_i\in\Lambda.\tag{9}$$

Здесь $\mathbf{Y}(\theta,\lambda)=\left(\vec{\mathbf{v}}_1(\theta,\lambda)\ldots\vec{\mathbf{v}}_6(\theta,\lambda)\right)$ - фундаментальная матрица решений уравнения:

$$\mathbf{L}\left[\vec{\mathbf{v}}_k(\theta,\lambda)\right]=-\lambda\,\mathbf{H}\,\vec{\mathbf{v}}_k(\theta,\lambda),\ k=1,2,\ldots6,\tag{10}$$

Λ - спектральное множество:

$$\Lambda=\left\{\lambda_i\ \middle|\ \lambda_i\in\mathbb{C},\ \det\left[\mathrm{B}(\lambda_i)\right]=0\right\},\quad \mathrm{B}(\lambda)=\begin{pmatrix}\left[\mathbf{b}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbf{Y}(\theta,\lambda)+(\mathbf{c}(\theta)+\mathbf{Z}_1)\,\mathbf{Y}(\theta,\lambda)\right]_{\theta=\theta_1}\\ \left[\mathbf{b}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbf{Y}(\theta,\lambda)+(\mathbf{c}(\theta)-\mathbf{Z}_2)\,\mathbf{Y}(\theta,\lambda)\right]_{\theta=\theta_2}\end{pmatrix},$$

$\mathbf{V}(\lambda_i)$ - ортонормирующая матрица

$$\mathbf{V}(\lambda_i)=\mathbf{S}(\lambda_i)\left[\mathbf{S}(\lambda_i)^T\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathbf{Y}(\theta,\lambda_i)^T\mathbf{H}\,\mathbf{Y}(\theta,\lambda_i)\sin\theta\,d\theta\,\mathbf{S}(\lambda_i)\right]^{-1}\mathbf{S}(\lambda_i)^T, \qquad (11)$$

$\mathbf{S}(\lambda_i)$ - нулевые подпространства матрицы $B(\lambda_i)$. Квадратура в выражении (11) может быть вычислена следующим образом:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathbf{Y}(\theta,\lambda)^T\mathbf{H}\,\mathbf{Y}(\theta,\lambda)\sin\theta\,d\theta=$$

$$=\left\{\left[\frac{\partial\mathbf{Y}(\theta,\lambda)^T}{\partial\lambda}\mathbf{a}_0\frac{\partial\mathbf{Y}(\theta,\lambda)}{\partial\theta}-\frac{\partial^2\mathbf{Y}(\theta,\lambda)^T}{\partial\lambda\partial\theta}\mathbf{a}_0\,\mathbf{Y}(\theta,\lambda)+\frac{\partial\mathbf{Y}(\theta,\lambda)^T}{\partial\lambda}\left(\mathbf{a}_0-\mathbf{a}_1^T(\theta)\right)\mathbf{Y}(\theta,\lambda)\right]\sin\theta\right\}\Bigg|_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2}. \qquad (12)$$

Принципиальное отличие (8), (9) от обычных разложений метода КИП [6] состоит в том, что трансформанта $\vec{\varphi}(\lambda,t)$ является вектором, а ядро $\mathbf{Y}(\theta,\lambda)$- квадратной матрицей. Возможность появления кратных λ_i при таком представлении учитывается размерностью нулевого подпространства $\mathbf{S}(\lambda_i)$. При этом в ядро преобразования не входят произвольные постоянные решения однородной краевой задачи, что компенсируется в дальнейшем формулой разложения (9). Операция ортогонализации и нормировки собственных и присоединенных векторов заключена в (12).

Частные решения уравнения (10) при $k=1,2,3$ могут быть записаны в виде:

$$\vec{v}_k(\theta,\lambda)=\begin{pmatrix}\left((\lambda I_1-K\nu_k-2B)(\lambda I_3-D\nu_k-W_2)-\nu_k W_5^2\right)P^1_{-\frac{1}{2}+\sqrt{1/4+\nu_k}}(\cos\theta)\\ \nu_k\left(W_5(\lambda I_2-W_5)-(B+K)(\lambda I_3-D\nu_k-W_2)\right)P_{-\frac{1}{2}+\sqrt{1/4+\nu_k}}(\cos\theta)\\ \left((B+K)\nu_k W_5-(\lambda I_2-W_5)(\lambda I_1-K\nu_k-2B)\right)P^1_{-\frac{1}{2}+\sqrt{1/4+\nu_k}}(\cos\theta)\end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Здесь $P_\eta^m(\cos\theta)$ - присоединенные функции Лежандра комплексной степени η порядка m первого; ν_k - корни определяющего кубического уравнения:

$$\nu^3\gamma+\nu^2(\varphi_1\lambda+\varphi_0)+\nu(\psi_2\lambda^2+\psi_1\lambda+\psi_0)+\vartheta_3\lambda^3+\vartheta_2\lambda^2+\vartheta_1\lambda+\vartheta_0=0, \qquad (14)$$

где

$$\gamma=-ADK;\quad \vartheta_3=I_1W_6;\quad \vartheta_2=I_1(I_1(F-K)+2I_2W_5-I_3W_3)-2BW_6;$$
$$\vartheta_1=I_1(W_2(2B-C)-W_1)-2B(2I_2W_5-I_3W_3);\quad \vartheta_0=2B(W_1+CW_2);$$
$$\psi_0=2B(W_2(B/2-A)-W_1-DW_3)-CW_1;\ \psi_1=I_1(AW_2-W_1+D(W_3+2B))+2BI_2W_5-I_3W_4;$$
$$\psi_2=I_2^2K-I_1^2D-I_1I_3(A+K);\ \varphi_0=AW_1-DW_4;\ \varphi_1=I_1D(A+K)+AKI_3;\ W_1=J^2-K(2J+F);$$
$$W_2=K-F;\ W_3=K-C;\ W_4=KC+B(B+2(K-A));\ W_5=J-K;\ W_6=I_1I_3-I_2^2.$$

Частные решения для $k=4,5,6$ и $\nu_4=\nu_1,\nu_5=\nu_2,\nu_6=\nu_3$ определяются выражениями (13) с заменой в них $P_\eta^m(\cos\theta)$ на функции Лежандра второго рода $Q_\eta^m(\cos\theta)$.

В случае кратных корней уравнения $\nu_k=\nu_{k+1}$ (14) полагаем:

$$\vec{\mathbf{v}}_{k+1}(\theta,\lambda)=\frac{\partial}{\partial\lambda}\vec{\mathbf{v}}_k(\theta,\lambda).$$

3. В качестве примера рассмотрим динамическую реакцию трехслойного сферического купола, упруго закрепленного относительно углов поворота. На его внешней поверхности приложена локальная нестационарная динамическая нагрузка $\widetilde{f}_z^+(\theta,t)$, изменяющаяся по степенному закону в зависимости от $\cos\theta$ и t:

$$\widetilde{f}_z^-(\theta,t)=\widetilde{f}_\theta^+(\theta,t)=\widetilde{f}_\theta^-(\theta,t)=0;\quad \widetilde{f}_z^+(\theta,t)=\left(H(\theta_2)-H(\theta_3)\right)\left[\sum_{j=0}^{n}d_j\left(\cos\theta_2-\cos\theta\right)^j\right]\times\sum_{j=0}^{m}g_j t^j. \quad (15)$$

Здесь $H(\theta)$ - единичная функция Хевисайда.

В рассматриваемом примере второе граничное соотношение (3) является условием ограниченности [5], которому удовлетворяют только функции Лежандра первого рода $P_\eta^m(\cos\theta)$. Трансформанта (8) имеет размерность, равную трем, и записывается в виде:

$$\vec{\varphi}(\lambda,t)=\left(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\right)^T;\quad \varphi_k=\lambda^{-1/2}\nu_k\left(W_5\left(\lambda I_2-W_5\right)-(B+K)\left(\lambda I_3-D\nu_k-W_2\right)\right)\times$$

$$\times\left\{\left[\sum_{j=0,2,4}^{m}g_j\frac{(-1)^{j/2}\,j!}{\sqrt{\lambda^{j+1}}}\right]\cos\left(\sqrt{\lambda}t\right)+\left[\sum_{j=1,3,5}^{m}g_j\frac{(-1)^{j/2}\,j!}{\sqrt{\lambda^{j+1}}}\right]\sin\left(\sqrt{\lambda}t\right)-\sum_{k=1}^{m}\left[t^k\sum_{j=0,2,4}^{m-k}g_{k+j}\frac{(-1)^{j/2}\,(k+1)_j}{\sqrt{\lambda^{j+1}}}\right]\right\}\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{n}d_j(-1)^j(j+1)!\left[\left(\sin\theta_3\right)^{j+1}P^{-j-1}_{-\frac{1}{2}+\sqrt{1/4+\nu_k}}\left(\cos\theta_3\right)-\left(\sin\theta_2\right)^{j+1}P^{-j-1}_{-\frac{1}{2}+\sqrt{1/4+\nu_k}}\left(\cos\theta_2\right)\right],\quad k=1,2,3.$$

где - $(a)_j$ - символ Похгаммера.

Ниже приведены числовые результаты, полученные при расчете сталебетонного купола защитной оболочки реакторного отделения атомной электростанции (R=30 м, $h_1+h_2+h_3$=1.5 м, θ_1=50°). На рис. 1 показан спектр частот колебаний оболочки в зависимости от относительной толщины, а в табл. 1 первые девять частот (Гц) при различных коэффициентах жесткости γ упругого контура. Следует отметить области внутренних резонансов (кратных собственных частот), показанных на рис. 1 кружками, а также то, что упругие характеристики опорного контура оказывают влияние только на низкочастотную часть спектра.

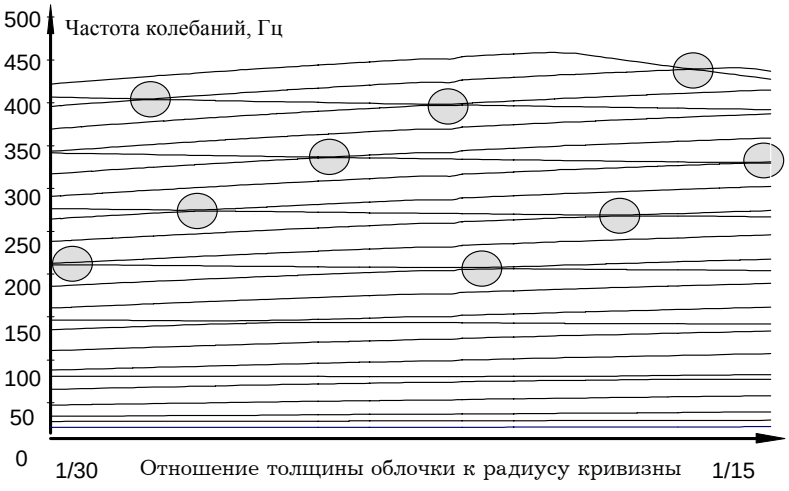

Рис. 1.

№	$\gamma=\infty$	$\gamma=130$	$\gamma=0$
1	20.91	20.27	19.99
2	28.12	27.65	27.20
3	34.11	33.47	33.20
4	47.16	46.54	46.24
5	65.63	65.02	64.72
6	81.00	80.40	80.10
7	88.05	87.45	87.15
8	110.7	110.1	109.8
9	134.9	134.3	134.0

Табл. 1.

На рис. 2 приведены осциллограммы перемещений вершины купола (а) и , а на рис. 3 - внутренние изгибающие моменты в различные моменты времени при частном воздействии (23), которое соответствует скачку давления, локально распределенному в окрестности полюса оболочки . На рис. 3 ярко выражена зона краевого эффекта.

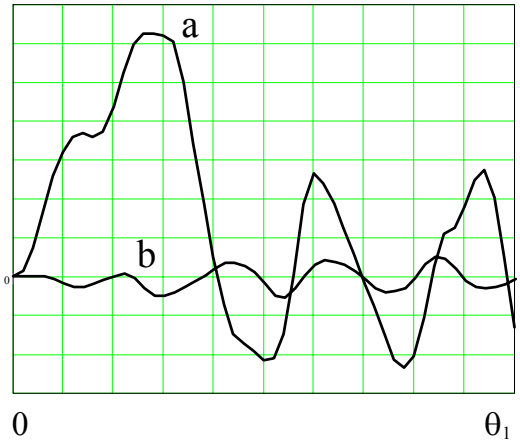

Рис. 2

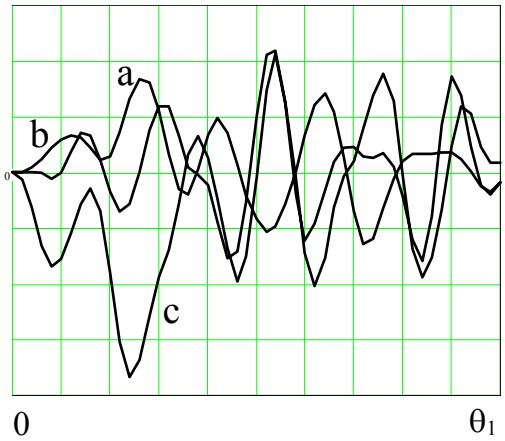

Рис. 3

Литература

א Culkovski P. M., Reismann H. The spherical sandwich shell under axisymmetric static and dynamic loading // J. of Sound and Vibration, 1971, v. 14, № 2, p. 229-240.

ב Koplik B., Yu Yi-Yuan. Axisymmetric vibration of homogenious and sandwich spherical caps // Trans. ASME, J. Appl. Mech., 1967, v. E34, № 3, p. 667-673.

ג Лизарев А. Д., Ростанина Н. Б. Колебания металлополимерных и однородных сферических оболочек - Минск: Наука и техника, 1984. -192 с.

ד Григолюк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек - М.: Машиностроение, 1973. - 170 с.

ה Сеницкий Ю. Э. Нестационарная задача динамики для трехслойной непологой сферической оболочки // Строительная механика и расчет сооружений, № 6, 1990, с. 55-61.

ו Сеницкий Ю. Э. Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики // Известия вузов. Математика, 1991, №4, с. 57-63.

Сеницкий Юрий Эдуардович, 1933г., доктор техн. наук, профессор, зав. кафедрой сопротивления материалов и строительной механики Самарской Государственной архитектурно-строительной академии.
Рабочий адрес: 443001, Самара-1, ул. Молодогвардейская, 194, тел. 33-93-81.
Домашний адрес: 443110, Самара-110, ул. Осипенко, д. 14, кв. 18, тел. 34-24-29.

Лычев Сергей Александрович, 1970 г. - аспирант той же кафедры.
Домашний адрес: 443030, Самара-30, ул. Красноармейская, 127-9, тел. 36-65-87.

E-mail: academy@icc.ssaba.samara.ru