

**ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ:
ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС,
УСТОЙЧИВОСТЬ,
ПЕРЕМЕШИВАНИЕ**

Д.М. Климов, А.Г. Петров Д.В. Георгиевский

2004

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	11
-----------------------	----

Часть первая

Вязкопластические течения: динамический хаос, перемешивание

(Климов Д.М., Петров А.Г.)

Глава 1

Некоторые сведения из механики сплошной среды	16
1.1. Тензоры второго ранга	16
1.2. Пространственное напряженное состояние	18
1.3. Кинематика деформируемой среды	24
1.4. Уравнения движения сплошной среды	27
1.5. Классические модели несжимаемых жидких сред	31
1.6. Плоская задача.	34

Глава 2

Краевые задачи вязкопластического течения.	38
2.1. Уравнения трехмерного движения. Граничные условия	38
2.1.1. Уравнения в тензорной форме	38
2.1.2. Ортогональная криволинейная система координат	39
2.1.3. Уравнения в различных ортогональных системах координат.	41
2.1.4. Граничные условия.	45
2.2. Двумерные движения	46
2.2.1. Уравнения осесимметричного движения.	46
2.2.2. Уравнения плоскопараллельного движения	47
2.3. Уравнения в безразмерной форме. Критерии подобия	49
2.3.1. Безразмерные критерии.	49
2.3.2. Уравнения различных приближений.	51
2.4. Безынерционное приближение.	52
2.4.1. Система уравнений.	52
2.4.2. Функции напряжений	52
2.4.3. Уравнения в цилиндрической системе координат.	54
2.5. Безынерционное плоскопараллельное течение	55
2.5.1. Функция напряжений и функция тока	55
2.5.2. Уравнения Ильюшина.	56

2.5.3. Краевые условия	58
2.6. Вариационные принципы	59
2.6.1. Принцип виртуальной мощности	60
2.6.2. Функционалы и их вариации	61
2.6.3. Вариационные принципы для трехмерных течений	63
2.6.4. Вариационные принципы для двумерных течений	66
Глава 3	
Точные стационарные решения	67
3.1. О методах получения точных решений	67
3.2. Течения между двумя параллельными пластинами	67
3.2.1. Формулировка краевой задачи	67
3.2.2. Решение краевых задач	72
3.3. Течения с осевой симметрией	78
3.3.1. Течение в кольцевом зазоре	79
3.3.2. Течение в круглой трубе	80
3.3.3. Сдвиговое безградиентное течение	81
3.3.4. Течение Куэтта-Тейлора	83
Глава 4	
Точные нестационарные решения	88
4.1. О методах получения точных решений	88
4.2. Течения между двумя параллельными пластинами	88
4.2.1. Формулировка краевой задачи	88
4.2.2. Серия точных решений, описывающая торможение среды	92
4.2.3. Двойственная серия точных решений при отсутствии ядра в конечный момент времени	97
4.2.4. Серии точных решений с постоянной шириной ядра	100
4.2.5. Приложение к разд. 4.2	105
4.3. Точные решения задачи нестационарного течения в круглой трубе	108
4.3.1. Формулировка краевой задачи	109
4.3.2. Серии точных решений	110
Глава 5	
Асимптотические решения	119
5.1. Течение в тонком деформирующемся слое	119
5.1.1. Криволинейные координаты в тонком слое	119
5.1.2. Вывод уравнений в приближении тонкого слоя	120
5.1.3. Анализ уравнений вязкопластического течения в тонком слое	123
5.1.4. Вытеснение среды двумя параллельными пластинами	125
5.1.5. Вытеснение среды двумя параллельными дисками	131
5.2. Развитие течения вязкопластической среды между двумя параллельными пластинами	136

Глава 6	
Гамильтоновы системы	146
6.1. Сведение задачи о движении частиц к гамильтоновой системе	146
6.2. Первый интеграл гамильтоновой системы	148
6.3. Канонические преобразования	151
6.3.1. Определение и общие свойства	151
6.3.2. Теорема об интегральном инварианте Пуанкаре-Картана	154
6.3.3. Общий критерий каноничности преобразований	156
6.3.4. Отображение малой области	158
6.3.5. Производящие функции	159
6.3.6. Теория последования Пуанкаре для неавтономных гамильтоновых систем	163
6.4. Параметризация канонических преобразований	165
6.4.1. Определение и общие свойства параметризуемых канонических преобразований	165
6.4.2. Примеры параметризации	168
6.4.3. Параметризация отображений на фазовом потоке гамильтоновой системы	170
6.5. Асимптотические методы	173
6.5.1. Краткие сведения об асимптотических методах	173
6.5.2. Исследование систем стандартного вида с помощью параметризации отображения Пуанкаре	179
6.5.3. Сравнение параметрического метода и метода производящих функций	185
6.5.4. Алгоритм инвариантной нормализации гамильтониана с помощью параметризации	187
Глава 7	
Перемешивание в вязкопластических средах	198
7.1. Динамический хаос	198
7.1.1. Упорядоченное и хаотическое движения	198
7.1.2. Качественный анализ гамильтоновой системы стандартной формы	199
7.1.3. Методы исследования хаотических движений	200
7.2. Перемешивание в тонком деформирующемся слое	202
7.2.1. Функция тока как гамильтониан для движения частиц вязкой и вязкопластической сред	202
7.2.2. Движение частиц вязкой и вязкопластической сред при отсутствии касательной скорости на границе	204
7.2.3. Движение частиц вязкой жидкости при наличии касательной скорости на границе	208
7.3. Перемешивание между вращающимися цилиндрами	214
7.3.1. Краткий обзор результатов	214
7.3.2. Вращение внутреннего цилиндра около центра, не совпадающего с центрами цилиндров	216

7.3.3. Движение частиц вязкой жидкости в слое между эксцентрично вращающимися цилиндрами	219
--	-----

Часть вторая

Вязкопластические течения: устойчивость

(Климов Д.М., Георгиевский Д.В.)

Глава 8

Модели изотропных упруго-вязкопластических сред	240
8.1. Изотропные тензорные функции	241
8.1.1. Тензорный вид определяющих соотношений	241
8.1.2. Инварианты тензорных функций	242
8.1.3. Потенциальные тензорные функции	243
8.2. Нелинейные упруго-вязкопластические модели	244
8.2.1. Материальные функции определяющих соотношений	244
8.2.2. Представление материальных функций в виде кратных степенных рядов	245
8.2.3. Классификация несжимаемых сплошных сред (жидкостей)	246
8.2.4. Тензорно нелинейные упругие среды	247
8.2.5. Тензорно нелинейные упруго-вязкопластические среды	248
8.3. Совместное растяжение и сдвиг	250
8.3.1. Трёхосное растяжение—сжатие	250
8.3.2. Одномерный плоскопараллельный сдвиг	251
8.3.3. Эффекты совместного процесса нагружения	253
8.3.4. Эффекты второго порядка. Эффекты Пойнтинга и Малышева (рэтчет)	254
8.4. Нелинейные вязкопластические модели	256
8.4.1. Квазилинейные (тензорно линейные) среды	256
8.4.2. Вязкопластические среды. Среда Шведова — Бингама	256
8.4.3. Жёсткие (упругие, вязкоупругие) зоны	258
8.4.4. Установочные эксперименты. Ротационные и капиллярные вискозиметры	259
8.5. Реология дисперсных систем и крови	261
8.5.1. Нефтедержащие смеси. Глинистые растворы	261
8.5.2. Кровь в состояниях in vivo и in vitro. Плазма и эритроциты. Показатель гематокрита	262
8.5.3. Моделирование определяющих соотношений крови	263
8.5.4. Эритроцитные агрегаты и наличие предела текучести у крови	265

Глава 9

Моделирование нестационарных вязкопластических течений	267
9.1. Неоднородные нестационарные задачи вязкопластичности (обзор)	267
9.1.1. Вязкопластическое течение в диффузоре и конфузоре	268

9.1.2. Качение цилиндра по поверхности со слоем вязкопластической смазки	270
9.1.3. Движение вязкопластической плѐнки над вращающимся диском	271
9.1.4. Неодномерный и нестационарный сдвиг вязкопластической среды	272
9.1.5. Сдавливание вязкопластического слоя между сближающимися жѐсткими плоскостями	274
9.1.6. Удар вязкопластического стержня о жѐсткую преграду	275
9.1.7. Устойчивость вязкопластических течений по отношению к малым возмущениям	276
9.2. Разгон и торможение тяжѐлого вязкопластического слоя вдоль наклонной плоскости	284
9.2.1. Начально-краевая задача и стационарный режим	285
9.2.2. Нелинейное параболическое уравнение в области с переменной границей	287
9.2.3. Приближение $Re \ll \sqrt{Fr}$	289
9.2.4. Модели с нелинейным скалярным соотношением	291
9.3. Схлопывание сферического пузырька в вязкопластическом пространстве	292
9.3.1. Движение границы пузырька в сферически неоднородной среде. Задача Коши	292
9.3.2. Влияние пластической составляющей	294
9.3.3. Влияние упрочнения	296
Глава 10	
Гидродинамическая устойчивость и метод интегральных соотношений	297
10.1. Краевая задача устойчивости относительно малых возмущений	297
10.1.1. Определяющие соотношения материала	298
10.1.2. Постановка начально-краевой задачи устойчивости	299
10.1.3. Общая схема метода интегральных соотношений	302
10.1.4. Устойчивость процессов на конечном интервале времени	305
10.2. Устойчивость процессов деформирования квазилинейных тел	306
10.2.1. Постановка задачи и её сведение к проблеме на собственные значения	306
10.2.2. Сведение трёхмерной картины возмущений к двумерной	307
10.2.3. Обобщѐнная теорема Сквайра	308
10.2.4. Обобщѐнная задача Орра—Зоммерфельда (ОЗОЗ)	310
10.2.5. Достаточные интегральные оценки устойчивости	312
10.2.6. Минимизация квадратичных функционалов	316
10.3. Обобщенная задача Орра—Зоммерфельда для вязкопластических течений	320
10.3.1. Оценки устойчивости вязкопластических течений как следствия полученных в разд. 10.2	320
10.3.2. Стабилизирующее влияние предела текучести	322
10.3.3. ОЗОЗ для одномерного вязкопластического сдвига	323

Глава 11

Устойчивость сдвиговых вязкопластических течений	324
11.1. Вязкопластическое течение Куэтта в плоском слое	324
11.1.1. Нижние оценки критических чисел Рейнольдса	324
11.1.2. Фазовая частота колебаний	328
11.2. Вязкопластическое течение Пуазейля в плоском слое	328
11.2.1. Нижние оценки критических чисел Рейнольдса	328
11.2.2. Сдвиг тяжёлого слоя вдоль наклонной плоскости	332
11.3. Вязкопластическое течение Куэтта—Тейлора.	333
11.3.1. Невозмущённое движение и условия его существования	333
11.3.2. Постановка обобщённой задачи Орра—Зоммерфельда	335
11.3.3. Интегральные оценки устойчивости.	336
11.3.4. Коротковолновые возмущения.	340
11.3.5. Вязкий предел	340
11.4. Наследственно вязкопластические сдвиговые течения	341
11.4.1. Наследственно вязкопластическое течение Пуазейля в плоском слое	341
11.4.2. Наследственно вязкопластическое течение Куэтта в плоском слое.	342
11.4.3. Постановка линеаризованной задачи устойчивости	344

Глава 12

Вязкопластические течения с малым пределом текучести	346
12.1. Устойчивость по отношению к возмущению материальных функций	346
12.1.1. Постановка задачи устойчивости	347
12.1.2. Устойчивость течения относительно возмущения скалярной функции	350
12.1.3. Устойчивость ньютоновских течений относительно возмущения предела текучести	351
12.1.4. Иллюстративный пример	352
12.1.5. Устойчивость идеальножёсткопластических течений (течений Сен-Венана) относительно возмущения вязкости.	353
12.2. Вязкопластическое течение Джеффри—Гамеля	354
12.2.1. Постановка классической задачи Джеффри—Гамеля	354
12.2.2. Аналитические и асимптотические разложения.	359
12.2.3. Интегральные оценки	360
12.2.4. Устойчивость течения Джеффри—Гамеля по отношению к вариации предела текучести.	363
12.2.5. Асимптотические границы жёстких зон	366
12.3. Вязкопластическое течение Кармана	367
12.3.1. Задача Кармана и ее решение	367
12.3.2. Задача первого приближения по пределу текучести.	370
12.3.3. Асимптотические границы жестких зон	372

ПРЕДИСЛОВИЕ

Модель вязкопластической среды, построенная А.Ж.К. Сен-Венаном, Ф.Н. Шведовым, Э.К. Бингамом и Х. Генки, в настоящее время является классической двухпараметрической моделью. Когда один из двух параметров равен нулю, она превращается либо в вязкую жидкость, либо в модель идеальной пластичности. В природе и технике существует достаточно много материалов, в которых необходимо учитывать свойства вязкости и пластичности совместно: различные виды грунтов, глинистые почвы, торфоматериалы, коллоидные растворы, порошкообразные смеси, смазочные материалы, цементные растворы, металлы при обработке давлением, пищевые полуфабрикаты, биожидкости и многие другие материалы. Обычно эта модель лишь кратко излагается в некоторых монографиях по вязкой жидкости: Лойцянский Л.Г. [46]; пластичности: Качанов Л.М. [37], Колмогоров В.Л. [38], Соколовский В.В. [85], Хилл Р. [93], Ишлинский А. Ю. [34], Ишлинский А. Ю., Ивлев Д.Д. [35] и др.; в общих курсах по механике сплошной среды: Мейз Дж. [49], Жермен П. [26], задачнике [50] и др.; или же в монографиях по реологии, например, Рейнер М. [78].

Во избежание путаницы необходимо оговорить, что в механике сплошной среды термин «вязкопластичность» традиционно употребляется как в деформационной теории, так и в теориях течения, причем в последнем случае синонимом термина «вязкопластическая среда» является термин «бингамовская среда» или «среда Бингама». Ниже в монографии рассматриваются именно бингамовские среды и некоторые их нелинейные обобщения.

Пожалуй, единственной монографией, целиком посвященной теории вязкопластических течений, была монография Огibalова П.М., Мирзаджанзаде А.Х. [58]. Однако в настоящее время эта теория пополнилась многими новыми результатами.

Книга состоит из двух частей. Материал первой части: Климов Д.М., Петров А.Г. «Вязкопластические течения: динамический хаос, перемешивание» существенно отличается от существующих монографий тем, что в ней наиболее полно изложены все известные точные решения краевых задач, как стационарных, так и нестационарных, подробные постановки краевых задач в напряжениях и скоростях в функциях напряжений и в функциях тока, вариационные формулировки задач, асимптотические и вариационные

методы построения решений. Кроме того, изложены новые постановки задачи перемешивания вязкопластической среды в сосудах, граница которых периодически меняется со временем, и даны оригинальные подходы к исследованию этой проблемы.

Первые две главы - это введение в теорию вязкопластических течений. В них даны основные сведения из тензорного анализа и механики сплошной среды, а также постановки краевых задач для вязкопластических течений. Уравнения выписываются в общем виде в различных криволинейных системах координат. В гл. III дан подробный обзор точных решений задачи стационарного вязкопластического течения.

В остальных главах первой и второй частей изложены новые результаты, полученные авторами в ходе выполнения проектов, поддерживаемых Российским Фондом Фундаментальных исследований. Проекты были направлены на создание теоретических основ нового поколения пищевых технологических машин, работающих на вибрационно-волновых принципах. Работа по разработке и внедрению таких технологий ведется в Институте проблем механики РАН.

Результаты, опубликованные за первые годы выполнения проекта РФФИ 093-13-17722 по разработке асимптотического метода решения задачи в тонком деформируемом слое: [22], [23], [60], по оптимизации процессов управления [59] и развитию вязкопластического течения [65], были ранее собраны в небольшом монографическом отчете [24]. Они вошли и в данную монографию в более расширенном виде с подробным выводом уравнений движения в тонком криволинейном слое и обоснованием на базе вариационного принципа. Основным же содержанием книги являются результаты, полученные и опубликованные авторами в ходе выполнения последующих проектов РФФИ 96-01-01862, 99-01-00250 и 02-01-00567.

В гл. IV изложены многопараметрические серии точных решений задач нестационарного вязкопластического течения в «плоских» [61], [62], [66] и круглых [71] трубах. Решения описывают вязкопластические течения с переменным во времени жестким ядром под действием переменного во времени перепада давлений. Такие течения могут быть реализованы в лабораторном эксперименте. Полученные точные решения полезны для тестирования численных схем.

Гл. V посвящена приближенным методам исследования вязкопластического течения. Основное содержание – это вывод уравнений движения среды в тонком деформирующемся слое, аналогичных уравнениям Рейнольдса. Приведены примеры решений уравнений в задачах вытеснения среды параллельными пластинами и дисками. Развитая здесь асимптотическая теория применяется в последующих главах.

В гл. VI и VII излагаются постановки задач о перемешивании вязкопластической среды в сосудах, границы которых периодически меняются со временем. Предлагается оригинальный метод ее исследования. Для плоскопараллельного течения сначала строится функция тока. Затем изучаются уравнения Гамильтона для движения частиц жидкости. Гамильтонианом является построенная функция тока. Перемешивание связывается с динамическим хаосом, который возникает в полученной неавтономной гамильтоновой системе. Идея такого подхода обсуждается в монографиях [31, 102] и др. В силу сложности проблемы обычно ограничиваются рассмотрением простейших модельных задач потенциальных течений идеальной жидкости. В гл. VI и VII изучается процесс перемешивания для краевых задач нестационарного течения вязкой жидкости и вязкопластической среды с помощью оригинальной техники построения параметрических отображений Пуанкаре, следуя работам, опубликованным авторами. В работах [66, 69, 68, 72, 74] метод демонстрируется на решении задач классической механики, а в [64, 67, 70, 73] применяется для моделирования и описания процесса перемешивания в вязкой жидкости и вязкопластической среде.

С восьмой главы начинается вторая часть книги Климов Д.М., Георгиевский Д.В. «Вязкопластические течения: устойчивость». В гл. VIII даются общие сведения о нелинейных тензорных функциях в теории определяющих соотношений и о месте вязкопластической модели в этой теории. Приводятся материальные функции для различных глинистых и нефтесодержащих материалов, а также для крови, рассматриваемой с точки зрения биомеханики как феноменологически однородный объект с эффективными свойствами. Гл. IX посвящена нестационарным режимам движения вязкопластических сред. Наряду с обзором приводятся решения некоторых важных начально-краевых задач.

В гл. X и XI основное внимание будет уделено гидродинамической устойчивости вязкопластических течений относительно начальных малых возмущений. На основе вариационных (интегральных) методов будут даны достаточные оценки параметров устойчивости. Подробно исследуются классические стационарные одномерные сдвиговые течения, о которых идет речь в первой части.

Гл. XII также посвящена устойчивости, но уже относительно малых возмущений самих материальных функций среды, в частности, малой вариации предела текучести. В качестве основных невозмущенных процессов взяты течения вязкой жидкости в конфузоре и над вращающейся плоскостью.

Книга полезна тем, кто интересуется разделами механики сплошной среды: гидродинамикой, механикой деформируемого твердого тела, реологией. Она доступна специалистам с университетским или техническим образованием.

Понимание всех разделов не требует специальных знаний, так как они изложены в самой книге.

Авторы благодарят рецензентов И.Г. Горячеву, А.Г. Куликовского и Д.Л. Быкова, взявших на себя труд ознакомиться с материалом книги и внести свои замечания, которые авторы по возможности учли. Большую помощь в написании глав 6 и 7 авторам оказал В.Ф. Журавлев, которому авторы выражают особую благодарность.

Авторы благодарны Сорокиной И.А., тщательно проверившей основные формулы и текст первой части книги и внесшей немало поправок.

Д.М. Климов, А.Г. Петров, Д.В. Георгиевский

Часть первая
**Вязкопластические течения:
динамический хаос, перемешивание**

(Климов Д.М., Петров А.Г.)

Глава 1

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В связи с необходимостью записывать физические соотношения в инвариантной, т. е. не зависящей от системы координат форме, в механике сплошной среды (МСС) [26, 33, 49, 82] используются тензоры.

1.1. Тензоры второго ранга

1. Определение тензора. Пусть имеются две декартовы системы координат, которые условно назовем старая и новая. Базисные векторы \vec{e}'_i новой системы координат выражаются через старые базисные векторы \vec{e}_i

$$\vec{e}'_i = c_{ij}\vec{e}_j, \quad c_{ki}c_{kj} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.1.1)$$

где c_{ij} — ортогональная матрица, δ_{ij} — символ Кронекера. Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до 3. Формула (1.1.1) называется законом преобразования базиса.

Тензор \underline{t} определяется как инвариантный объект, не зависящий от выбора системы отсчета. Для тензора второго ранга это означает равенство диад

$$\underline{t} = t_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j = t'_{ij}\vec{e}'_i\vec{e}'_j. \quad (1.1.2)$$

В (1.1.2) выражение $\vec{e}_i\vec{e}_j$ есть тензорное (или диадное) произведение векторов, которое часто обозначают $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$. Скалярное произведение двух векторов \vec{e}_i и \vec{e}_j будем обозначать $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$, а их векторное произведение обозначим как $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$.

2. Закон преобразования. Соотношение (1.1.2) выполняется тогда и только тогда, когда компоненты тензора преобразуются по ковариантному закону

$$t'_{ij} = c_{i'j'} c_{j'j} t_{i'j'}. \quad (1.1.3)$$

3. Инварианты. Три скалярные функции компонент тензора

$$J_1 = t_{ii}, \quad J_2 = t_{ij}t_{ij}, \quad J_3 = t_{ij}t_{jk}t_{ki} \quad (1.1.4)$$

не зависят от выбора системы координат. Такие функции называются инвариантами тензора \underline{t} . Для симметричного тензора других независимых функцио-

нально инвариантов нет. Сумма диагональных элементов t_{ii} тензора, называется следом тензора или его первым инвариантом.

Тензор называется девиатором, если его след равен нулю. Тензор $A\delta_{ij}$ называется шаровым. Любой тензор можно единственным образом представить в виде суммы шаровой части и девиатора

$$t_{ij} = (J_1/3)\delta_{ij} + t_{ij}^d, \quad J_1 = t_{ii}. \quad (1.1.5)$$

4. Главные оси. Рассмотрим симметричный тензор \underline{t} . Привести тензор к главным осям означает найти базис $\vec{\varepsilon}_i^0$, $i = 1, 2, 3$, в котором матрица тензора \underline{t} имеет диагональный вид. Для этого составляется характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} t_{11} - \lambda & t_{12} & t_{13} \\ t_{12} & t_{22} - \lambda & t_{23} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

После раскрытия определителя получим кубическое уравнение

$$\begin{aligned} \lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 &= 0, \\ I_1 &= J_1, \quad I_2 = (J_1^2 - J_2)/2, \\ I_3 &= (J_1^3 - 3J_1J_2 + 2J_3)/6. \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Доказывается, что уравнение (1.1.6) имеет три действительных корня λ_1 , λ_2 , λ_3 , которые называются собственными числами. Они и будут диагональными элементами $t_{11}^0 = \lambda_1$, $t_{22}^0 = \lambda_2$, $t_{33}^0 = \lambda_3$.

Нетривиальное решение x_1, x_2, x_3 вырожденной линейной системы

$$\begin{aligned} (t_{11} - \lambda_1)x_1 + t_{12}x_2 + t_{13}x_3 &= 0 \\ t_{12}x_1 + (t_{22} - \lambda_1)x_2 + t_{23}x_3 &= 0 \\ t_{13}x_1 + t_{23}x_2 + (t_{33} - \lambda_1)x_3 &= 0 \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

определяет единичный вектор $\vec{\varepsilon}_1^0 = (x_1\vec{\varepsilon}_1 + x_2\vec{\varepsilon}_2 + x_3\vec{\varepsilon}_3)/(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$. Векторы $\vec{\varepsilon}_2^0$ и $\vec{\varepsilon}_3^0$ получим аналогично, заменив в уравнениях λ_1 на λ_2 и λ_3 соответственно. Три единичных вектора $\vec{\varepsilon}_i^0$, $i = 1, 2, 3$ — взаимно ортогональны и образуют базис декартовой системы координат. Векторы, параллельные $\vec{\varepsilon}_i^0$, называются собственными. Они определяют три взаимно ортогональные собственные направления или главные оси.

Через собственные числа можно выразить инварианты

$$\begin{aligned} J_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad J_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad J_3 = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3, \\ I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \quad I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

1.2. Пространственное напряженное состояние

1. Вектор напряжений. В качестве \underline{t} рассмотрим тензор напряжений¹ $\underline{\sigma} = \sigma_{ij}\vec{e}_i\vec{e}_j$. Будем рассматривать классический случай, когда тензор $\underline{\sigma}$ — симметричный ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$). На площадке с единичной нормалью \vec{n} вектор напряжений $\vec{P}^{(n)}$ имеет компоненты

$$P_i^{(n)} = \sigma_{ij}n_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.2.1)$$

Как видно из (1.2.1), на каждой площадке, проходящей через одну и ту же точку пространства, вектор напряжений свой, поэтому $\vec{P}^{(n)}$ не образует векторное поле в \mathbb{R}^3 .

Нормальное напряжение $N^{(n)}$ на площадке есть проекция $\vec{P}^{(n)}$ на единичную нормаль \vec{n} и согласно (1.2.1) имеет вид

$$N^{(n)} = P_i^{(n)}n_i = \sigma_{ij}n_jn_i. \quad (1.2.2)$$

Проекция вектора $P_i^{(n)}$ на саму площадку называется касательным напряжением $\tau^{(n)}$ (рис. 1.1)

$$\tau^{(n)} = \sqrt{|P_i^{(n)}|^2 - (N^{(n)})^2} = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ik}n_jn_k - (\sigma_{ij}n_jn_i)^2}. \quad (1.2.3)$$

2. Эллипсоид напряжений. Коши предложил рассматривать равенство (1.2.1) как линейное преобразование вектора \vec{n} в вектор $\vec{P}(\vec{n})$. Преобразование (1.2.1) переводит сферу $|\vec{n}| = 1$ в эллипсоид, который называется эллипсоидом напряжений (рис. 1.2).

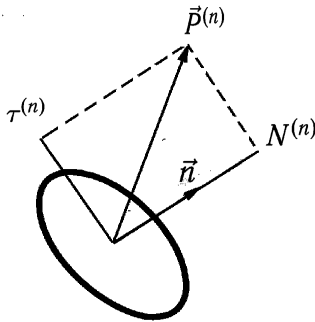


Рис. 1.1. Вектор напряжений

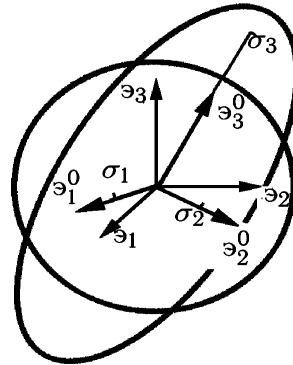


Рис. 1.2. Эллипсоид напряжений

¹Заметим, что слово «тензор» («tensor») произошло именно от слова «tension» («напряжение», «усилие»).

3. Главные направления и главные значения тензора напряжений.

Система уравнений (1.1.7) для тензора $\underline{\sigma}$ определяет три собственных направления $\vec{\varepsilon}_1^0, \vec{\varepsilon}_2^0, \vec{\varepsilon}_3^0$ и три собственных значения $\lambda_1 = \sigma_1, \lambda_2 = \sigma_2, \lambda_3 = \sigma_3$. Векторы $\vec{\varepsilon}_i^0, i = 1, 2, 3$ направлены по главным осям эллипсоида напряжений и называются главными направлениями тензора напряжений. Собственные значения σ_i называются главными значениями. На площадке с нормалью $\vec{\varepsilon}_i^0$ вектор напряжений определяется так $\vec{P}(n) = \sigma_i \vec{\varepsilon}_i^0$ (суммирование по i нет).

Таким образом, главные направления и главные значения тензора напряжений имеют следующие свойства.

1. Кубическое уравнение (1.1.6) всегда имеет три действительные корни. Они и есть главные значения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

2. Для каждого главного значения σ_i из системы (1.1.7) находится одно главное направление $\vec{\varepsilon}_i^0, i = 1, 2, 3$.

3. Три главные направления $\vec{\varepsilon}_1^0, \vec{\varepsilon}_2^0, \vec{\varepsilon}_3^0$ взаимно перпендикулярны и направлены по осям эллипсоида напряжений.

4. Длины полуосей эллипсоида напряжений равны главным значениям тензора напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

5. На площадке с нормалью главного направления $\vec{\varepsilon}_i^0$ касательное напряжение равно нулю, а вектор напряжений $\vec{P}(\vec{n})$ коллинеарен $\vec{\varepsilon}_i^0$ и равен по величине главному значению $\sigma_i, i = 1, 2, 3$.

6. В главных осях (декартова система координат с единичными векторами $\vec{\varepsilon}_1^0, \vec{\varepsilon}_2^0, \vec{\varepsilon}_3^0$) вектор $\vec{P}(n)$ имеет составляющие $\sigma_1 n_1, \sigma_2 n_2, \sigma_3 n_3$, нормальная составляющая равна

$$N^{(n)} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2. \quad (1.2.4)$$

4. Экстремальные значения компонент тензора. Нормальное напряжение (1.2.4), как функция компонент нормали к площадке $N^{(n)}$ имеет три экстремальных значения, равные собственным $N_1^{(n)} = \sigma_1, N_2^{(n)} = \sigma_2, N_3^{(n)} = \sigma_3$. Отсюда имеем следующий вывод: *наибольшее нормальное напряжение на площадке равно наибольшему собственному значению.*

В следующем пункте будет показано, что касательные напряжения имеют локальные экстремумы

$$\tau_{12} = \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_1|, \quad \tau_{23} = \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_2|, \quad \tau_{13} = \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1| \quad (1.2.5)$$

и носят названия главных касательных напряжений. Максимальное значение равно наибольшему из этих трех значений числу. Таким образом, получим второй вывод: *наибольшее касательное напряжение на площадке равно наибольшей полуразности собственных значений.*

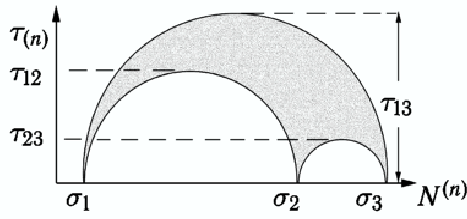


Рис. 1.3. Круги Мора

Этот результат получен независимо Гестом (Gest J. 1900) и Мором (Mohr O. 1900). Для плоского напряженного состояния результат был достигнут еще Сен-Венаном.

5. Круги Мора. Удобное двумерное графическое представление о тензоре дают круги Мора [89]. Из этого представления легко получить гео-

метрическое решение задачи об экстремумах нормальных и касательных напряжений.

Рассмотрим тензор напряжений σ_{ij} . Будем предполагать, что собственные значения $\sigma_i, i = 1, 2, 3$ различны. Тогда их можно расположить в порядке возрастания $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$.

Пусть на площадке с нормалью $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$ вектор напряжений $\vec{P}^{(n)}$ имеет нормальную $\sigma = N^{(n)}$ и касательную $\tau = \tau^{(n)}$ составляющие. В главных осях формула (1.2.1) для компонент вектора $\vec{P}^{(n)}$ примет вид $P_1^{(n)} = \sigma_1 n_1, P_2^{(n)} = \sigma_2 n_2, P_3^{(n)} = \sigma_3 n_3$. Запишем формулы для квадрата длины и нормальной компоненты (1.2.2) вектора $\vec{P}^{(n)}$, а также условие для единичной нормали

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 &= \sigma^2 + \tau^2, \\ \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 &= \sigma, \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Соотношения (1.2.6) можно рассматривать, как систему уравнений относительно неизвестных n_1^2, n_2^2, n_3^2 . Разрешить ее можно так [26]. Введем квадратичную функцию $f(\sigma) = a\sigma^2 + b\sigma + c$ с неопределенными пока коэффициентами. Умножим первое уравнение (1.2.6) на a , второе на b , третье на c и сложим их. В результате получим уравнение

$$n_1^2 f(\sigma_1) + n_2^2 f(\sigma_2) + n_3^2 f(\sigma_3) = f(\sigma) + a\tau^2,$$

в котором квадратичная форма произвольна. Выберем ее в виде $f(\sigma) = (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3)$. Тогда $f(\sigma_2) = f(\sigma_3) = 0$, $a = 1$ и из уравнения получим $n_1^2 f(\sigma_1) = f(\sigma) + \tau^2$. Отсюда находим n_1^2

$$n_1^2 = \frac{(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)}.$$

Выбирая квадратичную функцию

$$f(\sigma) = (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_3)$$

и

$$f(\sigma) = (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2),$$

найдем

$$n_2^2 = \frac{(\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) + \tau^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_3 - \sigma_1)},$$

$$n_3^2 = \frac{(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}.$$

Определим геометрическое место точек с координатами $N^{(n)} = \sigma, \tau^{(n)} = \tau$ при всевозможных положениях вектора \vec{n} . Для этого нужно записать условие неотрицательности квадратов компонент нормали

$$(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2 = (\sigma - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3))^2 + \tau^2 - \frac{1}{4}(\sigma_3 - \sigma_2)^2 \geq 0,$$

$$(\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) + \tau^2 = (\sigma - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3))^2 + \tau^2 - \frac{1}{4}(\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 0,$$

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2 = (\sigma - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2))^2 + \tau^2 - \frac{1}{4}(\sigma_2 - \sigma_1)^2 \geq 0.$$

Полученные неравенства определяют на координатной плоскости $N^{(n)}, \tau^{(n)}$ все допустимые значения касательного и нормального напряжений на площадках. На рис. 1.3 множество допустимых значений изображено в виде затененной области, ограниченной изнутри окружностями с диаметрами $\sigma_2 - \sigma_1, \sigma_3 - \sigma_2$ и снаружи окружностью с диаметром $\sigma_3 - \sigma_1$. Экстремальные значения касательного напряжения $\tau^{(n)}$ — это радиусы кругов: τ_{12}, τ_{23} и τ_{13} , совпадающие с выражениями (1.2.5). Наибольшее касательное напряжение равно наибольшему экстремальному значению $\tau_{max} = \tau_{13}$.

6. Девиатор и шаровая часть тензора напряжений. Как и любой тензор второго ранга тензор напряжений σ_{ij} разлагается на девиатор s_{ij} и шаровую часть

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + s_{ij}, \quad p = -(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3, \quad (1.2.7)$$

где p называется давлением.

Главные значения девиатора s_1, s_2 и s_3 связаны с главными напряжениями

$$s_\alpha = \sigma_\alpha + p, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

7. Интенсивность напряжений. Первый инвариант девиатора s равен нулю. Второй квадратичный инвариант связан с интенсивностью напряжений $\sigma_{\text{и}}$, которая вводится так

$$\sigma_{\text{и}} = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}.$$

С помощью (1.2.7) ее можно выразить через инварианты тензора σ

$$\sigma_{\text{и}}^2 = \sigma_{ij}\sigma_{ij} + 2p\sigma_{ii} + 3p^2 = \sigma_{ij}\sigma_{ij} - 3p^2,$$

а также через главные значения тензора σ

$$\sigma_{\text{н}}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2/3$$

или главные касательные напряжения

$$\sigma_{\text{н}}^2 = \frac{4}{3}(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{13}^2). \quad (1.2.8)$$

Покажем, что инвариант $T = \sigma_{\text{н}}/\sqrt{2}$ и наибольшее касательное напряжение на площадке $\tau_{\text{max}} = (\sigma_3 - \sigma_1)/2$ подчинены неравенствам

$$\tau_{\text{max}} \leq T = \sqrt{s_{ij}s_{ij}/2} \leq (2/\sqrt{3})\tau_{\text{max}} \approx 1,15\tau_{\text{max}}, \quad (1.2.9)$$

т. е. равенство $T = \tau_{\text{max}}$ верно с точностью до 15% [33].

Действительно, из (1.2.8) следует, что

$$\frac{T}{\tau_{\text{max}}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{\tau_{12}}{\tau_{13}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{23}}{\tau_{13}}\right)^2}$$

Обозначим $\tau_{23}/\tau_{13} = z$, тогда $\tau_{12}/\tau_{13} = 1 - z$ и равенство приведет к виду

$$T/\tau_{\text{max}} = \sqrt{2/3} \sqrt{f(z)}, \quad f(z) = 2 - 2z + 2z^2.$$

Так как $0 \leq z \leq 1$, то $\max f(z) = 2$ при $z = 0$ и $z = 1$, $\min f(z) = f(1/2) = 3/2$. Отсюда и получим неравенство (1.2.9).

8. Условие пластического течения. Алгебраическое неравенство

$$T(t, \vec{x}) > \tau_s, \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad (1.2.10)$$

называется условием пластичности Губера-Мизеса (M.T.Huber, 1904; R.Mises, 1913).² В тех точках тела \vec{x} и в те моменты времени t , где и когда оно справедливо, наступает пластическое течение. Постоянная материала τ_s , имеющая размерность напряжения, называется пределом текучести при сдвиге.

С учетом (1.2.8) квадратичный инвариант T можно выразить через собственные значения s_1, s_2, s_3 девиатора напряжений и записать условие (1.2.10) так:

$$(s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_1 - s_3)^2 > 6\tau_s^2$$

или в силу (1.2.7) в виде

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 > 6\tau_s^2.$$

Условие (1.2.10) иногда записывают так $\sigma_{\text{н}} > \sigma_s = \tau_s \sqrt{2}$.

Значительно раньше был сформулирован другой критерий пластичности (Н. Tresca, 1868). Согласно нему пластическое течение возникает, когда макси-

²Согласно С.П. Тимошенко это условие впервые было сформулировано Максвеллом в письме к Томсону (Тимошенко С.П. История науки о сопротивлении материалов, с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. Гостехиздат, 1957).

мальное касательное напряжение τ_{13} превышает предельное напряжение сдвига τ_* , как и τ_s являющееся постоянной для данного материала:

$$\tau_{max} = \tau_{13} = (\sigma_3 - \sigma_1)/2 > \tau_*. \quad (1.2.11)$$

Поскольку $\tau_{max} \approx T$, то критерии Мизеса (1.2.10) и Треска (1.2.11) близки друг к другу, а $\tau_s = \tau_*$.

Критерии Мизеса и Треска можно изобразить графически. С помощью равенств $T^2 = \sigma_{\text{н}}^2/2$, $\tau_{13} = \tau_{12} + \tau_{23}$ и (1.2.8) величину T^2 можно выразить через τ_{12} и τ_{23} .

$$T^2 = \frac{2}{3}(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + (\tau_{12} + \tau_{23})^2) = \frac{4}{3}(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{12}\tau_{23}).$$

Таким образом, поверхность текучести Мизеса $T = \tau_s$ в осях τ_{12} и τ_{23} представляется уравнением

$$\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{12}\tau_{23} = \frac{3}{4}\tau_s^2, \quad \tau_{12} \geq 0, \quad \tau_{23} \geq 0. \quad (1.2.12)$$

С помощью соотношения $\tau_{max} = \tau_{13} = \tau_{12} + \tau_{23}$ поверхность текучести Треска $\tau_{max} = \tau_*$ представляется линейным уравнением

$$\tau_{12} + \tau_{23} = \tau_* \quad (1.2.13)$$

Кривые (1.2.12) и (1.2.13) изображены на плоскости (τ_{12}, τ_{23}) на рис. 1.4. Область, в которой отсутствует пластическое течение по критерию Мизеса, ограничена дугой эллипса и координатными осями. Отношение осей эллипса равно $\sqrt{3}$, малая ось направлена по биссектрисе координатного угла. Часть плоскости, где отсутствует пластическое течение по критерию Треска, представляет собой равнобедренный прямоугольный треугольник, катеты которого расположены на осях (τ_{12}, τ_{23}) и равны τ_* (рис. 1.4 а). При надлежащем выборе отношения τ_s/τ_* расхождение критериев невелико. В частности, если взять $\tau_s = \tau_*$, то площадь

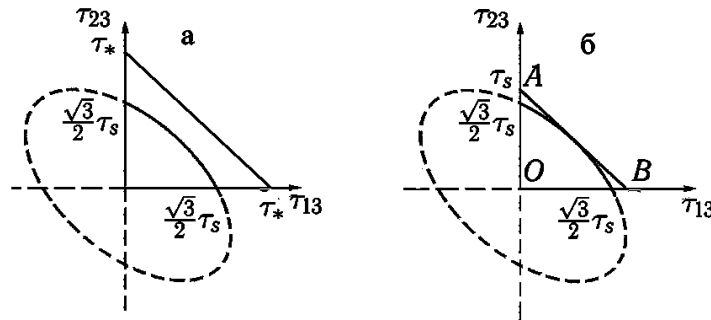


Рис. 1.4. Условия пластичности Мизеса и Треска

заштрихованной части эллипса равна $\pi\sqrt{3}\tau_s/12 = 0,453\tau_*$ и составляет около 90% площади треугольника OAB (рис. 1.4 б). При условии

$$\tau_2 = \tau_{23} = \tau_3/2$$

критерии Мизеса и Треска тождественны. Именно этот случай реализуется при плоской деформации сплошной среды (см. разд. 1.6).

1.3. Кинематика деформируемой среды

1. Поле скорости. Распределение скоростей в малой окрестности сплошной среды. Движение сплошной среды полностью описывается полем скорости $\vec{v} = v_i \vec{e}_i^0$. Компоненты вектора скорости v_i зависят от времени t и координат точки $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$. Рассмотрим точку \vec{x} и ее малую окрестность $\vec{x} + \delta\vec{x}$, $\delta\vec{x}(\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$. Распределение скорости в малой окрестности можно описать с помощью тензора дисторсии $v_{i,j} = \partial v_i / \partial x_j$. С точностью до малых второго порядка δx^2 поле скорости будет линейным по координатам δx_j .

$$v_i = v_i^0 + v_{i,j} \delta x_j \quad (1.3.1)$$

Тензор дисторсии можно разложить на симметричную $v_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2$ и антисимметричную $\omega_{ij} = (v_{i,j} - v_{j,i})/2$ части. Матрица ω_{ij} выражается через компоненты вектора вихря $\text{rot } \vec{v}$

$$\begin{aligned} \omega_i &= \frac{1}{2}(\text{rot } \vec{v})_i, & \omega_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right), \\ \omega_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right), & \omega_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right), \\ \omega_{ij} &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Если подставить $v_{i,j} = \omega_{ij} + v_{ij}$ в (1.3.1) и воспользоваться выражением (1.3.2), то получим теорему Коши-Гельмгольца

$$\vec{v}(\vec{x} + \delta\vec{x}) = \vec{v}(\vec{x}) + \vec{\omega} \times \delta\vec{x} + \vec{v}^*, \quad v_i^* = v_{ij} \delta x_j. \quad (1.3.3)$$

Первые два слагаемые правой части совпадают с формулой Эйлера для распределения скоростей точек твердого тела; $\vec{v}(\vec{x})$ — поступательная скорость в точке \vec{x} , $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости. Последнее — третье слагаемое \vec{v}^* определяет чистую деформацию. В абсолютно твердом теле $\vec{v}^* = 0$.

2. Тензор скоростей деформаций. Деформационное течение определяется тензором

$$v_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}). \quad (1.3.4)$$

Выясним как изменяется элемент сплошной среды $\vec{\delta x}$. Изменение вектора $\vec{\delta x}$ обусловлено тем, что конец и начало его движутся с разными скоростями $\vec{v}(x)$ и $\vec{v}(\vec{x} + \delta\vec{x})$. Отсюда с помощью (1.3.3) имеем

$$\frac{d\vec{\delta x}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\delta x} + \vec{v}^* \quad (1.3.5)$$

Умножая обе части равенства (1.3.5) скалярно на вектор δx , получим

$$\vec{\delta x} \frac{d\vec{\delta x}}{dt} = \vec{\delta x} \vec{v}^* = v_{ij} \delta x_i \delta x_j.$$

Учитывая тождество

$$\vec{\delta x} \frac{d\vec{\delta x}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{\delta x} \delta\vec{x}) = \frac{1}{2} \frac{d|\delta\vec{x}|^2}{dt} = |\delta\vec{x}| \frac{d|\delta\vec{x}|}{dt},$$

найдем относительное удлинение волокна среды, направленного по единичному вектору \vec{n}

$$\frac{1}{|\delta\vec{x}|} \frac{d|\delta\vec{x}|}{dt} = v_{ij} n_i n_j, \quad n_i = \frac{\delta x_i}{|\delta\vec{x}|}. \quad (1.3.6)$$

Если единичный вектор \vec{n} направить по оси x_1 , он будет иметь компоненты $\vec{n}(1, 0, 0)$. Тогда из (1.3.6) получим, что относительное удлинение волокна направленного по оси x_1 будет равно v_{11} . Таким образом, *диагональные элементы тензора скоростей деформаций* v_{11}, v_{22}, v_{33} — это относительные удлинения волокон, направленных по соответствующим координатным осям x_1, x_2, x_3 .

Покажем, что удвоенные значения компонент с неравными индексами $2v_{12}, 2v_{13}, 2v_{23}$ равны изменениям углов $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ между волокнами расположенными в направлении координатных осей соответственно $x_1, x_2; x_1, x_3$ и x_2, x_3 .

Для этого выберем два бесконечно малых вектора $\vec{\mu}$ и \vec{v} вдоль координатных осей x_1 и x_2 . Запишем для них уравнения

$$d\mu_i/dt = (\vec{\omega} \times \vec{\mu})_i + v_{ij} \mu_j, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$dv_i/dt = (\vec{\omega} \times \vec{v})_i + v_{ij} v_j, \quad i = 1, 2, 3.$$

Умножим первую группу уравнений на v_i , а вторую на μ_i и просуммируем их. Тогда получим

$$\frac{d(\vec{\mu}\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{\mu}}{dt} \vec{v} + \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{\mu} = 2v_{ij} v_i \mu_j = 2v_{12} |\vec{v}| |\vec{\mu}|,$$

так как $(\vec{\omega} \times \vec{\mu})_i v_i + (\vec{\omega} \times \vec{v})_i \mu_i = 0$. Для скалярного произведения имеем равенство $\vec{\mu}\vec{v} = |\vec{\mu}| |\vec{v}| \cos \theta_{12}$. Подставляя его в уравнение и учитывая, что в начальный

момент времени $\cos \theta_{12} = 0$, $\sin \theta_{12} = 1$, получим

$$|\vec{v}||\vec{\mu}|\frac{d \cos \theta_{12}}{dt} = 2v_{12}|\vec{v}||\vec{\mu}|.$$

Отсюда следует

$$2v_{12} = -d\theta_{12}/dt, \quad 2v_{13} = -d\theta_{13}/dt, \quad 2v_{23} = -d\theta_{23}/dt.$$

Удвоенные компоненты с неравными индексами $2v_{12}, 2v_{13}, 2v_{23}$ называются скоростями сдвига и *определяют скорости изменения прямых углов между волокнами, направленными по координатным осям.*

3. Главные направления и главные значения. Для тензора скоростей деформаций справедливы все выводы, которые получены для тензора напряжений в разд. 1.2. Его можно привести к главным осям $\vec{\varepsilon}_1^0, \vec{\varepsilon}_2^0, \vec{\varepsilon}_3^0$, в которых тензор \underline{v} будет иметь диагональный вид

$$\underline{v} = u_1 \vec{\varepsilon}_1^0 \vec{\varepsilon}_1^0 + u_2 \vec{\varepsilon}_2^0 \vec{\varepsilon}_2^0 + u_3 \vec{\varepsilon}_3^0 \vec{\varepsilon}_3^0,$$

где u_1, u_2, u_3 — главные значения тензора \underline{v} .

Из рассмотрения кругов Мора для тензора скоростей деформаций получим, что собственные значения u_1, u_2, u_3 являются экстремальными значениями относительных удлинений. Если расположить их в порядке возрастания $u_1 \leq u_2 \leq u_3$, то u_1 будет наименьшим, а u_3 — наибольшим относительным изменением волокон. Наибольшая скорость сдвига равна $u_{max} = u_3 - u_1$.

4. Инварианты. Интенсивность деформаций. Первый инвариант тензора скоростей деформаций \underline{v}

$$v_{ii} = u_1 + u_2 + u_3 = \operatorname{div} \vec{v}$$

определяет кубическое расширение частицы среды. Для несжимаемой среды он равен нулю, а тензор \underline{v} является девиатором. В дальнейшем будем рассматривать только несжимаемые среды. Второй инвариант связан с интенсивностью деформаций $v_{\text{н}}$, которая вводится так

$$v_{\text{н}} = \sqrt{v_{ij} v_{ij}}.$$

Для наибольшей скорости сдвига $u_{max} = u_3 - u_1$ можно получить неравенство

$$u_{max} = u_3 - u_1 \leq U = \sqrt{2} v_{\text{н}} \leq (2/\sqrt{3})U \approx 1,15U, \quad (1.3.7)$$

аналогичное (1.2.9).

1.4. Уравнения движения сплошной среды

1. Формула дифференцирования по времени интеграла, взятого по подвижному объему. Рассмотрим интеграл

$$\int_V F(t, x_i) dV$$

от функции F , взятой по области V , которая движется вместе с частицами среды. Такую область будем называть материальной. Производная от интеграла, взятого по материальной области будет определяться формулой

$$\frac{d}{dt} \int_V F(t, x_i) dV = \int_V \frac{\partial F}{\partial t} dV + \int_{\partial V} F v_n dS. \quad (1.4.1)$$

Здесь первый интеграл учитывает изменение функции F от времени, а второй, взятый по границе ∂V , — изменение материальной области. Символом ∂V обозначена граница области V , v_n — проекция скорости на внешнюю нормаль к границе ∂V . (Подробный вывод этой формулы приведен, например, в [82]).

Пользуясь теоремой Гаусса-Остроградского, формулу (1.4.1) можно записать так

$$\frac{d}{dt} \int_V F dV = \int_V \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial(F v_i)}{\partial x_i} \right) dV. \quad (1.4.2)$$

Введем понятие полной производной по времени от функции $F(t, x_i)$. Она учитывает закон движения материальных частиц $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d}{dt} F(t, x_i(t)) = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Заменяя

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i,$$

получим выражение

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + v_i \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad (1.4.3)$$

которое называется полной производной по времени от F . Второе слагаемое (1.4.3) называется конвективной производной. С помощью формулы полной производной (1.4.3) производную интеграла (1.4.2) можно записать так:

$$\frac{d}{dt} \int_V F dV = \int_V \left(\frac{dF}{dt} + F \operatorname{div} \vec{v} \right) dV. \quad (1.4.4)$$

2. Закон сохранения массы. Сохранение массы вещества в материальной области V с помощью формулы (1.4.2) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(t, x_i) dV = \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} \right) dV = 0,$$

где ρ — плотность вещества в момент времени t в точке пространства с координатами x_i . Учитывая, что это равенство имеет место для любого материального объема, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (1.4.5)$$

Это уравнение называется уравнением неразрывности. Его можно записать также в виде

$$d\rho/dt + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (1.4.6)$$

Для несжимаемой среды плотность частицы сохраняется, что выражается уравнением $d\rho/dt = 0$. Таким образом, закон сохранения массы в несжимаемой среде записывается в виде двух уравнений

$$d\rho/dt = 0, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (1.4.7)$$

Если среда однородна и несжимаема, то

$$\rho = \text{const}, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (1.4.8)$$

Уравнения (1.4.5)–(1.4.8) нетрудно записать в любой криволинейной системе координат. Для этого достаточно выразить дивергенцию вектора $\operatorname{div} \vec{v}$ или $\operatorname{div}(\rho \vec{v})$ в этой системе координат по соответствующей формуле (см. разд. 2.1.3).

Если заменить в (1.4.4) подинтегральную функцию F на ρF , то под интегралом в правой части получим

$$\frac{d(\rho F)}{dt} + \rho F \operatorname{div} \vec{v} = \rho \frac{dF}{dt} + F \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right)$$

и, пользуясь уравнением неразрывности (1.4.6), упростим

$$\frac{d(\rho F)}{dt} + \rho F \operatorname{div} \vec{v} = \rho \frac{dF}{dt}.$$

Таким образом, формулу (1.4.4) можно записать в следующей компактной форме:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho F dV = \int_V \rho \frac{dF}{dt} dV. \quad (1.4.9)$$

3. Уравнение количества движения. Закон изменения количества движения для материального объема среды можно записать так

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \int_V \rho \vec{g} dV + \int_{\partial V} \vec{P}^{(n)} dS. \quad (1.4.10)$$

Здесь \vec{Q} — количество движения среды, заключенной в материальном объеме V

$$\vec{Q} = \int_V \rho \vec{v} dV.$$

Применяя формулу (1.4.9), получим

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV.$$

Правая часть (1.4.10) — это сумма сил, действующих на среду. Первое слагаемое — это суммарная сила тяжести. Второе слагаемое — это сумма поверхностных сил. Преобразуем проекцию суммарной поверхностной силы на ось x_i с помощью формулы (1.2.1) и теоремы Гаусса-Остроградского

$$\int_{\partial V} \vec{P}_i^{(n)} dS = \int_{\partial V} \sigma_{ij} n_j dS = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV.$$

Таким образом, закон (1.4.10) можно записать так

$$\int_V \rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_i dV = \int_V \left(\rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) dV$$

и отсюда получим дифференциальные уравнения движения, которые удобно записать в тензорном виде

$$\rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \rho \vec{g} + \text{Div } \underline{\sigma}. \quad (1.4.11)$$

Такая форма позволяет легко записывать уравнения в любой криволинейной системе координат. Для этого достаточно спроектировать соответствующие векторы на орты системы координат и воспользоваться соответствующими формулами для компонент дивергенции тензора (см. ниже разд. 2.1.3).

В декартовой системе координат уравнения количества движения имеют вид

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.4.12)$$

4. Закон изменения кинетической энергии. Из уравнения (1.4.11) можно получить закон изменения механической энергии. Для этого нужно умножить

обе части уравнения на v_i и просуммировать их по $i = 1, 2, 3$. Затем воспользоваться тождествами

$$\rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_i v_i = \rho \frac{d}{dt} \frac{v^2}{2}, \quad v_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial (v_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} - \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial (v_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} - \sigma_{ij} v_{ij}.$$

После подстановки получим уравнение изменения кинетической энергии в дифференциальной форме.

$$\rho \frac{d}{dt} \frac{v^2}{2} = \rho (\vec{g} \vec{v}) + \frac{\partial (v_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} - \sigma_{ij} v_{ij}. \quad (1.4.13)$$

Левая часть уравнения — изменение кинетической энергии среды в единице объема. В правой части первое слагаемое — работа в единице времени (мощность) внешних массовых сил тяжести, второе слагаемое — мощность внешних поверхностных сил и третье слагаемое — мощность внутренних поверхностных напряжений. Чтобы получить закон изменения кинетической энергии в материальном объеме V нужно проинтегрировать обе части уравнения (1.4.13) по объему V и воспользоваться теоремой Гаусса-Остроградского и формулой (1.4.9)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_{\text{кин}} &= N_g^{(e)} + N_{\text{пов}}^{(e)} + N_{\text{пов}}^{(i)}, \\ E_{\text{кин}} &= \int_V \rho \frac{v^2}{2} dV, & N_g^{(e)} &= \int_V \rho (\vec{g} \vec{v}) dV, \\ N_{\text{пов}}^{(e)} &= \int_V v_i \sigma_{ij} n_j dS, & N_{\text{пов}}^{(i)} &= - \int_V \sigma_{ij} v_{ij} dV. \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

Здесь $N_g^{(e)}$, $N_{\text{пов}}^{(e)}$, $N_{\text{пов}}^{(i)}$ — мощности в объеме V внешних массовых сил тяжести, внешних поверхностных сил и внутренних поверхностных напряжений.

Мощность внутренних поверхностных напряжений $N_{\text{пов}}^{(i)}$ определяет потери механической энергии. Для классических моделей сплошных сред величина $N_{\text{пов}}^{(i)} \leq 0$. Противоположная ей по знаку величина $D = -N_{\text{пов}}^{(i)}$ называется диссипируемой в объеме V механической энергией. Она определяет ту часть механической энергии, которая переходит в другие виды энергии, например, в тепло. Диссипируемые энергии в единице объема и в объеме V не могут быть отрицательными

$$\sigma_{ij} v_{ij} \geq 0, \quad \int_V \sigma_{ij} v_{ij} dV \geq 0.$$

Мощность силы тяжести $N_g^{(e)}$ можно представить как изменение потенциальной энергии силы тяжести $E_{\text{пот}}$

$$N_g^{(e)} = - \frac{dE_{\text{пот}}}{dt}, \quad E_{\text{пот}} = - \int_V \rho g_i x_i dV = \int_V \rho g z dV,$$

где z — координата, направленная вертикально вверх.

Если движение среды происходит в области, на границе которой поверхностные силы работы не совершают, то закон (1.4.14) можно представить как закон изменения полной механической энергии E

$$\frac{dE}{dt} = -D, \quad E = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}}. \quad (1.4.15)$$

Заметим, что работа внешними поверхностными силами не совершается на твердой стенке и на свободной поверхности. На твердой стенке вследствие условия прилипания $\vec{v} = 0$ мощность равна нулю $v_i \sigma_{ij} n_j = 0$. На свободной поверхности Γ обычно задается условие отсутствия касательного напряжения $\tau^{(n)} = 0$, а нормальное напряжение $N^{(n)}$ равно постоянной величине p_0 . Тогда

$$v_i \sigma_{ij} n_j = v_n p_0 \Rightarrow \int_{\Gamma} v_n p_0 dS = p_0 \frac{dV}{dt}.$$

Так как объем несжимаемой среды не меняется $dV/dt = 0$, то $N_{\text{пов}}^{(e)} = 0$ и закон (1.4.15) также имеет место.

1.5. Классические модели несжимаемых жидких сред

Для построения моделей жидких сред нужно установить связь между девяти-аторами скорости деформации и напряжений. Для изотропных сред это соотношение не должно зависеть от выбора направления осей декартовой системы координат. В тензорно линейных моделях такая связь задается соотношениями

$$s_{ij} = 2Kv_{ij}, \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + s_{ij}, \quad (1.5.1)$$

в котором K может зависеть от второго и третьего инвариантов тензора \underline{v} (первый инвариант в несжимаемой среде равен нулю). В классических моделях предполагается зависимость K только от второго инварианта. В качестве вторых инвариантов тензоров \underline{v} и $\underline{\sigma}$ удобно ввести $U = v_n \sqrt{2}$ и $T = \sigma_n / \sqrt{2}$. Тогда из (1.5.1) вытекает следующее соотношение между инвариантами

$$T = UK, \quad T = \sqrt{s_{ij} s_{ij} / 2}, \quad U = \sqrt{2v_{ij} v_{ij}}. \quad (1.5.2)$$

В связи с (1.2.9) и (1.3.7) зависимость (1.5.2) можно приближенно заменить на $\tau_{\text{max}} = u_{\text{max}} K$ и найти зависимость $K(u_{\text{max}})$ из эксперимента.

Если связь (1.5.1) установлена, то, подставляя ее в уравнения движения (1.4.12) и присоединяя уравнения (1.4.7) или (1.4.8), получим замкнутую систему пяти уравнений для определения функций ρ, p, v_1, v_2, v_3 .

Несмотря на кажущуюся простоту, соотношения (1.5.1) описывают сложные нелинейные зависимости напряженного состояния среды от скорости деформации. Однако соотношение (1.5.1) не исчерпывает всех возможных моделей для

жидкостей. Общий подход к построению моделей с самыми общими нелинейными связями деформаций и напряжений изложен в гл. VIII.

1. Идеальная жидкость. В соотношении (1.5.1) принимаем, что $K = 0$. Тогда тензор σ будет шаровым

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}. \quad (1.5.3)$$

Касательные напряжения на площадках в идеальной жидкости отсутствуют, т. е. $T = 0$. Эта простейшая модель введена Эйлером. Модель не содержит ни одного феноменологического параметра. Она хорошо описывает инерционные эффекты жидкости и применяется для изучения течений с большими скоростями, кавитационных течений, существенно нестационарных течений, течений со свободными границами, для описания волн на поверхности тяжелой жидкости. Однако эта модель не описывает трение на границе жидкости с движущимся в ней твердым телом. Диссипируемая энергия $\sigma_{ij}v_{ij}$ тождественно равна нулю, потерь механической энергии нет. Эти эффекты учитываются в более сложных моделях.

2. Вязкая ньютоновская жидкость. В соотношении (1.5.1) принимаем, $K = \mu$, где μ — феноменологическая постоянная. Она называется коэффициентом динамической вязкости. Тензор напряжений определяется так

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu v_{ij} \Rightarrow T = \mu U.$$

Для сдвигового течения около твердой стенки $v_x = ky$, $v_y = v_z = 0$ получим закон Ньютона для трения вязкой жидкости о твердую поверхность $y = 0$

$$\tau = \sigma_{xy} = \mu \partial v_x / \partial y.$$

С помощью этой формулы измеряется коэффициент μ . Единицей измерения μ в системе СГС принята $\text{ПП} = 1 \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}}$, называемая *пуазом*. Коэффициенты вязкости μ для некоторых жидкостей при температуре 20°C приведены в табл. I.1.

Таблица 1.1

Вещество	μ , г/(см · с)	Вещество	μ , г/(см · с)
Ацетон	0,00337	Ртуть	0,0159
Спирт метиловый	0,00632	Масло оливковое	0,9
Вода	0,0105	Масло машинное	6,6
Спирт этиловый	0,0122	Масло касторовое	12
Уксусная кислота	0,0127	Глицерин	13,9

Диссипируемая энергия вязких жидкостей в единице объема вычисляется так:

$$\sigma_{ij}v_{ij} = 2\mu v_{ij}v_{ij} = TU = \mu U^2 = T^2/\mu.$$

3. Идеально пластическая среда. Для коэффициента K предполагается следующая зависимость от инварианта U :

$$K = \tau_s / U.$$

Отсюда получим соотношение

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\tau_s v_{ij}/U, \quad T = \tau_s.$$

При течении в идеально пластической среде второй вариант тензора напряжений постоянен. Максимальные напряжения на площадках близки к постоянному значению τ_s . Диссипируемая энергия идеально пластической среды такова

$$s_{ij}v_{ij} = TU = \tau_s U.$$

4. Вязкопластическая среда. Зависимость коэффициента K от инварианта U такова

$$K = \mu + \tau_s / U,$$

а реологические соотношения имеют вид

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2(\mu + \tau_s/U)v_{ij}, \quad T = \mu U + \tau_s.$$

Эти соотношения для общего трехмерного течения введены Генки (Hensky H.Z., 1925) [98]. Среда определяется двумя параметрами: μ — динамический коэффициент вязкости, τ_s — предельное напряжение сдвига.

При $\tau_s = 0$ получаем вязкую жидкость, при $\mu = 0$ — идеально пластическую среду.

Предельное напряжение сдвига имеет размерность давления. За единицу измерения τ_s в системе СИ принят паскаль $1\text{Па} = 1\text{Н}/\text{м}^2 = 10\text{г}/(\text{см}\cdot\text{с}^2)$. Единицу измерения коэффициента вязкости μ можно выразить через паскаль·секунду $1\text{П} = 0.1\text{Па}\cdot\text{с}$.

В табл. 1.2. приведены данные этих характеристик для смесей глицерина с мелко размолотым порошком мела и глины, а также смазки «фаэтол».

Таблица 1.2

Вещество	τ_s , Па	μ , Па·с	ρ , г/см ³
Мел с глицерином, весовое отношение 3:2	2,9	4,39	1,7
Глина с глицерином, весовое отношение 4:5	6,44	2,55	1,5
Смазка «фаэтол»	11,5	22	1,?

В движущейся вязкопластической среде может быть жесткая зона, в которой скорость деформации равна нулю $U = 0$. В этой области второй инвариант T

неопределен и подчиняется неравенству $T \leq \tau_s$. Окончательная формулировка реологического соотношения, учитывающая наличие жестких зон, будет такой

$$\left. \begin{aligned} s_{ij} &= 2(\mu + \tau_s/U) v_{ij} \\ T &= \tau_s + \mu U \end{aligned} \right\} \quad U > 0, \quad (1.5.4)$$

$$T \leq \tau_s, \quad U = 0.$$

Это соотношение можно разрешить относительно компонент тензора деформаций и выразить их через компоненты тензора напряжений. Полученное соотношение будем называть обратным соотношением девиаторов напряжений и деформаций

$$\left. \begin{aligned} v_{ij} &= \frac{T - \tau_s}{2\mu} s_{ij} \\ U &= (T - \tau_s)/\mu \end{aligned} \right\} \quad T > \tau_s, \quad (1.5.5)$$

$$U = 0, \quad T \leq \tau_s.$$

Диссипируемая энергия в ядре равна нулю, а в области $U > 0$ определяется так:

$$s_{ij} v_{ij} = TU = \mu U^2 + \tau_s U = (T^2 - \tau_s T)/\mu.$$

1.6. Плоская задача

1. Общий вид тензоров скорости деформаций и напряжений. Важным случаем, часто встречающимся в приложениях, является плоская задача. Течение в этом случае определяется полем скорости, компоненты которого имеют следующий вид

$$v_1 = v_1(t, x_1, x_2), \quad v_2 = v_2(t, x_1, x_2), \quad v_3 = 0. \quad (1.6.1)$$

Тензор скоростей деформаций для плоской задачи упрощается

$$v_{ij} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & 0 \\ v_{12} & v_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Для несжимаемой среды тензор \mathcal{V} имеет всего две независимые компоненты

$$v_{11} = -v_{22} = \partial v_1 / \partial x_1, \quad v_{12} = (\partial v_1 / \partial x_2 + \partial v_2 / \partial x_1) / 2.$$

Девиатор напряжений для вязкопластической среды имеет также две независимые компоненты, определяемые по (1.5.4)

$$s_{11} = 2(\mu + \tau_s/U) v_{11}, \quad s_{12} = 2(\mu + \tau_s/U) v_{12}, \quad U = 2(v_{11}^2 + v_{12}^2)^{1/2}.$$

2. Закон преобразования. Ортогональные преобразования на плоскости сводятся к поворотам системы координат на угол α . Координаты декартовой системы $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ преобразуются при повороте с помощью ортогональной матрицы (рис. 1.5)

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

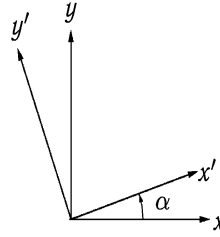


Рис. 1.5. Преобразование поворота

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \quad z' = z. \quad (1.6.2)$$

Компоненты тензора \underline{v} в новой системе координат x', y' находятся по закону преобразования компонент тензора (1.1.3)

$$\begin{aligned} v'_{11} &= c_{1i} c_{1j} v_{ij}, & v'_{12} &= c_{1i} c_{2j} v_{ij}, \\ v'_{11} &= (\cos^2 \alpha) v_{11} + (\sin \alpha \cos \alpha) v_{12} + (\sin \alpha \cos \alpha) v_{21} + (\sin^2 \alpha) v_{22}, \\ v'_{12} &= (-\cos \alpha \sin \alpha) v_{11} + (\cos^2 \alpha) v_{12} - (\sin^2 \alpha) v_{21} + (\sin \alpha \cos \alpha) v_{22}. \end{aligned}$$

Для плоской задачи удобно переобозначить компоненты тензора так: $v_{11} = v_{xx}$, $v_{12} = v_{xy}$. Тогда закон преобразований получим в виде

$$v_{x'x'} = v_{xx} \cos 2\alpha + v_{xy} \sin 2\alpha, \quad v_{x'y'} = -v_{xx} \sin 2\alpha + v_{xy} \cos 2\alpha. \quad (1.6.3)$$

3. Инварианты. Главные значения. Наибольшее значение скорости сдвига и касательное напряжение. Закон (1.6.3) можно представить в виде

$$v_{x'y'} = \sqrt{v_{xx}^2 + v_{xy}^2} \cos(2\alpha - 2\alpha_0), \quad v_{x'y'} = -\sqrt{v_{xx}^2 + v_{xy}^2} \sin(2\alpha - 2\alpha_0),$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = v_{xy}/v_{xx}.$$

Следовательно,

- 1) главные оси x', y' расположены к оси x под углом α_0 и $\alpha_0 + \pi/2$;
- 2) главные значения тензора \underline{v} равны $\pm \sqrt{v_{xx}^2 + v_{xy}^2}$ и являются соответственно наибольшим и наименьшим значениями компоненты $v_{x'y'}$;
- 3) в главных осях x', y' тензор \underline{v} имеет вид

$$\begin{pmatrix} \sqrt{v_{xx}^2 + v_{xy}^2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{v_{xx}^2 + v_{xy}^2} \end{pmatrix};$$

4) наибольшая скорость сдвига достигается на площадке $\alpha = \alpha_0 + \pi/4$, расположенной под углом 45° к главной оси тензора напряжений

$$u_{\max} = 2\max|v_{x'y'}| = 2\sqrt{v_{xx}^2 + v_{xy}^2} = U.$$

Этот результат получится также при рассмотрении кругов Мора. Располагая главные значения тензора \underline{v} в порядке возрастания ($u_1 = -U/2$, $u_2 = 0$, $u_3 = U/2$), найдем $u_{\max} = u_3 - u_1 = U$.

Таким образом, для плоской задачи скорость скольжения u_{\max} тождественна второму инварианту $U = 2\sqrt{v_{xx}^2 + v_{xy}^2}$ тензора скоростей деформации.

4. Реологические соотношения для вязкопластической среды. Прямое и обратные реологические соотношения (1.5.4) и (1.5.5) для плоской задачи примут вид

$$\begin{cases} s_{xx} = 2(\mu + \tau_s/U)v_{xx}, & s_{xy} = 2(\mu + \tau_s/U)v_{xy}, & U > 0, \\ T \leq \tau_s, & & U = 0; \end{cases} \quad (1.6.4)$$

$$\begin{cases} v_{xx} = \frac{T - \tau_s}{2\mu}s_{xx}, & v_{xy} = \frac{T - \tau_s}{2\mu}s_{xy}, & T > \tau_s, \\ U = 0, & & T \leq \tau_s. \end{cases} \quad (1.6.5)$$

Для плоской задачи вязкопластического течения скорость скольжения и наибольшее касательное напряжение тождественны инвариантам U и T , для которых имеют место соотношения

$$\begin{aligned} U &= 2\sqrt{v_{xx}^2 + v_{xy}^2}, & T &= \sqrt{s_{xx}^2 + s_{xy}^2} = \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2/4 + \sigma_{xy}^2}, \\ & & T &= \tau_s + \mu U. \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

Площадки с наибольшей скоростью сдвига и наибольшим касательным напряжением совпадают. Направление такой площадки называется направлением скольжения. В системе координат x', y' с осью x' , лежащей в направлении скольжения, тензоры \underline{v} , \underline{s} и $\underline{\sigma}$ имеют вид

$$v_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & U/2 \\ U/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & T \\ T & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -p & T \\ T & -p \end{pmatrix}.$$

С помощью обратного закона преобразования (1.6.3) можно выразить через U и T компоненты тензоров \underline{v} , \underline{s} и $\underline{\sigma}$ в произвольной системе координат x, y

$$\begin{aligned} v_{xx} &= -(U/2)\sin 2\alpha, & v_{xy} &= (U/2)\cos 2\alpha, \\ s_{xx} &= -T\sin 2\alpha, & s_{xy} &= T\cos 2\alpha, \\ \sigma_{xx} &= -p - T\sin 2\alpha, & \sigma_{xy} &= T\cos 2\alpha, & \sigma_{yy} &= -p + T\sin 2\alpha, \end{aligned} \quad (1.6.7)$$

где α — угол между направлением скольжения и осью x .

Таким образом, плоскопараллельное вязкопластическое течение имеет следующие свойства:

- 1) направления площадок с наибольшей скоростью сдвига (скорость скольжения) и наибольшим касательным напряжением совпадают;
- 2) условия пластичности Треска и Мизеса в плоской задаче тождественны.

5. Система уравнений Сен-Венана. Сен-Венан [83] выбрал в качестве искомым функций две компоненты скорости $v_x = u$, $v_y = w$ и три компоненты тензора напряжений $\sigma_{xx} = \sigma_x$, $\sigma_{xy} = \tau$, $\sigma_{yy} = \sigma_y$ и получил для них замкнутую систему уравнений, эквивалентную системе уравнений в случае чисто пластического течения. Он записал уравнение неразрывности (1.4.8) и два уравнения движения (1.4.12). Для двух оставшихся уравнений он сформулировал два условия:

- 1) на площадке, где касательное напряжение является наибольшим, это последнее равно постоянному максимальному напряжению сдвига τ_0 ;
- 2) на площадке, где касательное напряжение является наибольшим, скорость относительного сдвига также наибольшая.

Пользуясь этими условиями он получил

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau} = \frac{v_{yy} - v_{xx}}{2v_{xy}} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) / \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (1.6.8)$$

$$T^2 = \max \tau_{x'y'}^2 = \tau^2 + ((\sigma_y - \sigma_x)/2)^2 = \tau_s^2. \quad (1.6.9)$$

Далее Сен-Венан делает замечание: «если к компонентам напряжения прибавить соответственно члены

$$2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad 2\mu \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

то те же уравнения будут пригодны для изучения ламинарного движения жидкостей, в которой существуют касательные напряжения двух родов, одни — зависящие от скоростей, другие — не зависящие от скоростей» [83].

Таким образом, Сен-Венан почти вплотную подошел к созданию модели вязкопластической среды. Последний шаг до конца Сен-Венан не сделал. Поэтому вместо неравенств у Сен-Венана фигурирует равенство (1.6.9) для идеальной пластичности. Необходимый реологический закон (1.6.4) для вязкопластической среды им не приводится.

Глава 2

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

В этой главе рассматривается модель несжимаемой однородной вязкопластической среды.

2.1. Уравнения трехмерного движения. Граничные условия

2.1.1. Уравнения в тензорной форме

Система уравнений для трех компонент вектора скорости \vec{v} , давления p и шести компонент девиатора напряжений \underline{s} состоит из следующих уравнений:

- 1) уравнения количества движения (1.4.11) (три);
- 2) уравнение сохранения массы (1.4.7) (одно);
- 3) уравнения, связывающие девиаторы напряжений и скоростей деформаций, (1.5.4) (шесть). Выпишем эти уравнения в тензорном виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho d\vec{v}/dt = -\text{grad}p + \text{Div} \underline{s} + \rho \vec{g}, \\ \text{div} \vec{v} = 0, \\ \left. \begin{array}{l} s_{ij} = 2(\mu + \tau_s/U) v_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \\ T = \tau_s + \mu U, \\ T \leq \tau_s \end{array} \right\} \begin{array}{l} U > 0, \\ U = 0. \end{array} \right. \quad (2.1.1)$$

Напомним, что v_{ij} — компоненты тензора скоростей деформаций, а характеристики деформационного U и напряженного T состояния среды с точностью до постоянных множителей являются вторыми инвариантами девиаторов скорости деформаций и напряжений (формулы (1.5.2)).

Первые два уравнения системы (2.1.1) выполняются во всей области Ω . В области Ω поле скорости — дважды непрерывно дифференцируемо, а поле давления и девиатора напряжений — непрерывно дифференцируемо. Область течения Ω состоит из двух частей: область пластического течения Ω_f и жесткая зона Ω_s . В области Ω_f девиаторы напряжений и скоростей деформаций связаны между собой соотношениями Генки (группа соотношений системы (2.1.1))

с $U > 0$) и однозначно вычисляются из уравнений движения. В области Ω_s скорости деформаций равны нулю, а напряженное состояние не определено. Оно подчинено лишь условию $T = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \leq \tau_s$.

Тензорная форма уравнений удобна для записи их в любой криволинейной системе координат. Для этого нужно воспользоваться формулами для компонент векторов $d\vec{v}/dt$, $\text{grad}p$, $\text{Div} \mathcal{S}$, $\text{div} \vec{v}$ в соответствующей системе координат и подставить их в уравнения (2.1.1). Вывод этих формул приводится в руководствах по тензорному анализу [12, 39] или в учебниках по механике сплошной среды [82] или гидродинамике [39, 46].

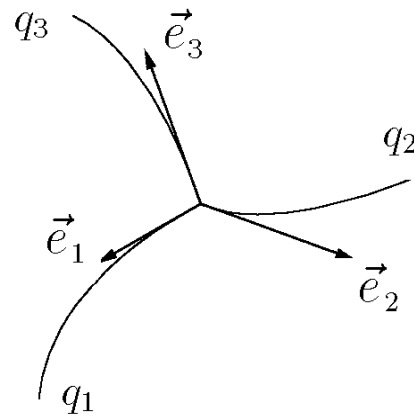


Рис. 2.1. Координатные линии и базисные векторы

2.1.2. Ортогональная криволинейная система координат

1. Базисные векторы, коэффициенты Ляме. В механике сплошной среды часто используется общая криволинейная система координат. Они вводятся с помощью замены $x = x(q_1, q_2, q_3)$, $y = y(q_1, q_2, q_3)$, $z = z(q_1, q_2, q_3)$ — рис. 2.1.

При постоянных q_2, q_3 уравнения замены определяют координатную линию q_1 . Аналогично при постоянных q_1, q_3 и q_1, q_2 определяются координатные линии q_2 и q_3 . Координатные линии взаимно ортогональны, если

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0, \quad i \neq j, \quad \vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} / \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right|, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где \vec{e}_i , $i = 1, 2, 3$ — базисные векторы, параллельные координатным линиям. В этом случае элемент радиус-вектора, который в декартовой системе имеет вид $\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$, удобно разложить по базисным векторам $\vec{r} = H_1 dq_1 \vec{e}_1 + H_2 dq_2 \vec{e}_2 + H_3 dq_3 \vec{e}_3$. Тогда для элемента длины получим соотношение

$$dr^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2,$$

в которое не войдут перекрестные произведения $dq_i dq_j$, $i \neq j$.

Коэффициенты H_1, H_2, H_3 называются коэффициентами Ляме (Lame, 1834). Через них можно выразить все тензорные величины, входящие в уравнения (2.1.1) движения среды.

2. Компоненты ускорения в криволинейной системе координат можно вывести методом, который применяется в классической механике при выводе уравнений Лагранжа [28, 40],

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_i = \frac{1}{H_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right), \quad i = 1, 2, 3; \quad T = \frac{1}{2}(H_1^2 \dot{q}_1^2 + H_2^2 \dot{q}_2^2 + H_3^2 \dot{q}_3^2).$$

Подставляя после дифференцирования обобщенные скорости $\dot{q}_i = v_i/H_i$, получим

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_i = \frac{1}{H_i} \left(\frac{d(H_i v_i)}{dt} - \frac{v_1^2}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_i} - \frac{v_2^2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_i} - \frac{v_3^2}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_i}\right), \quad i = 1, 2, 3.$$

3. Компоненты градиента давления $(\text{grad} p)_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial p}{\partial q_i}$, $i = 1, 2, 3$.

4. Компоненты дивергенции тензора

$$(\text{Div } \underline{s})_1 = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 s_{11}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 s_{12}) + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 s_{13}) \right] + \\ + \frac{s_{12}}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{s_{13}}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{s_{22}}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \frac{s_{33}}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_1},$$

$$(\text{Div } \underline{s})_2 = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 s_{12}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 s_{22}) + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 s_{23}) \right] + \\ + \frac{s_{12}}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{s_{23}}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} - \frac{s_{11}}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{s_{33}}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2},$$

$$(\text{Div } \underline{s})_3 = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 s_{13}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 s_{23}) + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 s_{33}) \right] + \\ + \frac{s_{13}}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{s_{23}}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} - \frac{s_{11}}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{s_{22}}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3}.$$

Подставляя найденные выражения в первое векторное уравнение (2.1.1), получим три уравнения для компонент.

5. Компоненты тензора скоростей деформаций

$$v_{11} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3},$$

$$v_{22} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial v_2}{\partial q_2} + \frac{v_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{v_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3},$$

$$v_{33} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial v_3}{\partial q_3} + \frac{v_1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2},$$

$$v_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial v_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial v_1}{\partial q_2} \right) - \frac{1}{2H_1 H_2} \left(v_1 \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + v_2 \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right),$$

$$v_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial v_3}{\partial q_1} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial v_1}{\partial q_3} \right) - \frac{1}{2H_1 H_3} \left(v_1 \frac{\partial H_1}{\partial q_3} + v_3 \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \right),$$

$$v_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial v_3}{\partial q_2} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial v_2}{\partial q_3} \right) - \frac{1}{2H_2 H_3} \left(v_2 \frac{\partial H_2}{\partial q_3} + v_3 \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \right).$$

6. Уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} \vec{v} = v_{11} + v_{22} + v_{33} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial(v_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(v_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(v_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right) = 0.$$

7. Реологические соотношения

$$s_{ij} = 2(\mu + \tau_s/U)v_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

$$U = [2(v_{11}^2 + v_{22}^2 + v_{33}^2) + 4(v_{12}^2 + v_{13}^2 + v_{23}^2)]^{1/2},$$

$$T = [\frac{1}{2}(s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2) + s_{12}^2 + s_{13}^2 + s_{23}^2]^{1/2}.$$

Приведенные формулы можно применить для записи физических законов в декартовой, цилиндрической, сферической и многих других системах координат.

2.1.3. Уравнения в различных ортогональных системах координат

1. Декартова система координат x, y, z . Единичные векторы (орты) направлены по осям $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, а все коэффициенты Ляме равны единице $H_i = 1, i = 1, 2, 3$.

Ускорение:

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z},$$

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z},$$

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Градиент давления:

$$(\operatorname{grad} p)_x = \partial p / \partial x, \quad (\operatorname{grad} p)_y = \partial p / \partial y, \quad (\operatorname{grad} p)_z = \partial p / \partial z.$$

Дивергенция тензора:

$$(\operatorname{Div} \underline{s})_x = \partial s_{xx} / \partial x + \partial s_{xy} / \partial y + \partial s_{xz} / \partial z,$$

$$(\operatorname{Div} \underline{s})_y = \partial s_{xy} / \partial x + \partial s_{yy} / \partial y + \partial s_{yz} / \partial z,$$

$$(\operatorname{Div} \underline{s})_z = \partial s_{xz} / \partial x + \partial s_{yz} / \partial y + \partial s_{zz} / \partial z.$$

Дивергенция вектора:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y + \partial v_z / \partial z = v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}.$$

Компоненты тензора скоростей деформации:

$$v_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \dots, \quad v_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \dots$$

Вторые инварианты:

$$U = [2(v_{xx}^2 + v_{yy}^2 + v_{zz}^2) + 4(v_{xy}^2 + v_{xz}^2 + v_{yz}^2)]^{1/2},$$

$$T = [(s_{xx}^2 + s_{yy}^2 + s_{zz}^2) / 2 + (s_{xy}^2 + s_{xz}^2 + s_{yz}^2)]^{1/2}.$$

Подставляя найденные соотношения в уравнения (2.1.1), получим требуемую систему уравнений. В области пластического течения ее кратко можно записать так

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\mu \frac{\partial v_{ij}}{\partial x_j} + 2\tau_s \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v_{ij}}{U} \right) + g_i, \\ \frac{\partial v_i}{\partial x_i} &= 0, \end{aligned} \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.1.2)$$

где $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ и $v_1 = v_x$, $v_2 = v_y$, $v_3 = v_z$. По повторяющимся индексам предполагается суммирование.

2. Цилиндрическая система координат r , ϕ , z вводится с помощью замены декартовых координат: $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, $z = z$ (рис. 2.2).

Единичные векторы (орты) \vec{e}_r , \vec{e}_ϕ , \vec{e}_z определяются через связь элемента радиуса-вектора в декартовой и цилиндрической системах координат

$$d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\phi\vec{e}_\phi + dz\vec{e}_z = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}.$$

Коэффициенты Ляме: $H_r = 1$, $H_\phi = r$, $H_z = 1$.

Ускорение:

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{r},$$

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_\phi = \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{v_r v_\phi}{r},$$

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Градиент давления:

$$(\operatorname{grad} p)_r = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (\operatorname{grad} p)_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi}, \quad (\operatorname{grad} p)_z = \frac{\partial p}{\partial z}.$$

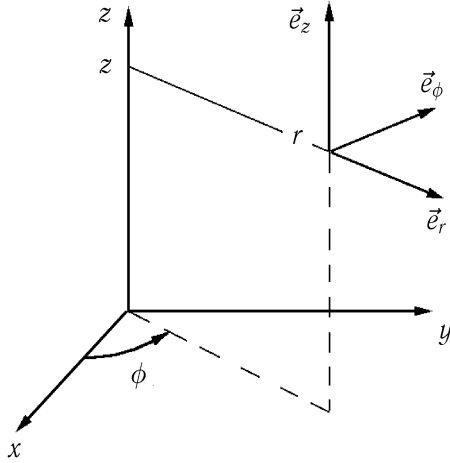


Рис. 2.2. Координатные линии и базисные векторы в цилиндрической системе координат

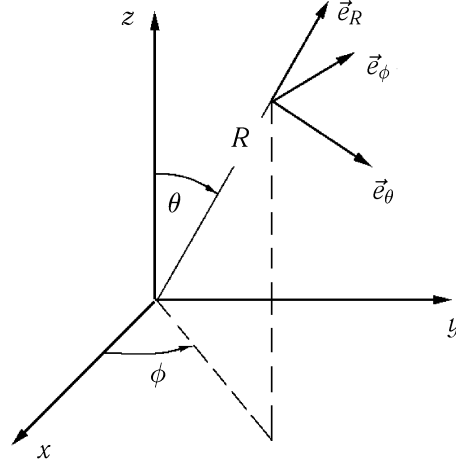


Рис. 2.3. Координатные линии и базисные векторы в сферической системе координат

Дивергенция тензора:

$$\begin{aligned}
 (\text{Div } \underline{s})_r &= \frac{\partial s_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_{\phi r}}{\partial \phi} + \frac{\partial s_{zr}}{\partial z} + \frac{s_{rr} - s_{\phi\phi}}{r}, \\
 (\text{Div } \underline{s})_\phi &= \frac{\partial s_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial s_{z\phi}}{\partial z} + \frac{s_{r\phi} + s_{\phi r}}{r}, \\
 (\text{Div } \underline{s})_z &= \frac{\partial s_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_{\phi z}}{\partial \phi} + \frac{\partial s_{zz}}{\partial z} + \frac{s_{rz}}{r}.
 \end{aligned}$$

Дивергенция вектора:

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = v_{rr} + v_{\phi\phi} + v_{zz}.$$

Компоненты тензора скоростей деформации:

$$\begin{aligned}
 v_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad v_{\phi\phi} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} \right), \quad v_{r\phi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right), \\
 v_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad v_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \quad v_{\phi z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right).
 \end{aligned}$$

3. Сферическая система координат R, θ, ϕ

$$x = R \sin \theta \cos \phi, \quad y = R \sin \theta \sin \phi, \quad z = R \cos \theta.$$

Единичные векторы (орты): $\vec{e}_R, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ (рис. 2.3).

Коэффициенты Ляме: $H_R = 1$, $H_\theta = R$, $H_\phi = R \sin \theta$. Соотношения для радиус-вектора в декартовой и сферической системах координат имеют вид

$$\vec{dr} = dR\vec{e}_R + Rd\theta\vec{e}_\theta + R \sin \theta d\phi\vec{e}_\phi = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}.$$

Ускорение:

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_R = \frac{\partial v_R}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_R}{\partial R} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_R}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{R \sin \theta} \frac{\partial v_R}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{R},$$

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_\theta}{\partial R} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{R \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_R v_\theta}{R} - \frac{v_\phi^2}{R} \operatorname{ctg} \theta,$$

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_\phi = \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_\phi}{\partial R} + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{R \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_R v_\phi}{R} + \frac{v_\theta v_\phi}{R} \operatorname{ctg} \theta.$$

Градиент давления:

$$(\operatorname{grad} p)_R = \frac{\partial p}{\partial R}, \quad (\operatorname{grad} p)_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad (\operatorname{grad} p)_\phi = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi}.$$

Дивергенция тензора:

$$(\operatorname{Div} \underline{s})_R = \frac{\partial s_{RR}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial s_{R\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial s_{R\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{R} (3s_{rr} + s_{R\theta} \operatorname{ctg} \theta),$$

$$(\operatorname{Div} \underline{s})_\theta = \frac{\partial s_{R\theta}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial s_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial s_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{R} (3s_{R\theta} + (s_{\theta\theta} - s_{\phi\phi}) \operatorname{ctg} \theta),$$

$$(\operatorname{Div} \underline{s})_\phi = \frac{\partial s_{R\phi}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial s_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial s_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{R} (3s_{R\phi} + 2s_{\theta\phi} \operatorname{ctg} \theta).$$

Дивергенция скорости:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial (R^2 v_R)}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \theta} \left(\frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) = v_{RR} + v_{\theta\theta} + v_{\phi\phi}.$$

Компоненты тензора скоростей деформации:

$$v_{RR} = \frac{\partial v_R}{\partial R},$$

$$v_{\theta\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_R}{R}, \quad v_{\phi\phi} = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\theta}{R} \operatorname{ctg} \theta + \frac{v_R}{R},$$

$$v_{R\phi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial v_R}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial R} - \frac{v_\phi}{R} \right), \quad v_{R\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial R} - \frac{\partial v_R}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial v_R}{\partial \theta} \right),$$

$$v_{\theta\phi} = \frac{1}{2R} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} - v_\phi \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{1}{2R \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}.$$

Базисные векторы в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат взаимно ортогональны. Такие криволинейные системы координат называются ортогональными. Характеристики U и T во всех криволинейных ортогональных системах координат выражаются через компоненты тензоров так

$$U = [2(v_{11}^2 + v_{22}^2 + v_{33}^2) + 4(v_{12}^2 + v_{13}^2 + v_{23}^2)]^{1/2},$$

$$T = [(s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2)/2 + s_{12}^2 + s_{13}^2 + s_{23}^2]^{1/2}.$$

2.1.4. Граничные условия

Уравнения по форме близки к уравнениям Навье-Стокса для вязкой жидкости. Поэтому на границах области течения можно выставлять такие же условия как и для вязкой жидкости. Обычно существуют два вида граничных условий. На твердых движущихся границах ставится условие прилипания

$$\vec{v} = \vec{v}, \quad \vec{x} \in \partial V_v. \quad (2.1.3)$$

Такое условие будем называть условием в скоростях.

Второй вид граничного условия связан с заданием силы \vec{f} , распределенной на границе

$$-pn_i + s_{ij}n_j = \vec{f}_i, \quad \vec{x} \in \partial V_f. \quad (2.1.4)$$

Такие условия называются условиями в напряжениях.

Могут ставиться смешанные граничные условия: на одной части границы ∂V_v выполняется условие (2.1.3), а на второй части ∂V_f — условие (2.1.4).

Металлы при обработке их давлением имеют отличительную особенность. Если касательное напряжение на поверхности контакта превышает некоторое пороговое значение, то может иметь место скольжение металла по поверхности инструмента [38]. В этом случае граничные условия ставятся так: 1) нормальные скорости среды и граничной поверхности равны; 2) разность v_s касательной скорости среды и касательной скорости инструмента связывается с нормальным σ_n и касательным напряжением σ_τ по закону трения Кулона $\sigma_\tau(v_s) = k\sigma_n$, где k — коэффициент трения, зависимость $\sigma_\tau(v_s)$ задается.

Условия на границе ядра. Для вязкопластической среды могут реализоваться два различных по своему характеру течения. В первом случае решение краевой задачи (2.1.1), (2.1.3) и (2.1.4) таково, что во всех точках области $U > 0$. Такое деформационное всюду течение с гладким полем скорости близко по своему характеру к течению вязкой жидкости. Во втором случае гладкое во всей области решение краевой задачи отсутствует. Тогда при решении следует учесть внутри области течения жесткое ядро, в котором $U = 0$. Деформации отсутствуют $U = 0$. Для определения границы этой области на ней

нужно выставить шесть условий, вытекающих из равенства нулю компонент тензора деформаций.

$$v_{11} = v_{22} = v_{33} = v_{12} = v_{13} = v_{23} = 0. \quad (2.1.5)$$

Применяя к области ядра Ω_s закон количества движения, можно получить соотношение, которому должно удовлетворять распределение напряжений на границе $\partial\Omega_s$, движущейся со скоростью D в направлении своей нормали

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_s} \rho \vec{v} dV = \int_{\partial\Omega_s} \vec{P}^{(n)} dS + \int_{\Omega_s} \rho \vec{g} dV + \int_{\partial\Omega_s} \rho \vec{v} (D - v_n) dS. \quad (2.1.6)$$

Поскольку область ядра Ω_s в разные моменты времени состоит из различных частиц среды, то левая часть равенства отличается от $d\vec{Q}/dt$ в законе изменения количества движения (1.4.10). Разница равна потоку количества движения через поверхность ядра, за счет поступления и ухода из него частиц среды. Она учитывается в третьем слагаемом правой части (2.1.6). Вывод и применение этого соотношения для различных частных случаев приводится в гл. IV и V.

Возникает задача с неизвестной границей, аналогичная краевой задаче Навье-Стокса со свободной границей. Следует отметить, что в отличие от условий (2.1.3) и (2.1.4), условия (2.1.5) не ставятся, а выводятся из краевой задачи.

2.2. Двумерные движения

Если в какой-либо криволинейной системе координат q_1, q_2, q_3 компонента скорости v_3 тождественно равна нулю, а остальные компоненты скорости не зависят от q_3 , то такое движение называется двумерным. Примерами двумерных движений являются осесимметричные и плоскопараллельные течения. Эти примеры наиболее часто встречаются в теоретических и экспериментальных исследованиях.

2.2.1. Уравнения осесимметричного движения

При осевой симметрии удобно рассматривать уравнения движения в цилиндрической или сферической системах координат. Осевая симметрия означает независимость компонент скорости и тензора напряжений от угловой переменной ϕ . Течения, в которых компонента $v_\phi \neq 0$, называются течениями с закруткой. Мы рассмотрим течения без закрутки $v_\phi = 0$. В этом случае надо найти три функции v_r, v_z, p в зависимости от r, z и времени t . Приведем уравнения движения в цилиндрической системе координат. Их можно получить из общей

системы уравнений в цилиндрических координатах, полагая в ней

$$v_\phi = \partial v_r / \partial \phi = \partial v_z / \partial \phi = \partial p / \partial \phi = 0$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial s_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial s_{zr}}{\partial z} + \frac{2s_{rr} + s_{zz}}{r}, \\ \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial s_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial s_{zz}}{\partial z} + \frac{s_{rz}}{r}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

$$\begin{aligned} s_{rr} &= 2 \left(\mu + \frac{\tau_s}{U} \right) \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad s_{zz} = 2 \left(\mu + \frac{\tau_s}{U} \right) \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ s_{\phi\phi} &= 2 \left(\mu + \frac{\tau_s}{U} \right) \frac{v_r}{r}, \quad s_{rz} = \left(\mu + \frac{\tau_s}{U} \right) \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \end{aligned}$$

где

$$U = \left[2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \frac{v_r^2}{r^2} + 2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

2.2.2. Уравнения плоскопараллельного движения

Поле скорости в декартовой системе координат имеет две компоненты v_x v_y и не зависит от координаты z . Уравнения упрощаются и их можно воспроизвести в окончательном виде в любой криволинейной системе координат.

1. Уравнения в декартовой системе координат

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial s_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial s_{xy}}{\partial y}, \\ \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial s_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial s_{xx}}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

$$U = \sqrt{4(\partial v_x / \partial x)^2 + (\partial v_x / \partial y + \partial v_y / \partial x)^2},$$

$$s_{xx} = 2 \left(\mu + \frac{\tau_s}{U} \right) \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad s_{xy} = 2 \left(\mu + \frac{\tau_s}{U} \right) \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right).$$

2. Уравнения в ортогональной криволинейной системе координат с коэффициентами Ляме H_1, H_2 , третий коэффициент $H_3 = 1$. Для плоскопараллельного движения координаты вводятся с помощью замены $x = x(q_1, q_2)$,

$y = y(q_1, q_2)$. Задача сводится к отысканию трех функций v_1, v_2, p , зависящих от двух координат q_1, q_2 . Уравнения нетрудно получить из общих формул криволинейных ортогональных координат (см. разд. 2.1.2), полагая в них $H_3 = 1, v_3 = 0$ и производные по q_3 от всех функций равными нулю. Тогда получим компоненты ускорения

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_i = \frac{1}{H_i} \left(\frac{d(H_i v_i)}{dt} - \frac{v_1^2}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_i} - \frac{v_2^2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_i} \right), \quad i = 1, 2;$$

компоненты градиента давления $(\text{grad} p)_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial p}{\partial q_i}$ и компоненты дивергенции тензора

$$\begin{aligned} (\text{Div } \underline{s})_1 &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 s_{11}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 s_{12}) + s_{11} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + s_{12} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right], \\ (\text{Div } \underline{s})_2 &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 s_{12}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 s_{22}) + s_{12} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} - s_{11} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right]. \end{aligned}$$

Подставляя найденные выражения в первое векторное уравнение (2.1.1), получим два уравнения для его компонент

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{H_1} \left(\frac{\partial(H_1 v_1)}{\partial t} + v_1 \frac{\partial(H_1 v_1)}{\partial q_1} + v_2 \frac{\partial(H_1 v_1)}{\partial q_2} - \frac{v_1^2}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_1} - \frac{v_2^2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right) &= -\frac{1}{H_1} \frac{\partial p}{\partial q_1} + \\ &+ \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 s_{11}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 s_{12}) + s_{11} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + s_{12} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right], \\ \frac{\rho}{H_2} \left(\frac{\partial(H_2 v_2)}{\partial t} + v_1 \frac{\partial(H_2 v_2)}{\partial q_1} + v_2 \frac{\partial(H_2 v_2)}{\partial q_2} - \frac{v_1^2}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{v_2^2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_2} \right) &= -\frac{1}{H_2} \frac{\partial p}{\partial q_2} + \\ &+ \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 s_{12}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 s_{22}) + s_{12} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} - s_{11} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right]. \end{aligned}$$

Компоненты тензора скоростей деформаций

$$\begin{aligned} v_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2}, \\ v_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial v_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial v_1}{\partial q_2} \right) - \frac{1}{H_1 H_2} \left(v_1 \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + v_2 \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right). \end{aligned}$$

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\text{div } \vec{v} = v_{11} + v_{22} = \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial(H_2 v_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(H_1 v_2)}{\partial q_2} \right).$$

Реологические соотношения

$$U = 2\sqrt{v_{11}^2 + v_{12}^2}, \quad s_{ij} = 2(\mu + \tau_s/U)v_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

3. Уравнения в полярной системе координат r, ϕ можно получить, подставляя в предыдущие уравнения коэффициенты Ляме $H_1 = 1, H_2 = r$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi^2}{r} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial s_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{2s_{rr}}{r}, \\ \frac{\rho}{r} \left[\frac{\partial(rv_\phi)}{\partial t} + v_r \frac{\partial(rv_\phi)}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial(rv_\phi)}{\partial \phi} \right] &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{\partial s_{r\phi}}{\partial r} + \frac{2s_{r\phi}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial s_{rr}}{\partial \phi}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} &= 0, \\ s_{rr} &= 2 \left(\mu + \frac{\tau_s}{U} \right) \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad s_{r\phi} = \left(\mu + \frac{\tau_s}{U} \right) \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right), \\ U &= \left[4 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

2.3. Уравнения в безразмерной форме. Критерии подобия

2.3.1. Безразмерные критерии

1. Безразмерные переменные. Приведем безразмерный анализ уравнений вязкопластического течения подобно тому, как это делается в гидродинамике [40, 43, 46, 15]. Вводим безразмерные переменные

$$t = Tt', \quad x_i = Lx'_i, \quad v_i = Vv'_i, \quad g_i = gg'_i,$$

где T, L, V — характерные время, длина и скорость течения среды, g — ускорение силы тяжести. Тогда для скорости деформации и реологического закона получим

$$v_{ij} = \frac{V}{L} v'_{ij}, \quad U = \frac{V}{L} U', \quad s_{ij} = 2 \left(\frac{\mu V}{L} + \frac{\tau_s}{U'} \right) v'_{ij}. \quad (2.3.1)$$

Давление p входит в уравнения движения под знаком производной. Пусть характерное изменение давления равно δp происходит на длине порядка l , тогда

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\delta p}{l} \frac{\partial p'}{\partial x'_i}.$$

Величина l , вообще говоря, отлична от L . Например, для течения в трубе характерная длина L , на которой меняется скорость равна радиусу трубы, а за l следует принять длину трубы, на которой задается перепад давления.

Уравнения движения (2.1.1) в безразмерном виде будут иметь вид

$$\begin{aligned} \text{Sh} \frac{\partial v'_i}{\partial t'} + v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x'_j} &= -\text{Eu} \frac{\partial p'}{\partial x'_i} + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial v'_{ij}}{\partial x'_j} + \frac{2\text{Se}}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\frac{v'_{ij}}{U'} \right) + g'_i \frac{1}{\text{Fr}}, \\ \frac{\partial v'_i}{\partial x'_i} &= 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

2. Безразмерные критерии. Итак вязкопластическое течение характеризуется пятью безразмерными критериями:

$$\text{Se} = \frac{L\tau_s}{\mu V} \quad \text{— число Сен-Венана,}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho V L}{\mu} \quad \text{— число Рейнольдса,}$$

$$\text{Sh} = \frac{L}{TV} \quad \text{— число Струхаля,}$$

$$\text{Fr} = \frac{V^2}{gL} \quad \text{— число Фруда,}$$

$$\text{Eu} = \frac{\delta p}{\rho V^2} \frac{L}{l} \quad \text{— число Эйлера.}$$

Число Сен-Венана называется также параметром пластичности. Это единственный дополнительный критерий подобия, которым модель вязкопластической среды отличается от модели вязкой жидкости.

Для представления порядков слагаемых уравнения (2.3.2) с учетом (2.3.1) удобна запись слагаемых по порядку величин

$$\text{Sh} + 1 = \text{Eu} + \frac{1}{\text{Re}} + \frac{\text{Se}}{\text{Re}} + \frac{1}{\text{Fr}}. \quad (2.3.3)$$

Число Эйлера является зависимым от других безразмерных величин. Эта зависимость находится из решения задачи. По порядку величины число Eu можно оценить как наибольшее слагаемое уравнения (2.3.3), т. е. $\text{Eu} \sim \max(\text{Sh}, 1, 1/\text{Re}, \text{Se}/\text{Re})$.

Число Фруда проявляется в задачах со свободной границей, которую необходимо определять из соответствующей краевой задачи. Например, граница раздела жидкости и газа, на которой задается нормальное напряжение, а касательное напряжение отсутствует (волны на поверхности тяжелой вязкопластической среды).

3. Модифицированное давление. Зависимости от ускорения силы тяжести. Если движение границы задается, то массовую силу тяжести можно легко учесть, отнеся ее к модифицированному давлению $\tilde{p} = p + \rho g z$, где z — координата, направленная вертикально вверх. Постановка краевой задачи для скорости будет такой же, как если бы сила тяжести отсутствовала. Поэтому

когда на границе задается только скорость, то поле скорости не зависит от силы тяжести и число Фруда в число безразмерных критериев не войдет. Не будут зависеть от силы тяжести девиаторы скорости деформаций и напряжений. Распределение модифицированного давления также не зависит от силы тяжести. Отсюда легко найти зависимость физического давления от силы тяжести $p = \bar{p} - \rho g z$. Зависимость от силы тяжести компонент тензора напряжений войдет только в его шаровую часть — давление p .

2.3.2. Уравнения различных приближений

Из сравнения безразмерных чисел по порядку величин можно делать вывод о существенности соответствующих слагаемых и получать те или иные приближенные теории.

Число Струхала существенно в задачах с высокочастотными вынужденными колебаниями или в задачах развития течения под действием внезапно приложенных сил. Числа Рейнольдса и Сен-Венана являются показателями существенности инерционных, вязких или пластических эффектов.

В расположенной ниже таблице 2.1 отражены приближенные теории движения вязкопластической среды (ВПС) с заданным движением границы области, представляющие наибольший интерес.

Таблица 2.1

Приближение	Уравнения
1. $Sh \gg 1$, $\max(1/Re, Se/Re) \gg 1$ $Sh + \lambda = Eu + 1/Re + Se/Re$	$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta v_i + 2\tau_s \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v_j}{U} \right)$
а) $Se \ll 1$ (вязкая жидкость)	$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta v_i$
б) $Se \gg 1$ (идеальная пластичность)	$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\tau_s \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v_j}{U} \right)$
2. $Sh \sim 1$, $\max(1/Re, Se/Re) \gg 1$ $Sh + \lambda = Eu + 1/Re + Se/Re$	$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta v_i + 2\tau_s \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v_j}{U} \right) = 0$
а) $Se \ll 1$ (вязкая жидкость)	$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta v_i = 0$
б) $Se \gg 1$ (идеальная пластичность)	$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + 2\tau_s \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v_j}{U} \right) = 0.$

В левой колонке таблицы приводятся условия применимости приближения и соотношение (2.3.3) с перечеркнутыми слагаемыми, которыми следует пренебречь. В правой колонке таблицы приведены уравнения соответствующего приближения.

2.4. Безынерционное приближение

2.4.1. Система уравнений

Наиболее важным приближением является безынерционное приближение. Оно соответствует второму случаю таблицы 2.1.

$$\min \left(\text{Re}, \frac{\text{Re}}{\text{Se}} \right) = \min \left(\frac{\rho V L}{\mu}, \frac{\rho V^2}{\tau_s} \right) \ll 1.$$

Здесь можно пренебречь инерционными эффектами и систему уравнений движения (2.1.1) можно заменить системой уравнений равновесия

$$\text{Div } \underset{\sim}{\sigma} = 0, \quad \text{div } \underset{\sim}{v} = 0.$$

В декартовой системе координат они имеют вид

$$\begin{cases} \partial \sigma_{ij} / \partial x_j = 0, \\ \partial v_i / \partial x_i = 0. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

К этим уравнениям нужно присоединить реологические соотношения

$$\begin{cases} s_{ij} = 2(\mu + \tau_s/U) v_{ij}, & U > 0, \\ T^2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \leq \tau_s^2, & U = 0, \end{cases} \quad (2.4.2)$$

$$U = 2v_{ij}v_{ij}, \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + s_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

В уравнениях (2.4.1) массовые силы опущены. Их можно легко учесть, если под давлением понимать модифицированное давление, включающее гидростатическое распределение давления.

В теории вязкой жидкости это приближение ввел Стокс. Поэтому оно называется приближением Стокса. Его также называют ползущим движением, имея в виду малость скорости движения. Уравнения Стокса для вязкой жидкости получаются подстановкой в (2.4.1) реологических соотношений (2.4.2) при $\tau_s = 0$. Они линейные относительно скорости. Для вязкопластической среды уравнения Стокса — нелинейные.

2.4.2. Функции напряжений

Уравнения равновесия (2.4.1) линейны относительно напряжений. Их можно разрешить и выразить компоненты напряжений через три скалярные функции координат Ψ_1 , Ψ_2 и Ψ_3 , которые в теории упругости называются функциями напряжений. Эти соотношения получены Максвеллом (Maxwell, 1870) [47]:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_3^2}, & \sigma_{12} &= -\frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x_1 \partial x_2}, & \sigma_{13} &= -\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_1 \partial x_3}, \\ \sigma_{22} &= \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x_1^2}, & \sigma_{23} &= -\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_2 \partial x_3}, & \sigma_{33} &= \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_2^2}.\end{aligned}\quad (2.4.3)$$

Другой вид функций напряжения предложил Морера (Morera, 1892) [47]

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_2 \partial x_3}, & \sigma_{22} &= \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_1 \partial x_3}, & \sigma_{33} &= \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ \sigma_{12} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \Psi_3}{\partial x_3} \right) + \dots\end{aligned}\quad (2.4.4)$$

Уравнения в напряжениях. Уравнения в напряжениях можно получить, если выразить компоненты деформаций через компоненты тензора напряжений по (1.5.5). Уравнения для напряжений можно не разрешать, а выразить компоненты напряжений через три функции напряжений по формулам (2.4.3) или (2.4.4). В результате получим выражения компонент тензора деформаций через функции напряжений. Для функций напряжений Максвелла (2.4.3) они имеют вид

$$v_{12} = \frac{1 - \tau_s/T}{2\mu} \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots \quad v_{11} = \frac{1 - \tau_s/T}{2\mu} \left(\frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x_3^2} \right), \dots \quad T > \tau_s,$$

где T выражается через вторые производные функций напряжения.

Теперь нужно потребовать, чтобы по компонентам v_{ij} можно было определить компоненты вектора скорости v_i . Необходимое и достаточное условие этого — шесть условий совместности, которые можно записать в виде шести условий равенства нулю компонент симметричной матрицы R_{ij} [16]

$$R_{11} = R_{22} = R_{33} = R_{23} = R_{13} = R_{12} = 0,$$

$$R_{11} = \frac{\partial^2 v_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 v_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 v_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}, \dots \quad (\text{три уравнения})$$

$$R_{23} = -\frac{\partial^2 v_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial v_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial v_{12}}{\partial x_3} \right), \dots \quad (\text{три уравнения})$$

Между R_{ij} выполняются три тождественных соотношения

$$\partial R_{ij} / \partial x_j = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

На этом основании в монографии [16] делается вывод, что приведенные шесть уравнений совместности не являются независимыми и их можно заменить на три условия в области течения и шесть условий на границе.¹

$$\begin{aligned} R_{11} = R_{22} = R_{33} = 0, \quad \vec{x} \in V, \\ R_{11} = R_{22} = R_{33} = R_{23} = R_{13} = R_{12} = 0, \quad \vec{x} \in \partial V. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Уравнения в напряжениях полезны, когда граничные условия ставятся для напряжений.

2.4.3. Уравнения в цилиндрической системе координат

Уравнения (2.4.1) нетрудно записать в любой ортогональной криволинейной системе координат, пользуясь формулами, приведенными в разд. 2.1.2. Например, в цилиндрической системе координат уравнения будут такими

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial s_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_{\phi r}}{\partial \phi} + \frac{\partial s_{zr}}{\partial z} + \frac{s_{rr} - s_{\phi\phi}}{r} &= 0, \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{\partial s_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial s_{z\phi}}{\partial z} + \frac{2s_{r\phi}}{r} &= 0, \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial s_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_{\phi z}}{\partial \phi} + \frac{\partial s_{zz}}{\partial z} + \frac{s_{rz}}{r} &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

К этим уравнениям нужно добавить реологические соотношения (2.4.2), записанные в цилиндрической системе координат

$$\begin{pmatrix} s_{rr} & s_{r\phi} & s_{rz} \\ s_{r\phi} & s_{\phi\phi} & s_{\phi z} \\ s_{rz} & s_{\phi z} & s_{zz} \end{pmatrix} = 2 \left(\mu + \frac{\tau_s}{U} \right) \begin{pmatrix} v_{rr} & v_{r\phi} & v_{rz} \\ v_{r\phi} & v_{\phi\phi} & v_{\phi z} \\ v_{rz} & v_{\phi z} & v_{zz} \end{pmatrix},$$

$$U = \sqrt{2(v_{rr}^2 + v_{\phi\phi}^2 + v_{zz}^2) + 4(v_{r\phi}^2 + v_{rz}^2 + v_{\phi z}^2)},$$

$$v_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad v_{\phi\phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r}, \quad v_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad v_{z\phi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right),$$

$$v_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \quad v_{r\phi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right).$$

¹В работе Георгиевский Д.В., Победра Б.Е. О числе независимых уравнений совместности в механике деформируемого твердого тела// ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 6. с. 1045–1048 приводится контрпример неэквивалентности уравнений совместности уравнениям (2.4.5)

2.5. Безынерционное плоскопараллельное течение вязкопластической среды

Уравнения движения вязкопластической среды на плоскости представлены в статьях Сен-Венана [83] и Ильюшина [32], которые мы кратко изложим, используя современные понятия тензорного исчисления [82].

2.5.1. Функция напряжений и функция тока

1. Общая система уравнений. Уравнения (2.4.1), (2.4.2) ползущего вязкопластического течения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial s_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial s_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial s_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial s_{xx}}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

$$s_{xx} + s_{yy} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (2.5.2)$$

$$\begin{cases} s_{xx} = 2(\mu + \tau_s/U)v_{xx}, & s_{xy} = 2(\mu + \tau_s/U)v_{xy}, & U > 0, \\ T \leq \tau_s, & & U = 0. \end{cases} \quad (2.5.3)$$

$$U = 2[v_{xx}^2 + v_{xy}^2]^{1/2}, \quad T = [s_{xx}^2 + s_{xy}^2]^{1/2}.$$

можно свести к уравнениям для одной скалярной функции. Для этого совершаем следующие операции:

1. Через функцию напряжений Эри разрешаем систему (2.5.1).
2. Через функцию тока разрешаем уравнение неразрывности (2.5.2).
3. Из реологических соотношений получаем систему двух уравнений для функций напряжения и тока.
4. Исключаем из системы уравнений одну из функций и получаем уравнение для другой функции.

В результате получим одно уравнение для функции напряжений Эри или для функции тока. Оба уравнения приведены в работе [32]. Перейдем к выводу этих уравнений.

2. Функция напряжений Эри. Систему (2.5.1) разрешаем с помощью функции напряжения Эри Φ (см. также (2.4.3))

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = -p + s_{xx} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = -p - s_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = s_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \Rightarrow \\ p &= -\frac{1}{2}\Delta\Phi, \quad s_{xx} = -\frac{1}{2}D_1\Phi, \quad s_{xy} = -\frac{1}{2}D_2\Phi. \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Здесь, Δ — оператор Лапласа, D_1 и D_2 — два линейных дифференциальных оператора

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad D_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad D_2 = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}. \quad (2.5.5)$$

Отметим, что D_1 и D_2 — это два гиперболических оператора. Они введены Ильюшиным ([32]). При повороте координат x, y на 45° , один оператор преобразуется в другой. Сумма их квадратов является бигармоническим оператором $D_1^2 + D_2^2 = \Delta^2$.

3. Функция тока. Разрешаем уравнение неразрывности (2.5.2) с помощью функции тока Лагранжа Ψ и выражаем через нее компоненты скорости деформаций

$$v_x = \partial \Psi / \partial y, \quad v_y = -\partial \Psi / \partial x \Rightarrow$$

$$v_{xx} = \frac{1}{2} D_2 \Psi, \quad v_{xy} = -\frac{1}{2} D_1 \Psi. \quad (2.5.6)$$

Максимальные скорость скольжения и напряжение сдвига. можно выразить соответственно через Ψ и Φ , подставляя в последнюю формулу (2.5.3) соотношения (2.5.4) и (2.5.6)

$$U = \sqrt{(D_1 \Psi)^2 + (D_2 \Psi)^2}, \quad T = \frac{1}{2} \sqrt{(D_1 \Phi)^2 + (D_2 \Phi)^2}. \quad (2.5.7)$$

2.5.2. Уравнения Ильюшина

1. Система уравнений для двух функций. Подставляем (2.5.4) и (2.5.6) в реологические соотношения Генки (2.5.3). В результате получим два уравнения для двух скалярных функций

$$D_1 \Phi = -2(\mu + \tau_s/U) D_2 \Psi, \quad D_2 \Phi = 2(\mu + \tau_s/U) D_1 \Psi. \quad (2.5.8)$$

2. Система уравнений для функции напряжений и функции тока. Для определения направления площадок с наибольшей скоростью сдвига удобно исходить из уравнений (1.6.7). Подставляя в них выражения (2.5.4) и (2.5.6) получим

$$\begin{aligned} D_1 \Psi &= -U \cos 2\alpha, & D_2 \Psi &= -U \sin 2\alpha, \\ D_1 \Phi &= 2T \sin 2\alpha, & D_2 \Phi &= -2T \cos 2\alpha, \\ T &= \mu U + \tau_s. \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Здесь α — угол, который составляет площадка наибольшей скорости сдвига с осью x .

Исключая из пяти уравнений U , T и α , получим систему уравнений для Ψ и Φ эквивалентную (2.5.8)

$$(D_1\Phi)(D_1\Psi) + (D_2\Phi)(D_2\Psi) = 0, \\ \sqrt{(D_1\Phi)^2 + (D_2\Phi)^2} - 2\mu\sqrt{(D_1\Psi)^2 + (D_2\Psi)^2} = 2\tau_s.$$

3. Уравнение для функции тока. Чтобы получить уравнение для Ψ нужно исключить Φ . Это можно сделать с помощью соотношения $D_1D_2\Phi - D_2D_1\Phi = 0$ и уравнений (2.5.8).

$$D_1 \left[\left(\mu + \frac{\tau_s}{\sqrt{(D_1\Psi)^2 + (D_2\Psi)^2}} \right) D_1\Psi \right] + \\ + D_2 \left[\left(\mu + \frac{\tau_s}{\sqrt{(D_1\Psi)^2 + (D_2\Psi)^2}} \right) D_2\Psi \right] = 0. \quad (2.5.10)$$

Пользуясь тождеством $D_1^2 + D_2^2 = \Delta^2$, уравнение удобно записать в таком виде

$$\mu\Delta^2\Psi + \tau_s G\{\Psi\} = 0,$$

$$G\{\Psi\} = D_1 \left(\frac{D_1\Psi}{\sqrt{(D_1\Psi)^2 + (D_2\Psi)^2}} \right) + D_2 \left(\frac{D_2\Psi}{\sqrt{(D_1\Psi)^2 + (D_2\Psi)^2}} \right).$$

4. Уравнение для функции напряжений. Наконец, исключая из системы уравнений Ψ , Ильюшин получил уравнение для функции напряжений

$$D_1 \left[\left(1 - \frac{2\tau_s}{\sqrt{(D_1\Phi)^2 + (D_2\Phi)^2}} \right) D_1\Phi \right] + \\ + D_2 \left[\left(1 - \frac{2\tau_s}{\sqrt{(D_1\Phi)^2 + (D_2\Phi)^2}} \right) D_2\Phi \right] = 0. \quad (2.5.11)$$

Его можно преобразовать так $\Delta^2\Phi = 2\tau_s G\{\Phi\}$, где $G\{\Phi\}$ — тот же нелинейный дифференциальный оператор, что и в предыдущей формуле.

5. Уравнения Ильюшина в полярной системе координат. Из уравнений равновесия (2.4.6) для плоскопараллельного движения получим

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial s_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{s_{rr} - s_{\phi\phi}}{r} = 0, \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{\partial s_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{2s_{r\phi}}{r} = 0, \quad (2.5.12) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} = 0.$$

Первые два уравнения (2.5.12) разрешаем с помощью функции напряжения Эри Φ

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -p + s_{rr} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi(r, \phi)}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, \phi)}{\partial r}, \\ \sigma_{r\phi} &= s_{r\phi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi(r, \phi)}{\partial r \partial \phi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi(r, \phi)}{\partial \phi}, \\ \sigma_{\phi\phi} &= -p + s_{\phi\phi} = \frac{\partial^2 \Phi(r, \phi)}{\partial r^2}.\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая равенство $s_{rr} + s_{\phi\phi} = 0$, найдем

$$p = -\frac{1}{2} \Delta \Phi, \quad s_{rr} = -s_{\phi\phi} = -\frac{1}{2} D_1 \Phi, \quad s_{r\phi} = -\frac{1}{2} D_2 \Phi \quad (2.5.13)$$

Здесь Δ – выражение оператора Лапласа в полярной системе координат, а операторы D_1 и D_2 имеют вид

$$D_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad D_2 = 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \phi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \right). \quad (2.5.14)$$

Далее разрешаем уравнение неразрывности в системе (2.5.12) с помощью функции тока Ψ и выражаем через нее компоненты скорости деформаций

$$\begin{aligned}v_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi}, \quad v_\phi = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \Rightarrow \\ v_{rr} &= \frac{1}{2} D_2 \Psi, \quad v_{r\phi} = -\frac{1}{2} D_1 \Psi.\end{aligned} \quad (2.5.15)$$

Мы видим, что полученные уравнения (2.5.13) и (2.5.15) в полярной системе координат совпадают с уравнениями (2.5.4) и (2.5.6) декартовой системы. Следовательно все последующие уравнения декартовой системы будут справедливы и для полярной системы. Необходимо лишь заменить операторы (2.5.5) на (2.5.14).

2.5.3. Краевые условия

1. Условия для функции тока. Выразим условия на границе для скорости (2.1.3) через функцию тока

$$\partial \Psi / \partial y = \tilde{v}_x, \quad \partial \Psi / \partial x = -\tilde{v}_y, \quad \vec{x} \in \partial S_v,$$

где знак тильда ставится над функциями, заданными на границе.

Если заданы нормальная \tilde{v}_n и касательная \tilde{v}_s компоненты скорости, то можно спроектировать вектор \vec{v} на направление векторов нормали (n_x, n_y) и касательной (s_x, s_y) . Нормаль выбираем внешней к контуру ∂S , а вектор касательной

тельной должен соответствовать обходу контура против часовой стрелки. Тогда имеем соотношения $n_x = s_y$, $n_y = -s_x$. С их помощью найдем проекции скорости на нормаль и касательную

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} n_x - \frac{\partial \Psi}{\partial x} n_y = \frac{\partial \Psi}{\partial s}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} s_x - \frac{\partial \Psi}{\partial x} s_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial n}$$

и получим требуемые условия

$$\partial \Psi / \partial s = \bar{v}_n, \quad \partial \Psi / \partial n = -\bar{v}_s. \quad (2.5.16)$$

2. Условия для функции напряжений. Выразим условия на границе для напряжений (2.1.4) через функцию напряжений Φ

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} n_x - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} n_y = \bar{f}_x, \\ -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} n_x - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} n_y = \bar{f}_y, \end{cases} \quad \vec{x} \in \partial S_f$$

Пусть на границе заданы нормальная \bar{f}_n и касательная \bar{f}_s компоненты силы. Тогда, аналогично предыдущему случаю для этих компонент условие на границе запишется так

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} n_x^2 - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} n_x n_y + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} n_y^2 = \bar{f}_n, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} n_x s_x - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} (s_x n_y + s_y n_x) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} n_y s_y = \bar{f}_s. \end{cases} \quad \vec{x} \in \partial S_f$$

Введем угол ϑ наклона касательной к оси x : $s_x = -n_y = \cos \vartheta$, $s_y = n_x = \sin \vartheta$. Тогда получим граничные условия в следующем окончательном виде

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} D_1 \Phi \sin 2\vartheta + \frac{1}{2} D_2 \Phi \cos 2\vartheta = \bar{f}_\tau, \\ \frac{1}{2} \Delta \Phi + \frac{1}{2} D_1 \Phi \cos 2\vartheta + \frac{1}{2} D_2 \Phi \sin 2\vartheta = \bar{f}_n \end{cases} \quad \vec{x} \in \partial S_f. \quad (2.5.17)$$

Если заданы смешанные граничные условия, т. е. на части границы ∂S_σ условие (2.5.6), а на второй части границы ∂S_f условие (2.5.4), то необходимо решать систему уравнений для Ψ и Φ . Если же имеется только условие для скорости (2.5.6) или только для напряжения (2.5.4), то получим краевую задачу для одной функции Ψ или Φ соответственно.

2.6. Вариационные принципы

Система уравнений (2.4.1) (2.4.2) с различными видами граничных условий допускает вариационные формулировки. Они играют большую роль для теоретического изучения соответствующей сложной нелинейной краевой задачи [8, 16, 51, 52]. Из нее доказывается теорема существования и единственности.

На основе вариационных принципов разработаны аналитические методы приближенного решения краевых задач, начатых в работах Бубнова и Галеркина. Иногда могут быть получены полезные оценки для различных физических характеристик [8, 51, 52]. Кроме того, вариационные методы применяются для разработки численных схем метода конечных элементов [16].

2.6.1. Принцип виртуальной мощности

Пусть δv_i , $i = 1, 2, 3$ произвольные в области V функции, равные нулю на границе ∂V_v , на которой выполняется условие (2.1.3)

$$\delta v_i = 0, \quad \vec{x} \in \partial V_v. \quad (2.6.1)$$

Такие функции называются вариациями кинематически допустимых полей скорости. Их также называют виртуальными скоростями или вариациями скорости, совместимыми со связями. Под связями понимается условие (2.1.3). Если \vec{v} и \vec{v}' подчинены этим связям, то их разность (вариация) подчинена условию (2.6.1).

Через введенные вариации скорости уравнения движения (2.4.1) и граничное условие (2.1.4)

$$\partial \sigma_{ij} / \partial x_j = 0, \quad \vec{x} \in V; \quad \sigma_{ij} n_j = \tilde{f}_i, \quad \vec{x} \in \partial V_f. \quad (2.6.2)$$

можно записать в виде вариационного соотношения

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta v_i dV - \int_{\partial V} (\sigma_{ij} n_j - \tilde{f}_i) \delta v_i dS = 0.$$

Принимая во внимания тождества

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta v_i = -\sigma_{ij} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \delta v_i) = -\sigma_{ij} \delta v_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \delta v_i)$$

и теорему Гаусса-Остроградского, вариационное соотношение можно привести к виду

$$- \int_V \sigma_{ij} \delta v_{ij} dV + \int_{\partial V} \tilde{f}_i \delta v_i dS = 0. \quad (2.6.3)$$

Это вариационное тождество называется принципом виртуальной мощности и представляет собой фундаментальный принцип в механике сплошной среды [26]. Левая часть равенства (2.6.3) называется виртуальной мощностью. Она содержит два слагаемых: первое $P'_{(i)}$ называется виртуальной мощностью внутренних сил, второе $P'_{(e)}$ — виртуальной мощностью внешних поверхностных сил. Для действительного движения мощности внутренних $P_{(i)}$ и внешних поверхностных сил $P_{(e)}$ получаются из формул для $P'_{(i)}$ и $P'_{(e)}$ заменой δv_{ij} и δv_i на действительные деформации v_{ij} и скорости v_i .

Принцип виртуальной мощности (2.6.3) можно сформулировать так. При действительном движении, виртуальная мощность равна нулю для всех вариаций скорости совместимых со связями (2.6.1). Обратное, если виртуальная мощность тождественно нулю для любых вариаций скорости совместимых со связями (2.6.1), то будут выполнены уравнения и граничные условия (2.6.2).

Принцип виртуальной мощности не касается реологического соотношения и относится к медленному движению любой сплошной среды. Ниже будут рассмотрены принципы в виде экстремума некоторых функционалов. Экстремалами функционалов будут решения краевых задач течения сплошной среды с заданными реологическими законами.

2.6.2. Функционалы и их вариации

1. Диссипативные потенциалы. Диссипативные потенциалы определяют связь компонент тензора напряжений и тензора скоростей деформаций в сплошной среде. Рассматриваются два типа потенциалов: потенциал напряжений $W(v_{ij})$ и потенциал деформаций $\tilde{W}(s_{ij})$. Они вводятся дифференциальными соотношениями

$$dW(v_{ij}) = s_{ij} dv_{ij}, \quad d\tilde{W}(s_{ij}) = v_{ij} ds_{ij} \Rightarrow W + \tilde{W} = s_{ij} v_{ij} \quad (2.6.4)$$

Последняя формула $W + \tilde{W} = s_{ij} v_{ij}$ позволяет легко выразить друг через друга. Преобразование $W(v_{ij}) \rightarrow \tilde{W}(s_{ij})$ называется преобразованием Лежандра. Если же потенциал $W(v_{ij})$ не дифференцируем, то вводится его обобщение — преобразование Юнга [51, 52]. Потенциалы определяют прямое и обратное реологические соотношения в среде

$$s_{ij} = \partial W(v_{ij}) / \partial v_{ij}, \quad v_{ij} = \partial \tilde{W}(s_{ij}) / \partial s_{ij} \quad (2.6.5)$$

Потенциалы легко вычислить, подставляя в (2.6.4) конкретные реологические соотношения $s_{ij}(v_{ij})$ или $v_{ij}(s_{ij})$ и интегрируя их.

Для вязкопластической среды с помощью реологического соотношения (2.5.3) получим

$$\begin{aligned} W(v_{ij}) &= \mu U^2 / 2 + \tau_s U, \quad U = \sqrt{2v_{ij}v_{ij}}, \\ \tilde{W}(s_{ij}) &= (T - \tau_s)^2 / (2\mu), \quad T = \sqrt{s_{ij}s_{ij}} / 2. \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

2. Вариации функционалов. Введем функционал, зависящий от поля скорости в области V

$$\mathfrak{S}_0(\vec{v}) = \int_V W(v_{ij}) dV, \quad v_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.6.7)$$

и два функционала, зависящие еще от поля давления p

$$\mathfrak{S}(\vec{v}, p) = \mathfrak{S}_0(\vec{v}) - \int_V p \operatorname{div} \vec{v} dV, \quad \mathfrak{S}_1(\vec{v}, p) = \mathfrak{S}(\vec{v}, p) - \int_{\partial V} \tilde{f}_i v_i dS \quad (2.6.8)$$

и рассмотрим их вариации. Вариация первого функционала при произвольном изменении аргументов \vec{v}, p вычисляется так

$$\delta \mathfrak{S}(\vec{v}, p) = \int_V \left(\frac{\partial W}{\partial v_{ij}} \delta v_{ij} - \delta p \operatorname{div} \vec{v} - p \operatorname{div} \delta \vec{v} \right) dV.$$

Преобразуем этот интеграл, используя первое равенство (2.6.5), соотношение для напряжений $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + s_{ij}$ и теорему Гаусса-Остроградского

$$\begin{aligned} \int_V \left(s_{ij} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} - \delta p \operatorname{div} \vec{v} - \operatorname{div} (p \delta \vec{v}) + \frac{\partial p}{\partial x_i} \delta v_i \right) dV = \\ = \int_V \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (s_{ij} \delta v_i) - \operatorname{div} (p \delta \vec{v}) - \delta p \operatorname{div} \vec{v} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta v_i \right) dV \Rightarrow \end{aligned}$$

$\mathfrak{S}(\vec{v}, p) = \int_V (W(v_{ij}) - p \operatorname{div} \vec{v}) dV,$ $\delta \mathfrak{S}(\vec{v}, p) = \int_{\partial V} \sigma_{ij} \delta v_i n_j dS - \int_V \left(\delta p \operatorname{div} \vec{v} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta v_i \right) dV$	(2.6.9)
$\mathfrak{S}_1(\vec{v}, p) = \mathfrak{S}(\vec{v}, p) - \int_{\partial V} \tilde{f}_i v_i dS$ $\delta \mathfrak{S}_1(\vec{v}, p) = \int_{\partial V} (\sigma_{ij} n_j - \tilde{f}_i) \delta v_i dS - \int_V \left(\delta p \operatorname{div} \vec{v} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta v_i \right) dV$	
$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \partial W(v_{ij})/\partial v_{ij}, \quad v_{ij} = \frac{1}{2} (\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i)$	

Здесь в обеих формулах вариации $\delta \vec{v}, \delta p$ — произвольные дифференцируемые функции в области $\vec{x} \in V$ и на границе $\vec{x} \in \partial V$.

Если выразить потенциал $W(v_{ij})$ через $\tilde{W}(s_{ij})$ и подставить его в функционал $\mathfrak{S}(\vec{v})$, то получим двойственный функционал

$$\tilde{\mathfrak{S}}_0(s_{ij}, \vec{v}) = \int_V (s_{ij} v_{ij} - \tilde{W}(s_{ij})) dV.$$

Варируя этот функционал по s_{ij} , \vec{v} , получим

$$\delta\tilde{\mathfrak{S}}_0(s_{ij}, \vec{v}) = \int_V \left(v_{ij} - \frac{\partial \tilde{W}(s_{ij})}{\partial s_{ij}} \right) \delta s_{ij} dV + \int_V s_{ij} \delta v_{ij} dV.$$

Далее пользуясь тождеством

$$s_{ij} \delta v_{ij} = s_{ij} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (s_{ij} \delta v_i) - \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j} \delta v_i$$

и теоремой Гаусса-Остроградского, вариация приведет к виду

$$\delta\tilde{\mathfrak{S}}_0(s_{ij}, \vec{v}) = \int_V \left[\left(v_{ij} - \frac{\partial \tilde{W}(s_{ij})}{\partial s_{ij}} \right) \delta s_{ij} - \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j} \delta v_i \right] dV + \int_{\partial V} s_{ij} n_j \delta v_i dS.$$

Отсюда нетрудно найти вариацию для двойственного к $\mathfrak{S}_1(\vec{v}, p)$ функционала

$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{S}}_1(s_{ij}, \vec{v}, p) &= \int_V (s_{ij} v_{ij} - \tilde{W}(s_{ij})) dV - \int_V p \operatorname{div} \vec{v} dV - \int_{\partial V} \tilde{f}_i v_i dS \\ \delta\tilde{\mathfrak{S}}_1(s_{ij}, \vec{v}, p) &= \int_V \left[\left(v_{ij} - \frac{\partial \tilde{W}(s_{ij})}{\partial s_{ij}} \right) \delta s_{ij} - \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j} \delta v_i - \delta p \operatorname{div} \vec{v} \right] dV + \\ &\quad + \int_{\partial V} (\sigma_{ij} n_j - \tilde{f}_i) \delta v_i dS \end{aligned}$	(2.6.10)
$v_{ij} = \frac{1}{2} (\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i)$	

Здесь вариации δv_i , δs_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ и δp — произвольные дифференцируемые в области V и на границе ∂V функции.

2.6.3. Вариационные принципы для трехмерных течений

Запишем полную систему уравнений безынерционного вязкопластического течения (2.4.1) и (2.4.2)

$$\partial \sigma_{ij} / \partial x_j = 0, \quad (\text{A})$$

$$\partial v_i / \partial x_i = 0 \iff \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (\text{B})$$

$$\begin{cases} s_{ij} = 2 \left(\mu + \frac{\tau_s}{U} \right) v_{ij}, & U > 0, \\ T^2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \leq \tau_s^2, & U = 0, \end{cases} \quad (\text{C})$$

$$U = 2v_{ij}v_{ij}, \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + s_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Решение уравнений (А)–(С) можно свести к решению задач экстремума некоторых функционалов. Соответствующие вариационные принципы можно получить с помощью обведенных в рамочки равенств для вариаций (2.6.9) и (2.6.10).

1. Принципы для граничных условий в скоростях. Решением краевой задачи в скоростях будем называть решение системы уравнений (А)–(С), удовлетворяющее условию для скорости (2.1.3) на границе области

$$\vec{v} = \vec{v}, \quad \vec{x} \in \partial V_v. \quad (*)$$

П р и н ц и п 1. Среди всех возможных полей скорости удовлетворяющих уравнению (В) и граничным условиям (*), точное решение краевой задачи в скоростях доставляет минимум функционалу

$$\mathfrak{S}_0(\vec{v}) = \int_V W(v_{ij}) dV.$$

Доказательство. Задача экстремума функционала $\mathfrak{S}_0(\vec{v})$ при двух условиях с помощью множителя Лагранжа p сводится к экстремуму функционала $\mathfrak{S}(\vec{v}, p)$ с единственным ограничением на поле скорости (*) на границе ∂V .

Из формулы (2.6.9) видно, что его вариация на точном решении равна нулю: первый интеграл равен нулю, так как $\delta\vec{v} = 0$ в силу граничного условия (*) и второй интеграл равен нулю в силу уравнений (А). Обратно, в силу граничного условия (*) и уравнений (А) вариация $\mathfrak{S}(\vec{v}, p)$ равна нулю при любых вариациях $\delta\vec{v}$, δp , $\vec{x} \in V$. Отсюда получим уравнения (А) для экстремали.

Диссипативный потенциал $W(v_{ij})$ строго выпуклый по аргументу v_{ij} и ограничен снизу как неотрицательная функция. Поэтому экстремум выпуклого и ограниченного снизу функционала будет минимумом. Таким образом, сформулированный вариационный принцип доказан.

Из полученного вариационного принципа вытекает важное следствие.

Следствие. Решение краевой задачи в скоростях существует и единственно.

Для вязкой жидкости эти результаты получены Гельмгольцем (Helmholtz Н. 1868).

Можно упростить формулировку принципа 1, используя вместо функционала $\mathfrak{S}_0(\vec{v})$ функционал $\mathfrak{S}(\vec{v}, p)$. Тогда условие соленоидальности поля скорости (В) накладывать не нужно.

П р и н ц и п 2. Среди всех возможных полей скорости и давления в области V при фиксированном значении скорости на границе (*) наименьшее значение функционала $\mathfrak{S}(\vec{v}, p)$ достигается на точном решении краевой задачи в скоростях.

2. Принципы для граничных условий в напряжениях. Решением краевой задачи в напряжениях будем называть решение системы уравнений (А), (В) и (С), удовлетворяющее условию для напряжения (2.1.4) на границе области:

$$-pn_i + s_{ij}n_j = \tilde{f}_i, \quad \vec{x} \in \partial V_f. \quad (**)$$

П р и н ц и п 3. Среди всех возможных полей скорости и давления в области V , включая границу области, наименьшее значение функционала $\mathfrak{S}_1(\vec{v}, p)$ достигается на точном решении краевой задачи в напряжениях.

Принцип 3 вытекает из равенства (2.6.9). Достоинство его состоит в том, что на допустимые поля скорости и давления не накладываются никакие ограничения. Задается только связь дивергента напряжений и тензора скоростей деформаций (С).

В следующем вариационном принципе тензор напряжений считается произвольным. Из условия экстремума получаются не только уравнения (А), (В), граничное условие (**), но и реологическое соотношение (С).

П р и н ц и п 4. Среди всех возможных полей скорости и напряжения в области V , включая границу области, наименьшее значение функционала $\tilde{\mathfrak{S}}_1(s_{ij}, \vec{v}, p)$ достигается на точном решении краевой задачи в напряжениях.

Доказательство проводится на основе равенства (2.6.10).

3. Принципы для смешанных граничных условий. Часто встречаются задачи, когда задаются условие для скорости (*) на одной части границы ∂V_1 и условие для напряжения (**) — на другой ее части ∂V_2 . В этих случаях можно исходить из принципов 3 и 4, наложив на скорости ограничение (*) на ∂V_1 . Так из принципа 3 можно получить для смешанной задачи следующий вариационный принцип.

П р и н ц и п 5. Среди всех возможных полей скорости в области V , удовлетворяющих условию (*) на ∂V_1 и всех полей давления в области V , включая границу области, наименьшее значение функционала $\mathfrak{S}_1(\vec{v}, p)$ достигается на точном решении смешанной краевой задачи.

Принцип 4 с условием для скорости на границе сформулирован Рейснером (Reisner E. 1950) [103].

В работе П.П. Мосолова и В.П. Мясникова на основе принципов экстремума функционала \mathfrak{S}_1 и двойственного к нему функционала $\tilde{\mathfrak{S}}_1$ был развит метод двухсторонних оценок [52], позволяющий находить оценки сверху и снизу нижней грани функционала \mathfrak{S}_1 , дать оценку снизу для коэффициента предельной нагрузки. В этой же монографии обсуждаются тонкие моменты, связанные с недифференцируемостью функционалов для вязкопластических сред. Дано полное обоснование вариационных принципов в этом случае.

2.6.4. Вариационные принципы для двумерных течений

Для плоской задачи можно ввести функцию тока Ψ для поля скорости (2.5.6) и функцию Эри для напряжений (2.5.4). При этом уравнения (В) и (А) удовлетворяются.

Диссипативный потенциал W (2.6.6) и функционал (2.6.7) можно выразить через Ψ с помощью выражения (2.5.7)

$$W(\Psi) = \frac{1}{2}\mu U^2 + \tau_s U = \frac{1}{2}\mu((D_1\Psi)^2 + (D_2\Psi)^2) + \tau_s \sqrt{(D_1\Psi)^2 + (D_2\Psi)^2},$$

$$\mathfrak{S}_0(\Psi) = \int_S W(\Psi) dS.$$

Принцип 1 можно переформулировать так.

Принцип 6. Среди всех возможных функций тока Ψ в области S , удовлетворяющих условиям (2.5.6) на границе ∂S точное решение краевой задачи в скоростях доставляет минимум функционалу $\mathfrak{S}_0(\Psi)$. В таком виде вариационный принцип сформулирован Ильюшиным [32].

Вариационный принцип, приспособленный для решения смешанных краевых задач, можно получить с помощью вариационного тождества (2.6.9) для функционала $\mathfrak{S}_1(\vec{v}, p)$. В качестве варьируемого аргумента выберем функцию тока Ψ . Учитывая равенство $\tilde{f}_i v_i = \tilde{f}_n v_n + \tilde{f}_s v_s = \tilde{f}_n \partial\Psi/\partial s - \tilde{f}_s \partial\Psi/\partial n$, (2.6.9) получим

$$\mathfrak{S}_1(\Psi) = \mathfrak{S}_0(\Psi) - \int_{\partial S} \left(\tilde{f}_n \frac{\partial\Psi}{\partial s} - \tilde{f}_s \frac{\partial\Psi}{\partial n} \right) ds.$$

Таким образом в функционале принципа 3 вместо аргументов \vec{v}, p остался единственный аргумент Ψ . Формулировка нового принципа будет такая.

Принцип 7. Среди всех возможных функций тока Ψ в области S , удовлетворяющих условию (2.5.6), на границе ∂S точное решение смешанной задачи для уравнения (2.5.10) доставляет минимум функционалу $\mathfrak{S}_1(\Psi)$.

Аналогично можно сконструировать двойственный функционал $\tilde{\mathfrak{S}}_1(\Phi)$ и сформулировать соответствующий вариационный принцип.

Глава 3

ТОЧНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

3.1. О методах получения точных решений

Общий подход получения точных решений заключается в специальном выборе геометрии течения. Для этого подбирается система координат x_1, x_2, x_3 , вообще говоря, криволинейная, так, чтобы в ней были отличны от нуля только одна компонента скорости $v_1 \neq 0$ и одна компонента тензора деформации $v_{12} = v_{21} \neq 0$. Следовательно, $U = 2v_{12}$ и девиатор напряжения будет иметь только одну, не равную нулю, компоненту — s_{12} . Тогда связь девиаторов напряжений и скоростей деформаций (1.5.4) будет линейной

$$s_{12} = 2\mu v_{12} \pm \tau_s \quad \text{при } |s_{12}| > \tau_s,$$

где знак перед τ_s совпадает со знаком v_{12} . В результате уравнения движения (2.1.1) будут линейными.

Этот закон для одномерного течения называется законом Шведова-Бингама.

3.2. Течения между двумя параллельными пластинами

3.2.1. Формулировка краевой задачи

1. Однонаправленные плоскопараллельные движения. Будем предполагать, что вектор скорости во всех точках пространства имеет одно направление. Такое движение называется однонаправленным. Выберем ось x по направлению скорости. Тогда поле скорости будет иметь одну компоненту $\vec{v}(v, 0, 0)$. Компонента скорости для плоскопараллельного движения не зависит от одной из декартовых координат y . Из уравнения неразрывности $\operatorname{div} \vec{v} = \partial v / \partial x = 0$ заключаем, что $v(z)$ — функция зависящая только от z . Тензор скоростей деформаций имеет только одну компоненту $v_{xz} = \frac{1}{2} \partial v / \partial z \neq 0$. Как выше отмечалось в этом случае девиатор напряжения имеет тоже одну компоненту $s_{xz} = \tau$, которая связана с v_{xz} линейным соотношением Шведова-Бингама.

2. Постановка задачи. Однонаправленные плоскопараллельные движения можно применить для решения краевой задачи о течении в области $0 \leq z \leq 2h$ между двумя параллельными пластинами $z = 0$ и $z = 2h$ (рис. 3.1). Пластина

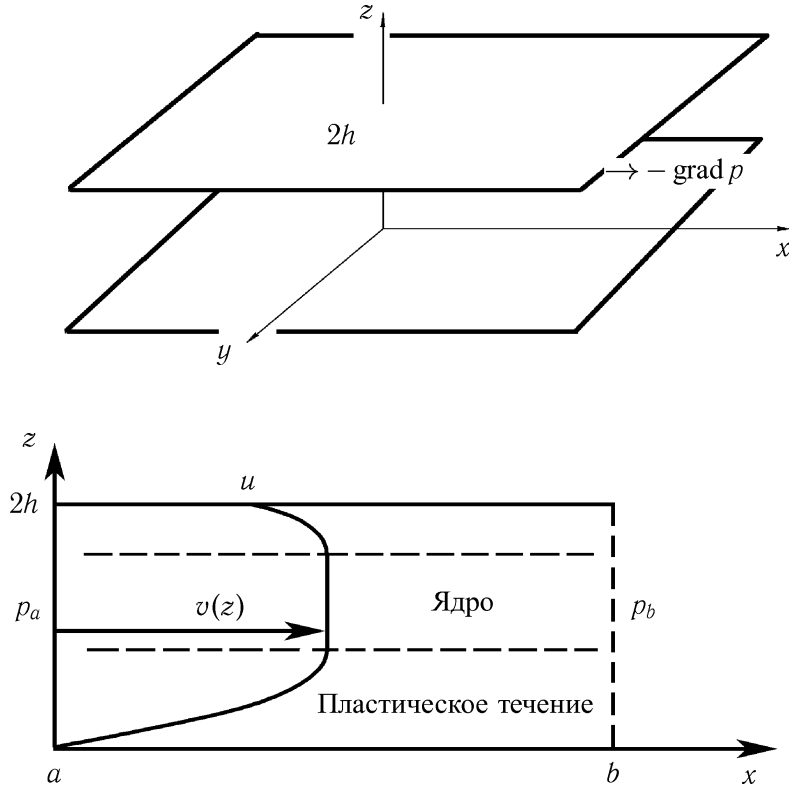


Рис. 3.1. Схема течения между двумя пластинами

$z = 0$ — неподвижна, а пластина $z = 2h$ движется с постоянной скоростью u , направленной по оси x . В сечениях $x = a$ и $x = b$ давление постоянно и равно соответственно p_a и p_b . Под действием перепада давления и движения одной из пластин создается течение среды, расположенной между пластинами, поле скорости которой и нужно определить.

3. Краевая задача. Из первого векторного уравнения (2.1.1) получаем следующие уравнения для определения однонаправленного плоскопараллельного пластического течения среды

$$0 = -\partial p / \partial x + \partial \tau / \partial z, \quad 0 = -\partial p / \partial y, \quad 0 = -\partial p / \partial z;$$

$$s_{xz} = \tau(z) = \mu v'(z) + \tau_s \text{sign } v'(z), \quad s_{xx} = s_{zz} = 0; \quad v'(z) = dv/dz \neq 0.$$

Отсюда заключаем, что градиент давления является постоянной величиной. Обозначим его так $-\partial p / \partial x = (p_a - p_b) / (b - a) = i$. Пусть $0 \leq z_1 \leq z \leq z_2 \leq 2h$ — область ядра, в которой $v'(z) = 0$, а оставшаяся область — область пластичес-

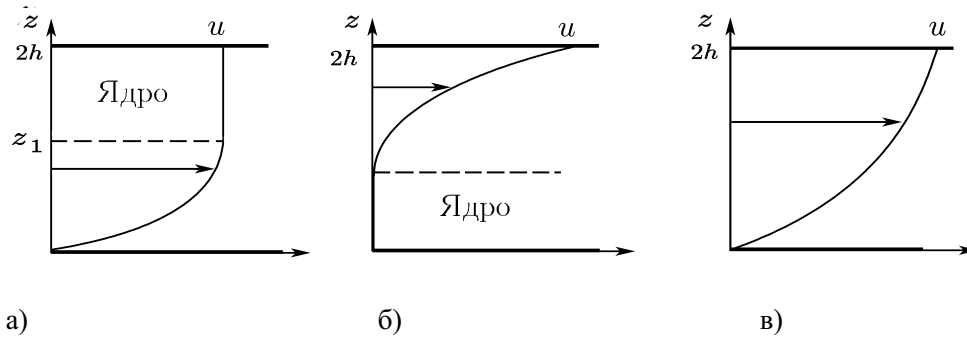


Рис. 3.2. Варианты вязкопластического течения между двумя пластинами

кого течения, в ней $v'(z) \neq 0$. Для расположения ядра возможны три различные ситуации:

- 1) ядро расположено в области течения $0 < z_1 < z_2 < 2h$, (см. рис. 3.1);
- 2) ядро примыкает к одной из пластин $z_1 = 0$ или $z_2 = 2h$, рис. 3.2 а) и б);
- 3) ядра нет, рис. 3.2 в).

Для первой ситуации из системы (2.1.1) получаем следующую краевую задачу:

$$0 \leq z < z_1 \cup z_2 < z \leq 2h : \begin{cases} d\tau/dz = -i, \\ s_{xz} = \tau(z) = \mu v'(z) + \tau_s \operatorname{sign} v'(z), \\ s_{xx} = s_{zz} = 0, \quad v'(z) = dv/dz \neq 0, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

$$v(0) = 0, \quad v'(z_1) = v'(z_2) = 0, \quad v(z_1) = v(z_2), \quad v(2h) = u,$$

$$2\tau_s = i(z_2 - z_1).$$

Здесь условия в точках $z = z_1$ и $z = z_2$ вытекают из непрерывности полей скорости и напряжений, последнее условие — это уравнение баланса поверхностных сил, действующих на ядро: силы трения $2\tau_s(b-a)$ и сил давления $(p_a - p_b)(z_2 - z_1)$, рис. 3.3.

Когда ядро примыкает к одной из пластин, то последнему условию не ставится. Достаточно равенства скоростей на поверхности ядра, примыкающей к границе течения: $v(z_2) = v(2h) = u$ или $v(z_1) = v(0) = 0$. Если же ядро отсутствует, то достаточно условий $v(0) = 0$, $v(2h) = u$. В этом случае задачи для поля скорости вязкопластического и вязкого течений тождественны.

Прежде чем дать решение задачи (3.2.1) покажем, что при заданном градиенте давления i и скорости движения пластины u всегда существует единственное поле скорости вязкопластического течения $v(z)$. Это следует из вариационной формулировки задачи.

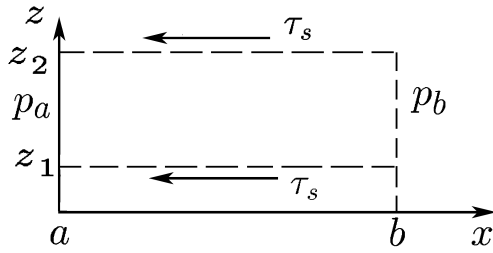


Рис. 3.3. Баланс поверхностных сил, действующих на ядро

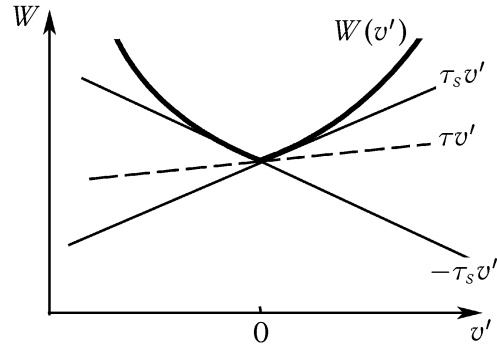


Рис. 3.4. Напряжение сдвига в ядре

4. Вариационная формулировка задачи вязкопластического течения между двумя пластинами. В аргумент функционала \mathfrak{S}_1 вариационного принципа 5 в разд. 2.6.3 подставим $v(z)$, а вместо нормального напряжения на границах $x = a$ и $x = b$ давления p_a и p_b , тогда получим следующий функционал:

$$I(v(z)) = \int_0^{2h} [W(v'(z)) - iv(z)] dz, \quad W(v'(z)) = \frac{1}{2}\mu(v'(z))^2 + \tau_s |v'(z)|.$$

Множество M варьируемых функций $v(z)$ на отрезке $z \in [0, 2h]$ определим так.

Для функции $v(z) \in M$ выполнены условия:

- 1) непрерывность на всем отрезке $z \in [0, 2h]$;
- 2) существование второй производной $v''(z)$ в области $v'(z) \neq 0$;
- 3) $v(0) = 0, \quad v(2h) = u$.

Тогда имеет место следующий вариационный принцип.

Принцип 5а. Среди всех возможных полей скорости $v(z) \in M$ существует единственная функция, минимизирующая функционал $I(v(z))$. Наименьшее значение функционала достигается на скорости $v(z)$ вязкопластического течения между двумя параллельными пластинами, одна из которых $z = 0$ неподвижна, а вторая $z = 2h$ движется со скоростью u , при заданном градиенте давления $i = (p_a - p_b)/(b - a)$. Напряжение трения τ определяется формулой

$$\tau(z) = dW(v')/dv'.$$

Здесь диссипативный потенциал $W(v')$ — недифференцируем в точке $v' = 0$. Поэтому $\tau(z)$ определено однозначно только в области пластического течения $v' \neq 0$. В области ядра $v' = 0$ производная не определена и может меняться в пределах $|\tau| \leq \tau_s$. Это неравенство можно установить, если приближать функ-

цию $W(v')$ в окрестности $v' = 0$ последовательностью гладких функций в пределе совпадающей с ней. Угол наклона касательной dW/dv' сглаженного в нуле диссипативного потенциала меняется между двумя предельными значениями $-\tau_s$ и τ_s (рис. 3.4).

Доказательство. Сначала докажем, что у функционала $I(v)$ существует единственный минимизирующий его элемент $v(z) \in M$. Будем исходить из теоремы существования и единственности минимума выпуклого и ограниченного снизу функционала. Заметим, что для функционалов не дифференцируемых в некоторых точках эта теорема требует особого доказательства, которое приводится в монографиях [51, 52]¹.

Докажем выпуклость функционала. Для этого с помощью интегрирования по частям приведем его к виду

$$I(v(z)) = \int_0^{2h} [W(v'(z)) - i(2h - z)v'(z)] dz.$$

Подынтегральная функция $F(v') = W(v') - i(2h - z)v'$ — выпуклая по v' , т. е. для нее выполнено неравенство $F(\frac{1}{2}(v'_1 + v'_2)) < \frac{1}{2}(F(v'_1) + F(v'_2))$. Отсюда следует такое же неравенство и для самого функционала, т. е. его выпуклость.

Ограниченность снизу подынтегральной функции вытекает из неравенства $F(v') = \frac{1}{2}\mu(v' - i(2h - z)/\mu)^2 - i^2(2h - z)^2/(2\mu) + \tau_s|v'| \leq -2i^2h^2/\mu$. Следовательно и сам функционал ограничен снизу. Таким образом, по теореме [51, 52] минимизирующий элемент существует и единственен.

В уравнении экстремали $\delta I = 0$ непосредственно определить вариацию δI нельзя, так как подынтегральная функция недифференцируема в точке $v'(z) = 0$. Чтобы обойти эту сложность, нужно разбить отрезок интегрирования $[0, 2h]$ на интервалы, в которых $v'(z) = 0$, и интервалы, в которых $v'(z) \neq 0$. Ограничимся рассмотрением первой ситуации, когда область $v'(z) = 0$ представляет отрезок $[z_1, z_2]$, лежащий строго внутри отрезка $[0, 2h]$. Тогда разобьем отрезок интегрирования $[0, 2h]$ на три интервала: $[0, z_1]$, $[z_1, z_2]$, $[z_2, 2h]$. В области ядра $[z_1, z_2]$ имеем равенства $v'(z) = 0$, $v(z) = v_s$, $W(v') = 0$. Таким образом, функционал представляется суммой интегралов

$$I(v(z)) = \int_0^{z_1} [W(v'(z)) - iv(z)] dz - iv_s(z_2 - z_1) + \int_{z_2}^{2h} [W(v'(z)) - iv(z)] dz.$$

Все подынтегральные функции теперь дифференцируемы. Вариация первого

¹Для определения производной от негладкой функции можно также использовать понятие субдифференцируемости, которое обобщает обычное дифференцирование [96].

интеграла находится так

$$\delta \int_0^{z_1} [W(v'(z)) - iv(z)] dz = \int_0^{z_1} [\tau(z)\delta v' - i\delta v] dz + \delta z_1 [W(v'(z_1)) - iv(z_1)] =$$

(Продолжаем преобразование, учитывая равенства $v(z_1) = v_s$, $\delta v(z_1) = \delta v_s$, $\delta v(0) = 0$ и интегрируя по частям)

$$\begin{aligned} &= \tau(z)\delta v \Big|_0^{z_1} - \int_0^{z_1} \left[\frac{d\tau}{dz} + i \right] \delta v dz + \delta z_1 [W(v'(z_1)) - iv_s] = \\ &= \tau(z_1 - 0)\delta v_s - \int_0^{z_1} \left[\frac{d\tau}{dz} + i \right] \delta v dz + \delta z_1 [W(v'(z_1)) - iv_s], \end{aligned}$$

где под $\tau(z_1 - 0)$ понимается предельное значение функции $\tau(z) = dW/dz$, $z \in [0, z_1)$ при стремлении $z \rightarrow z_1$.

Аналогично преобразуется вариация интеграла по отрезку $(z_2, 2h]$. С помощью равенств $\delta v(0) = \delta v(2h) = 0$, $\delta v(z_1) = \delta v(z_2) = \delta v_s$ находим вариацию функционала $I(v(z))$

$$\begin{aligned} \delta I(v(z)) &= - \int_0^{z_1} \left[\frac{d\tau}{dz} + i \right] \delta v dz - \int_{z_2}^{2h} \left[\frac{d\tau}{dz} + i \right] \delta v dz + \\ &+ W(v'(z_1))\delta z_1 - W(v'(z_2))\delta z_2 + [\tau(z_1 - 0) - \tau(z_2 + 0) - i(z_2 - z_1)] \delta v_s, \\ \tau(z) &= dW/dv' = \mu v'(z) + \tau_s \text{sign } v'(z). \end{aligned}$$

В силу произвольности функций $\delta v(z)$ при $z \in [0, z_1) \cap (z_2, 2h]$ и чисел $\delta z_1, \delta z_2, \delta v_s$ получаем все уравнения и условия краевой задачи (3.2.1).

Таким образом, минимизирующим элементом функционала $I(v)$ является решение краевой задачи (3.2.1) и доказательство полностью завершено.

3.2.2. Решение краевых задач

1. Сдвиговое безградиентное течение. При отсутствии градиента давления $i = 0$ решение задачи (3.2.1) строится наиболее просто. Напряжение трения в этом случае постоянно $\tau = \tau_s + \mu v/(2h)$, а скорость линейна по координате $v = zu/(2h)$. Ядро отсутствует, а профиль скорости ничем не отличается от сдвигового течения вязкой жидкости (рис. 3.5). Такое течение в гидродинамике часто называется течением Куэтта.

2. Построение общего решения. Приведем построение решения задачи, когда ядро расположено внутри области течения. Решая уравнение (3.2.1) для напряжения с условиями $\tau(z_1) = \tau_s$, $\tau(z_2) = -\tau_s$, получаем

$$\tau = \begin{cases} \tau_s + (z_1 - z)i, & 0 \leq z \leq z_1, \\ -\tau_s + (z_2 - z)i, & z_2 \leq z \leq 2h. \end{cases}$$

Отсюда из соотношения Шведова-Бингама получим уравнение для скорости

$$\mu v'(z) = \begin{cases} (z_1 - z)i, & 0 \leq z \leq z_1, \\ (z_2 - z)i, & z_2 \leq z \leq 2h. \end{cases}$$

Интегрируем это уравнение с учетом условий $v(0) = 0$, $v(2h) = u$

$$2\mu v(z) = \begin{cases} -i \left[(z_1 - z)^2 - z_1^2 \right], & 0 \leq z \leq z_1, \\ -i \left[(z_2 - z)^2 - (2h - z_2)^2 \right] + u, & z_2 \leq z \leq 2h. \end{cases}$$

Неизвестные z_1 , z_2 и u_s находятся из системы уравнений $v(z_1) = v(z_2) = u_s$, $i(z_2 - z_1) = 2\tau_s$. Разрешая систему относительно z_1 и z_2 , найдем

$$\begin{aligned} z_1/h &= 1 - A + B/(1 - A), \\ z_2/h &= 1 + A + B/(1 - A), \\ A &= \tau_s/(hi), \quad B = \mu u/(2h^2 i). \end{aligned}$$

Эти формулы можно применять, если выполнены условия $|B| < (1 - A)^2$, $0 < A < 1$, вытекающие из неравенств $0 < z_1/h < z_2/h < 2$.

3. Течение между двумя неподвижными пластинами. Решение этой задачи представлено М.П. Волорovichем и А.М. Гуткиным в работе [17]. В случае неподвижных пластин $B = 0$ и поле скорости симметрично относительно срединной плоскости $z = h$ (рис. 3.6, а). Решение примет вид

$$v(z) = \frac{i}{2\mu} \begin{cases} z(2z_1 - z), & 0 \leq z \leq z_1, \\ z_1^2, & z_1 \leq z \leq h, \end{cases}$$

$$z_1 = h(1 - A), \quad A = \tau_s/(hi), \quad i = (p_a - p_b)/(b - a).$$

В интервале $h \leq z \leq 2h$ поле скорости достраивается по симметрии $v(z) = v(2h - z)$. Формулы имеют место при $A < 1$, а противоположное неравенство $A \geq 1$ — условие запаривания течения.

Для расхода получим

$$Q = 2 \int_0^h v(z) dz = \frac{i}{\mu} z_1^2 (h - z_1/3) = \frac{2ih^3}{3\mu} (1 - A)^2 (1 + A/2).$$

При $A = 0$ получим известный из гидродинамики [15, 40] параболический

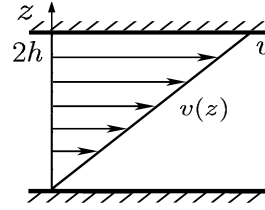


Рис. 3.5. Течение Куэтта

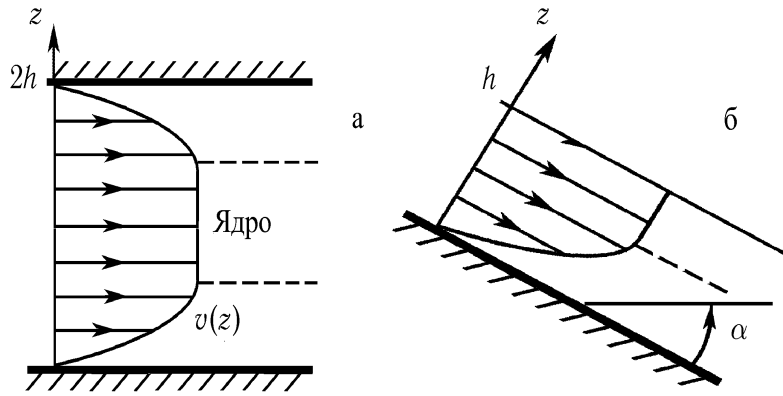


Рис. 3.6. Вязкопластическое течение: а — между двумя неподвижными пластинами, б — стекание с наклонной плоскости

профиль скорости для вязкого течения Пуазейля в плоском слое. При $A \neq 0$ течение называют вязкопластическим течением Пуазейля в плоском слое. Оно отличается от классического вязкого течения тем, что внутри слоя содержится жесткая зона $z_1 \leq z \leq 2h - z_1$ (ядро). В ней все точки среды движутся с одинаковой скоростью $v_s = iz_1^2 / (2\mu)$. Ширина ядра равна $2hA$. С увеличением A размер жесткой зоны увеличивается. При $A = 1$ ядро охватывает всю область течения, скорость среды равна нулю и, как говорят, наступает стопор.

4. Движение тяжелого слоя вдоль наклонной плоскости. Полученные формулы можно интерпретировать как стекание тяжелого вязкопластического слоя толщины h с плоскости, наклоненной к горизонту под углом α (рис. 3.6, б). В этом случае следует положить $i = \rho g \sin \alpha$. На свободной границе слоя касательное напряжение равно нулю. Уравнение $z_1 = h(1 - A)$ можно переписать так $\rho(h - z_1)g \sin \alpha = \tau_s$. Оно выражает баланс сил тяжести и трения действующих на границе ядра. Из условия запирания можно найти критический угол наклона $\sin \alpha_* = \tau_s / (\rho h g)$. Среда стекает с наклонной плоскости при $\alpha > \alpha_*$, иначе она покоится. Расход в слое толщиной h будет равен половине расхода между двумя пластинами, находящимися на расстоянии $2h$, т. е.

$$Q = = \frac{\rho h^3 g \sin \alpha}{3\mu} (1 - A)^2 (1 + A/2).$$

Рассмотренная задача моделирует поведение геофизических структур, находящихся в гравитационном поле на наклонном ложе. Примерами таких структур могут служить снежнопылевые лавины из мягкого снега [95], податливые участки верхних слоёв земной коры [77, 101], соляные породы в предельном состоянии [92], последождевые оползни почвы [79], ледниковые образования [80], [21]. Для последних особенно характерно наличие массивной недеформируемой

корки, занимающей до 95 % толщины ледника, и тонкой сдвиговой зоны вблизи основания. На вязкопластическую природу льда обращено внимание в монографии [81], с. 166: «Поскольку у льда не обнаружено предела длительной прочности, введём понятие “практически предельного состояния”, при котором лёд настолько незначительно деформируется во времени, что дальнейшую деформацию можно считать отсутствующей . . . можно определить длительное сопротивление, что имеет большое значение при характеристике несущей способности ледяного тела во времени». Это длительное сопротивление фактически является пределом текучести при сдвиге. Экспериментально найденные значения материальных функций для широкого класса льдов и снежных потоков лавинного типа приведены в обзоре [55]. Нетрудно показать, что при условии отсутствия стопора $0 \leq A < 1$ справедливо неравенство $Q/Q_0 = (1 - A)^2(1 + A/2) < 1$, где Q и Q_0 – расходы для вязкопластического и вязкого течений соответственно. Это говорит об уменьшении расхода Q при появлении предела текучести по сравнению с соответствующей величиной Q_0 для вязкого течения.

5. Течение между неподвижными пластинами при заданном расходе. В дальнейшем понадобится решение задачи вычисления скорости и перепада давления при заданном расходе. Это решение приводится в работе [60]. Следуя [60], вводим безразмерные расход a и координату границы ядра Z_1

$$a = \frac{\mu|Q|}{\tau_s h^2}, \quad Z_1 = \frac{z_1}{h} = 1 - A. \quad (3.2.2)$$

Тогда с помощью решения, приведенного в п. 3, безразмерный градиент давления выразится через Z_1 как

$$\frac{1}{A} = \frac{hi}{\tau_s} = \frac{1}{1 - Z_1}, \quad (3.2.3)$$

а безразмерный расход как

$$a = \frac{Z_1^2(1 - Z_1/3)}{1 - Z_1}. \quad (3.2.4)$$

Скорость выражается через безразмерное распределение скорости $U(Z, a)$ с единичным расходом

$$U(Z, a) = \frac{1}{2a(1 - Z_1(a))} \begin{cases} Z(2Z_1 - Z), & 0 \leq Z \leq Z_1, \\ Z_1^2, & Z_1 \leq Z \leq 1, \end{cases} \quad (3.2.5)$$

$$Z = \frac{z}{h}, \quad v = (Q/h)U(Z, a), \quad 2 \int_0^1 U(Z, a) dZ = 1.$$

Зависимость $Z_1(a)$ находится из разрешения кубического уравнения (3.2.4). Его корень можно вычислить по известной формуле Тарталья-Кардано. Однако, по-

лученные формулы громоздки и неудобны. Более эффективно представить корень уравнения рядом Лагранжа (метод Лагранжа описан ниже)

$$Z_1 = 1 - 3 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)b_m}{(3m+1)(a+1)^{3m+1}}, \quad (3.2.6)$$

$$\frac{1}{1-Z_1} = \frac{3}{2}(a+1) - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{(a+1)^{3m+2}},$$

$$b_0 = \frac{2}{9}, \quad b_1 = \frac{2^4}{3^5}, \dots, \quad b_m = \frac{2^{2m+1}(3m+1)!}{3^{3m+2}(2m+1)!(m+1)!}.$$

Ряды (3.2.6) сходятся при всех $a \geq 0$. Для вычислений функций Z_1 и $1-Z_1$ при $0 \leq a \leq a_0$ удобнее пользоваться разложениями

$$Z_1 = a^{1/2} - \frac{1}{3}a - \frac{1}{18}a^{3/2} + \frac{1}{27}a^2 + \dots, \quad (3.2.7)$$

$$\frac{1}{1-Z_1} = 1 + a^{1/2} + \frac{2}{3}a + \frac{5}{18}a^{3/2} + \frac{1}{27}a^2 + \dots$$

С погрешностью менее 0,0015 корень можно вычислять так

$$Z_1(a) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{3(a+1)} - \frac{8}{81(a+1)^4} - \frac{32}{3^6(a+1)^7}, & a > 0.33; \\ a^{1/2} - \frac{1}{3}a - \frac{1}{18}a^{3/2} + \frac{1}{27}a^2, & a \leq 0.33. \end{cases}$$

Градиент давления вычисляется с помощью подстановки рядов (3.2.6) и (3.2.7) в (3.2.3).

6. О корнях уравнения (3.2.4). Функция $a(Z_1)$, заданная формулой (3.2.4), монотонно возрастает на интервале $[0, 1)$ и принимает любое неотрицательное значение ровно один раз. Для нее существует обратная функция $Z_1(a) \in [0, 1)$ и определяет единственный корень уравнения (3.2.4) из интервала $[0, 1)$ при любом $a \geq 0$.

Для вывода рядов (3.2.6), соответствующих корню уравнения (3.2.4) из интервала $Z_1(a) \in [0, 1)$ преобразуем уравнение (3.2.4) к виду

$$3(a+1) = \frac{(1-Z_1)^3 + 2}{1-Z_1} \quad (3.2.8)$$

и воспользуемся теоремой Лагранжа [90] об обращении рядов.

Теорема Лагранжа. Пусть имеется уравнение относительно y вида

$$y = A + x\Phi(y), \quad (3.2.9)$$

где x — переменная, A — постоянная величина, $\Phi(y)$ — функция аналитическая в точке $y = A$. Тогда существует окрестность $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, в которой корень

уравнения (3.2.9) представляется рядом

$$y = A + x\Phi(A) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dA^{n-1}} [\Phi^n(A)]. \quad (3.2.10)$$

Чтобы получить ряды (3.2.6) достаточно преобразовать уравнение (3.2.8) к виду (3.2.9), а затем вычислить коэффициенты, входящие в ряд Лагранжа (3.2.10). С помощью замен

$$x = \frac{1}{3(a+1)}, \quad y = 1 - Z_1, \quad \Phi(y) = y^3 + 2, \quad A = 0 \quad (3.2.11)$$

уравнение (3.2.8) приводится к виду (3.2.9).

Производные от $\Phi^n(A)$ в (3.2.9) в точке $A = 0$ выражаются через биномиальные коэффициенты C_{3m+1}^m и, подставляя эти выражения в ряд Лагранжа (3.2.10), получим первый ряд (3.2.6).

Вторая замена переменных уравнения (3.2.8)

$$x = \frac{-4}{27(a+1)^3}, \quad y = \frac{2}{3(a+1)(1-Z_1)}, \quad \Phi(y) = y^{-2}, \quad A = 1$$

также приводит его к виду (3.2.9). Подставляя эти выражения в ряд Лагранжа (3.2.9) и вычисляя производные функции $\Phi^n(A) = A^{-2n}$ в точке $A = 1$, получим второй ряд (3.2.6).

Покажем, как строить наилучшие приближения с помощью частичных сумм рядов (3.2.6) и разложений (3.2.7) на примере четырехчленных разложений

$$Z_1 = 1 - \frac{2}{3(a+1)} - \frac{8}{81(a+1)^4} - \frac{32}{3^6(a+1)^7}, \quad a > a_0; \quad (3.2.12)$$

$$Z_1 = a^{1/2} - \frac{1}{3}a - \frac{1}{18}a^{3/2} + \frac{1}{27}a^2, \quad a < a_0.$$

Задача заключается в определении граничной точки a_0 , при которой формулы (3.2.12) определяют функцию $Z_1(a)$ с наименьшей погрешностью. Погрешность приближения (3.2.12) при $a > a_0$ и при $a < a_0$ оцениваются величинами соответственно r_+ и r_-

$$r_+ \approx \frac{-2^9}{3^9(a+1)^{10}}, \quad r_- \approx \frac{5}{216}a^{5/2}.$$

Наилучшее приближение и наибольшая погрешность находятся из уравнения $|r_+(a)| = |r_-(a)|$. Откуда получим $a_0 = 0,33$; наибольшая ошибка $|r_+| = |r_-| = 0,0015$.

Аналогично можно построить наилучшее трехчленное приближение. Для него получим наибольшую ошибку $|r_+| = |r_-| = 0,005$ при $a_0 = 0,366$.

Точно так же находим наилучшие двух-, трех- и четырехчленные приближения для функции $1/(1 - Z_1)$. Результаты приведены ниже

Таблица 3.1

n	Z_1		$(1 - Z_1)^{-1}$	
	a_0	$ r_+ = r_- $	a_0	$ r_+ = r_- $
2	0,50	0,0200	0,070	0,0460
3	0,37	0,0050	0,130	0,0130
4	0,33	0,0015	0,237	0,0021

В верхней строке указан вид функции. В первой колонке указано число слагаемых в частичных суммах рядов (3.2.6) и разложений (3.2.7). В последующих колонках указаны значения a_0 и наибольшей ошибки r_{\pm} . Учет каждого последующего члена уменьшает погрешность примерно в четыре раза.

3.3. Течения с осевой симметрией

Рассмотрим однонаправленные течения с осевой симметрией. Такие течения возникают в круглой трубе или в кольцевом зазоре между двумя соосными трубами. Для вывода уравнений и краевых условий следует повторить все рассуждения, приведенные для течения между пластинами. Выберем ось z по направлению скорости. Тогда поле скорости однонаправленного осесимметричного движения будет иметь одну компоненту $\vec{v}(v, 0, 0)$. Компонента скорости v зависит от r и z и не зависит от угла ϕ . Из уравнения неразрывности $\text{div } \vec{v} = \partial v / \partial z = 0$ заключаем, что $v(r)$ зависит только от цилиндрической координаты r .

У тензора скоростей деформаций отличны от нуля только компоненты $v_{rz} = v_{zr}$ и реологическое соотношение определяется линейной связью

$$s_{rz} = \mu dv/dr + \tau_s \text{sign}(dv/dr), \quad |s_{rz}| > \tau_s, \quad s_{rr} = s_{zz} = 0. \quad (3.3.1)$$

Система уравнений осесимметричного движения (2.2.1) в этом случае имеет вид

$$0 = \partial p / \partial r, \quad 0 = -\partial p / \partial z + \partial s_{rz} / \partial r + s_{rz} / r, \\ s_{rz} = \mu dv/dr + \tau_s \text{sign}(dv/dr), \quad s_{rr} = s_{zz} = 0,$$

который показывает, что градиент давления также постоянная величина. Обозначим его как и для пластин $i = -(\partial p / \partial z)$. Тогда уравнение движения будет иметь вид

$$d(r\tau(r))/dr = -ir, \quad (3.3.2)$$

где $\tau(r) = s_{rz}$ находится из закона Шведова-Бингама (3.3.1).

Интеграл уравнения (3.3.2)

$$2\pi r\tau(r) - 2\pi r'\tau(r') = i\pi(r^2 - (r')^2) \quad (3.3.3)$$

представляет собой уравнение баланса поверхностных сил, действующих на кольцевой слой между цилиндрами радиуса r и r' .

3.3.1. Течение в кольцевом зазоре

1. Постановка задачи. Рассматриваем течение в кольцевом зазоре между двумя круглыми трубами радиуса $R_1 \leq r \leq R_2$. Внутренняя труба покоится, а внешняя движется со скоростью u . В сечениях $x = a$ и $x = b$ давление постоянно и равно соответственно p_a и p_b . Под действием перепада давления внутри трубы и движения внешней трубы относительно внутренней создается течение среды, поле скорости которой и нужно определить. По постановке и методу решения эта задача аналогична рассмотренной выше задаче о течении вязкопластической среды между двумя пластинами.

2. Краевая задача. Также как и для течения между двумя пластинами для расположения ядра возможны три ситуации:

- 1) ядро расположено внутри области течения;
- 2) ядро примыкает к одной из труб;
- 3) ядра нет.

Для первой ситуации с помощью уравнений (3.3.1) и (3.3.2) получаем следующую краевую задачу

$$r \in [R_1, r_1] \cup (r_2, R_2] : \begin{cases} d(r\tau)/dr = -ir, \\ \tau(r) = \mu v'(r) + \tau_s \operatorname{sign} v'(r), \quad v'(r) \neq 0, \end{cases} \quad (3.3.4)$$

$$v(R_1) = 0, \quad v(R_2) = u,$$

$$v'(r_1) = v'(r_2) = 0, \quad v(r_1) = v(r_2), \quad \tau(r_1) = \tau_s, \quad \tau(r_2) = -\tau_s.$$

Здесь принимается условие прилипания на границах трубы $r = R_1$ и $r = R_2$. На границах ядра $r = r_1$ и $r = r_2$ условия вытекают из непрерывности скорости и напряжения.

Аналогично можно поставить краевые задачи для двух других случаев расположения ядра. Во всех случаях будет существовать единственное решение задачи.

3. Вариационная формулировка задачи вязкопластического течения в кольцевом зазоре. Аналогично задаче течения среды между пластинами решение краевой задачи (3.3.4) минимизирует функционал

$$I(v(z)) = \int_{R_1}^{R_2} [W(v'(r)) - iv(r)] r dr, \quad W(v'(r)) = \frac{1}{2} \mu (v'(r))^2 + \tau_s |v'(r)|.$$

Множество M варьируемых функций $v(r)$ на отрезке $r \in [0, R]$ определяется аналогично.

Для функции $v(r) \in M$ выполнены условия:

- 1) непрерывность на всем отрезке $r \in [R_1, R_2]$;
- 2) существование второй производной $v''(r)$ в области $v'(r) \neq 0$;
- 3) $v(R_1) = 0$, $v(R_2) = u$.

Функционал выпуклый и ограничен снизу. Поэтому у него существует единственный минимизирующий элемент.

Покажем, как получить решение краевых задач в двух наиболее важных случаях: в круглой трубе и в кольцевом зазоре между соосно расположенными трубами.

3.3.2. Течение в круглой трубе

1. Постановка задачи. Рассматриваем течение в круглой трубе радиуса R . В сечениях $x = a$ и $x = b$ давление постоянно и равно соответственно p_a и p_b . Под действием перепада давления создается течение среды, поле скорости которой и нужно определить. Аналогичная задача для вязкой жидкости носит название задача Пуазейля. Для вязкопластической среды ее называют задачей Пуазейля вязкопластического течения.

2. Краевая задача. Для течения внутри трубы всегда будет существовать ядро $0 \leq r < r_0 < R$ внутри области течения. Баланс сил трения на цилиндрической поверхности радиуса r и сил давлений в сечениях $z = a$ и $z = b$ выражается уравнением $2\pi r \tau(r) = i\pi r^2$. Его можно также получить, положив $r' = 0$ в уравнение (3.3.3).

Краевая задача формулируется так

$$r_0 < r \leq R : \begin{cases} \tau(r) = -\frac{1}{2}ir, \\ \tau(r) = \mu v'(r) + \tau_s \text{sign } v'(r), & v'(r) \neq 0, \end{cases} \quad (3.3.5)$$

$$v(R) = 0, \quad v'(r_0) = 0, \quad \tau(r_0) = -\tau_s.$$

Здесь принимается условие прилипания на границе трубы $r = R$. Условия при $r = r_0$ вытекают из непрерывности $v(r)$, $v'(r)$ и $\tau(r)$.

3. Построение решения. Решение задачи о вязкопластическом течении в трубе круглого сечения получено Букингом (Bukingham 1921). Приведем построение решения задачи. Из последнего условия на границе ядра находим границу ядра $r_0 = (2/i)\tau_s$.

Из соотношения Шведова-Бингама получим уравнение для скорости

$$\mu v'(r) = \tau(r) - \tau(r_0) = i(r_0 - r)/2.$$

Интегрируя это уравнение с учетом условия $v(R) = 0$, получим

$$v(r) = \frac{i}{2} \begin{cases} (R - r_0)^2 - (r - r_0)^2, & r_0 < r \leq R, \\ (R - r_0)^2, & 0 \leq r \leq r_0, \end{cases}$$

$$r_0 = 2\tau_s/i.$$

Расход вычисляется с помощью интегрирования по сечению трубы. Вычисление интеграла можно упростить [46]

$$Q = \int_0^R v(r) d(\pi r^2) = (\pi r^2 v(r)) \Big|_0^R - \int_0^R \pi r^2 \frac{dv}{dr} dr.$$

В ядре $dv/dr = 0$, на границе $v(R) = 0$, поэтому

$$Q = - \int_{r_0}^R \pi v'(r) r^2 dr.$$

Перейдем от независимой переменной r к переменной τ с помощью замен $v'(r) = (\tau_s + \tau)/\mu$ и $r^2 dr = -(2/i)^3 \tau^2 d\tau$. Тогда

$$Q = \frac{\pi}{\mu} \left(\frac{2}{i}\right)^3 \int_{\tau(r_0)}^{\tau(R)} (\tau - \tau(r_0)) \tau^2 d\tau =$$

$$= \frac{\pi}{\mu} \left(\frac{2}{i}\right)^3 \left(\frac{\tau(R)^4 - \tau(r_0)^4}{4} - \tau(r_0) \frac{\tau(R)^3 - \tau(r_0)^3}{3} \right).$$

Подставляем $\tau(R) = -iR/2$, $\tau(r_0) = -ir_0/2$, получим

$$Q = \frac{\pi i}{2\mu} \left[\frac{r_0^4}{12} - \frac{r_0 R^3}{3} + \frac{R^4}{4} \right].$$

Окончательное выражение расхода удобно записать так:

$$Q = \frac{\pi i R^4}{8\mu} \left[1 - \frac{4}{3} \frac{r_0}{R} + \frac{1}{3} \left(\frac{r_0}{R} \right)^4 \right], \quad r_0 = \frac{2\tau_s}{i}.$$

Течение запирается при условии $r_0 = 2\tau_s/i \geq R$.

3.3.3. Сдвиговое безградиентное течение

1. Постановка задачи. Рассмотрим течение в кольцевом зазоре между двумя круглыми трубами радиуса $R_1 \leq r \leq R_2$. Внутренняя труба покоится, а внешняя движется со скоростью u . Давление в сечениях $x = a$ и $x = b$ одинаково и градиент давления равен нулю $i = 0$. Под действием движения внешней трубы относительно внутренней создается течение среды, поле скорости которой и нужно определить. Эта задача аналогична задаче о вязкопластическом течении

Куэтта между двумя пластинами. Однако здесь возможно существование ядра, примыкающего к внешнему цилиндру.

2. Напряжение и поле скорости. При $i = 0$ уравнение (3.3.2) для τ легко интегрируется $\tau = C/r$. Пусть для определенности $C > 0$. Тогда условием того, что жесткой зоны нет, является неравенство $C/R_2 \geq \tau_s$. Скорость находится интегрированием закона Шведова-Бингама (3.3.1) с условием $v(R_1) = 0$ и учетом того, что $\text{sign } v'(r) = 1$

$$v = \frac{C}{\mu} \ln \frac{r}{R_1} - \frac{\tau_s}{\mu} (r - R_1).$$

Постоянная C определяется из условия $v(R_2) = u$, откуда

$$C = \frac{\tau_s (R_2 - R_1) + \mu u}{\ln(R_2/R_1)}.$$

Жесткого ядра не будет, если $C > R_2 \tau_s$. В безразмерной форме неравенство можно записать так

$$\frac{\mu u}{R_1 \tau_s} \geq \frac{R_2}{R_1} \left(\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) - 1 \right) + 1.$$

В противном случае будет существовать жесткая зона в области, примыкающей к внешнему цилиндру $r_1 \leq r \leq R_2$. Из уравнений $\tau(r_1) = \tau_s$ и $v(r_1) = u$ находим постоянную $C = r_1 \tau_s$ и получаем трансцендентное уравнение для r_1/R_1

$$\left(\frac{r_1}{R_1} \right) \left(\ln \frac{r_1}{R_1} - 1 \right) + 1 = \xi = \frac{\mu u}{R_1 \tau_s}.$$

Отсюда можно определить зависимость $r_1/R_1 = f_0(\xi)$. График функции $f_0(\xi)$ изображен на рис. 3.7 штриховой линией. Его легко построить в осях ξ, f_0 с помощью зависимости $\xi = f_0(\ln f_0 - 1) + 1$. Через функцию f_0 можно выразить постоянную $C = R_1 \tau_s f(\xi)$ и найти распределение скорости.

Результаты можно записать в следующем окончательном виде.

1. При ограниченной скорости относительного движения цилиндров

$$\frac{\mu u}{R_1 \tau_s} < \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \left(\ln \frac{R_2}{R_1} - 1 \right) + 1 \quad \text{или} \quad f_0 \left(\frac{\mu u}{R_1 \tau_s} \right) \leq \frac{R_2}{R_1}$$

существует ядро, граница которого r_1 определяется уравнением

$$\frac{r_1}{R_1} = f_0 \left(\frac{\mu u}{R_1 \tau_s} \right).$$

В области пластического течения $R_1 \leq r < r_1$

$$\frac{v}{u} = \frac{R_1 \tau_s}{\mu u} \left[f_0 \left(\frac{\mu u}{R_1 \tau_s} \right) \ln \frac{r}{R_1} - \frac{r}{R_1} + 1 \right], \quad \tau = \tau_s \frac{R_1}{r} f \left(\frac{\mu u}{R_1 \tau_s} \right).$$

В области ядра $r_1 \leq r \leq R_1$

$$v/u = 1, \quad |\tau| \leq \tau_s.$$

2. При выполнении противоположного неравенства

$$\frac{\mu u}{R_1 \tau_s} > \left(\frac{R_2}{R_1}\right) \left(\ln \frac{R_2}{R_1} - 1\right) + 1 \quad \text{или} \quad f_0 \left(\frac{\mu u}{R_1 \tau_s}\right) > \frac{R_2}{R_1}$$

ядра нет. Поле скорости, также как и напряжение, в области $R_1 \leq r \leq R_2$ выражаются едиными аналитическими выражениями,

$$v = \frac{\tau_s R_1}{\mu} \left[\frac{R_2 - R_1}{\ln(R_2/R_1)} + R_1 - r \right] + \frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)}, \quad \tau = \frac{\tau_s (R_2 - R_1) + \mu u}{r \ln(R_2/R_1)}.$$

3. Движение цилиндра вдоль своей оси в безграничной вязкопластической среде. В пределе при $R_2 \rightarrow \infty$ с помощью приведенных формул можно решить следующую задачу. В безграничной вязкопластической среде, покоящейся на бесконечности, движется бесконечно длинный круговой цилиндр радиуса R со скоростью $-u$. Найти поле скорости и силу сопротивления, действующую на цилиндр. Если цилиндрическую систему координат связать с цилиндром, то возникающее в среде поле скорости можно определить по приведенной выше формуле в области $R_1 = R \leq r < r_1$, где граница жесткой зоны определяется по формуле $r_1 = R f(\xi)$. Сила сопротивления, приходящаяся на единицу длины цилиндра, определяется так $F = \tau(R) 2\pi R = 2\pi R \tau_s f_0\left(\frac{\mu u}{R \tau_s}\right)$.

3.3.4. Течение Куэтта-Тейлора

Вязкопластическими течениями Куэтта-Тейлора будем называть течения между двумя соосными круговыми цилиндрами, вращающимися с разными угловыми скоростями. Массовых сил нет. Решение этой задачи построено Рейнером и Ривлиным (Reiner M., Rivlin 1927) [78].

1. Течения с круговыми линиями тока. Течениями с круговыми линиями тока будем называть плоскопараллельные течения, у которых поле скорости в полярных координатах r, ϕ имеет одну компоненту $v_\phi = v(r, \phi)$, а вторая равна нулю $v_r = 0$. Частицы среды в таком течении движутся по концентрическим окружностям. Из уравнения неразрывности (см. разд. (2.2.2)) для таких движений следует $\partial v / \partial \phi = 0$. Таким образом, поле скорости определяется функцией $v(r)$ одной переменной.

У тензора скоростей деформаций отличны от нуля только компонента $v_{r\phi}$. Ее удобно выразить через угловую скорость $\omega(r) = v/r$

$$v_{r\phi} = \frac{1}{2} r \omega'(r), \quad \omega'(r) = d\omega/dr.$$

Реологическое соотношение Шведова-Бингама определяется линейной связью

$$s_{r\phi} = \mu r \omega'(r) + \tau_s \text{sign} \omega'(r), \quad |\omega'(r)| \neq 0,$$

$$|s_{r\phi}| \leq \tau_s \quad |\omega'(r)| = 0.$$

Выделим мысленно цилиндрическую поверхность радиуса r и высоты h . На элемент этой поверхности с углом $d\phi$ действует сила трения $s_{r\phi} h r d\phi$ и момент этой силы $dM = r s_{r\phi} h r d\phi$. Интегрируя dM по углу, вычислим суммарный момент силы, приложенный к жидкой цилиндрической поверхности радиуса r

$$M = 2\pi h m, \quad m(r) = r^2 s_{r\phi}.$$

Запишем систему уравнений плоскопараллельного движения в полярной системе координат (см. разд. (2.2.2)). Ее удобно выразить через функции $\omega(r)$ и $m(r)$

$$m(r) = \mu r^3 \omega'(r) + r^2 \tau_s \text{sign} \omega'(r),$$

$$-\rho \omega^2 r = -dp/dr, \quad dm/dr = 0, \quad \omega'(r) \neq 0. \quad (3.3.6)$$

Отсюда видно, что m и момент M не зависят от r . Это же следует из уравнения изменения момента количества движения цилиндрического слоя $(r, r + dr)$. Действительно, момент количества движения не меняется со временем и значит $M(r + dr) - M(r) = M'(r)dr = 0$.

2. Постановка задачи. Течениями с круговыми линиями тока можно описать следующую задачу. Пусть вязкопластическая среда помещена в кольцевой зазор между двумя соосными круговыми цилиндрами радиусов R_1 и R_2 . Внутренний цилиндр радиуса R_1 вращается с угловой скоростью ω_1 , а внешний — с угловой скоростью ω_2 . В области между цилиндрами $R_1 \leq r \leq R_2$ устанавливается течение среды. Нужно найти поле скорости $v(r)$, давление и моменты сил, действующие на цилиндры. По постановке и методу решения эта задача аналогична рассмотренной выше задаче о продольном течении вязкопластической среды в кольцевом зазоре между цилиндрами.

3. Краевая задача. Также как и для продольного течения Куэтта, между двумя цилиндрами возможны две ситуации.

1. Образуется ядро $r_1 < r \leq R_2$, примыкающее к внешнему цилиндру. Из системы уравнений (3.3.6) в этом случае получим следующую краевую задачу для определения функции $\omega(r)$, и числовых значений r_1 и m

$$m = r_1^2 \tau_s \text{sign} (\omega_2 - \omega_1), \quad \omega'(r) = \left(\frac{r_1^2 \tau_s}{\mu r^3} - \frac{\tau_s}{\mu r} \right) \text{sign} (\omega_2 - \omega_1), \quad (3.3.7)$$

$$R_1 \leq r < r_1, \quad \omega(R_1) = \omega_1, \quad \omega(r_1) = \omega_2.$$

2. Ядра нет. Краевая задача такова

$$\omega'(r) = \left(\frac{|m|}{\mu r^3} - \frac{\tau_s}{\mu r} \right) \text{sign}(\omega_2 - \omega_1), \quad R_1 \leq r \leq R_2, \quad (3.3.8)$$

$$\omega(R_1) = \omega_1, \quad \omega(R_2) = \omega_2.$$

В обоих случаях принимаются условия прилипания на твердых границах $r = R_1$ и $r = R_2$. Этот случай реализуется, если найденное значение r_1 не будет превосходить R_2 . В противном случае пластическое течение охватывает всю область между цилиндрами. В краевой задаче нужно два последних условия заменить на одно $\omega(R_2) = \omega_2$.

4. Решение. 1. Приведем решение первой краевой задачи (3.3.7), когда ядро примыкает к внешнему цилиндру. Находим решение уравнения, удовлетворяющее первому условию $\omega(R_1) = \omega_1$,

$$\omega(r) = \frac{\tau_s}{2\mu} \left(\frac{r_1^2}{R_1^2} - \frac{r_1^2}{r^2} - \ln \frac{r_1^2}{R_1^2} \right) \text{sign}(\omega_2 - \omega_1) + \omega_1.$$

Из второго условия $\omega(r_1) = \omega_2$ получаем уравнение для границы ядра r_1 и находим m

$$\frac{2|\omega_2 - \omega_1|\mu}{\tau_s} = \xi = \frac{r_1^2}{R_1^2} - 1 - \ln \frac{r_1^2}{R_1^2},$$

$$m = r_1^2 \tau_s \text{sign}(\omega_2 - \omega_1).$$

Полученная функциональная зависимость $\xi = \xi(r_1^2/R_1^2)$ монотонная и имеет обратную функцию $r_1^2/R_1^2 = |m|/(\tau_s R_1^2) = f(\xi)$. График ее в осях ξ, f легко построить с помощью зависимости $\xi = f - 1 - \ln f$ (на рис. 3.7 сплошная линия).

Функция $f(\xi)$ определяет безразмерную границу ядра как функцию безразмерной разности угловых скоростей ξ . Приведенное решение с ядром примыка-

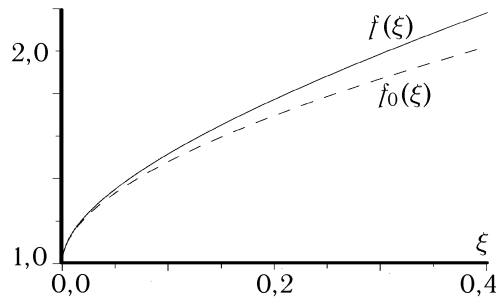


Рис. 3.7. Графики функций $f(\xi)$ и $f_0(\xi)$

ющим к внешнему цилиндру реализуется при достаточно малой относительной угловой скорости $\xi < \xi_* = R_2^2/R_1^2 - 1 - \ln(R_2^2/R_1^2)$.

2. В противном случае $\xi \geq \xi_*$ пластическое течение охватывает всю область течения. Распределение угловой скорости и m находится из решения краевой задачи (3.3.8)

$$\omega(r) = \frac{m}{2\mu} \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{r^2} \right) - \frac{\tau_s}{2\mu} \ln \frac{r^2}{R_1^2} \text{sign}(\omega_2 - \omega_1) + \omega_1,$$

$$\frac{m}{\mu} \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) = \left(2|\omega_2 - \omega_1| + \frac{\tau_s}{\mu} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) \text{sign}(\omega_2 - \omega_1).$$

Через m выражается и момент силы $M = 2\pi h m$.

В завершение приведем зависимость безразмерного момента силы $\tilde{M} = |M|/(2\pi h \tau_s R_1^2)$ от безразмерной угловой скорости $\xi = 2|\omega_2 - \omega_1| \mu / \tau_s$

$$\tilde{M} = \begin{cases} f(\xi), & \xi \leq \xi_*, \\ \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(\xi + \ln \left(\frac{R_2^2}{R_1^2} \right) \right), & \xi \geq \xi_*. \end{cases}$$

Эту зависимость проще воспроизводить в виде обратной функции $\xi(\tilde{M})$

$$\xi = \begin{cases} \tilde{M} - 1 - \ln \tilde{M}, & \tilde{M} < R_2^2/R_1^2, \\ (1 - R_1^2/R_2^2)\tilde{M} - \ln(R_2^2/R_1^2), & \tilde{M} \geq R_2^2/R_1^2. \end{cases}$$

На рис. 3.8 приведена зависимость $\tilde{M}(\xi)$ при $R_2^2/R_1^2 = 2$. При изменении ξ от нуля до бесконечности момент силы возрастает от порогового значения $\tilde{M} = 1$ до бесконечности. При $\tilde{M} \geq R_2^2/R_1^2$ момент силы линейно зависит от ξ .

5. Ротационный вискозиметр. На полученной формуле для момента силы основан способ измерения коэффициентов μ и τ_s . Ротационный вискозиметр Волоровича устроен следующим образом [7]. Корпус вискозиметра выполнен в виде осесимметричного стакана с расположенным внутри него соосно осесимметричным ротором. Между стаканом и ротором имеется зазор. Ротор имеет возможность вращения вокруг оси симметрии. Радиус цилиндрической части ротора R_1 , а цилиндрической части полости стакана R_2 . Высота погружаемой в среду рабочей цилиндрической части ротора h . При вращении ротора с достаточно большой угловой скоростью ω

$$2|\omega| \mu / \tau_s > R_2^2/R_1^2 - 1 - \ln(R_2^2/R_1^2)$$

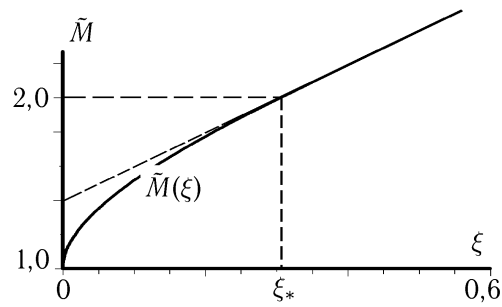


Рис. 3.8. Безразмерный момент силы в зависимости от безразмерной угловой скорости

пластическое течение охватывает все пространство между цилиндрами. Тогда на внутренний цилиндр действует момент силы, линейно зависящий от угловой скорости ω

$$M = A\omega + B,$$

$$A = 4\pi\mu h \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2},$$

$$B = 2\pi\tau_s h \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2}.$$

По результатам эксперимента строится график зависимости $M(\omega)$ и аппроксимируется прямой. Тогда тангенс угла наклона будет определять A , а отсеченный отрезок на оси ординат — B . Вычислив A , находим по приведенной для него формуле коэффициент μ , а вычислив B , находим τ_s .

Глава 4

ТОЧНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

4.1. О методах получения точных решений

Также как и в стационарном случае (см. разд. 3.1)) подбирается система координат x_1, x_2, x_3 , в которой реологическое соотношение имеет вид одномерного закона Шведова-Бингама. В результате уравнения движения (2.1.1) будут линейными. Однако условия на границе ядра останутся нелинейными, что является основным препятствием получения точного решения в нестационарном случае. Краевые условия должны выводиться из уравнений движения и требования непрерывности скорости и напряжений на границе ядра.

Для плоскопараллельного течения между двумя параллельными пластинами одно точное автомодельное решение приведено в монографии [58]. Градиент давления подбирается в виде C/\sqrt{t} , толщина ядра примыкающего к одной из пластин, меняется пропорционально \sqrt{t} . Скорости движения пластин подбираются равными значениям скорости потока на них.

В [61, 62, 100] получены более общие серии многопараметрических точных решений, в которых скорости движения пластин задаются и, в частности, могут быть неподвижными. Эти решения излагаются в следующем разделе.

4.2. Течения между двумя параллельными пластинами

4.2.1. Формулировка краевой задачи

1. Однонаправленные плоскопараллельные движения. Будем предполагать, что вектор скорости во всех точках пространства имеет одно направление. Такое движение называется однонаправленным. Выберем ось x по направлению скорости. Тогда поле скорости будет иметь одну компоненту $\vec{v}(v, 0, 0)$. Компонента скорости для плоскопараллельного движения не зависит от одной из декартовых координат y . Из уравнения неразрывности $\operatorname{div} \vec{v} = \partial v / \partial x = 0$ заключаем, что $v(t, z)$ — функция только двух аргументов. Тензор скоростей деформаций имеет только одну компоненту $v_{xz} = \frac{1}{2} \partial v / \partial z \neq 0$. Как выше отмечалось в этом случае девиатор напряжения имеет тоже одну компоненту $s_{xz} = \tau$, которая связана с v_{xz} линейным соотношением Шведова-Бингама.

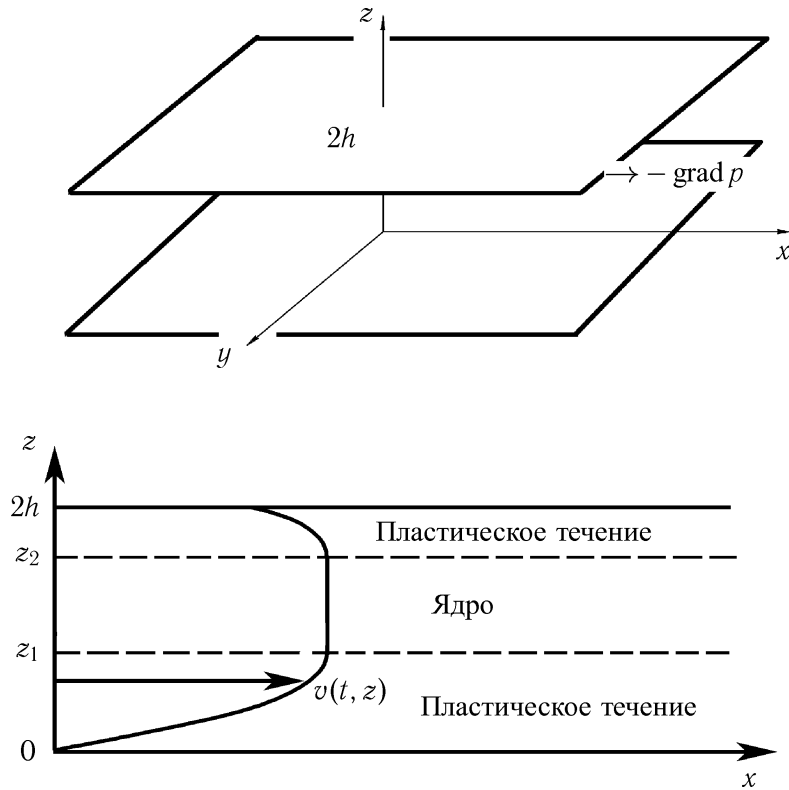


Рис. 4.1. Схема течения между двумя пластинами

2. Ускорение ядра. Однонаправленные плоскопараллельные движения можно применить для решения краевой задачи о нестационарном течении в области $0 \leq z \leq 2h$ между двумя параллельными пластинами $z = 0$ и $z = 2h$ (рис. 4.1). Будем искать решения, в которых область ядра $0 < z_1 \leq z \leq z_2 < 2h$ расположена внутри течения. Границы ядра $z_1(t)$ и $z_2(t)$ зависят от времени и подлежат определению.

Найдем ускорение ядра. Для этого надо применить закон количества движения к области $z_1(t) \leq z \leq z_2(t)$, на границах которой сверху и снизу действует касательное напряжение τ_s , слева и справа приложены давления p_1, p_2 (рис. 4.2). Ускорение dv/dt можно получить двумя способами.

Способ 1. Применяем закон изменения импульса к материальному прямоугольнику $ABCD$, состоящему из одних и тех же частиц, движущихся со скоростью $v(t)$ (см. рис. 4.2, а). В начальный момент z_1 и z_2 — границы ядра. В следующий момент времени каждая частица сдвинется по оси x на расстоя-

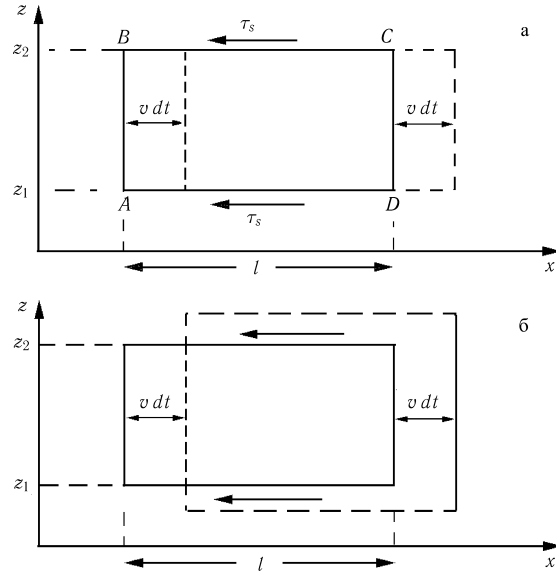


Рис. 4.2. Законы изменения импульса для материального объема (а) и для ядра (б)

ние $v dt$ и соответственно сдвинется материальный прямоугольник. Изменение количества движения его равно поверхностной силе

$$\rho l (z_2 - z_1) \frac{dv}{dt} = (p_1 - p_2)(z_2 - z_1) - 2\tau_s l.$$

Способ 2. Применяя закон изменения импульса к ядру $ABCD$, нужно учесть добавочное слагаемое $\rho l (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) v$ — поток импульса через его границу, обусловленный вовлечением в него новых материальных частиц среды (см. рис. 4.2, б). Изменение количества движения запишется так (см. (2.1.6))

$$\rho l \frac{d}{dt} [(z_2 - z_1) v] = (p_1 - p_2)(z_2 - z_1) - 2\tau_s l + \rho l (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) v.$$

Нетрудно видеть, что оба способа эквивалентны. Они приводят к следующему соотношению для ускорения:

$$z_1(T) \leq z \leq z_2(T) : \quad \partial v / \partial z = 0, \quad |\tau| \leq \tau_s,$$

$$\rho dv/dt = -\partial p / \partial x - 2\tau_s / (z_2 - z_1). \quad (4.2.1)$$

3. Уравнения в области деформационного течения. Вне ядра скорость деформации отлична от нуля, напряжение сдвига $\tau = s_{xz}$ находится из закона Шведова-Бингама, и уравнение движения (2.4.1) принимают следующий вид

$$0 \leq z \leq z_1, \quad z_2 \leq z \leq 2h : \quad |\tau| \geq \tau_s$$

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial z} \pm \tau_s \quad (4.2.2)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial y}, \quad 0 = \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Из уравнений (4.2.1) и (4.2.3) следует, что $-\partial p/\partial x = i$ зависит только от времени. Таким образом, получаем уравнения

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{2\tau_s}{(z_2 - z_1)} + i(t), \quad z_1 < z < z_2, \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + i(t), \quad 0 \leq z \leq z_1, \quad z_2 \leq z \leq 2h. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

4. Начальные и краевые условия. В начальный момент $t = 0$ следует задать значения границ ядра и начальное распределение скорости

$$v(0, z) = v_0(z), \quad z_1(0) = z_{10}, \quad z_2(0) = z_{20}.$$

На пластинах скорость среды совпадает со скоростью движения пластин $u_1(t)$, $u_2(t)$

$$v(t, 0) = u_1(t), \quad v(t, 2h) = u_2(t).$$

Условие непрерывности τ на границах ядра с помощью (4.2.2) запишется в виде

$$v'_z(t, z_1) = v'_z(t, z_2) = 0. \quad (4.2.5)$$

Из уравнений (4.2.4) и непрерывности ускорения $\partial v/\partial t$ получаем условия на границах ядра

$$v''_{zz}(t, z_1) = v''_{zz}(t, z_2) = -\frac{2\tau_s}{\mu(z_2 - z_1)}. \quad (4.2.6)$$

Краевая задача (4.2.4)–(4.2.6) является аналогом задачи Стефана для уравнения теплопроводности. На свободных границах $z_1(t)$, $z_2(t)$ условия (4.2.5) и (4.2.6) отличаются от условий в задаче Стефана.

В [58] приводится точное решение, в котором ядро примыкает к нижней пластине, а давление меняется по специальному закону

$$\begin{aligned} z_1 &= 0, \quad z_2 = 2a_2\sqrt{vt}, \quad i(t) = \rho\alpha\sqrt{v/t}, \\ v(t, z) &= \sqrt{vt} \left[-\frac{4\tau_s}{\alpha\mu} \exp(\alpha^2) \left(\xi(\operatorname{Erf}(\xi) - \operatorname{Erf}(\alpha)) + \frac{1}{2} \exp(-\xi^2) \right) + 2\beta \right], \\ \xi &= \frac{z}{2\sqrt{vt}}, \end{aligned}$$

где α и β — две произвольные постоянные. Пластины в этом решении движутся специальным образом, так что их скорости соответствуют значениям $v(t, 0)$, $v(t, 2h)$.

Ниже излагается общий метод построения многопараметрических точных решений, в которых скорости пластин, либо градиент давления могут задаваться произвольно. Особое внимание будет уделено точным решениям для нестационарных течений между неподвижными пластинами.

4.2.2. Серия точных решений, описывающая торможение среды

1. Трехпараметрическое семейство решений. Для границ ядра принимаем следующие законы

$$z_1 = b + 2a_1\sqrt{vt}, \quad z_2 = b + 2a_2\sqrt{vt}. \quad (4.2.7)$$

Поле скорости ищем в виде

$$v(t, z) = \frac{1}{\rho} \int i(t) dt + c\sqrt{vt} \begin{cases} \hat{f}_1(\xi, a_1), & 0 \leq z \leq z_1 \\ 1/2, & z_1 \leq z \leq z_2 \\ \hat{f}_1(\xi, a_2), & z_2 \leq z \leq 2h \end{cases}, \quad \xi = \frac{z-b}{2\sqrt{vt}}. \quad (4.2.8)$$

Функцию $\hat{f}_1(\xi, a)$ и постоянную c нужно выбрать так, чтобы удовлетворялись следующие условия:

- а) уравнение движения в области пластического течения (4.2.4);
- б) непрерывность скорости;
- в) условие на границах ядра (4.2.5) (непрерывность касательного напряжения);
- г) условие на границах ядра (4.2.6) (непрерывность ускорения);
- д) условия прилипания на пластинах $v(t, 0) = u_1$ и $v(t, 2h) = u_2$.

Тогда поле скорости (4.2.7), (4.2.8) будет точным решением задачи вязкопластического течения.

Условие а). Находим производные скорости (4.2.8) в областях $0 \leq z \leq z_1$ и $z_2 \leq z \leq 2h$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = i(t) + c \frac{\sqrt{vt}}{2t} (\hat{f}_1(\xi, a_i) - \xi f_1'(\xi, a_i)), \quad (4.2.9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{c}{2} f_1'(\xi, a_i), \quad \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{c\nu}{4\sqrt{vt}} f_1''(\xi, a_i). \quad (4.2.10)$$

Подставляя их в уравнение (4.2.4), получим

$$\hat{f}_1''(\xi, a_i) + 2\xi f_1'(\xi, a_i) - 2\hat{f}_1(\xi, a_i) = 0. \quad (4.2.11)$$

Подчиним функцию $\hat{h}_1(\xi, a_i)$ двум условиям

$$\hat{h}'_1(a_i, a_i) = 0, \quad \hat{h}''_1(a_i, a_i) = 1. \quad (4.2.12)$$

Тогда функция \hat{h}_1 определится из уравнения единственным образом

$$\hat{h}_1(\xi, a_i) = \exp(a_i^2) \left(\xi(\operatorname{Erf}(\xi) - \operatorname{Erf}(a_i)) + \frac{1}{2} \exp(-\xi^2) \right), \quad (4.2.13)$$

$$\operatorname{Erf}(\xi) = \int_0^\xi e^{-x^2} dx, \quad i = 1, 2.$$

Функция $\hat{h}_1(\xi, a)$ имеет следующие производные первого и второго порядков

$$\hat{h}'_1(\xi, a) = \exp(a^2) (\operatorname{Erf}(\xi) - \operatorname{Erf}(a)), \quad \hat{h}''_1(\xi, a) = \exp(a^2 - \xi^2). \quad (4.2.14)$$

Условие б). Формулы (4.2.8) определяют функцию $v(t, z)$ — непрерывную на границах ядра $z = z_1$ и $z = z_2$. Действительно, при $z = z_i$ имеем $\xi = a_i$ и $\hat{h}_1(\xi, a_i) = \hat{h}_1(a_i, a_i)$. Из уравнения (4.2.11) и условий (4.2.12) следует $\hat{h}_1(a_i, a_i) = 1/2$, $i = 1, 2$, т. е. непрерывность функции $v(t, z)$.

Условие в). Условие (4.2.5) выполнено в силу первого равенства (4.2.12).

Условие г). Из (4.2.10) и (4.2.14) находим

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right|_{z=z_i} = \frac{c}{4\sqrt{\nu t}} \hat{h}''_1(\xi, a_i) = \frac{c}{4\sqrt{\nu t}}, \quad i = 1, 2.$$

Подстановка в условия (4.2.6)

$$\frac{c}{4\sqrt{\nu t}} = -\frac{\tau_s}{\mu(a_2 - a_1)} \frac{1}{\sqrt{\nu t}}.$$

показывает, что они удовлетворяются при

$$c = -\frac{4\tau_s}{\mu(a_2 - a_1)}, \quad (4.2.15)$$

Итак, постоянная c и поле скорости определены.

Условие д). Условия прилипания на пластинах будут тоже удовлетворены, если скорости пластин таковы

$$u_1(t) = v(t, 0) = \frac{1}{\rho} \int i(t) dt + c\sqrt{\nu t} \hat{h}_1\left(-\frac{b}{2\sqrt{\nu t}}, a_1\right), \quad (4.2.16)$$

$$u_2(t) = v(t, 2h) = \frac{1}{\rho} \int i(t) dt + c\sqrt{\nu t} \hat{h}_1\left(\frac{2h - b}{2\sqrt{\nu t}}, a_2\right).$$

Приведенное трехпараметрическое точное решение верно при произвольном градиенте давления и описывает движение вязкопластической среды между двумя плоскостями, которые могут двигаться с различными скоростями. В частности, можно подобрать функцию $i(t)$ так, чтобы пластины были неподвижны.

Из закона Шведова-Бингама нетрудно найти касательные напряжения на площадках параллельных пластинам

$$\tau(t, z) = \begin{cases} \tau_s + \frac{c\mu}{2} \frac{\partial \dot{f}_1(\xi, a_1)}{\partial \xi}, & 0 \leq z \leq z_1; \\ |\tau/\tau_s| \leq 1, & z_1 \leq z \leq z_2; \\ -\tau_s + \frac{c\mu}{2} \frac{\partial \dot{f}_1(\xi, a_2)}{\partial \xi}, & z_2 \leq z \leq 2h; \end{cases} \quad (4.2.17)$$

Очевидно функция $\tau(t, z)$ — непрерывна.

2. Течение между двумя неподвижными пластинами. Условию прилипания на пластинах можно удовлетворить, если положить в серии (4.2.7), (4.2.8) $a_2 = -a_1 = a$, $b = h$ и подобрать функцию $i(t)$. Для этого запишем уравнение (4.2.4) при $z = 2h$ с учетом условия прилипания $v(t, 2h) = 0$

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \Big|_{z=2h} + i(t) = 0$$

и с помощью уравнения (4.2.9) найдем

$$i(t) = -\frac{c\mu}{4\sqrt{\nu t}} \dot{f}_1''(\xi, a),$$

$$\xi = \frac{h}{2\sqrt{\nu t}}.$$

Подставляя сюда значение постоянной (4.2.15) и вторую производную (4.2.14), найдем значение градиента, при котором выполнено условие прилипания на верхней пластине $z = 2h$

$$i(t) = \frac{\tau_s}{2a\sqrt{\nu t}} \exp\left(a^2 - \frac{h^2}{4\nu t}\right).$$

На отрезке времени $t \in (0, t_0)$, $t_0 = h^2/(4a^2\nu)$ функция $i(t)$ меняется от значения $i(0) = 0$ до порогового значения градиента давления

$$i(t_0) = i_0 = \tau_s/h.$$

При $|i| \leq i_0$ среда покоится, а при $|i| > i_0$ среда трогается с места. Функцию $i(t)$ удобно представить в безразмерной форме

$$\frac{i(t)}{i_0} = \sqrt{\frac{t_0}{t}} \exp\left(a^2 \left(1 - \frac{t_0}{t}\right)\right), \quad (4.2.18)$$

$$\frac{t}{t_0} = 4a^2 \frac{\nu t}{h^2}.$$

При этом значении градиента из серии (4.2.8) при $z_2 \leq z \leq 2h$ найдем

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{\tau_s h} v(t, z) = \\ & = \sqrt{\frac{t}{t_0}} \begin{cases} \hat{h} \left(a \sqrt{\frac{t_0}{t}}, a \right) - \hat{h} \left(\frac{z-h}{2\sqrt{vt}}, a \right), & 1 + \sqrt{\frac{t}{t_0}} \leq \frac{z}{h} \leq 2, \\ \hat{h} \left(a \sqrt{\frac{t_0}{t}}, a \right) - \frac{1}{2}, & 1 - \sqrt{\frac{t}{t_0}} \leq \frac{z}{h} \leq 1 + \sqrt{\frac{t}{t_0}}. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

В области $0 \leq z/h \leq 1$ решение доопределяется по симметрии $v(t, z) = v(t, 2h - z)$.

Решение (4.2.19) определяет течение среды между двумя неподвижными пластинами под действием градиента давления (4.2.18) на отрезке времени $t \in (0, t_0)$, $t_0 = h^2/(4a^2\nu)$.

При $t = h^2/(2\nu)$ ($t/t_0 = 2a^2$) функция $i(t)$ имеет абсолютный максимум, равный $i_{max} = i_0 \exp(a^2)/(a\sqrt{2e})$. Если $a \geq \sqrt{2}/2$, то функция $i(t)$ монотонно возрастает на отрезке $t \in (0, t_0)$. При $a < \sqrt{2}/2$ функция $i(t)$ не монотонна.

На рис. 4.3, а представлены функции $i(t)/i_0$ в зависимости от t/t_0 при значениях параметра $a = 0, 2$; $a = 0, 707$; $a = 1$; $a = 3$. На рис. 4.3, б–д представлены профили безразмерной скорости $V = (\mu/(\tau_s h))v$ в моменты времени $t/t_0 = 0$; $1/16$; $1/4$; $9/16$; 1 при четырех различных значениях параметра $a = 0, 2$; $0, 7$; 1 ; 3 . Значение параметра a указано на соответствующем рисунке. В начальный момент $t=0$ профиль скорости имеет вид треугольника

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq h & : V(0, z/h) = k(z/h), \\ h \leq z \leq 2h & : V(0, z/h) = k(2 - z/h), \\ k & = \frac{\exp(a^2)}{a} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \text{Erf}(a) \right]. \end{aligned}$$

С течением времени область твердого ядра увеличивается, а движение среды замедляется. Таким образом, представленное решение описывает процесс торможения среды от треугольного профиля скорости при $t = 0$ до полной остановки при $t = t_0$.

При $a > 0, 7$ среда томотится, так как градиент давления меньше порогового значения. При $a < 0, 7$ градиент давления меньше порогового значения в начале торможения. В остальное время процесс торможения продолжается по инерции при градиенте давления не меньшем порогового значения.

Касательное напряжение в области деформационного течения находится из закона Шведова-Бингама и равенства (4.2.10)

$$\tau(t, z) = \pm \tau_s + \mu \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \mu \frac{\partial v}{\partial z} = \tau_s \frac{\exp(a^2)}{a} (\text{Erf}(\xi) - \text{Erf}(a)). \quad (4.2.20)$$

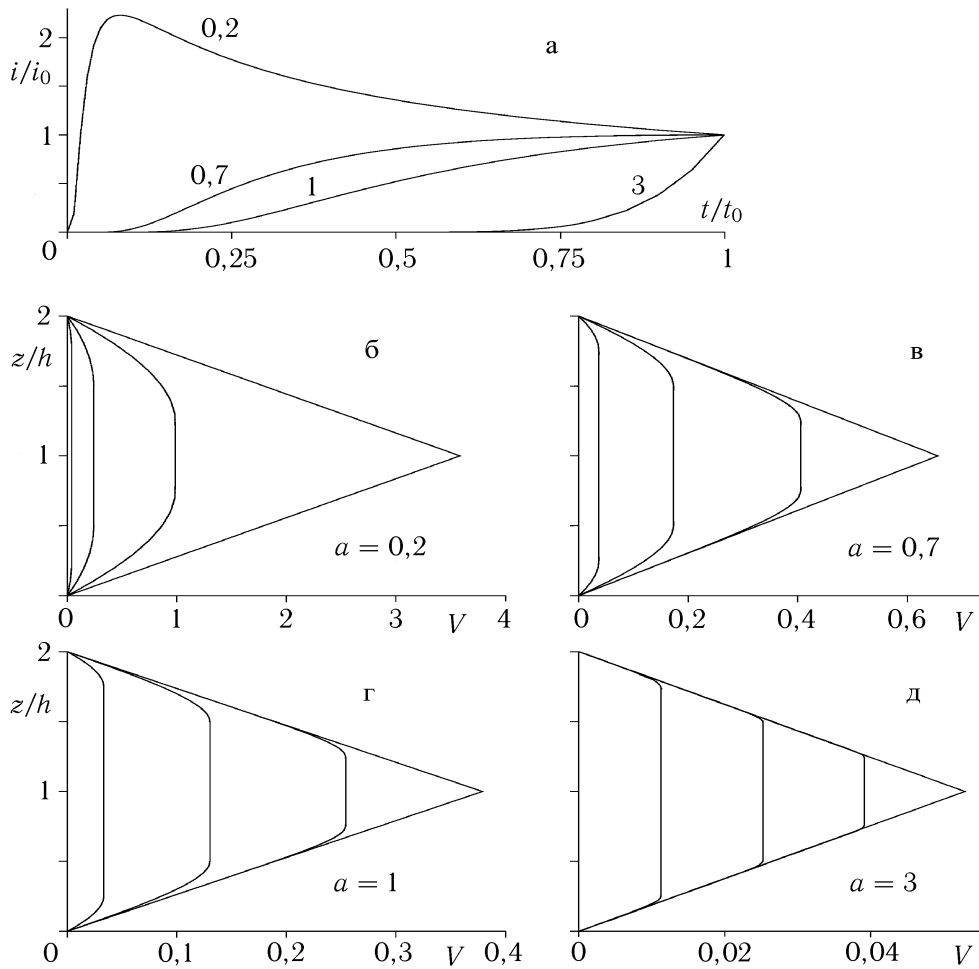


Рис. 4.3. Градиент давления i/i_0 в зависимости от безразмерного времени t/t_0 и профили безразмерной скорости V в моменты времени $t/t_0 = 0; 1/16; 1/4; 9/16; 1$

Обозначение специальной функции Erf взято из [6]. Используя асимптотику

$$\text{Erf}(\xi) = -\frac{1}{2\xi} \exp(-\xi^2) \pm \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty$$

найдем

$$\mu \frac{\partial v}{\partial z} \approx \tau_s \left(\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2a\xi} \exp(a^2 - \xi^2) \right), \quad a^2 \gg 1.$$

Отсюда видно, что при $a^2 \gg 1$ профиль скорости линейный с угловым коэффициентом $\partial v / \partial z = \tau_s / (2\mu a^2)$ всюду, кроме тонкого пограничного слоя вблизи границы ядра $\xi = a$. Толщина пограничного слоя δz соответствует изменению

величины ξ^2 порядка единицы: $\delta(\xi^2) = 2a\delta\xi = a\delta z/\sqrt{\nu t} \sim 1$. Отсюда находим $\delta z \sim \sqrt{\nu t}/a = h\sqrt{t/t_0}/(2a^2)$. На толщине пограничного слоя δz происходит гладкий переход от линейного профиля $v = \tau_s z/(2\mu a^2)$ к профилю с нулевым наклоном $\partial v/\partial z = 0$.

Таким образом, при достаточно большом значении параметра a профиль скорости в каждый момент времени имеет вид трапеции. Верхнее основание с постоянным замедлением приближается к нижнему, а наклон боковых сторон остается неизменным. В окрестности середины между пластинами происходит нарастающее с течением времени «отверждение» среды. Вблизи пластин деформационное течение остается неизменным (см. рис. 4.3, д при $a = 3$).

4.2.3. Двойственная серия точных решений при отсутствии ядра в конечный момент времени

1. Трехпараметрическая серия. Аналогично (4.2.7)–(4.2.17) при $t \leq 0$ можно построить двойственные серии точных решений

$$z_1 = B + 2A_1\sqrt{-\nu t}, \quad z_2 = B + 2A_2\sqrt{-\nu t}, \quad \eta = \frac{z - B}{2\sqrt{-\nu t}}; \quad (4.2.21)$$

$$v(t, z) = \frac{1}{\rho} \int i(t) dt + C\sqrt{-\nu t} \begin{cases} F_1(\eta, A_1), & 0 \leq z \leq z_1, \\ 1/2, & z_1 \leq z \leq z_2, \\ F_1(\eta, A_2) & z_2 \leq z \leq 2h; \end{cases} \quad (4.2.22)$$

$$\tau(t, z) = \begin{cases} \tau_s + \frac{C\mu}{2} \frac{\partial F_1(\eta, A_1)}{\partial \eta}, & 0 \leq z \leq z_1, \\ |\tau/\tau_s| \leq 1, & z_1 \leq z \leq z_2, \\ -\tau_s + \frac{C\mu}{2} \frac{\partial F_1(\eta, a_2)}{\partial \eta}, & z_2 \leq z \leq 2h. \end{cases} \quad (4.2.23)$$

Формально предлагаемая серия решений отличается от (4.2.7)–(4.2.17) тем, что в ней переменная t заменена на $-t$, функция f_1 заменена на F_1 и постоянные c, a_1, a_2, b заменены соответственно на C, A_1, A_2, B . Для функции $F_1(\eta)$ получим уравнение, похожее на (4.2.11)

$$F_1'' - 2\eta F_1' + 2F_1 = 0. \quad (4.2.24)$$

Условия на границе оставляем такие же, как и (4.2.12).

$$F_1'(A_m) = 0, \quad F_1''(A_m) = 1, \quad m = 1, 2 \quad (4.2.25)$$

Решение получается из решения (4.2.13) заменами $\xi = i\eta$, $a = iA$

$$\begin{aligned} F_1(\eta, A) &= \exp(-A^2) \left(\eta \operatorname{Erfi}(\eta) - \operatorname{Erfi}(A) \right) - \frac{1}{2} \exp(\eta^2), \\ F_1'(\eta, A) &= \exp(-A^2) (\operatorname{Erfi}(\eta) - \operatorname{Erfi}(A)), \\ F_1''(\eta, A) &= \exp(-A^2 + \eta^2), \quad \operatorname{Erfi}(\eta) = \int_0^\eta e^{x^2} dx, \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

Аналогично определяется постоянная C

$$C = -\frac{4\tau_s}{\mu(A_2 - A_1)}, \quad (4.2.27)$$

Эта трехпараметрическая серия описывает иной физический процесс. Ширина ядра будет убывать с течением времени и в конечный момент времени $t = 0$ обратится в ноль.

2. Течение между двумя неподвижными пластинами. В частном случае, который определяет течение между двумя неподвижными пластинами, аналогично рассмотренному выше, полагаем $A_2 = -A_1 = A$, $B = h$ и определяем функцию $i(t)$ из условия прилипания

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= i(t) + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = i(t) + \frac{C\mu}{4\sqrt{-\nu t}} F_1''(\eta, a) \Rightarrow \\ i(t) &= \frac{\tau_s}{2a\sqrt{-\nu t}} F_1''\left(\frac{h}{2\sqrt{-\nu t}}, A\right), \\ \frac{i(t)}{i_0} &= \sqrt{\frac{t_0}{-t}} \exp\left(-A^2 \left(1 + \frac{t_0}{t}\right)\right), \quad \frac{t}{t_0} = 4A^2 \frac{\nu t}{h^2}. \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

Полное решение удобно записать в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\tau_s h} v(t, z) &= \\ &= \sqrt{\frac{-t}{t_0}} \begin{cases} F_1\left(A\sqrt{\frac{t_0}{-t}}, A\right) - F_1(\eta, A), & 1 - \sqrt{\frac{-t}{t_0}} < \frac{z}{h} \leq 2, \\ F_1\left(A\sqrt{\frac{t_0}{-t}}, A\right) - \frac{1}{2}, & 1 - \sqrt{\frac{-t}{t_0}} \leq \frac{z}{h} \leq 1 + \sqrt{\frac{-t}{t_0}}. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

В области $0 \leq z/h \leq 1$ решение доопределяется по симметрии $v(t, z) = v(t, 2h - z)$.

Решение (4.2.29) описывает течение среды между двумя неподвижными пластинами под действием градиента давления (4.2.28) на отрезке времени $t \in (-t_0, 0)$, $t_0 = h^2/(4A^2\nu)$. Функция $i(t)$ меняется от порогового значения $i(0) = i_0 = \tau_s/(\rho h)$ до бесконечности при $t \rightarrow -0$. Течение начинается из состояния покоя в момент времени $t = -t_0$, когда градиент давления $i(t)$ превышает

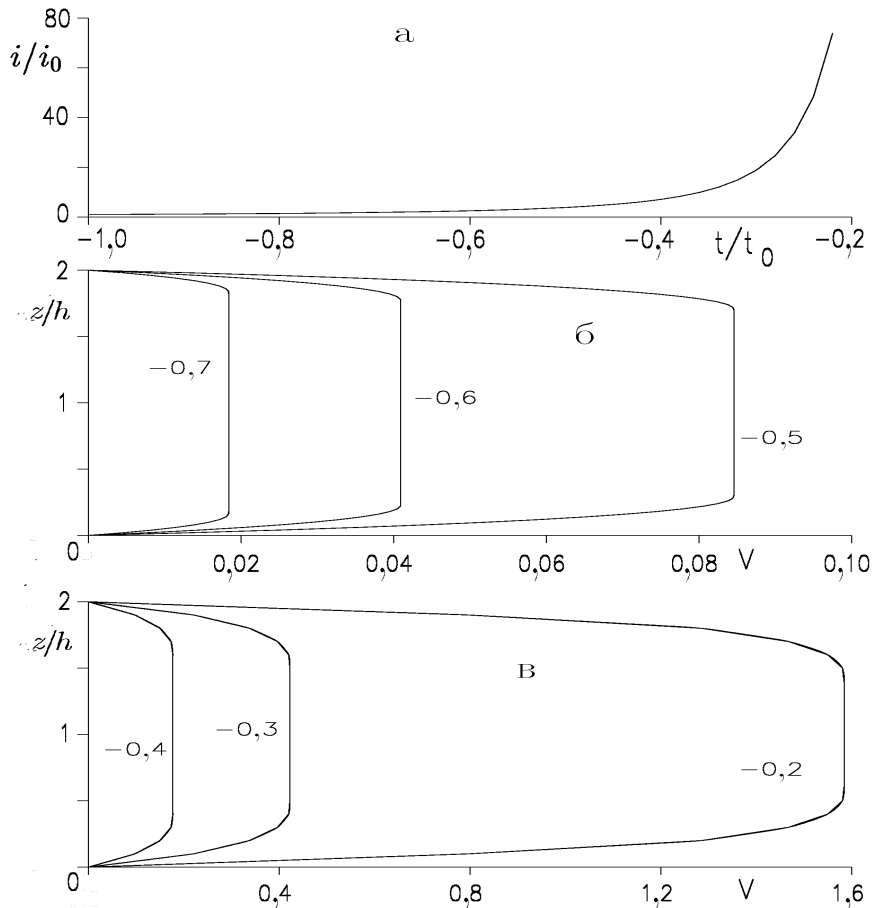


Рис. 4.4. Градиент давления i/i_0 в зависимости от безразмерного времени t/t_0 и профили безразмерной скорости V от безразмерной координаты z/h в моменты времени $t/t_0 = -0,4; -0,3; -0,2$

пороговое значение i_0 . Происходит разгон течения под действием увеличивающегося во времени градиента давления на интервале $t \in (-t_0, 0)$. При этом $i(t)$ и скорость $v(t, z)$ возрастают неограниченно.

Ядро заполняет область $1 - 2A\sqrt{-t} = z_1 \leq z \leq z_2 = 1 + 2A\sqrt{-t}$, ширина которого уменьшается по закону $4A\sqrt{-t}$. На рис. 4.4, а представлена зависимость градиента давления от времени t/t_0 . Профили скорости при значении параметра $A = 1$ в моменты времени $t/t_0 = -0,7; -0,6; -0,5$ изображены на рис. 4.4, б и в моменты времени $t/t_0 = -0,4; -0,3; -0,2$ на рис. 4.4, в.

4.2.4. Серии точных решений с постоянной шириной ядра

1. Трехпараметрические серии. Примем следующий закон движения границ ядра:

$$z_j = b_j + 2a\sqrt{\nu t}, \quad j = 1, 2. \quad (4.2.30)$$

Ширина ядра постоянна $\Delta z = z_2 - z_1 = b_2 - b_1$ и не зависит от времени, а область ядра сдвигается пропорционально \sqrt{t} .

Автомодельные переменные в первой $0 \leq z \leq z_1$ и второй $z_2 \leq z \leq 2$ деформационных областях обозначим соответственно через ξ_1 и ξ_2

$$\xi_j = \frac{z - b_j}{2\sqrt{\nu t}}, \quad j = 1, 2. \quad (4.2.31)$$

Поле скорости будет выражаться через функцию f_2

$$v(t, z) = \frac{1}{\rho} \int i(t) dt + ct \begin{cases} f_2(\xi_1, a), & 0 \leq z \leq z_1 \\ 1/4, & z_1 \leq z \leq z_2 \\ f_2(\xi_2, a), & z_2 \leq z \leq 2h \end{cases} \quad (4.2.32)$$

Производные в области $0 \leq z \leq z_1$, $z_2 \leq z \leq 2h$ таковы

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} i(t) + c \left(f_2(\xi, a) - \frac{\xi}{2} f_2'(\xi, a) \right), \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{ct}{2\sqrt{\nu t}} f_2'(\xi, a), \quad \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{c}{4} f_2''(\xi, a). \end{aligned}$$

Подставляя в уравнение (4.2.4), получим уравнение для функции f_2

$$f_2''(\xi, a) + 2\xi f_2'(\xi, a) - 4f_2(\xi, a) = 0.$$

Также как и в предыдущих сериях подчиним функцию f_2 условиям

$$f_2'(a, a) = 0, \quad f_2''(a, a) = 1.$$

Решение уравнения, удовлетворяющее этим двум условиям, имеет вид

$$\begin{aligned} f_2(\xi, a) &= \frac{1}{8} \exp(a^2) (q_1(a)h_2(\xi) - h_1(a)q_2(\xi)), \quad q_1(\xi) = 2\xi \operatorname{Erf}(\xi) + \exp(-\xi^2), \\ q_2(\xi) &= (4\xi^2 + 2)\operatorname{Erf}(\xi) + 2\xi \exp(-\xi^2), \quad h_1(\xi) = 2\xi, \quad h_2(\xi) = 4\xi^2 + 2. \end{aligned}$$

Производные этой функции таковы

$$\begin{aligned} f_2'(\xi, a) &= \frac{1}{2} \exp(a^2) (q_1(a)h_1(\xi) - q_1(\xi)h_1(a)), \\ f_2''(\xi, a) &= 2a \exp(a^2) (\operatorname{Erf}(a) - \operatorname{Erf}(\xi)) + 1. \end{aligned}$$

Из граничного условия (4.2.6) находим постоянную c

$$c = -\frac{8\tau_s}{\mu(b_2 - b_1)}. \quad (4.2.33)$$

Аналогично строится двойственная серия с заменой в (4.2.30)–(4.2.32) t на $-t$. Границы ядра представляются в виде

$$z_i = B_i + 2A\sqrt{-\nu t}, \quad i = 1, 2 \quad (4.2.34)$$

и вводятся автомодельные переменные в первой и второй областях деформационного течения

$$\eta_1 = \frac{z - B_1}{2\sqrt{-\nu t}}, \quad \eta_2 = \frac{z - B_2}{2\sqrt{-\nu t}}. \quad (4.2.35)$$

Тогда решение представляется в виде

$$v(t, z) = \frac{1}{\rho} \int i(t) dt + Ct \begin{cases} F_2(\eta_1, A), & 0 \leq z \leq z_1; \\ -1/4, & z_1 \leq z \leq z_2; \\ F_2(\eta_2, A), & z_2 \leq z \leq 2h. \end{cases} \quad (4.2.36)$$

Аналогично находим решение уравнения и граничные условия для функции F_2

$$F_2''(\eta, A) - 2\eta F_2'(\eta, A) + 4F_2(\eta, A) = 0,$$

$$F_2'(A, A) = 0, \quad F_2''(A, A) = 1.$$

Определяем его решение

$$F_2(\eta, A) = -\frac{1}{8} \exp(-A^2) (Q_1(A)H_2(\eta) - H_1(A)Q_2(\eta)),$$

$$Q_1(\eta) = 2\eta \operatorname{Erfi}(\eta) - \exp(\eta^2),$$

$$Q_2(\eta) = (4\eta^2 - 2)\operatorname{Erfi}(\eta) - 2\eta \exp(\eta^2),$$

$$H_1(\eta) = 2\eta, \quad H_2(\eta) = 4\eta^2 - 2$$

и производные

$$F_2'(\eta, A) = -\frac{1}{2} \exp(-A^2) (Q_1(A)H_1(\eta) - Q_1(\eta)H_1(A)),$$

$$F_2''(\eta, A) = 2A \exp(-A^2) (\operatorname{Erfi}(\eta) - \operatorname{Erfi}(A)) + 1.$$

Из граничного условия (4.2.6) находим постоянную C

$$C = \frac{8\tau_s}{\mu(B_2 - B_1)}. \quad (4.2.37)$$

2. Течения около неподвижной пластины при постоянном градиенте давления. Рассмотрим подробнее частный случай, когда пластина $z = 0$ неподвижна, а градиент давления постоянный и не зависит от времени. Расположим вторую пластину на уровне $z = 2h$. Будем полагать, что ядро примыкает ко второй пластине, так, что $z_1 \leq 2h \leq z_2$. Скорость пластины будем считать равной скорости ядра.

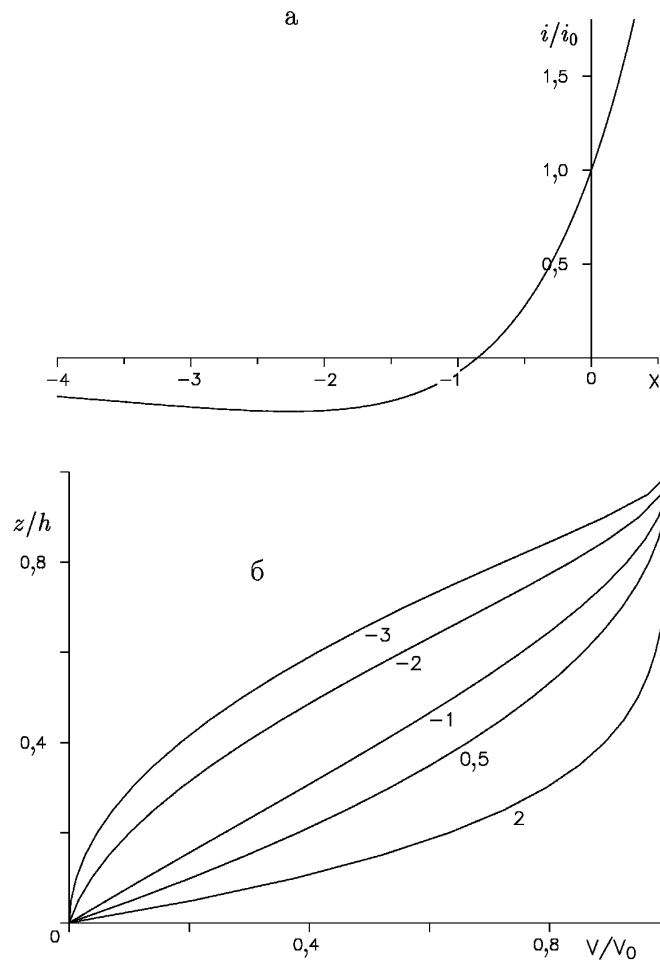


Рис. 4.5. Градиент давления и профили скорости

Параметры течения в серии (4.2.32) задаются так: $b_1 = 0$, $b_2 = \Delta z \geq 2h$. Из условия прилипания на неподвижной пластине найдем

$$i/i_0 = 4f_2'(0, a) = f_2''(0, a) = 1 + 2a \exp(a^2) \operatorname{Erf}(a), \quad i_0 = 2\tau_s / \Delta z.$$

В безразмерном виде из (4.2.32) получим решение при $0 \leq t \leq t_0 = h^2 / (a^2 \nu)$

$$\frac{\mu}{h\tau_s} v(t, z) = \frac{t}{t_0} \frac{2h}{\Delta z} \frac{1}{a^2} \left(\frac{i}{i_0} - 4f_2 \left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}, a \right) \right), \quad 0 \leq z \leq 2a\sqrt{\nu t}. \quad (4.2.38)$$

В ядре, примыкающем к пластине $z = 2h$, скорость изменяется линейно со

временем по закону

$$\frac{\mu}{h\tau_s}v(t, z) = \frac{t}{t_0} \frac{2h}{\Delta z} \frac{1}{a^2} \left(\frac{i}{i_0} - 1 \right), \quad 2a\sqrt{vt} \leq z \leq 2h.$$

Пластина $z = 2h$ движется со скоростью ядра с постоянным ускорением.

Параметры течения в серии (4.2.36) задаются аналогично: $B_1 = 0$, $B_2 = \Delta z \geq 2h$. Аналогично найдем градиент давления

$$(i/i_0)F_2''(0, A) = 1 - 2A \exp(A^2) \operatorname{Erfi}(A), \quad i_0 = \frac{2\tau_s}{\Delta z}.$$

В безразмерном виде из (4.2.36) получим решение при $-t_0 \leq t \leq 0$

$$\frac{\mu}{h\tau_s}v(t, z) = \frac{t}{t_0} \frac{2h}{\Delta z} \frac{1}{A^2} \left(\frac{i}{i_0} + 4F_2 \left(\frac{z}{2\sqrt{-vt}}, A \right) \right), \quad (4.2.39)$$

$$0 \leq z \leq 2A\sqrt{-vt},$$

В ядре, примыкающем к пластине $z = 2h$, скорость изменяется линейно со временем по закону

$$\frac{\mu}{h\tau_s}v(t, z) = \frac{t}{t_0} \frac{2h}{\Delta z} \frac{1}{A^2} \left(\frac{i}{i_0} - 1 \right), \quad 2A\sqrt{-vt} \leq z \leq 2h.$$

Пластина $z = 2h$ движется со скоростью ядра с постоянным замедлением.

Таким образом, в решении (4.2.38) течение начинается из состояния покоя и ускоряется. В решении (4.2.39) в начальный момент времени $t = -t_0$ течение имеет некоторый профиль скорости и замедляется до полной остановки при $t = 0$.

Градиент давления i/i_0 можно представить на одном графике (рис. 4.5, а). По оси X откладывается параметр $X = a^2$ при $X > 0$ либо $X = -A^2$ при $X < 0$, а по вертикальной оси откладывается значение i/i_0 . Из рис. 4.5,а видно, что функция i/i_0 принимает наименьшее значение $-0,284$ при $X = -2,26$, $A = \sqrt{2,26} = 1,5$. Каждому значению параметра X соответствует одно значение $i/i_0 \geq -0,284$ и решение, определяющее либо разгон течения при $i/i_0 > 1$ ($X > 0$), либо торможение при $-0,284 \leq i/i_0 < 1$ ($X < 0$). Для каждого отрицательного значения $0 > i/i_0 > -0,284$ существует два решения, соответствующие двум параметрам X : одно $X < -2,26$, второе $-2,26 < X < 0$. Все профили скорости деформационной области в различные моменты времени аффинно подобны и определяются функциями $f_2(a, \eta)$ или $F_2(A, \eta)$ и соответствующим значением градиента давления i/i_0 . На рис. 4.5,б показано несколько профилей этого семейства при $a = 2, 0,5$ и $A = 1; 2; 3$. Соответствующие им значения градиента давления $i/i_0 = 1,93; 1,59; -0,069; -0,2; -0,0761$ можно найти по графику на рис. 4.5,а. На каждом профиле указано значение параметра a при ускорении течения, либо параметра $-A$ при замедлении. По вертикальной

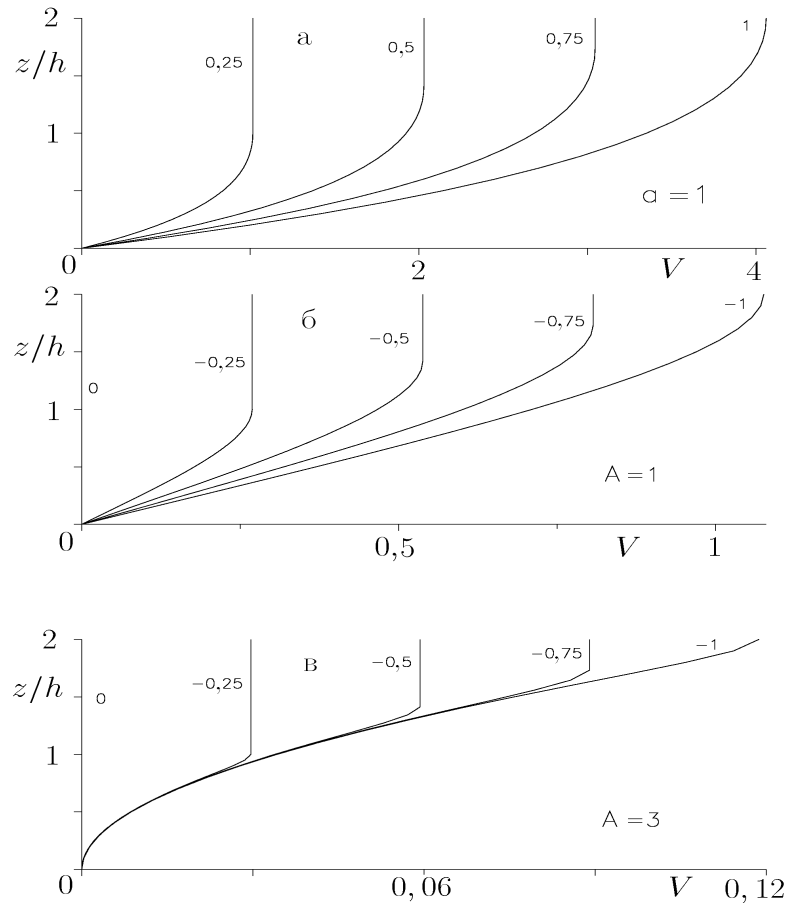


Рис. 4.6. Развитие течения и процесс торможения

оси откладывается z/h , а по горизонтальной $v(t, z)/v_0$, $v_0 = v(t, z_1)$. Профили при $X > -1, 2$; $A < 1, 1$; $a \geq 0$ – выпуклые, при $X < -1, 2$ профили имеют точку перегиба. В пределе $X \rightarrow \infty$ профиль скорости имеет форму параболы.

На рис. 4.6,а представлено развитие течения из состояния покоя при значении параметра $a = 1$, $i/i_0 = 5, 06$. Безразмерные профили скорости $V(t, z/h) = \frac{\mu}{h\tau_s} v(t, z)$ представлены в моменты времени $t/t_0 = 0; 0, 25; 0, 5; 0, 75; 1$.

На рис. 4.6,б и в представлены процессы торможения течения при значении параметра $A = 3$, $i/i_0 = 0, 076$ в моменты времени $t/t_0 = -1; -0, 75; -0, 5; -0, 25; 0$. В последний момент времени $t = 0$ среда останавливается.

При достаточно большом значении параметра A процесс торможения происходит при отсутствии градиента давления ($i \approx 0$). Происходит постепенное «отвердение», среды. «Отвердение», распространяется от верхней движущейся пластины по направлению к нижней. Область деформационного течения примыкает к нижней пластине. Профили скорости имеют форму одной и той же параболы с осью, совпадающей с нижней пластиной.

Таким образом, в области деформационного течения никаких изменений не происходит. Уменьшается лишь ширина этой области. Аналогичный эффект при течении между двумя неподвижными пластинами был описан ранее (см. рис. 4.3,д $a = 3$).

4.2.5. Приложение к разд. 4.2

1. Общий метод. Можно достичь существенного обобщения всех рассмотренных выше решений, если поле скорости в области $0 \leq z \leq z_1$ или $z_2 \leq z \leq 2h$ при $t \geq 0$ представить рядом

$$v(t, z) = \frac{1}{\rho} \int i(t) dt + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (\sqrt{\nu t})^k f_k(\xi_j, a_j), \quad (4.2.40)$$

$$\xi_j = \frac{z - b_j}{2\sqrt{\nu t}}, \quad z_j = b_j + 2a_j \sqrt{\nu t}, \quad j = 1, 2.$$

Автомодельная переменная ξ_j и законы движения границ ядра $z_j(t)$ подобраны так, что на границе $z = Z_j(t)$ автомодельная переменная постоянна $\xi_j = a_j$.

Подставляя ряд (4.2.40) в уравнение (4.2.4), получим обыкновенные дифференциальные по переменной ξ уравнения для функций $f_k(\xi, a)$

$$f_k'' + 2\xi f_k' - 2k f_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.2.41)$$

Также как и выше, подчиним функцию f_k условиям

$$f_k'(a, a) = 0, \quad f_k''(a, a) = 1.$$

Тогда поле скорости (4.2.40) будет удовлетворять условиям (4.2.5). Из условия (4.2.6) получим соотношение

$$v_z''(t, z_i) = \frac{1}{4\nu} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (\sqrt{\nu t})^{k-2} = \frac{-2\tau_s}{\mu} \frac{1}{b_2 - b_1 + (a_2 - a_1)\sqrt{\nu t}}. \quad (4.2.42)$$

Правую часть можно представить в виде ряда по степеням $\sqrt{\nu t}$ и найти c_k . Четырехпараметрическая серия будет построена. При $b_2 = b_1$ получим вырожденный случай, в котором ряд содержит только одно слагаемое. Он рассмотрен в разд.4.2.2. Другой вырожденный случай $a_2 = a_1$ изучен в 4.2.4. Двойственная

серия при $t < 0$ представляется рядом

$$v(t, z) = \frac{1}{\rho} \int i(t) dt + \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (\sqrt{-\nu t})^k F_k(\eta_j, a_j), \quad (4.2.43)$$

$$\eta_j = \frac{z - B_j}{2\sqrt{-\nu t}}, \quad z_j = B_j + 2A_j \sqrt{-\nu t}, \quad j = 1, 2.$$

Подставляя ряд (4.2.43) в уравнение (4.2.4), получим обыкновенные дифференциальные по переменной η уравнения для функций $F_k(\eta, A)$

$$F_k'' - 2\eta F_k' + 2kF_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.2.44)$$

Также как и выше, подчиним функцию F_k условиям

$$F_k'(A, A) = 0, \quad F_k''(A, A) = 1.$$

Тогда поле скорости (4.2.43) будет удовлетворять условиям (4.2.5). Из условия (4.2.6) получим соотношение

$$v_z''(t, z_i) = -\frac{1}{4\nu} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (\sqrt{-\nu t})^{k-2} = \quad (4.2.45)$$

$$= \frac{-2\tau_s}{\mu} \frac{1}{B_2 - B_1 + (A_2 - A_1)\sqrt{-\nu t}}.$$

Правую часть можно представить в виде ряда по степеням $\sqrt{-\nu t}$ и найти C_k . Двойственная четырех параметрическая серия будет также построена. Таким путем можно определить четыре четырехпараметрические серии. Здесь также имеются два вырожденные случая: $B_2 = B_1$, рассмотренный в разд. 4.2.3 и $A_2 = A_1$, изученный в разд. 4.2.4.

2. Автомодельные функции. Приведем сводку формул по которым можно легко вычислять автомодельные функции, определяющие перечисленные выше решения. Функции $f_k(\xi, a)$ находятся из решения краевых задач

$$f_k'' + 2\xi f_k' - 2k f_k = 0, \quad f_k'(a) = 0, \quad f_k''(a) = 1$$

При $k = 0, 1, 2, \dots$ решение имеет вид

$$f_k(\xi, a) = (-1)^k \alpha_k \exp(a^2) (q_{k-1}(a) h_k(\xi) - h_{k-1}(a) q_k(\xi))$$

$$\alpha_k = 1/(k!2^k)$$

$$h_k(\xi) = \exp(-\xi^2) \frac{d^k}{d\xi^k} \exp(\xi^2),$$

$$q_k(\xi) = \exp(-\xi^2) \frac{d^k}{d\xi^k} (\exp(\xi^2) \text{Erf}(\xi)),$$

$$\operatorname{Erf}(\xi) = \int_0^{\xi} \exp(-x^2) dx$$

Функции $h_k(\xi)$, $q_k(\xi)$ вычисляются по рекуррентным формулам

$$h_0 = 1, \quad h_1 = 2\xi, \quad h_2 = 4\xi^2 + 2;$$

$$h_{k+1} = 2\xi h_k + 2k h_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots;$$

$$q_0 = \operatorname{Erf}(\xi), \quad q_1 = 2\xi \operatorname{Erf}(\xi) + \exp(-\xi^2),$$

$$q_2 = (4\xi^2 + 2)\operatorname{Erf}(\xi) + 2\xi \exp(-\xi^2),$$

$$q_{k+1} = 2\xi q_k + 2k q_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для производных справедливы формулы

$$h'_k = 2k h_{k-1}, \quad q'_k = 2k q_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Функции $F_k(\eta, A)$ находятся из решение двойственной краевой задачи

$$F''_k - 2\eta F'_k + 2k F_k = 0, \quad F'_k(A) = 0, \quad F''_k(A) = 1.$$

Решение представляется по аналогичным формулам

$$F_k(\eta, A) = -\alpha_k \exp(-A^2) (Q_{k-1}(A)H_k(\eta) - H_{k-1}(A)Q_k(\eta));$$

$$H_k(\eta) = (-1)^k \exp(\eta^2) \frac{d^k}{d\eta^k} \exp(-\eta^2),$$

$$Q_k(\eta) = (-1)^k \exp(\eta^2) \frac{d^k}{d\eta^k} (\exp(-\eta^2) \operatorname{Erfi}(\eta)),$$

$$\operatorname{Erfi}(\eta) = \int_0^{\eta} \exp(x^2) dx$$

$$H_0 = 1, \quad H_1 = 2\eta, \quad H_2 = 4\eta^2 - 2,$$

$$H_{k+1} = 2\eta H_k - 2k H_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$Q_0 = \operatorname{Erfi}(\eta),$$

$$Q_1 = 2\eta \operatorname{Erfi}(\eta) - \exp(\eta^2); \quad Q_2 = (4\eta^2 - 2)\operatorname{Erfi}(\xi) - 2\eta \exp(\eta^2),$$

$$Q_{k+1} = 2\eta Q_k - 2kQ_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для производных справедливы формулы

$$H'_k = 2kH_{k-1}, \quad Q'_k = 2kQ_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Функции $H_k(\eta)$ являются известными полиномами Эрмита, $h_k(\eta)$ — полиномами Эрмита мнимого аргумента.

Для вычисления функций $\operatorname{Erf}(\xi)$ и $\operatorname{Erfi}(\eta)$ полезны разложения для малых и больших значений аргументов соответственно [6]

$$\operatorname{Erf}(\xi) = \exp(-\xi^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{2n+1}}{(3/2)_n},$$

$$\operatorname{Erfi}(\eta) = \exp(\eta^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\eta^{2n+1}}{(3/2)_n},$$

$$\operatorname{Erf}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \exp(-\xi^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1/2)_n}{\xi^{2n+1}},$$

$$\operatorname{Erfi}(\eta) = \frac{1}{2} \exp(\eta^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)_n}{\eta^{2n+1}}$$

Последние два ряда имеют смысл асимптотических рядов.

4.3. Точные решения задачи нестационарного течения в круглой трубе

В работе [71] получены две однопараметрические серии точных решений задачи вязкопластического нестационарного течения в круглой трубе. Полученные серии аналогичны однопараметрическим сериям точных решений (4.2.19) и (4.2.29) задачи нестационарного течения между двумя неподвижными параллельными пластинами. Для круглой трубы граничное условие на ядре остается нелинейным, но, кроме того, уравнение движения сложнее, что существенно затрудняет построение точных решений.

4.3.1. Формулировка краевой задачи

1. Уравнения. Рассматривается нестационарное течение вязкопластической среды в круглой трубе $r \leq R$ под действием переменного, зависящего от времени t , градиента давления $\partial p/\partial z$, где r, z — цилиндрические координаты, R — радиус трубы.

Течение в круглой трубе относится также к классу однонаправленных движений рассмотренных в разд. 4.2.1, и для вывода уравнений и краевых условий следует повторить все рассуждения, приведенные в этом разделе. Поле скорости среды в круглой трубе имеет одну компоненту $v(t, r)$, направленную вдоль оси z и зависящую от времени t и полярной координаты r (рис. 4.7)). От координаты z скорость v зависеть не будет в силу уравнения неразрывности $\partial v/\partial z = 0$. У тензора скоростей деформаций отличны от нуля только компоненты $v_{rz} = v_{zr}$ и реологическое соотношение определяется линейной связью (см. разд. 4.1 и (4.2.2))

$$s_{rz} = \mu \partial v / \partial r - \tau_s, \quad |s_{rz}| > \tau_s \quad (4.3.1)$$

Ускорение в ядре $r \leq r_0$ находится также как и для плоскопараллельного течения и формула для него аналогична (4.2.1)

$$\rho \partial v / \partial t = -\partial p / \partial z - 2\tau_s / r_0, \quad |s_{rz}| \leq \tau_s. \quad (4.3.2)$$

Система уравнений осесимметричного движения (2.3.2) в области $r > r_0$ для поля скорости существенно упрощается

$$0 = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial s_{rz}}{\partial r} + \frac{s_{rz}}{r}.$$

Из полученных уравнений видно что градиент давления зависит только от времени. Вводя обозначение $i(t) = -\partial p/\partial z$, и подставляя s_{rz} из реологического соотношения (4.3.1), получим уравнения, аналогичные (4.2.4)

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= i(t) - 2\frac{\tau_s}{r_0}, \quad r \leq r_0, \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= i(t) + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{\tau_s}{r}, \quad r > r_0. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

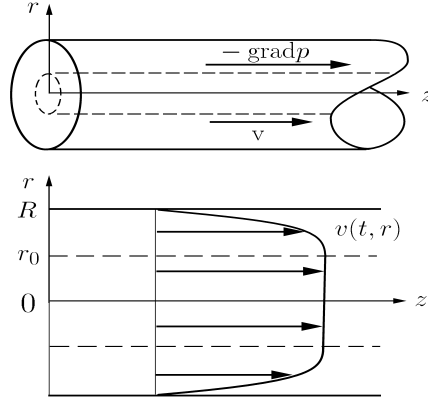


Рис. 4.7. Схема течения в трубе

2. Начальные и краевые условия. Начальные и краевые условия формулируются аналогично задаче течения между пластинами. В начальный момент $t = 0$ следует задать значения границ ядра и начальное распределение скорости

$$v(0, r) = v_0(r), \quad r_0(0) = r_{00}.$$

На границе трубы принимаем условие прилипания

$$v(t, R) = 0.$$

Условие непрерывности s_{rz} на границе ядра с помощью (4.3.1) запишется в виде

$$v_r'(t, r_0) = 0. \quad (4.3.4)$$

Из уравнений (4.3.3) и непрерывности $\partial v / \partial t$ и $i(t)$ получаем условия на границах ядра

$$v_{rr}''(t, r_0) = -\tau_s / (\mu r_0). \quad (4.3.5)$$

Краевая задача (4.2.4)–(4.2.6) является аналогом задачи Стефана для осесимметричного уравнения теплопроводности.

Перейдем к построению двух однопараметрических серий точных решений.

4.3.2. Серии точных решений

1. Сведение задачи к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Для границы ядра принимаем закон

$$r_0 = 2A\sqrt{-\beta\nu t}. \quad (4.3.6)$$

Здесь $0 < A < \infty$ – параметр, $\beta = \pm 1$ – параметр индекс серии.

Выражение для скорости принимаем аналогичным (4.2.8)

$$v(t, z) = \frac{1}{\rho} \int i(t) dt + C\sqrt{-\beta\nu t} F_\beta(\xi, A) + \frac{\tau_s}{\mu} r, \quad \xi = \frac{r}{2\sqrt{-\beta\nu t}}. \quad (4.3.7)$$

Вычисляя производные

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho} i(t) + C \frac{\sqrt{-\beta\nu t}}{2t} (F_\beta(\xi, A) - \xi F'_\beta(\xi, A)), \quad (4.3.8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{C}{2} F'_\beta(\xi, A) + \frac{\tau_s}{\mu}, \quad \nu \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{C\nu}{4\sqrt{-\beta\nu t}} F''_\beta(\xi, A), \quad (4.3.9)$$

$$\nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{\sqrt{-\beta\nu t}}{t} \left(-\frac{F''}{4\beta} - \frac{F'}{4\xi\beta} \right) + \frac{\tau_s}{\mu r}$$

и подставляя их в уравнение (4.3.3), получим

$$\xi F''_\beta(\xi, A) + (1 - 2\beta\xi^2) F'_\beta(\xi, A) + 2\beta\xi F_\beta(\xi, A) = 0. \quad (4.3.10)$$

Подчиним функцию $F(\xi, A)$ двум условиям при $\xi = A$

$$F'_\beta(A, A) = A, \quad F''_\beta(A, A) = 1. \quad (4.3.11)$$

Тогда условия (4.3.4) и (4.3.5) примут вид найдем C

$$\frac{C}{2} + \frac{\tau_s}{\mu} = 0, \quad \frac{C}{4\sqrt{-\beta\nu t}} = -\frac{\tau_s}{2\mu A\sqrt{-\beta\nu t}}.$$

Они будут выполнены при

$$C = -\frac{2\tau_s}{\mu A}. \quad (4.3.12)$$

На границе трубы $r = R$

$$\xi = \xi_R = \frac{R}{2\sqrt{-\beta\nu t}}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

Отсюда из (4.3.8) и (4.3.12) найдем градиент давления

$$i(t) = \frac{2\tau_s}{R} \frac{\beta}{A} \xi_R (\xi_R F'_\beta(\xi_R, A) - F_\beta(\xi_R, A)), \quad (4.3.13)$$

а из (4.3.7) получим распределение скорости

$$v(t, z) = C\sqrt{-\beta\nu t} (F_\beta(\xi, A) - F_\beta(\xi_R, A)) + \frac{\tau_s}{\mu}(r - R). \quad (4.3.14)$$

Для окончательного определения скорости и градиента давления необходимо найти $F_\beta(\xi, A)$ из решения уравнения (4.3.10) с граничным условием (4.3.11).

2. Автомодельная функция. Как следствие (4.3.10) и (4.3.11), на границе (при $\xi = A$) квазитвёрдого ядра. имеем

$$F_\beta(\xi, A)|_{\xi=A} = A^2 - \beta$$

Окончательно получим следующую задачу Коши для функции $F(\xi) = F_\beta(\xi, A)$

$$\begin{aligned} \xi F'' + (1 - 2\beta\xi^2)F' + 2\beta\xi F &= 0 \\ F(A) &= A^2 - \beta, \quad F'(A) = A \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

Замена $x = \beta\xi^2$ приводит задачу (4.3.15) к уравнению для вырожденной гипергеометрической функции. Однако, в данном случае можно значительно упростить решение, выразив его через модифицированные функции Бесселя и экспоненту. Подстановкой $x = \xi^2/2$, $F_\beta(\xi, A) = e^{\beta x} y(x)$, $a = A^2/2$ задача (4.3.15) приводится к виду

$$xy'' + y' - (x - 2\beta)y = 0, \quad (4.3.16)$$

$$y(a) = (2a - \beta)e^{-\beta a}, \quad y'(a) = 2(1 - \beta a)e^{-\beta a}. \quad (4.3.17)$$

Общее решение линейного дифференциального уравнения (4.3.16) имеет вид

$$y(x) = (1 - 2\beta x)Z_0(x) + 2x \frac{dZ_0}{dx}, \quad (\text{A})$$

где $Z_0(x)$ – решение уравнения Бесселя нулевого порядка

$$xZ_0'' + Z_0' - xZ_0 = 0. \quad (\text{B})$$

Убедиться в этом можно непосредственной подстановкой (A) в уравнение (4.3.16).

Упрощение возникающих в этой проверке выкладок можно осуществить операторным методом. Для этого, обозначив $D = d/dx$, введем два дифференциальных оператора

$$L = xD^2 + D - (x - 2\beta), \quad M = 2xD + (1 - 2\beta x).$$

Тогда уравнение (4.3.16) можно записать в виде $Ly = 0$, а замену (A) так $y = Mz_0$. Подстановка (A) в уравнение (4.3.16) приведет к уравнению $LMZ_0 = 0$.

Установим тождество для трижды дифференцируемых функций $w(x)$

$$LMw = NBw, \quad (\text{4.3.18})$$

$$B = xD^2 + D - x, \quad N = 2xD + (3 - 2\beta x),$$

где B – дифференциальный оператор уравнения Бесселя (B), а N – дифференциальный оператор первого порядка.

Из тождества (4.3.18) видно, что, если w удовлетворяет уравнению Бесселя (B) $Bw = 0 \Rightarrow w = Z_0$, то выражение (A), равное $y = Mz_0$, будет общим решением уравнения (4.3.16).

Доказательство тождества (4.3.18) проводится так. Подставляем в операторы L и M их выражения, раскрываем скобки

$$\begin{aligned} LM &= (xD^2 + D - x + 2\beta)(2xD + 1 - 2\beta x) = \\ &= 2xD^2 xD + xD^2 - 2\beta xD^2 x + 2DxD + D - 2\beta Dx - \\ &\quad - 2x^2D - x + 2\beta x^2 + 4\beta xD + 2\beta - 4x. \end{aligned}$$

и с помощью тождеств

$$\begin{aligned} D^2 xD &= xD^3 + 2D^2, \quad D^2 x = xD^2 + 2D, \\ Dx D &= xD^2 + d, \quad Dx = xD + 1 \end{aligned}$$

упрощаем

$$LM = 2x^2 2D^3 + (7x - 2\beta x^2)D^2 + (3 - 2\beta x - 2x^2)D - 5x + 2\beta x^2.$$

Раскрывая и упрощая аналогично оператор NB , получим для выражение тождественное LM . Тем самым тождество (4.3.18) доказано.

Теперь найдем решение задачи Коши (4.3.16) и (4.3.17). Из общего решения (А) выделяем два независимых частных решения

$$y_1(x) = (1 - 2\beta x) I_0(x) + 2x I_1(x),$$

$$y_2(x) = (1 - 2\beta x) K_0(x) - 2x K_1(x),$$

где $I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$ — модифицированные функции Бесселя порядка $\nu = 0, 1$. Решение ищем в виде

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Тогда постоянные C_1 и C_2 находятся из условий (4.3.17)

$$C_1 = -\beta a K_1(a) e^{-\beta a}, \quad C_2 = -\beta a I_1(a) e^{-\beta a}.$$

Отсюда находим решение для автомодельной функции

$$F_\beta(\xi, A) = -\beta a \exp(\beta(x - a)) \{2x [K_1(a) I_1(x) - I_1(a) K_1(x)] + (1 - 2\beta x) [K_1(a) I_0(x) + I_1(a) K_0(x)]\}.$$

3. Безразмерная форма решения. Из (4.3.6) следует, что на интервале времени $-\beta t \in (0, t_0)$, $t_0 = R^2/(4A^2\nu)$ ядро r_0 меняется от нуля до радиуса трубы R . Удобно ввести нормированное время t' так, чтобы оно менялось в интервале $t' \in [-1, +1]$. Это можно сделать с помощью замены

$$t' = \beta + t/t_0, \quad \beta = \text{sign} t'.$$

Тогда граница ядра будет меняться по универсальному параболическому закону

$$r_0/R = \sqrt{1 - |t'|}$$

и не зависит от параметров β и A .

Автомодельные переменные выражаются через t' так:

$$\xi_R = A/\sqrt{1 - |t'|}, \quad \xi = (r/R)\xi_R.$$

Градиент давления отнесем к пороговому значению $i_0 = 2\tau_s/(\rho R)$ и введем безразмерные градиент давления Π_β и скорость V_β

$$\Pi_\beta = 2 \frac{i}{i_0}, \quad V_\beta = \frac{\mu w(t, z)}{R\tau_s}.$$

Тогда из (4.3.12)–(4.3.14) получим

$$\Pi_\beta(t', A) = \exp\left(\frac{at'}{1 - |t'|}\right) \frac{2a}{\sqrt{1 - |t'|}} \times \left[K_1(a) I_0\left(\frac{a}{1 - |t'|}\right) + I_1(a) K_0\left(\frac{a}{1 - |t'|}\right) \right], \quad a = \frac{A^2}{2}.$$

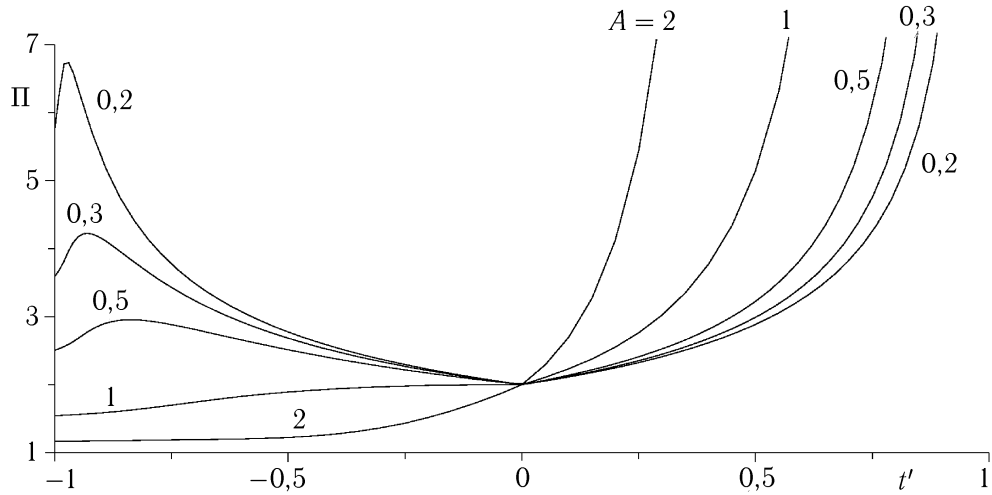


Рис. 4.8. Градиент давления $\Pi(t', A)$ в зависимости от нормированного времени t' при значениях параметра $A = 0, 2, 1/3, 0, 5, 1$ и 2

$$V_{\beta}(t', r/R) = \begin{cases} \frac{F_{\beta}(\xi_R, A) - F_{\beta}(\xi, A)}{A\xi_R} + \frac{r}{R} - 1, & r_0 < r \leq R; \\ \frac{F_{\beta}(\xi_R, A) + \beta}{A\xi_R} - 1, & 0 \leq r \leq r_0. \end{cases}$$

Интервал нормированного времени $t' \in [-1, 0)$ соответствует торможению ($\beta = -1$); интервал нормированного времени $t' \in (0, +1]$ соответствует разгону ($\beta = +1$), Состояние покоя вязкопластической среды (конец торможения или начало разгона) наступает для $t' = 0$.

4. Градиент давления. Градиенты давления для обеих серий $\beta = -1$ и $\beta = 1$ в зависимости от нормированного времени t' изображены на рис. 4.8. Отрицательному полуинтервалу времени t' соответствует серия $\beta = -1$, описывающая процесс торможения. Положительному полуинтервалу времени t' соответствует серия $\beta = 1$, описывающая процесс разгона. Зависимости градиента давления $\Pi_{\beta}(t', A)$ от нормированного времени t' при различных значениях параметра A представлены на рис. 4.8. При $1 \leq A < +\infty$ на всем интервале $t' \in [-1, +1]$ функция $\Pi_{\beta}(t', A)$ монотонно возрастает от значения $\Pi_{\beta}(-1, A)$ из интервала $1 < \Pi_{\beta}(-1, A) < 1,54$, до значения $\Pi_{\beta}(1, A) = +\infty$. При $0 < A \leq 1$ на всем интервале $t' \in [-1, +1]$ функция $\Pi_{\beta}(t', A)$ имеет три локальных экстремума (рис. 4.8). А именно, в точке $t' = -1$ — локальный минимум, в точке $t' = 0$ — локальный минимум или точка перегиба, а в точке $t' = t'_* \in [-1, 0]$ — локальный максимум. Для $A \approx 2/3$ два локальных минимума градиента давления

совпадают. При всех A в точке $t' = \pm 0$ имеется одинаковый скачок производной $\Pi_\beta(+0, A) - \Pi_\beta(-0, A) = 2$.

Рассмотрим указанные временные точки подробнее. Градиент давления в начальный момент торможения определяется из (4.2.8) предельным переходом при $t' \rightarrow -1$

$$\Pi_\beta(-1, A) = \sqrt{2a/\pi} \exp(a) K_1(a), \quad \beta = -1, \quad a = A^2/2,$$

$$\Pi_\beta(-1, A) = \begin{cases} \frac{2 + A^2 + \dots}{A\sqrt{\pi}}, & A \ll 1, \\ 1 + \frac{3}{(2A)^2} - \frac{15/2}{(2A)^4} + \dots, & A \gg 1. \end{cases}$$

Как функция параметра A он монотонно убывает от $+\infty$ при $A = 0$ до 1 при $A = +\infty$.

При фиксированных значениях параметров $A \leq 1$, $\beta = -1$ градиент $\Pi_\beta(t', A)$ как функция нормированного времени t' имеет локальный максимум p^* в точке $t' = t_* \in [-1, 0]$. Эти значения $t_*(A)$, зависящие от выбора A , найдены как решение следующего уравнения

$$\frac{K_1(a)I_1(ab) - I_1(a)K_1(ab)}{K_1(a)I_0(ab) + I_1(a)K_0(ab)} + \beta + \frac{1}{2ab} = 0, \quad a = \frac{A^2}{2}, \quad b = \frac{1}{1 - |t_*|}.$$

Из решения этого уравнения определится функция $t_*(A) \in (-1, 0)$. В частности, со значением градиента давления $p^* = 2$ точка $t_* = 0$, $A = 1$, $\beta = -1$ является решением (3.5). На интервале $0 < A \leq 1$, $\beta = -1$ аппроксимация указанной функции такова

$$t_*(A) = \frac{1}{4}A^2(5 - 10A + 9A^2) - 1.$$

При $\beta = +1$ действительные решения уравнения отсутствуют, так как в этом случае функция $\Pi_\beta(t', A)$ — монотонна.

5. Торможение (замедление) среды ($\beta = -1$). При отрицательном β на отрезке $t' \in [-1, 0]$ происходит торможение среды. Профили скорости V_β в различные моменты времени $t' = -1, -15/16, -3/4, -5/16, -0$ при значениях параметра $A = 0, 2, 0, 5, 1$ и 2 . показаны на рис. 4.9. В начальный момент времени $t' = -1$ профиль скорости имеет форму конуса. Образующая конуса связана с величиной градиента давления $\Pi_\beta(-1, A) > 1$

$$V_\beta(t', r/R, A) \Big|_{t' = -1} = [\Pi_\beta(-1, A) - 1] (1 - r/R).$$

Торможение заканчивается состоянием покоя при $t' = 0$ с пороговым значением $\Pi_\beta(0, A) = 2$.

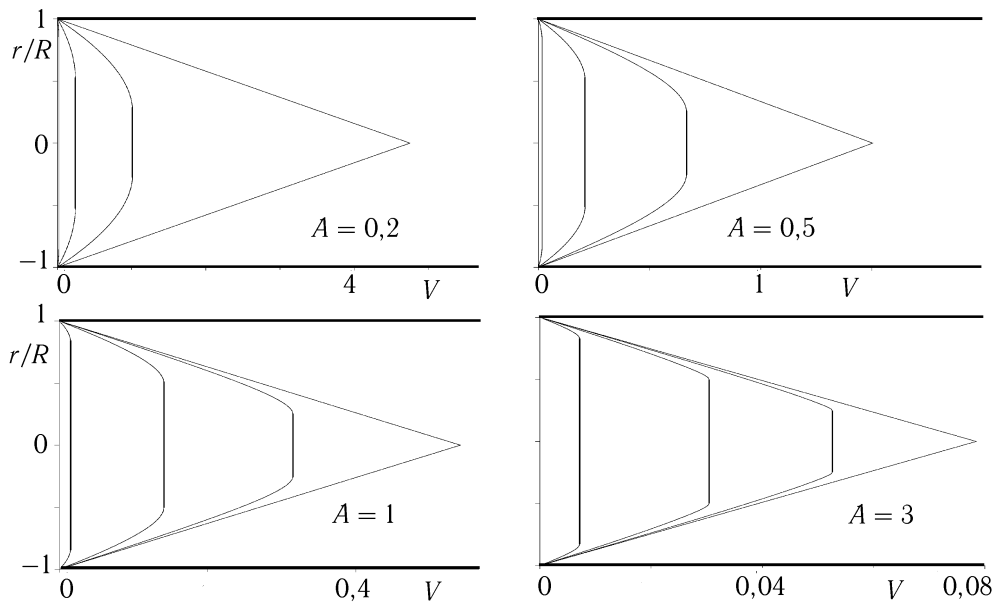


Рис. 4.9. Профили скорости V_β в моменты времени $t' = -1, -15/16, -3/4, -5/16, -0$ при значениях параметра $A = 0,2, 0,5, 1, 2$

6. Разгон (ускорение) среды ($\beta = +1$). Движение вязкопластической среды в круглой трубе начинается с величины градиента давления $\Pi_\beta(+0, A) = 2$. Далее, на отрезке времени $t' \in [0, 1]$ происходит монотонное неограниченное увеличение как градиента давления (см. рис. 4.8), так и скорости ядра $V_\beta(t', r_0/R, A) \geq 0$ для всех A . На рис. 4.10 представлены профили скорости при $A = 1$ в различные моменты времени.

7. Особенности осесимметричного точного решения. Описанные временные эволюции профиля скорости и градиента давления в задаче нестационарного течения вязкопластической среды в круглой трубе во многом аналогичны течениям между двумя параллельными пластинами. Однако, имеются и определенные различия.

На участке торможения потока в круглой трубе градиент давления в начальный момент времени $\Pi_\beta(-1, A)$ строго больше единицы, тогда как в течении между двумя параллельными пластинами градиент давления равен нулю. Разность $\Pi_\beta(-1, A) - 1 > 0$ определяет наклон образующей начального конического профиля скорости.

При $A \rightarrow +\infty$ профиль скорости течения между двумя параллельными пластинами имеет форму трапеции. В случае осесимметричного нестационарного течения в поперечном сечении круглой трубы форма профиля скорости в дефор-

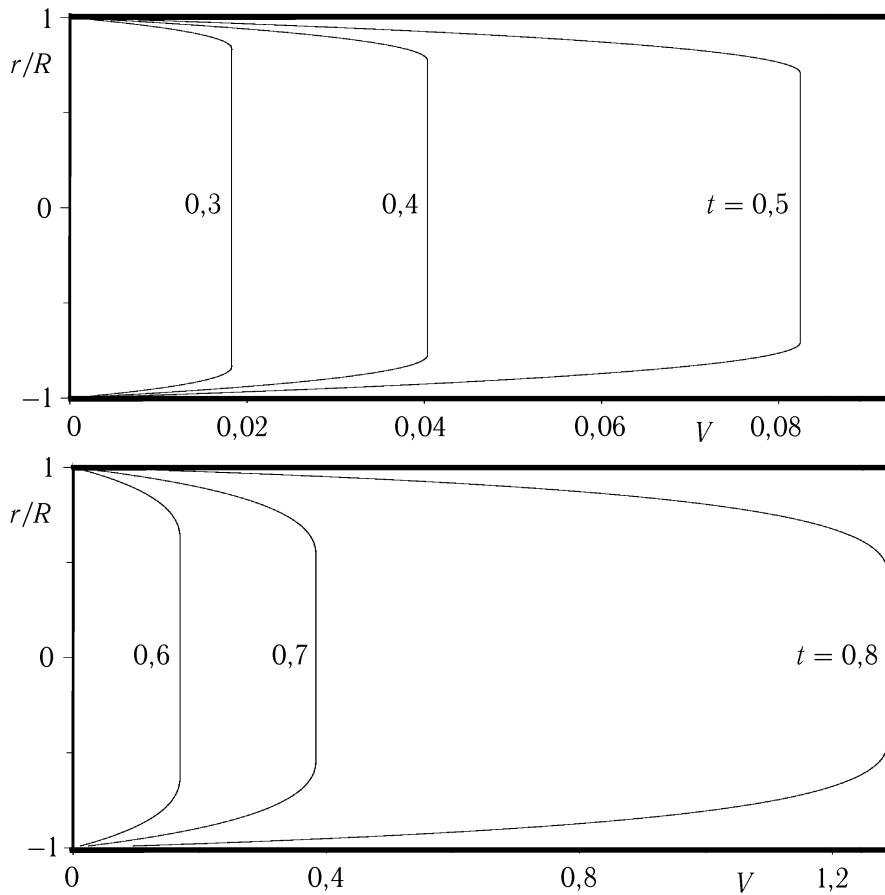


Рис. 4.10. Профили скорости V_β в моменты времени $t' = 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7$ и $0,8$ при значении параметра $A = 1$

мационной области — криволинейна при любом как угодно большом значении A (сравните профили скорости при $A = 3$ на рис. 4.3 и 4.9).

8. Функции Бесселя. При решении используются функции Бесселя от мнимого аргумента первого рода $I_0(x)$ и $I_1(x)$ и второго рода $K_0(x)$ и $K_1(x)$. При $|x| < 4$ они вычисляются с помощью следующих рядов

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2} \quad I_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)(k+1)!},$$

$$K_0(x) = -I_0(x) \ln(x/2) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(k+1)}{(k!)^2} (x/2)^{2k},$$

$$K_1(x) = I_1(x) \ln(x/2) - \frac{x}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(k+1) + \psi(k+2)}{(k!)(k+1)!} (x/2)^{2k} + \frac{1}{x},$$

$$\psi(n) = -C + \sum_{k=1}^{n-1} 1/k, \quad n = 2, 3, \dots, \quad \psi(1) = -C = -0.577216.$$

Для достижения относительной точности 10^{-6} при $|x| = 4$ в рядах нужно учесть 10 членов. При $x > 4$ эти функции вычисляются с помощью асимптотических рядов

$$z = 1/(8x), \quad a_n = (2n-1)^2/n, \quad b_n = ((2n-1)^2 - 4)/n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$I_0(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} (1 + za_1 + z^2 a_1 a_2 + z^3 a_1 a_2 a_3 + \dots),$$

$$I_1(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} (1 - zb_1 - z^2 b_1 b_2 - z^3 b_1 b_2 b_3 - \dots),$$

$$K_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} (1 - za_1 + z^2 a_1 a_2 - z^3 a_1 a_2 a_3 + \dots),$$

$$K_1(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} (1 + zb_1 - z^2 b_1 b_2 + z^3 b_1 b_2 b_3 - \dots).$$

Для достижения относительной точности 10^{-6} при $|x| = 4$ в рядах нужно учесть 7 членов.

Формулы для производных таковы

$$dI_0(x)/dx = I_1(x), \quad dI_1(x)/dx = I_0 - I_1/x,$$

$$dK_0(x)/dx = -K_1(x), \quad dK_1(x)/dx = -K_0 - K_1/x.$$

Правильность построения численных алгоритмов может быть проверена с помощью тождества

$$I_0(x)K_1(x) + I_1(x)K_0(x) = 1/x.$$

Глава 5

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

5.1. Течение в тонком деформирующемся слое

5.1.1. Криволинейные координаты в тонком слое

1. Базисные векторы и коэффициенты Лямэ. Рассмотрим плоскопараллельное течение вблизи твердой границы L . Кривая L задана параметрически $\vec{r}_0 = a(q_1)\vec{i} + b(q_1)\vec{j}$, где \vec{i}, \vec{j} — орты декартовой системы координат, \vec{r}_0 — радиус-вектор, q_1 — координата точки на кривой L равная текущему расстоянию по кривой от фиксированной точки O_1 рис. 5.1.

В окрестности кривой L каждой точке с радиус вектором \vec{r} можно поставить в соответствие пару чисел q_1, q_2 , определяемых из уравнения $\vec{r} = \vec{r}_0 + q_2\vec{e}_2$, где \vec{e}_2 — единичная нормаль к кривой L ; q_2 — расстояние до L ([50] Т.1, с. 34).

Единичные базисные векторы системы координат q_1, q_2 введем следующим образом

$$\vec{e}_1 = \frac{da}{dq_1}\vec{i} + \frac{db}{dq_1}\vec{j}, \quad \vec{e}_2 = -\frac{db}{dq_1}\vec{i} + \frac{da}{dq_1}\vec{j}.$$

С помощью формул для дифференциалов

$$d\vec{r}_0 = \vec{e}_1 dq_1, \quad d\vec{e}_2 = \frac{1}{R}\vec{e}_1 dq_1,$$

$$d\vec{r} = (1 + q_2/R)\vec{e}_1 dq_1 + \vec{e}_2 dq_2$$

найдем коэффициенты Лямэ $H_1 = 1 + q_2/R$ и $H_2 = 1$.

2. Общие соотношения в окрестности кривой L . Выпишем уравнения вязкопластического течения в этой системе координат, пользуясь уравнениями в разд. 2.2.2. При подстановке проведем упрощения с помощью следующих приближенных формул

$$\begin{aligned} dH_1/dt &\approx v_2/R, & \partial H_1/\partial q_1 &\approx 0, \\ \partial H_1/\partial q_2 &\approx 1/R, & H_1 &\approx 1. \end{aligned}$$

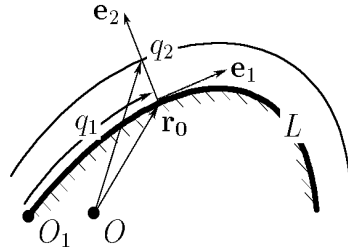


Рис. 5.1. Схема течения в тонком слое

После подстановки получим

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_1 = \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial q_2} + \frac{v_1 v_2}{R}.$$

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_2 = \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial q_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial q_2} - \frac{v_1^2}{R}.$$

$$v_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{R}, \quad v_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial q_1} + \frac{\partial v_1}{\partial q_2} - 2 \frac{v_1}{R} \right).$$

$$U = 2\sqrt{v_{11}^2 + v_{12}^2}, \quad s_{11} = 2(\mu + \tau_s/U)v_{11}, \quad s_{12} = 2(\mu + \tau_s/U)v_{12}.$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{\partial v_2}{\partial q_2} + \frac{v_2}{R} = 0.$$

$$(\operatorname{Div} \underset{\sim}{s})_1 = \frac{\partial s_{11}}{\partial q_1} + \frac{\partial s_{12}}{\partial q_2} + \frac{2s_{12}}{R}, \quad (\operatorname{Div} \underset{\sim}{s})_2 = \frac{\partial s_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial s_{11}}{\partial q_2} - \frac{s_{11}}{R}.$$

5.1.2. Вывод уравнений в приближении тонкого слоя

1. Постановка задачи. Рассматриваются вязкопластические течения установившиеся или близкие к установившимся, так что в ускорении частиц среды можно пренебречь слагаемыми $\partial v_i / \partial t$, $i = 1, 2$.

Течение среды со скоростью $v(t, q_1, q_2)$ происходит в слое, в котором поперечная координата q_2 меняется в пределах $0 \leq q_2 \leq h(t, q_1)$. Геометрическими характеристиками слоя являются: толщина слоя h , характерные масштабы изменения скорости в поперечном направлении $\delta < h$ и в продольном направлении l , а также радиус кривизны границы слоя R .

2. Малые параметры. Понятие тонкого слоя предполагает наличие следующих малых параметров

$$h/l \ll 1, \quad h/R \ll 1, \quad \partial h / \partial q_1 \ll 1, \quad \partial R / \partial q_1 \ll 1. \quad (5.1.1)$$

3. Оценки. Слагаемые, входящие в уравнение неразрывности, оцениваются по порядку величины так: v_1/l , v_2/δ , v_2/R . Отсюда определяем порядки величин компонент вектора скорости и тензора скоростей деформаций

$$v_1 \sim v, \quad v_2 \sim (\delta/l)v, \quad v_{12} = v/\delta, \quad v_{11} \sim v/l \sim v_{12} \delta/l \implies \\ \implies U = 2|v_{12}|(1 + O(\delta^2/l^2)),$$

и с точностью до малых порядка δ^2/l^2 находим компоненты девиатора напряжений

$$s_{12} = \mu \partial v_1 / \partial q_2 \pm \tau_s, \quad s_{11} \sim s_{12} \delta/l.$$

Первое уравнение движения упростится так:

$$\rho \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial q_2} \right) = -\frac{\partial p}{\partial q_1} + \frac{\partial s_{12}}{\partial q_2}.$$

В правой части слагаемые имеют одинаковый порядок. Поэтому изменение давления по переменной q_1 и его характерная величина оцениваются как

$$\partial p / \partial q_1 \sim s_{12} / \delta \Rightarrow p \sim s_{12} l / \delta.$$

Оценку изменения давления по переменной q_2 можно получить из второго уравнения движения

$$\partial p / \partial q_2 \sim (\text{Div } \underline{s})_2 \sim s_{12} / l \Rightarrow \Delta p \sim s_{12} \delta / l.$$

Таким образом, изменение давления в поперечном направлении слоя на два порядка меньше, чем характерна величина давления и можно считать, что $\partial p / \partial q_2 = 0$. Присоединяя к уравнениям движения уравнение неразрывности, получим систему уравнений вязкопластического течения в тонком слое

$$\begin{aligned} \rho \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial q_2} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial q_1} + \frac{\partial s_{12}}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial p}{\partial q_2} = 0, \\ \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{\partial v_2}{\partial q_2} &= 0, \\ \begin{cases} s_{12} = \mu \frac{\partial v_1}{\partial q_2} \pm \tau_s, & \left| \frac{\partial v_1}{\partial q_2} \right| > 0, \\ |s_{12}| \leq \tau_s, & \left| \frac{\partial v_1}{\partial q_2} \right| = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

В области $|\partial v_1 / \partial q_2| \neq 0$ уравнения по форме совпадают с уравнениями пограничного слоя Прандтля. Эти уравнения можно еще больше упростить, если пренебречь ускорением частиц жидкости. Перейдем к выводу условий такого приближения.

4. Уравнения Рейнольдса. Обычная оценка безынерционного приближения $\text{Re} = \rho V L / \mu \ll 1$, приведенная в разд. 2.3.2, здесь не пригодна, так как без анализа не ясно, что понимать под характерными длиной L и скоростью V . Кроме того, нужно учесть, что в слое постоянной толщины с однородными условиями на границе слоя частицы среды движутся равномерно без ускорения независимо от значения числа Рейнольдса. Поэтому в тонком слое нужно вывести свой критерий безынерционного приближения.

Определим число Рейнольдса Re_* как характерную величину отношения инерционной силы $\rho(dv/dt)_1$ к силе вязкого сопротивления $\partial s_{12} / \partial q_2$. Из приве-

денных оценок получим

$$\rho(dv/dt)_1 \sim \rho v \partial v / \partial q_1, \quad \partial s_{12} / \partial q_2 \sim \mu v / \delta^2 \Rightarrow$$

$$\text{Re}_* = \frac{\delta^2}{\nu} \left| \frac{\partial v}{\partial q_1} \right|.$$

Это число определяет критерий безынерционного приближения $\text{Re}_* \ll 1$. Уравнения (5.1.2) упрощаются. Они называются уравнениями Рейнольдса для вязкопластического течения в тонком слое

$$\begin{cases} \partial p / \partial q_1 = \partial s_{12} / \partial q_2, & \partial p / \partial q_2 = 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} s_{12} = \mu \frac{\partial v_1}{\partial q_2} \pm \tau_s, & \partial v_1 / \partial q_2 \neq 0, \\ |s_{12}| \leq \tau_s, & \partial v_1 / \partial q_2 = 0, \end{array} \right. \end{cases} \quad (5.1.3)$$

$$\partial v_1 / \partial q_1 + \partial v_2 / \partial q_2 = 0.$$

Уравнения этого приближения для вязкой жидкости были впервые опубликованы Рейнольдсом (Reynolds O. On the Theory of Lubrication. Phil. Trans., CLXXVII, 157 (1886)). Они являются основой гидродинамической теории смазки [25]. Уравнения Рейнольдса для вязкопластического течения справедливы, когда выполняются условия (5.1.1) и, кроме того, условие малости числа Рейнольдса. Выпишем все эти условия, при которых уравнения (5.1.3) справедливы

$$\begin{aligned} h/l \ll 1, \quad h/R \ll 1, \quad \partial h / \partial q_1 \ll 1, \\ \partial R / \partial q_1 \ll 1, \quad \text{Re}_* = \frac{\delta^2}{\nu} \left| \frac{\partial v}{\partial q_1} \right| \ll 1. \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

В число Рейнольдса входит толщина зоны пластического течения δ . В следующем пункте будет показано как оценить эту величину.

5. Толщина зоны пластического течения и число Рейнольдса. Первые два уравнения (5.1.3) вместе с законом Шведова-Бингама определяют продольную скорость $v_1(q_2)$ в сечении с координатой q_1 . Эти уравнения совпадают с уравнениями вязкопластического течения между двумя пластинами, рассмотренными в разд. 3.2.1. При одинаковых условиях на границе слоя и одинаковом расходе распределение скорости $v_1(q_2)$ совпадет с распределением скорости между двумя параллельными пластинами. При нулевой скорости на пластинах решение определяется по (3.2.2)–(3.2.5). С помощью (3.2.6) и (3.2.7) находится порядок толщины пластической зоны $\delta^2 = \min(h^2 a, h^2)$, где $a = \mu|Q|/(\tau_s h^2)$ и число Рейнольдса в тонком слое, на границах которого продольная скорость v_1 равна нулю

$$\text{Re}_* = \left| \frac{\partial v}{\partial q_1} \right| \min \left(\frac{\rho|Q|}{\tau_s}, \frac{h^2}{\nu} \right). \quad (5.1.5)$$

Покажем как вычисляется число Re_* и определяется условие применимости приближения Рейнольдса на двух примерах.

Пример 1. Выдавливание вязкопластической среды двумя параллельными пластинами. Пусть в плоскости $z = 0$ расположена неподвижная пластина. Вторая пластина, расположенная в плоскости $z = 2h(t)$, сближается с неподвижной пластиной со скоростью $-2\dot{h}$ и выдавливает находящуюся между ними вязкопластическую среду. Расстояние h между пластинами предполагается малым по сравнению с длиной пластин l .

Координаты q_1 и q_2 выбираем равными декартовым координатам, направленным параллельно пластине $q_1 = x$ и перпендикулярно $q_2 = z$. Начало координат поместим на ось симметрии течения. Тогда объемный расход выдавливаемой среды в сечении x равен изменению объема между пластинами $Q = -2\dot{h}x$; характерная скорость в слое $v = |\dot{h}|x/h$. Применяя формулу (5.1.5), найдем число Рейнольдса и условие применимости приближения Рейнольдса

$$Re_* = \frac{|\dot{h}|}{h} \min \left(\frac{\rho \dot{h} l}{\tau_s}, \frac{h^2}{\nu} \right) \ll 1. \quad (5.1.6)$$

Пример 2. Течение среды между эксцентрично вращающимися круговыми цилиндрами. Пусть внешний круговой цилиндр радиуса R_2 неподвижен, а внутренний радиуса R_1 вращается с угловой скоростью ω около своего центра O_1 , несовпадающего с центром O_2 внешнего цилиндра (рис. 6.1). При $(R_2 - R_1)/R_1 \ll 1$ толщина слоя h в зависимости от полярного угла ϕ меняется так

$$h = (R_2 - R_1)(1 - e \cos \phi), \quad e = O_1 O_2 / (R_2 - R_1).$$

В качестве координат тонкого слоя между цилиндрами выбираем $q_1 = R_1 \phi$, $q_2 = r$. Из уравнения сохранения расхода получим $\partial(hv)/\partial\phi = h\partial v/\partial\phi + v\partial h/\partial\phi = 0$. Отсюда получаем оценку $\partial v/\partial\phi \sim (v/h)\partial h/\partial\phi \sim ve$. Подставляя характерное значение скорости $v \sim \omega R_1$, получим $\partial v/\partial q_1 \sim \omega e$ и из формулы (5.1.5) найдем условие применимости приближения Рейнольдса

$$Re_* = \omega e \min \left(\frac{\rho \omega R_1 (R_2 - R_1)}{\tau_s}, \frac{(R_2 - R_1)^2}{\nu} \right) \ll 1.$$

5.1.3. Анализ уравнений вязкопластического течения в тонком слое

1. Квазидро в тонком слое. Профиль скорости v_1 тонкого слоя совпадает с точным решением соответствующей задачи вязкопластического течения между двумя пластинами. Поэтому может существовать зона, в которой $v_{12} = \partial v_1 / \partial q_2 = 0$. Эту зону назовем квазидром. Она соответствует области жесткой зоны точного решения.

С физической точки зрения квазиядро в тонком слое и ядро в точном решении отличаются. В квазиядре тонкого слоя скорости деформаций v_{11} и v_{22} отличны от нуля. Поэтому квазиядро жесткой зоной не является. Можно лишь констатировать, что в квазиядре величины v_{11} и v_{12} являются малыми порядка δ/l по отношению к этим величинам в пластической зоне. Уравнения Рейнольдса позволяют с точностью до малых δ/l вычислить поле скорости. Определить же границы области физического ядра в этом приближении нельзя. Нельзя ответить также на вопрос, существует или не существует жесткая зона в точной постановке рассматриваемой задачи.

2. Теоремы существования и единственности. Система уравнений (5.1.3) расщепляется на две независимые задачи. Первая задача определения компоненты $v_1(q_1, q_2)$ сводится к решению всех уравнений системы, исключая последнее. Если на границах тонкого слоя $q_2 = 0$ и $q_2 = h$ условия для скорости v_1 будут совпадать с условиями задачи течения между двумя пластинами (см. разд. 3.2.1), то обе задачи в точности совпадут. Доказанная теорема существования и единственности задачи течения между двумя параллельными пластинами распространяется и на задачу для компоненты v_1 в тонком слое. Соответственно и найденные решения задачи течения между двумя параллельными пластинами можно отнести к задаче течения в тонком слое. После того, как будет вычислена компонента v_1 , вторая компонента скорости v_2 в тонком слое определяется из последнего уравнения системы (5.1.3) (уравнение неразрывности). Покажем, как получить полное решение задачи течения в тонком слое при нулевых условиях компоненты скорости.

3. Метод построения решения в тонком слое. Рассмотрим вязкопластическое течение в тонком слое $a \leq q_1 \leq b$, $0 \leq q_2 \leq 2h(t)$, толщина которого изменяется со временем по заданному закону $h(t, q_1)$. На границах слоя для поперечной компоненты v_2 выполняются условия непротекания среды через границу, а для продольной компоненты $v_1(t, q_1, q_2)$ задаются условия

$$v_1(t, q_1, 0) = u_1, \quad v_1(t, q_1, h) = u_2.$$

На одной из границ $q_1 = a$ или $q_1 = b$ обычно задается расход или давление. Требуется найти компоненты скорости частиц среды в этом слое $v_1(t, q_1, q_2)$ и $v_2(t, q_1, q_2)$.

Решение уравнений Рейнольдса с выписанными условиями на границе можно построить следующим образом [64]. Из уравнения неразрывности

$$2\partial h/\partial t + \partial Q/\partial q_2 = 0$$

и условия при $q_1 = a$ или $q_1 = b$ найдем расход $Q(t, q_1)$ среды через сечение q_1 . Таким образом, решение задачи о вязкопластическом течении в тонком слое

свелось к решению задачи течения между двумя пластинами, находящимися на расстоянии $2h$, с заданным расходом Q , уже построенному (см. (3.2.5)).

4. Решение уравнений Рейнольдса при нулевой продольной скорости на границе слоя. Скорость течения вязкопластической среды между двумя пластинами, находящимися на расстоянии $2h$ с заданным расходом Q и нулевыми значениями скорости на границе, описывается формулой (3.2.5). Она и определяет компоненту $v_1(t, q_1, q_2)$

$$v_1(t, q_1, q_2) = (Q(t, q_1)/h(t, q_1))U(q_2/h, a),$$

$$U(Z, a) = \frac{1}{2a(1 - Z_1(a))} \begin{cases} Z(2Z_1 - Z), & 0 \leq Z \leq Z_1, \\ Z_1^2, & Z_1 \leq Z \leq 1, \end{cases} \quad (5.1.7)$$

где функция $Z_1(a)$ представляется рядами (3.2.6) и (3.2.7). Вторая компонента скорости v_2 находится из уравнения неразрывности.

Удобнее пользоваться функцией тока Ψ (см. разд. 2.5.1)

$$\Psi(t, q_1, q_2) = \int_0^{q_2} v_1 dq_2 = Q \int_0^Z U(Z, a) dZ, \quad a = \frac{\mu|Q|}{\tau_s h^2},$$

$$\Psi = \frac{Q}{2a(1 - Z_1(a))} \begin{cases} Z^2 Z_1(a) - Z^3/3, & 0 \leq Z \leq Z_1, \\ Z Z_1(a)^2 - Z_1(a)^3/3, & Z_1 \leq Z \leq 1. \end{cases} \quad (5.1.8)$$

Через нее находят компоненты скорости $v_1 = \partial\Psi/\partial q_2$, $v_2 = -\partial\Psi/\partial q_1$. Наконец, с помощью формулы (3.2.3) для градиента давления

$$\frac{\partial p}{\partial q_1} = -\frac{\tau_s}{h} \frac{1}{1 - Z_1(a)} \text{sign} Q. \quad (5.1.9)$$

можно вычислить давление в вязкопластической среде. Этот способ построения решения можно применить к средам с более сложной реологией. Ниже приведены примеры, в которых изложенный подход применяется для проведения конкретных расчетов.

5.1.4. Вытеснение среды двумя параллельными пластинами

Рассмотрим, следуя работе [60], задачу вытеснения вязкопластической среды двумя параллельными пластинами в приближении тонкого слоя (при малом отношении расстояния между пластинами к длине пластин). Основное внимание уделим вычислению силы F , действующей на единицу ширины пластины. Приведем известные решения этой задачи в следующих частных случаях.

Случай 1) Сила, действующая на пластины, при вытеснении вязкой жидкости равна $F = F_0 = -2(l/h)^3 \mu \dot{h}$. Аналогичный результат для осесимметричной задачи получен Рейнольдсом (O. Reynolds, 1886) (см. разд. 5.1.5)

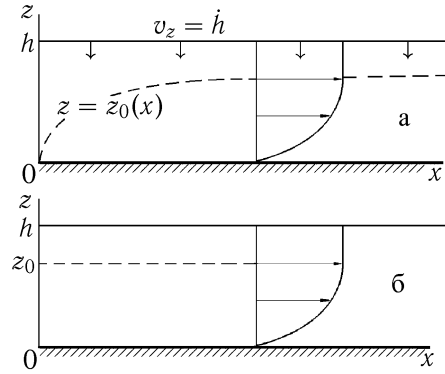


Рис. 5.2. Профили скорости: а — между двумя неподвижными параллельными пластинами; б — между двумя сближающимися пластинами

Случай 2). Сила, действующая на пластины, при вытеснении пластической среды $F = F_\infty = -(\tau_s l^2/h) \text{sign } \dot{h}$. Точные выражения для напряжений в задаче о вытеснении чисто пластической среды получены Прандтлем (L. Prandtl, 1923) [89]).

3) Сила, действующая на пластины, при вытеснении вязкопластической среды при малом коэффициенте вязкости равна $F = F_\infty \left(1 + \frac{4}{5} \sqrt{\frac{2l\mu|\dot{h}|}{\tau_s h^2}} \right)$ и была определена В.П. Мясниковым 1963 [53]. (Здесь $2h$ — расстояние между пластинами $2\dot{h}$ скорость изменения расстояния между пластинами, $2l$ — длина пластин).

Решение Мясникова отличается от решения Прандтля наличием тонкого пристеночного пограничного слоя, в котором деформации отличны от нуля. Ниже дается решение, построенное в работе [60], задачи вытеснения вязкопластической среды при любых соотношениях между коэффициентами μ и τ_s .

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о течении несжимаемой вязкопластической среды между двумя параллельными пластинами, которые сближаются (расходятся) в направлении, перпендикулярном плоскости пластин (рис. 5.2, а). Будем считать выполненными условия

$$h/l \ll 1, \quad \text{Re}_* = \frac{|\dot{h}|}{h} \min \left(\frac{\rho \dot{h} l}{\tau_s}, \frac{h^2}{\nu} \right) \ll 1,$$

при которых справедливо приближение Рейнольдса тонкого слоя (5.1.3).

Примем условия прилипания на границах пластин. Тогда получим краевую задачу для уравнений Рейнольдса с нулевыми условиями на границе.

2. Решение краевой задачи. Координаты слоя введем так $q_1 = x$, $q_2 = z$. Тогда функция тока и поле скорости поставленной выше задачи имеют решение (5.1.8) и (5.1.9). В них нужно подставить выражения для расхода и параметра a

$$Q = -2\dot{h}x, \quad (5.1.10)$$

$$a = \left| \frac{Q\mu}{\tau_s h^2} \right|,$$

где расход Q равен скорости изменения объема между пластинами.

Таким образом, получено решение задачи о течении вязкопластической среды между двумя пластинами при их сближении или удалении. Течение в произвольном сечении полностью определяется единственным безразмерным параметром a , который по своему смыслу является местным обратным числом Сен-Венана. При сближении пластин течение в сечении с параметром подобия a будет подобно течению между двумя неподвижными параллельными пластинами с расходом, соответствующим тому же значению a . На рис. 5.2,а показан профиль компоненты скорости v_x вязкопластического течения между сближающимися пластинами в сечении, в котором местное число Сен-Венана равно a . Профиль скорости в точности совпадает с профилем скорости вязкопластического течения между двумя неподвижными параллельными пластинами со значением расхода, который согласно (5.1.10) равен $Q = a\tau_s h^2/\mu$ (рис. 5.2 б). Пунктиром изображена граница квазира. На рис. 5.2, б она не меняется, а на рис. 5.2, а зависит от координаты x .

Точное выражение Прандтля для распределения напряжений в задаче о вытеснении чисто пластической среды таково $p = p_0 - \tau_s(x/h + 2\sqrt{1 - (z-h)^2/h^2})$, $s_{xz} = \tau_s(z-h)/h$.

Полагая в решении (5.1.9) $Z_1 = 0$, найдем давление $p = p_0 - \tau_s x/h$. Оно отличается от точного на малую величину порядка $h/x \ll 1$. Сдвиговое напряжение s_{xz} в приближении Рейнольдса совпадает с точным.

Представленное решение для напряжений и для скоростей справедливо в тонком слое при $h/x \ll 1$ во всем диапазоне чисел Сен-Венана.

3. Сила. Силу, действующую на единицу ширины пластины, можно вычислить, интегрируя давление по его поверхности и преобразуя соответствующий интеграл по частям

$$F = 2 \int_0^l (p - p_l) dx = -2 \int_0^l x \frac{\partial p}{\partial x} dx.$$

Градиент давления определяем по (5.1.9)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\tau_s}{h} \frac{1}{1 - Z_1(a)} \text{sign} \dot{h}. \quad (5.1.11)$$

Согласно (5.1.10) $dx = |\tau_s h^2 / (2\mu \dot{h})| da$, откуда имеем

$$F = -\text{sign} \dot{h} \frac{\tau_s l^2}{h} \frac{2f(a_l)}{a_l^2} = F_0 \frac{2f(a_l)}{a_l^3} = F_\infty \frac{2f(a_l)}{a_l^2}, \quad (5.1.12)$$

$$F_0 = -2 \left(\frac{l}{h} \right)^3 \mu \dot{h}, \quad F_\infty = -\frac{\tau_s l^2}{h} \text{sign} \dot{h},$$

$$f(a) = \int_0^a \frac{ada}{1 - Z_1(a)}, \quad a_l = \frac{2\mu |\dot{h}| l}{\tau_s h^2} = \frac{F_0}{F_\infty}, \quad (5.1.13)$$

где p_l — давление на границе пластины при $x = l$, a_l — обратное число Сен-Венана; F_0 и F_∞ соответственно силы для случаев чисто вязкой ($\tau_s = 0$, $a_l = \infty$) и чисто пластической ($\mu = 0$, $a_l = 0$) сред.

Подставляя второй ряд (3.2.6) или второе разложение (3.2.7) в интеграл (5.1.13), найдем

$$f(a) = \frac{1}{2}a^3 + \frac{3}{4}a^2 - \frac{2}{9}\ln(a+1) + \alpha + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{3m(a+1)^{3m}} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{(3m+1)(a+1)^{3m+1}}, \quad (5.1.14)$$

$$\alpha = \frac{2}{9} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{3m(3m+1)} = 0,21546,$$

$$f(a) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{5}a^{5/2} + \frac{2}{9}a^3 + \frac{5}{63}a^{7/2} + \frac{1}{4 \cdot 27}a^4 + \dots, \quad a < 1. \quad (5.1.15)$$

Ряд (5.1.14) сходится для всех $a \geq 0$. Для $a < 1$ удобнее пользоваться разложением (5.1.15).

Из полученного результата следует, что сила определяется единственным параметром подобия a_l . При больших числах Сен-Венана ($a_l \ll 1$) из (5.1.12), (5.1.13) и (5.1.15) получим асимптотическое разложение, найденное ранее [53]

$$F = F_\infty \left(1 + \frac{4}{5} \sqrt{\frac{2l\mu |\dot{h}|}{\tau_s h^2}} \right).$$

4. Движение пластин под действием постоянной силы. При заданной постоянной силе F выражения (5.1.12), (5.1.13) превращаются в дифференци-

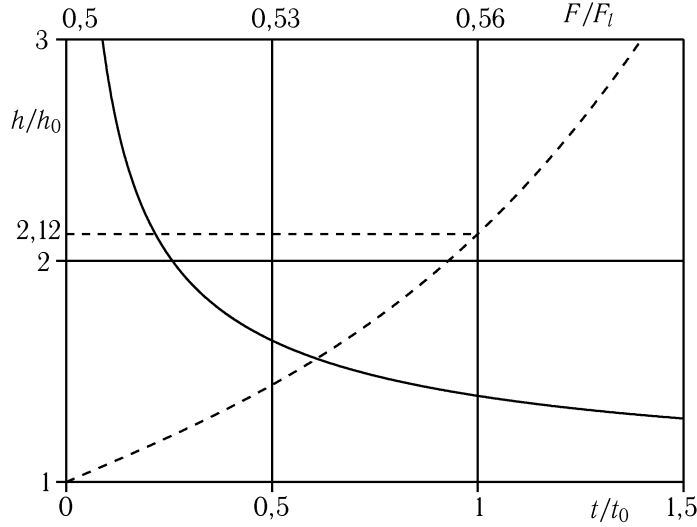


Рис. 5.3. Движение пластин под действием постоянной силы

альное уравнение относительно $h(t)$. Действительно, выражение (5.1.12) можно привести к виду

$$\frac{h}{h_0} = \frac{2f(a_l)}{a_l^2}, \quad h_0 = \frac{\tau_s l^2}{|F|}. \quad (5.1.16)$$

В силу неравенства $2f(a_l)/a_l^2 > 1$ заключаем, что $h > h_0$, т. е. h_0 — наименьшее расстояние, на которое могут сблизиться пластины под действием силы F . Переменную a_l , исходя из ее определения (5.1.13), можно представить через производную по времени следующим образом:

$$a_l = \left| \frac{d}{dt} \left(\frac{h_0 t_0}{h} \right) \right|, \quad h_0 t_0 = \frac{\mu l}{\tau_s}, \quad t_0 = \frac{\mu |F|}{\tau_s^2 l}, \quad h_0 = \frac{\tau_s l^2}{F}. \quad (5.1.17)$$

Тогда, подставляя (5.1.17) в соотношение (5.1.16), получим дифференциальное уравнение для безразмерной функции h_0/h от безразмерного времени t/t_0 . Можно убедиться проверкой, что решение этого уравнения представимо в следующем параметрическом виде:

$$\frac{h_0}{h} = \Phi(a_l), \quad \frac{t}{t_0} = \text{sign } \dot{h} \int_{a_l}^{\infty} \frac{\Phi'(a) da}{a} \quad \left(\Phi(a) = \frac{a^2}{2f(a)} \right) \quad (5.1.18)$$

Можно получить асимптотические разложения при достаточно малых a :

$$\Phi(a) = 1 - \frac{4}{5}a^{1/2} + \frac{44}{225}a + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n a^{1+n/2},$$

$$\frac{t}{t_0} = \frac{4}{5}a^{-1/2} + \frac{44}{225} \ln a + b + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} + 1 \right) \Phi_n a^{n/2},$$

$$b = -\frac{91}{225} - \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n a^{-1+n/2} \right) da - \int_1^{\infty} \frac{\Phi(a)}{a^2} da = -0,7328.$$

Укажем значения первых семи коэффициентов Φ_n , входящих в разложения (5.1.19): 0,0404; -0,0107; -0,0112; -0,0013; 0,0027; 0,0014; -0,0003.

При $a < 1,4$ с погрешностью менее 1% функцию $t(a)$ можно вычислять по формуле (5.1.19). При $a \geq 2$ вычисления с той же погрешностью можно проводить по асимптотической формуле $t/t_0 = a/(2f(a)) + 4/\ln(1 + 3/(2a)) - 2/(3a)$.

Таким образом, установлено, что движение пластин при любых значениях силы, коэффициента вязкости, предельного напряжения сдвига и геометрических характеристик определяется одной универсальной зависимостью h/h_0 от t/t_0 . Вид этой зависимости изображен на рис. 5.3 сплошной линией.

5. Условие безотрывного разведения пластин. Разведение пластин под действием постоянной силы происходит по той же траектории $h(t)$, что сближение, но в обратном направлении. Однако на некоторых участках траектории в силу понижения давления до нуля на поверхности пластин может образоваться каверна (отрыв течения). С помощью (5.1.11) и (5.1.10) условие безотрывного движения можно записать так:

$$p(0) = p_l - \int_0^l \frac{\tau_s}{h} \frac{dx}{1 - Z_1} = p_l - \frac{\tau_s l}{h a_l} P(a_l) > 0,$$

$$P(a_l) = \int_0^{a_l} \frac{da}{1 - Z_1(a)}$$

(использована замена $dx = l da/a_l$).

Подставляя в приведенное неравенство вместо h закон движения (5.1.16), получим условие безотрывного разведения пластин

$$G(a_l) = \frac{a_l}{f(a_l)} P(a_l) \leq \frac{F_l}{F}, \quad F_l = 2lp_l.$$

Подставляя в интеграл (5.1.20) второй ряд (3.2.6) или второе разложение (3.2.7), получим

$$P(a) = \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{2}a - \beta + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{(3m+1)(a+1)^{3m+1}},$$

$$\beta = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{3m+1} = 0,2496,$$

$$P(a) = a + \frac{2}{3}a^{3/2} + \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{9}a^{5/2} + \frac{1}{81}a^3 + \dots \quad (a < 1). \quad (5.1.23)$$

Полученные разложения (5.1.22) и (5.1.23) для $P(a)$ и разложения (5.1.14) и (5.1.15) для $f(a)$ дают исчерпывающую информацию относительно функции $G(a)$. При изменении аргумента $0 \leq a < \infty$ функция $G(a)$ монотонно убывает от значения $G(0) = 2$ до значения $G(\infty) = 3/2$.

Отсюда следует, что при $F \leq F_l/2$ разведение пластин будет всегда безотрывным. При $F \geq 2F_l/3$, наоборот, произвести разведение безотрывно невозможно. В промежуточном случае $F_l/2 \leq F \leq 2F_l/3$ разведение пластин будет безотрывным при $h \geq h_*$. Критическое значение h_* определяется из совместного решения уравнения (5.1.16) и уравнения, вытекающего из (5.1.20), т. е.

$$h_*/h_0 = 2f(a_l)/a_l^2, \quad G(a_l) = F/F_l.$$

На рис. 5.3 штриховой линией изображена зависимость h_*/h_0 от F/F_l . Переменная F/F_l отложена на верхней горизонтали, а переменная h_*/h_0 — на вертикальной оси слева. С помощью графика 5.3 при заданном отношении F/F_l в диапазоне $F/F_l \in (1/2, 2/3)$ можно вычислить значения h , при которых разведение пластин будет безотрывным. Например, при $F/F_l = 0,56$ разведение пластин будет безотрывным при расстоянии $h > h_* = 2,12h_0$.

Предельный случай вязкой жидкости. Из уравнений Рейнольдса для вязкой жидкости находим давление $p = 6(x^2 - l^2)\mu\dot{h}/h^3 + p_l$ и вычисляем силу, действующую со стороны жидкости на пластину $F = 8l^3\mu\dot{h}/h^3$. Давление внутри жидкости положительно при $p(0) = p_l - 6l^2\mu\dot{h}/h^3 > 0$. Отсюда найдем условие $F/F_l < 2/3$ безотрывного разведения пластин. При $F/F_l > 2/3$ разведение пластин сопровождается отрывом.

Сопоставление вязкого и вязкопластического течений показывает, что для вязкого течения отсутствует переходная область $F/F_l \in (1/2, 2/3)$. Однако для вязкопластического течения $h_0 \rightarrow 0$ и $h_* \rightarrow 0$ при $\tau_s \rightarrow 0$, поэтому в пределе $\tau_s \rightarrow 0$ в переходной области условие безотрывного разведения пластин $h > h_*$ выполняется при любом зазоре, что в точности соответствует вязкому течению.

5.1.5. Вытеснение среды двумя параллельными дисками

Задача о течении вязкопластической среды, между двумя круглыми параллельными пластинами при их соосном поступательном движении относительно друг друга решается аналогично рассмотренной выше.

1. Постановка задачи. Рассмотрим осесимметричное движение вязкопластической среды в тонком слое между параллельными круглыми дисками $r \leq R$,

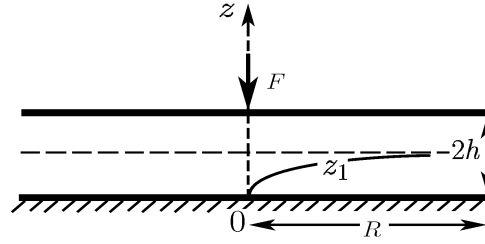


Рис. 5.4. Схема течения между двумя дисками

$0 \leq z \leq 2h(t)$, где R — радиус дисков, $2h$ — расстояние между дисками (рис. 5.4). Диск $z = 0$ неподвижен, а другой $z = 2h$ приближается к нему со скоростью $2dh/dt = 2\dot{h}$. На дисках принимаются условия непротекания и прилипания. Нужно определить компоненты скорости v_r, v_z и давление.

2. Решение краевой задачи. При условии (5.1.6) $Re_* \ll 1$ можно пользоваться уравнениями Рейнольдса (5.1.3) с той лишь разницей, что уравнение неразрывности плоскопараллельного течения нужно заменить на уравнение осесимметричного поля скорости

$$\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial(rv_z)}{\partial z} = 0.$$

Функция тока осесимметричного движения вводится так

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (5.1.24)$$

Компонента скорости v_r совпадает с найденной компонентой v_1 (5.1.7) для тонкого слоя с соответствующим значением функции расхода $Q(t, r)$, которую легко найти из уравнения сохранения массы $2\pi r Q = -\pi r^2 2\dot{h}$. Таким образом, применяя формулы для функции тока (5.1.8) и давления (5.1.9), получим

$$\Psi = -\frac{r^2 \dot{h}}{2a(1 - Z_1(a))} \begin{cases} Z^2 Z_1(a) - Z^3/3, & 0 \leq Z \leq Z_1, \\ ZZ_1(a)^2 - Z_1(a)^3/3, & Z_1 \leq Z \leq 1, \end{cases} \quad (5.1.25)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\tau_s}{h} \frac{1}{1 - Z_1(a)} \text{sign} \dot{h}, \quad a = \frac{\mu |\dot{h}|}{\tau_s h^2} r, \quad Z = \frac{z}{h},$$

где функция $Z_1(a)$ вычисляется с помощью рядов (3.2.6) и (3.2.7).

Формулы (5.1.24) и (5.1.25) позволяют вычислить все кинематические и динамические характеристики вязкопластического течения.

3. Давление и касательное напряжение. Давление и касательное напряжение с помощью (5.1.25) можно выразить через параметр a и безразмерную

координату $Z = z/h$.

$$\frac{p - p_0}{\tau_s \operatorname{sign} \dot{h}} = P(a) = \int_0^a \frac{da}{1 - Z_1(a)} = \frac{Z_1^2 (1 - 2/3Z_1)}{(1 - Z_1)^2}, \quad (5.1.26)$$

$$\frac{\tau_{rz}}{\tau_s} = -\operatorname{sign} \dot{h} \frac{1 - Z}{1 - Z_1(a)}.$$

где p_0 — давление при $r = 0$. Ряды для функция $P(a)$ были приведены ранее в (5.1.22) и (5.1.23).

4. Сила. Рассмотрим две задачи динамики. Первая состоит в определении силы F , под действием которой пластины движутся по заданному закону $h(t)$ (см. рис. 5.4). Вторая обратная задача состоит в нахождении закона движения пластин под действием заданной силы F . Перейдем к решению первой задачи.

Интегрируя давление по внутренней поверхности за вычетом постоянного внешнего давления p_R на внешней поверхности диска и преобразуя соответствующий интеграл по частям, получим

$$F = 2\pi \int_0^R (p - p_R) r dr = -2\pi \int_0^R \frac{r^2}{2} \frac{\partial p}{\partial r} dr,$$

$$F = -\operatorname{sign} \dot{h} \pi \frac{\tau_s}{h} \int_0^R \frac{r^2 dr}{1 - Z_1(a)}, \quad \dot{h} \neq 0. \quad (5.1.27)$$

Обозначим через F_0 и F_∞ соответственно силы для случаев чисто вязкой ($\tau_s = 0$) и чисто пластической ($\mu = 0$) сред

$$F_0 = -\frac{3\pi R^4 \mu \dot{h}}{8h^3}, \quad F_\infty = -\operatorname{sign} \dot{h} \frac{\pi \tau_s R^3}{3h}. \quad (5.1.28)$$

Перейдем в интеграле от переменной r к переменной a с помощью линейного соотношения $r = (R/a_R)a$. Тогда из (5.1.27) и (5.1.28) следует

$$\frac{F}{F_0} = \frac{8 \hat{f}(a_R)}{3 a_R^4}, \quad \frac{F}{F_\infty} = \frac{3 \hat{f}(a_R)}{a_R^3}, \quad (5.1.29)$$

$$a_R = \frac{\mu R |\dot{h}|}{\tau_s h^2}, \quad \hat{f}(a_R) = \int_0^{a_R} \frac{a^2 da}{1 - Z_1(a)}. \quad (5.1.30)$$

Подынтегральную функцию можно представить сходящимся по обратным степеням $1/(1+a)$ рядом. Для этого подставим $a^2 = (a+1)^2 - 2(a+1) + 1$ и ряд (3.2.6) функции $1/(1 - Z_1(a))$. Тогда под интегралом получим степенной ряд

$$\frac{a^2}{1 - Z_1(a)} = \frac{3}{2}(a+1)^3 - 3(a+1)^2 + \frac{3}{2}(a+1) -$$

$$- \sum_{m=0}^{\infty} b_m \left[\frac{1}{(a+1)^{3m}} - \frac{2}{(a+1)^{3m+1}} + \frac{1}{(a+1)^{3m+2}} \right].$$

Интегрируя его в пределах от 0 до a , получим ряд для функции $f_1(a)$. Первые члены разложений этой функции приведены в [22]

$$\begin{aligned} f_1(a_R) &= \\ &= \begin{cases} (1/3)a_R^3 + (2/7)a_R^{(7/2)} + (1/6)a_R^4 + (5/81)a_R^{(9/2)} + \dots, & a_R \ll 1, \\ (3/8)a_R^4 + (1/2)a_R^3 + \dots, & a_R \gg 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.1.31)$$

Верхняя и нижняя асимптотики (5.1.31) приближают функцию $f(a_R)$ с погрешностью, не превышающей 1% в областях $a_R \leq 2$ и $a_R \geq 2$ соответственно. Формулы (5.1.27)–(5.1.31) дают полное решение первой задачи об определении силы, действующей на диск при заданном законе его движения.

Ввиду неравенства $z_0 > 0$ из (5.1.27) следует, что $|F| > |F_\infty|$. Таким образом, среда между дисками можно привести в движение при условии $|F| > |F_\infty|$. При меньшем абсолютном значении силы F диски и среда между ними будут находиться в состоянии покоя.

Из неравенства $|F| > |F_\infty|$ и (5.1.28) можно сделать второй важный вывод. Существует минимальное расстояние h_{min} сближения дисков под действием постоянной силы F

$$h_{min} = \pi\tau_s R^3 / (3F). \quad (5.1.32)$$

Предельный случай $a_R \ll 1$, когда основную роль играет область пластического течения, для силы из (5.1.28) – (5.1.31) получим

$$F = -\frac{\text{sign } \dot{h}}{h} \left(\frac{\pi\tau_s R^3}{3} + \frac{2\pi}{7h} \sqrt{\mu\tau_s R^7 |\dot{h}|} + \dots \right). \quad (5.1.33)$$

Параметр подобия a_R можно представить аналогично (5.1.17)

$$a_R = \left| \frac{d}{dt} \left(\frac{t_0 h_{min}}{h} \right) \right|, \quad h_{min} t_0 = \frac{\mu R}{\tau_s}, \quad t_0 = \frac{3}{\pi} \frac{\mu |F|}{\tau_s^2 R^2}. \quad (5.1.34)$$

5. Движение дисков под действием постоянной силы. Закон движения получается из решения уравнения, которое вытекает из (5.1.28), (5.1.29) и (5.1.34). Решение уравнения можно представить в параметрическом виде

$$\frac{h_{min}}{h} = \Phi_1(a_R), \quad \frac{t}{t_0} = -\int_{a_R}^{\infty} \frac{\Phi_1'(a) da}{a}, \quad \Phi_1(a) = \frac{a^3}{3f_1(a)}. \quad (5.1.35)$$

При помощи (5.1.31) можно получить следующие асимптотические разложения зависимостей (5.1.35)

$$a \gg 1: \begin{cases} h/h_{min} = (3/2)(1 + (3/4)a) + \dots, \\ \bar{t} = -\frac{1}{2} \left(\ln \left(1 - \frac{1}{1 + (3/4)a} \right) + \frac{1}{1 + (3/4)a} \right) + \dots; \end{cases} \quad (5.1.36)$$

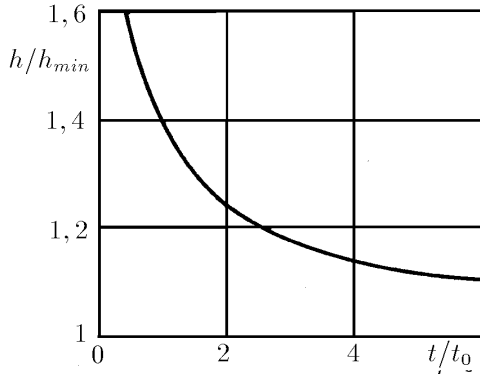
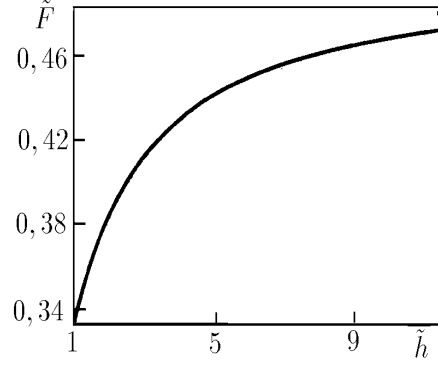


Рис. 5.5. Закон движения дисков под действием постоянной силы

Рис. 5.6. Зависимость \tilde{F} от \tilde{h}

$$a \ll 1: \begin{cases} h/h_{min} = 1 + (6/7)\sqrt{a} + (1/2)a + \dots, \\ \tilde{t} = (6/7)\sqrt{a} + (23/98)\ln a - 0,78. \end{cases} \quad (5.1.37)$$

После исключения параметра a из (5.1.36) и (5.1.37) получим асимптотический закон изменения h/h_{min} от безразмерного времени \tilde{t} . На рис. 5.5 представлена зависимость безразмерного расстояния h/h_{min} от безразмерного времени t/t_0 . При малом времени величина $h/h_{min} - 1$ изменяется обратно пропорционально квадратному корню из времени, а при большом — обратно пропорционально времени.

6. Условие безотрывного удаления дисков. Удаление дисков под действием силы растяжения происходит по той же кривой $h(t)$, что и сжатие, но в обратном направлении.

При $\dot{h} \gg 0$ давление достигает в центре своего минимального значения, которое можно вычислить с помощью (5.1.26).

При $p_0 = p_R - \tau_s (R/h)P(a_R)/a_R < 0$ в окрестности центра диска образуется каверна. Рассуждая точно также как и в случае дисков, придем к следующему условию безотрывного разведения дисков:

$$G_1(a_R) = \frac{a_R^2 P(a_R)}{\tilde{h}(a_R)} \leq \frac{F_R}{F}, \quad F_R = \pi R^2 p_R. \quad (5.1.38)$$

Проведенный анализ полученного соотношения (5.1.38) показывает следующее. Если $F \leq F_R/3$, то удаление дисков под действием силы F будет безотрывным во время всего процесса. При $F > F_R/2$, процесс безотрывного удаления дисков невозможен.

В промежутке $F_R/3 \leq F \leq F_R/2$ удаление будет безотрывным при $h > h_*$, где критическое расстояние h_* определяется из условия (5.1.38). На рис. 5.6

представлена зависимость $\bar{F} = F/F_R$ от $\bar{h} = h_*/h_{min}$, в параметрическом виде

$$\bar{F} = \frac{\bar{f}(a_R)}{a_R^2 P(a_R)}, \quad \bar{h} = \frac{3\bar{f}(a_R)}{a_R^3}$$

Предельный случай вязкой жидкости. Для дисков решение находится по аналогии с решением для пластин. В результате получим, что при условии $F/F_R < 1/2$ разведение пластин будет безотрывным, а при $F/F_R > 1/2$ разведение пластин сопровождается отрывом. Таким образом, для раздвижения дисков в вязкой жидкости также как и для пластин отсутствует переходная область $F/F_R \in (1/3, 1/2)$. К этому условию можно придти, если в полученном для вязкопластического течения решении перейти к пределу $\tau_s \rightarrow 0$ аналогично случаю пластин.

5.2. Развитие течения вязкопластической среды между двумя параллельными пластинами

В разд. 4.2 приведены многопараметрические серии точных нестационарных вязкопластических течений между двумя параллельными пластинами. Однако они не охватывают решения всех краевых задач, которые здесь возникают. В частности, задача развития течения из состояния покоя под действием постоянного перепада давления не может быть точно решена предлагаемыми методами. Ниже проведено приближенное исследование этой задачи, которое состоит в следующем.

а) При большом числе P приведено точное решение о разгоне течения ньютоновской жидкости. Методом разделения переменных решение представлено в виде ряда, быстро сходящегося на стадии установления течения. Для $Q(t, P)$ получена новая преобразованная форма ряда, быстро сходящегося на начальной стадии течения. Даны оценки остаточных членов обоих рядов.

б) На начальной стадии развития решение представлено в виде разложения по степеням корня квадратного из времени. Коэффициенты разложения зависят от автомодельной переменной и находятся из решения полученных обыкновенных дифференциальных уравнений. На стадии установления решение строится методом возмущений. Построено составное разложение решения для любого момента времени.

в) При произвольном конечном числе P представлено упрощенное приближенное решение. На основе идеи метода Слезкина-Тарга получено обыкновенное дифференциальное уравнение для расхода и найдено его решение. Проанализирована погрешность решения. Максимальная погрешность найден-

ной функции расхода $Q(t, P)$ при больших P не превышает 13,5% от точного значения.

1. Постановка краевой задачи. Рассматривается течение вязкопластической среды (в области $0 \leq z \leq 2h$) между двумя неподвижными параллельными пластинами $z = 0$, $z = 2h$. В начальный момент времени $t = 0$ среда покоится. К ней приложен постоянный градиент давления $i = -\partial p / \partial x$, под действием которого среда приходит в движение. Требуется определить поле скорости среды. В разд. 4.2.1 было показано, что такое движение является однонаправленным с единственной компонентой скорости $v(t, z)$. Для функции $v(t, z)$ и границы ядра $z_1(t)$ краевая задача ставится так

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + i, \quad 0 \leq z < z_1(t),$$

$$v(t, 0) = 0, \quad v'_z(t, z_1) = 0, \quad v''_{zz}(t, z_1) = -\frac{\tau_s}{\mu(h - z_1(t))}$$

с начальными условиями $v(0, z) = 0$, $z_1(0) = 0$.

Введем безразмерные величины: параметр P , переменные Z , t и функции $V(t, Z)$, $\tau(t, Z)$ и $Z_0(t)$

$$v = i(h^2/\mu)V, \quad i = (\tau_s/h)P, \quad z = Zh, \quad z_0 = Z_0h, \quad T = (\rho h^2/\mu)t. \quad (5.2.1)$$

Тогда для безразмерных скорости $V(t, Z)$ и функции $Z_0(t)$ получим краевую задачу

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} + 1, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq Z \leq Z_0(t), \quad (5.2.2)$$

$$V(t, 0) = 0, \quad V'_Z(t, Z_0) = 0, \quad V''_{ZZ}(t, Z_0) = -\frac{1}{P(1 - Z_0)}, \quad (5.2.3)$$

$$V(0, Z) = 0, \quad Z_0(0) = 0, \quad (5.2.4)$$

где V'_Z — производная функции $V(t, Z)$ по Z .

2. Решение задачи для вязкой жидкости. Приближение вязкой жидкости соответствует пределу $P \rightarrow \infty$. Из (5.2.2)–(5.2.4) получим линейную краевую задачу для классического уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} + 1, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq Z \leq 1,$$

$$V(t, 0) = 0, \quad V'_Z(t, 1) = 0, \quad V(0, Z) = 0. \quad (5.2.5)$$

Методом разделения переменных [48, 36] можно получить для поля скорости решение в виде ряда Фурье

$$V(t, Z) = Z - \frac{1}{2}Z^2 - \frac{2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi(n - 1/2)Z}{(n - 1/2)^3} \exp(-\pi^2(n - 1/2)^2 t). \quad (5.2.6)$$

Отсюда следует выражение для расхода Q

$$Q = 2 \int_0^1 V dZ = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} (n - 1/2)^{-4} \exp(-\pi^2(n - 1/2)^2 t). \quad (5.2.7)$$

Ряд (5.2.7) сходится при всех значениях t . Однако для малых значений t эффективнее пользоваться тождественным рядом (вывод его дан ниже в п. 7.)

$$Q = 2t - \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{3/2} + r(t), \quad r(t) < \frac{16}{3\sqrt{\pi}} t^{3/2} e^{-1/t}, \quad (5.2.8)$$

$$r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \quad a_n = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^t dt' \int_0^{t'} e^{-n^2/x} \frac{dx}{\sqrt{x}} < \frac{16}{3\sqrt{\pi}} t^{3/2} e^{-n^2/t}.$$

Ряд (5.2.8) сходится существенно быстрее, чем (5.2.7), если t достаточно мало. Порядок малости остаточного члена r в (5.2.8) выше любой, как угодно большой степени t . Функция $r(t)$ неаналитична в окрестности $t = 0$ и представляется сходящимся знакопеременным рядом, остаточный член в котором меньше первого отброшенного члена. Первый линейный по t член разложения в (5.2.8) нетрудно получить из асимптотического решения (5.2.5). Однако второй член разложения $t^{3/2}$ и, тем более, последующие неаналитические члены получить обычными приемами, по-видимому, невозможно.

Продемонстрируем эффективность полученных рядов (5.2.7) и (5.2.8) для вычисления расхода $Q(t)$. Ограничимся двумя членами в частичных суммах $Q_+(t)$ ряда (5.2.7) и $Q_-(t)$ ряда (5.2.8)

$$Q_+(t) = 2/3 - 0,657 \exp(-2,47t), \quad (5.2.9)$$

$$Q_-(t) = 2t - 1,504t^{3/2}, \quad (5.2.10)$$

которые определяют соответственно верхнюю и нижнюю оценки для $Q(t)$.

Тогда расход можно определять при $t \geq t_0$ по формуле $Q(t) = Q_+(t) - r_+(t)$, при $t \leq t_0$ по формуле $Q(t) = Q_-(t) + r_-(t)$, где $r_+(t) \approx 0,00811e^{-22,2t} \leq 0,00811e^{-22,2t_0}$, $r_-(t) \approx 3,01t_0^{3/2}e^{-1/t} \leq 3,01t_0^{3/2}e^{-1/t_0}$.

На рис. 5.7 изображены функции $r_+(t)$, и $r_-(t)$, определяющие погрешности двучленных частичных сумм (5.2.9) и (5.2.10). Наибольшая погрешность достигается в точке $t_0 \approx 0,153$ и равна $r_+(t) = r_-(t) \approx 2,7 \cdot 10^{-4}$, а относительная погрешность менее 0,13%. Если определить зависимость $Q(t)$ по формуле

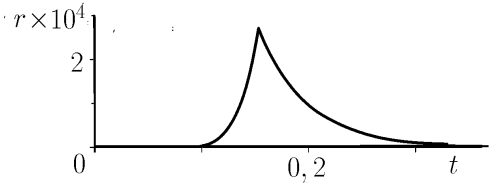


Рис. 5.7. Погрешность асимптотических разложений

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_+(t), & t \geq t_0, \\ Q(t) &= Q_-(t), & t \leq t_0 \approx 0,153, \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

то наибольшая относительная погрешность не будет превышать 0,13%, т. е., учитывая всего два члена в рядах (5.2.7) и (5.2.8), получаем приближение (5.2.11) для расхода с тремя верными знаками.

3. Решение методом осреднения ускорения. Метод Слезкина-Тарга был предложен в работах [87, 84] для расчета течений вязкой жидкости. Этот метод использовался также для решения задачи об ударе вязкопластической среды [5, 34]. Ниже, следуя [60], излагается модификация метода Слезкина-Тарга, которая отличается от традиционного тем, что будет получено общее обыкновенное дифференциальное уравнение для расхода. Зависимость расхода от времени можно будет определять, минуя детальный расчет поля скорости, и для решения ряда практических задач этого может оказаться достаточно.

Сначала проиллюстрируем метод и его эффективность на решении задачи (5.2.5) для чисто вязкой жидкости. Ускорение в (5.2.5) заменяется на среднее по сечению, т. е.

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{dQ}{dt} \tag{5.2.12}$$

Тогда для скорости получим

$$V(Z) = (1 - (dQ/dt)/2) (Z - Z^2/2) \tag{5.2.13}$$

Интегрируя $V(t, Z)$, получим искомое уравнение для расхода Q

$$Q(t) = \int_0^2 V(Z) dZ = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{dQ}{dt}\right) \cdot \frac{2}{3} \tag{5.2.14}$$

Уравнение (5.2.14), удовлетворяющее условию $Q(0) = 0$, имеет решение

$$Q(t) = (2/3)(1 - e^{-3t}) \tag{5.2.15}$$

Решение (5.2.15) имеет ту же асимптотику $2t$ при $t \ll 1$, что и точное решение, а при $t \gg 1$ эта асимптотика имеет некоторое отличие от (5.2.9). Наибольшая разница равна 0,044 при $t = t_0$, что составляет 13,5% от точного значения.

Перейдем к решению краевой задачи (5.2.2)–(5.2.4) методом Слезкина-Тарга для вязкопластической среды. Заменяем ускорение на среднее (5.2.12). Тогда решение уравнения (5.2.2), удовлетворяющее первым двум условиям (5.2.3), примет вид

$$V = (1 - (dQ/dt)/2) (Z_0 Z - Z^2/2). \quad (5.2.16)$$

Отсюда, используя третье граничное условие (5.2.3), получим

$$1 - \frac{1}{2} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{P(1 - Z_0)} \Rightarrow V = \frac{Z_0 Z - Z^2/2}{P(1 - Z_0)} \quad (5.2.17)$$

Интегрируя скорость по Z , получим выражение для расхода

$$Q = 2 \int_0^{Z_0} V dZ + 2(1 - Z_0)V(Z_0) = \frac{Z_0^2 - Z_0^3/3}{P(1 - Z_0)}.$$

Его удобно выразить через безразмерную функцию давления $\Pi(Z_0) = 1/(1 - Z_0)$

$$Q = \left(\frac{2}{3} \Pi + \frac{1}{3\Pi^2} - 1 \right) \frac{1}{P}$$

и продифференцировать по t

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{2}{3P} \left(1 - \frac{1}{\Pi^3} \right) \frac{d\Pi}{dt}.$$

Подставляя это выражение в первое равенство (5.2.17), получим уравнение для Π

$$\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\Pi^3} \right) \frac{d\Pi}{dt} + \Pi = P, \quad \Pi(0) = 1. \quad (5.2.18)$$

Решение уравнения (5.2.18) с начальным условием $\Pi(0) = 1$ имеет вид

$$3t = \left(1 - \frac{1}{P^3} \right) \ln \frac{P - 1}{P - \Pi} - \frac{1}{P^3} \ln \Pi + \frac{1 - \Pi^2}{2P\Pi^2} + \frac{1 - \Pi}{P^2\Pi}. \quad (5.2.19)$$

Перейдем к получению асимптотического разложения решения краевой задачи (5.2.2)–(5.2.4) при $t \ll 1$ и сравним его с найденным приближенным решением.

4. Асимптотическое решение на малых временах. Решение задачи (5.2.2)–(5.2.4) ищем в виде разложения по степеням \sqrt{t}

$$V = tF(\xi) + t^{3/2}F_1(\xi) + \dots, \quad \xi_0 = A + B\sqrt{t} + \dots, \quad (5.2.20)$$

$$\xi = Z/(2\sqrt{t}), \quad \xi_0(t) = Z_0(t)/(2\sqrt{t}).$$

Из краевой задачи (5.2.2)–(5.2.4) для определения функций $F(\xi)$, $F_1(\xi)$ и постоянных A, B получим два уравнения второго порядка и шесть условий

$$F''(\xi) + 2\xi F'(\xi) - 4F(\xi) + 4 = 0, \\ F(0) = 0, \quad F'(A) = 0, \quad F''(A) = -4/P, \\ F_1''(\xi) + 2\xi F_1'(\xi) - 6F_1(\xi) = 0, \quad F_1(0) = 0, \quad F_1'(A) + B F''(A) = 0, \\ F_1''(A) + B F'''(A) = -8A/P. \quad (5.2.21)$$

Решение уравнений таково

$$F(\xi) = -2\xi^2 + 2\frac{A}{P} \exp(A^2) \left((2\xi^2 + 1) \int_0^\xi e^{-x^2} dx + \xi e^{-\xi^2} \right), \quad (5.2.22)$$

$$F_1(\xi) = -\frac{4(3 + 2\xi^2)\xi}{3P(3 + 2A^2)}, \quad B = -\frac{1 + 2A^2}{3 + 2A^2}$$

Постоянная A найдется из уравнения

$$P = 1 + 2Ae^{A^2} \int_0^A e^{-x^2} dx. \quad (5.2.23)$$

Правую часть можно представить рядом с бесконечным радиусом сходимости или асимптотическим рядом

$$P = \begin{cases} 1 + \alpha_1 A^2 + \alpha_2 A^4 + \alpha_3 A^6 + \dots + \alpha_n A^{2n} + \dots \\ \sqrt{\pi} A e^{A^2} + (\alpha_1 A^2)^{-1} - (\alpha_2 A^4)^{-1} + (\alpha_3 A^6)^{-1} - \dots - \\ - (-1)^n (\alpha_n A^{2n})^{-1} + \dots, \end{cases} \quad (5.2.24)$$

где $\alpha_n = 2^n / (2n - 1)!!$, $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 4/3, \alpha_3 = 8/15, \dots)$.

5. Асимптотическое решение на больших временах. Решение краевой задачи (5.2.2)–(5.2.4) ищем в виде

$$V = V_\infty(Z) - \epsilon(Z) \exp(-\alpha^2 t), \quad Z_0 = Z_\infty - \beta \exp(-\alpha^2 t), \quad (5.2.25)$$

$$V_\infty(Z) = Z_\infty Z - Z^2/2, \quad Z_\infty = 1 - 1/P,$$

где $V_\infty(Z)$, Z_∞ — соответственно скорость и граница твердого ядра установившегося при $t \rightarrow \infty$ течения.

Подставляем (5.2.25) в (5.2.2)–(5.2.4) и учитываем только линейные по ϵ и β слагаемые. Тогда для определения функции $\epsilon(t)$ и постоянной β получим следующую краевую задачу:

$$\epsilon''(Z) + \alpha^2 \epsilon(Z) = 0, \quad (5.2.26)$$

$$\epsilon(0) = 0, \quad \epsilon'(Z_\infty) = \beta, \quad \epsilon''(Z_\infty) = -\beta P.$$

Решение краевой задачи (5.2.26) представляется в виде линейной комбинации собственных функций $\epsilon_n \sin(\alpha_n Z)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Наименьшему собственному значению α_0 соответствует решение

$$\epsilon(Z) = \epsilon_0 \sin \alpha_0 Z, \quad \beta = \epsilon'(Z_\infty) = \epsilon_0 \alpha_0 \cos X_0, \quad (5.2.27)$$

где α_0 – корень уравнения

$$\alpha_0 \operatorname{tg} \left(\frac{P-1}{P} \alpha_0 \right) = P.$$

Его можно вычислить с помощью разложений

$$\alpha_0 = \begin{cases} P(P-1)^{-1/2} (1 - 1/6(P-1) + 11/360(P-1)^2), & P \leq 2; \\ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2P} \right)^3 - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3P} \right) \left(\frac{\pi}{2P} \right)^5, & P > 2 \end{cases} \quad (5.2.28)$$

с относительной погрешностью менее 1%.

6. Составное разложение. Неопределенный пока коэффициент ϵ_0 определим с помощью условия гладкой сшивки расхода $Q(t)$.

Определяем расход $Q(t)$

$$Q = 2(1 - Z_0)V(t, Z_0) + 2 \int_0^{Z_0} V dZ$$

из разложения на малых

$$Q_- = 2t(1 - 1/P) - \frac{8}{3P} t \sqrt{t} A \exp(A^2) + \dots \quad (5.2.29)$$

и больших временах

$$Q_+ = Q_\infty(P) - \lambda(P) \exp(-\alpha_0^2 t), \quad (5.2.30)$$

$$Q_\infty(P) = \frac{(2P+1)(P-1)^2}{3P^4}, \quad \lambda = 4 \frac{\epsilon_0}{P} \sin \left(\frac{\alpha_0(P-1)}{P} \right).$$

Потребуем, чтобы в некоторой промежуточной точке t_0 выполнялись условия непрерывности расхода и его производной (условие гладкой сшивки)

$$Q_+(t_0) = Q_-(t_0), \quad Q'_+(t_0) = Q'_-(t_0). \quad (5.2.31)$$

Таким образом, найдем

$$t_0 = \frac{P - 1}{6,5P - 1,2}, \quad \lambda = \exp(\alpha_0^2 t_0)(Q_\infty - Q_-(t_0)). \quad (5.2.32)$$

Величина t_0 — определяет границу действия двух асимптотик $Q_+(t)$ и $Q_-(t)$.

Погрешность в ее определении мало влияет на значение величины λ . Поэтому для функции $t_0(P)$ приведена простая интерполяция. Составное разложение для поля скорости $V(t, Z)$, расхода $Q(t)$ и границы ядра $Z_0(t)$ определяется по разложениям на малых временах при $t \leq t_0$ и больших временах при $t \geq t_0$. Перейдем к анализу полученных решений.

На рис. 5.8 представлены зависимости $Q(t)/Q_\infty$ при трех различных значениях параметра A , значения которого указаны ($A = 0,3$; $P(A) = 1,19$; $A = 0,5$; $P(A) = 1,59$; $A = 1,2$, $P(A) = 9,17$). Сплошной линией обозначен расчет по асимптотическим формулам (5.2.29), (5.2.30), штриховой линией — расчет по приближенному решению (5.2.19), полученному методом Слезкина-Тарга.

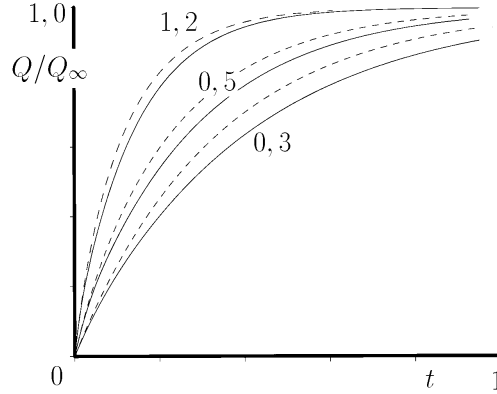


Рис. 5.8. Сравнение асимптотического и приближенного решений

Зависимость $Q(t)/Q_\infty$ при $A = 1,2$ мало отличается от точной зависимости для вязкой жидкости (5.2.9)–(5.2.11). Наибольшее отличие приближенного решения (5.2.19) от точного достигает значения 0,066 при $t = 0,39$, что составляет 9,5% от точного значения. Наибольшая относительная ошибка решения (5.2.19) равна 13,5% при $t_0 \approx 0,153$. При уменьшении параметра P относительная ошибка уменьшается. Таким образом, относительная погрешность для расхода, вычисленного методом Слезкина-Тарга, не превышает 13,5%.

Зависимости от параметра P времени установления t_Q для расхода и t_z для границы твердого ядра определяются из условия того, что соответствующая величина отличается от своего предельного значения ровно на 1%. С помощью асимптотических зависимостей на больших временах с постоянными (5.2.32) найдем

$$t_Q = \frac{1}{\alpha_0^2} \ln \frac{100\lambda}{Q_\infty}, \quad t_z = \frac{1}{\alpha_0^2} \ln \frac{25\lambda\alpha_0}{P - 1}.$$

При $P - 1 \ll 1$ найдем $t_Q \approx 4,54(P - 1)$, $t_z \approx 3,15(P - 1)$. При $P \gg 1$ найдем $t_Q \approx 1,86$, $t_z \approx 1,5 - 0,405 \ln P$.

На рис. 5.9 представлены зависимости $t_Q(P)$ и $t_z(P)$. Функция $t_Q(P)$ монотонно возрастает. Функция $t_z(P)$ возрастает на участке $0 \leq P < 2,4$, при $P \approx 2,4$ она достигает наибольшего значения $t_z \approx 0,93$, и при $P > 2,4$ медленно убывает. При $P \approx 28$ величина $t_z \approx t_0$. При $P > 28$ время установления границы твердого ядра меньше t_0 и его следует находить из внутренней асимптотики $Z_-(t)$, откуда

$$t_z \approx \frac{1}{4A^2} \approx \frac{1}{4 \ln P}$$

Таким образом, при большом значении P граница твердого ядра $Z_0 = 1 - 1/P$ устанавливается очень быстро и затем происходит более длительный процесс установления скорости и расхода.

7. Приложение. Вывод (5.2.8) можно осуществить с помощью формулы Пуассона [6], с.167

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi x - 2n\pi a x} = x^{-1/2} e^{\pi a^2 x} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi/x} \cos n\pi 2a \right) \quad (5.2.33)$$

следующим образом. Продифференцируем дважды по t ряд (5.2.7)

$$Q''(t) = -2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2 (n-1/2)^2 t} = -2e^{-\pi^2 t/4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t + n\pi^2 t}.$$

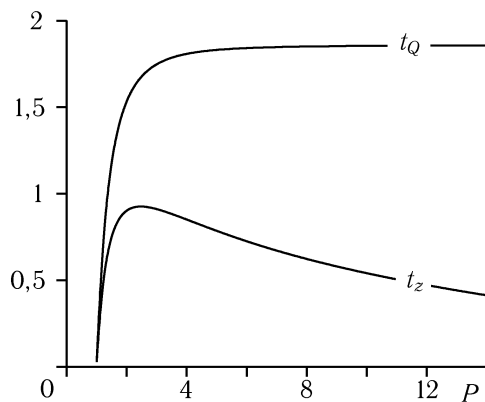


Рис. 5.9. Время установления расхода и границы ядра

Полагая $\pi t = x$ и $Q''(t) = -2e^{-\pi x/4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-n^2\pi x + n\pi x)$, преобразуем сумму по формуле Пуассона (5.2.33) при $a = -1/2$

$$Q''(t) = -\frac{2}{\sqrt{x}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2\pi/x} \right).$$

Возвращаясь к исходному аргументу $t = x/\pi$, получим

$$Q''(t) = -\frac{2}{\sqrt{\pi t}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2/t} \right). \quad (5.2.34)$$

Полагаем $t = 0$ в ряде (5.2.7) для $Q(t)$ и в его производной $Q'(t) = 0$. Пользуясь известными значениями для числовых рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n - 1/2)^{-4} = \frac{\pi^4}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n - 1/2)^{-2} = \frac{\pi^2}{2},$$

получим $Q(0) = 0$, $Q'(0) = 2$. Отсюда, интегрируя дважды ряд (5.2.34) получим ряд (5.2.8).

Глава 6

ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ

В этой и следующей главе описывается один из механизмов перемешивания в средах, движущихся по периодическому во времени закону. Он связан с особым характером движения частиц среды. Для описания соответствующих эффектов потребуется изложить основные сведения теории динамических систем и гамильтоновой механики. Более полное освещение этих вопросов имеется в монографиях [1, 31, 44, 91, 94].

6.1. Сведение задачи о движении частиц к гамильтоновой системе

1. Динамические системы. Пусть несжимаемая среда заполняет некоторый объем, границы которого движутся по заданному закону, периодическому во времени. Компоненты скорости v_j частиц среды являются дифференцируемыми функциями координат x_i и времени. Тогда закон движения частиц среды будет находиться из решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = v_i(t, x_j), \quad x_i(t_0) = x_{0i}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Эта задача называется *динамической системой*.

Трехмерное пространство переменных x_i , $i = 1, 2, 3$ называется *фазовым пространством*.

Система называется *автономной*, если функции $v_i(x_j)$ явно не зависят от времени. В противном случае система называется неавтономной. Наибольшее внимание мы будем уделять изучению неавтономных систем, в которых компоненты скорости имеют период по времени $v_j(t + T, x_i) = v_j(t, x_i)$ равный T . Такие неавтономные системы особенно важны для моделирования различных технологических процессов.

2. Гамильтоновы системы. Выделим класс неавтономных периодических систем, описывающих плоскопараллельные движения несжимаемой среды. Поле скорости имеет две компоненты v_x и v_y , зависящие от времени t и двух пространственных координат x и y . Уравнение неразрывности $\partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y = 0$

разрешается с помощью функции тока $H(t, x, y)$

$$v_x = \partial H / \partial y, \quad v_y = -\partial H / \partial x.$$

Тогда уравнения движения частиц жидкости будут иметь вид уравнений Гамильтона. Динамическая система превращается в гамильтонову систему или, более определенно, в задачу Коши для уравнений Гамильтона системы с одной степенью свободы. Теория таких систем называется гамильтоновой механикой и излагается в курсах теоретической механики [28]. Здесь и далее привычное в гидродинамике обозначение для функции тока Ψ (см. 2.5.6) заменено на еще более употребительное обозначение для функции Гамильтона H .

Обозначим координаты индивидуальной частицы среды через X и Y . Тогда ее траекторию движения можно вычислить, решая следующую задачу Коши

$$\begin{aligned} \dot{X} &= H_Y, \quad \dot{Y} = -H_X, \quad X(t_0) = X_0, \quad Y(t_0) = Y_0 \\ H_X &= \partial H / \partial X, \quad H_Y = \partial H / \partial Y. \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

Таким образом, *траектории движения частиц несжимаемой среды определяются из решения гамильтоновой системы.*

3. Теорема Лиувилля. Верно и обратное утверждение. Оно в гамильтоновой механике называется теоремой Лиувилля.

Рассмотрим отображение $(X_0, Y_0) \rightarrow (X(t), Y(t))$, где $X(t), Y(t)$ — решение задачи (6.1.1). Такое отображение называется отображением на фазовом потоке системы (6.1.1). При этом отображении область D_0 переменных X_0, Y_0 переходит в область D переменных X, Y . Площади же этих областей равны. Этот результат составляет содержание теоремы Лиувилля. Формулировка ее такова.

Теорема Лиувилля. *При отображении $(X_0, Y_0) \rightarrow (X, Y)$ на фазовом потоке гамильтоновой системы площадь области сохраняется*

$$\int_D dXdY = \int_{D_0} dX_0 dY_0 \Leftrightarrow \frac{\partial(X, Y)}{\partial(X_0, Y_0)} = 1.$$

Для двумерных отображений характерны свойства:

- 1) несжимаемость: $\partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y = 0$, ($v_x = \dot{X}$, $v_y = \dot{Y}$);
- 2) сохранение фазового объема: $\partial(X, Y) / \partial(X_0, Y_0) = 1$;
- 3) существование функции тока для поля скорости $v_x = H_Y$, $v_y = -H_X$ (гамильтоновость).

Перечисленные свойства 1), 2) и 3) эквивалентны друг другу. Этот результат будем называть теоремой Лиувилля для двумерных отображений.

Также как и динамические системы, гамильтоновы системы могут быть автономными и неавтономными. Главное внимание уделим неавтономным гамильтоновым системам с периодическим по времени гамильтонианом

$H(t, X, Y) = H(t + T, X, Y)$. Перейдем к описанию методов исследования гамильтоновых систем.

6.2. Первый интеграл гамильтоновой системы

1. Понятие первого интеграла. Пусть функция Гамильтона определена в некоторой области D фазовой плоскости. Тогда скалярная функция $G(t, X, Y)$, не являющаяся тождественно константой, определенная в той же области D , что и рассматриваемая гамильтонова система, называется первым интегралом этой системы, если она остается постоянной вдоль любого решения этой системы [28]. Кривые, задаваемые уравнением $G(t, X, Y) = \text{const}$ называются интегральными кривыми. Если функция $G(t, X, Y)$ дифференцируема, то необходимым и достаточным условием существования первого интеграла является следующее тождество:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \{H, G\} = 0, \quad \{H, G\} = \frac{\partial H}{\partial Y} \frac{\partial G}{\partial X} - \frac{\partial H}{\partial X} \frac{\partial G}{\partial Y}.$$

Выражение $\{H, G\}$ называется *скобкой Пуассона* двух функций $H(X, Y)$ и $G(X, Y)$. Этот факт следует из правила дифференцирования сложной функции $G(t, X(t), Y(t))$ по времени и уравнений Гамильтона (6.1.1). Первый интеграл позволяет расслоить фазовую плоскость на интегральные кривые. Они непрерывно заполняют все фазовое пространство.

Системы, у которых существует первый интеграл, называются интегрируемыми системами. Решения интегрируемых гамильтоновых систем можно получить в виде квадратур. Однако, обратное утверждение не верно. Системы могут иметь решение в виде квадратур, и даже выражаться через элементарные функции, но могут не иметь при этом первого интеграла. Простым примером неинтегрируемой системы является линейный осциллятор с трением $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ [28], хотя решение этой системы в элементарных функциях выписывается без труда. Приведенный пример относится к негамильтоновой динамической системе. Ниже мы увидим, такие примеры и для гамильтоновых систем.

Вообще, решение динамической системы существует всегда для достаточно гладких правых частей. Это диктуется только теоремой существования решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Часто это решение представляется рядами, квадратурами или же элементарными функциями. Но первый интеграл существует в исключительных случаях. Некоторые случаи интегрируемости гамильтоновых систем перечислены ниже.

2. Автономные гамильтоновы системы. Если функция Гамильтона явно не зависит от времени, то необходимое и достаточное условие существования первого интеграла $dH/dt = \{H, H\} = 0$ тождественно выполняется и, следова-

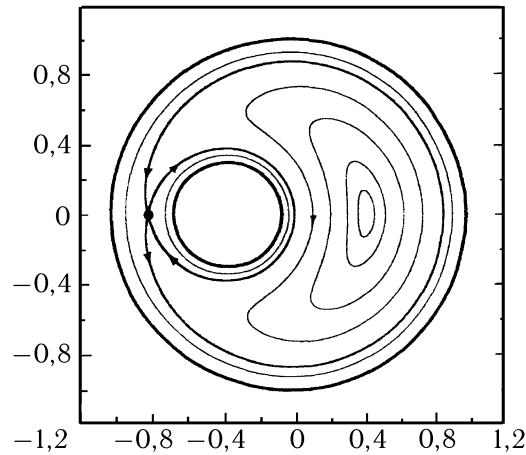


Рис. 6.1. Линии тока между двумя эксцентрично вращающимися цилиндрами

тельно, всегда имеется первый интеграл

$$H(X, Y) = \text{const.}$$

В теоретической механике этот интеграл называется интегралом энергии. Фазовые траектории являются изолиниями функции Гамильтона. В гидродинамике этот факт также хорошо известен: для установившегося течения на линии тока функция тока $H(X, Y)$ постоянна. Таким образом, гамильтоновы системы имеют простую гидродинамическую интерпретацию. Фазовый поток гамильтоновой системы — это течение несжимаемой среды. Имея функцию тока (гамильтониан), легко построить картину течения. Для этого надо изобразить изолинии функции тока.

На рис. 6.1 показаны линии тока установившегося течения вязкой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами [99]. Внешний цилиндр имеет радиус $R_2 = 1$ и вращается с угловой скоростью $\Omega_1 = 1$, а внутренний — $R_1 = 0.3$ и вращается с угловой скоростью $\Omega_1 = -4$ в противоположном направлении. Эксцентриситет (отношение расстояния между центрами к разности радиусов) равен $O_1O_2/(R_1 - R_2) = 0,5$. Общее решение такой задачи дано Жуковским и Чаплыгиным (1904). Течение (см. рис. 6.1) имеет две критические точки, в которых $\dot{X} = H_Y = 0$, $\dot{Y} = -H_X = 0$. Одна точка — *it* эллиптического типа. В ее малой окрестности линии тока — эллипсы. Вторая точка — *гиперболического типа*. В ее малой окрестности линии тока — гиперболы. Точка эллиптического типа соответствует устойчивому положению равновесия. Гамильтониан в этой точке имеет строгий максимум или минимум. При любом достаточно малом отклонении от положения равновесия частица жидкости вечно движется в малой окрестности этой точки.

Гиперболическая неподвижная точка соответствует неустойчивому положению равновесия. При любом, как угодно малом, отклонении от положения равновесия частица жидкости за достаточно большое время отклоняется от положения равновесия на конечное расстояние. В точке равновесия функция Гамильтона не имеет ни локального минимума ни максимума.

Частицы, находящиеся на одной линии тока, будут находиться на ней вечно. Если окрасить эти частицы, то краска по другим линиям тока не распространится. Окрашенной останется только одна линия. Таким образом, если первый интеграл существует (а это будет для любого установившегося течения), то перемешивания пассивной примеси не произойдет.

Ниже будет показано, что неавтономные системы первым интегралом, как правило, не обладают, и в этом случае перемешивание пассивной примеси возможно.

3. Неавтономные гамильтоновы системы. Первый интеграл неавтономных гамильтоновых систем существует лишь в исключительных случаях. Примером такой интегрируемой системы является система с гамильтонианом

$$H = \varepsilon \left[\frac{1}{2}(X^2 + Y^2) + Xb \sin t \right]. \quad (6.2.1)$$

Скорость частицы жидкости является суммой двух слагаемых

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon Y \\ -\varepsilon X \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon b \sin t \end{pmatrix}$$

Первое слагаемое соответствует вращению частицы с угловой скоростью ε относительно начала координат, второе слагаемое — поступательному колебательному движению параллельно оси Y . Траектория движения находится из решения линейной системы дифференциальных уравнений. Эту же систему можно записать в виде уравнения второго порядка для $X(t)$

$$\ddot{X} + \varepsilon^2 X = -\varepsilon^2 b \sin t,$$

которое описывает вынужденные колебания линейного осциллятора единичной массы под действием внешней силы $-\varepsilon^2 b \sin t$.

Решение, удовлетворяющее начальным условиям $X(t_0) = X_0$, $Y(t_0) = Y_0$, можно представить в виде

$$X - X_c = (X_0 - X_c) \cos(\varepsilon(t - t_0)) + (Y_0 - Y_c) \sin(\varepsilon(t - t_0)) + A(t),$$

$$Y - Y_c = -(X_0 - X_c) \sin(\varepsilon(t - t_0)) + (Y_0 - Y_c) \cos(\varepsilon(t - t_0)) + B(t),$$

$$X_c = \frac{b\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \sin t_0,$$

$$Y_c = \frac{b\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \cos t_0,$$

$$A(t) = \frac{b\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}(\sin t - \sin t_0), \quad B(t) = \frac{b\varepsilon}{1-\varepsilon^2}(\cos t - \cos t_0).$$

Первый интеграл имеет следующий вид:

$$G(t, X, Y) = R^2,$$

$$G(t, X, Y) = [X - X_c - A(t)]^2 + [Y - Y_c - B(t)]^2,$$

$$R^2 = (X_0 - X_c)^2 + (Y_0 - Y_c)^2.$$

В фазовом пространстве t, X, Y интегральные поверхности $G = R^2$ можно представить себе так. Сечением этой поверхности $t = \text{const}$ является окружность радиуса R с центром $X_c + A(t)$, $Y_c + B(t)$. Радиус окружности не зависит от t , а координаты центра меняются по гармоническому закону. Таким образом, интегральная поверхность является криволинейной трубкой. Ось трубки в пространстве t, X, Y представляет собой винтовую линию с шагом $t = 2\pi$. Интегральные поверхности заполняют все трехмерное фазовое пространство. Если рассматривать t как угловую координату в цилиндрической системе координат, то в ней интегральные поверхности будут торами.

Список интегрируемых гамильтоновых систем включает в себя все автономные системы аналогичные (6.2.1) с гамильтонианом, у которого квадратичная часть не зависит от времени. Все остальные гамильтоновы системы за редким исключением не имеют первого интеграла.

6.3. Канонические преобразования

6.3.1. Определение и общие свойства

1. Определение канонического преобразования. Каноническое преобразование на плоскости можно определить так. *Преобразование переменных $q(t, Q, P)$, $p(t, Q, P)$ называется каноническим, если его якобиан равен единице*

$$\frac{\partial(q, p)}{\partial(Q, P)} = \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P} \frac{\partial p}{\partial Q} = 1.$$

Иначе говоря, каноническое преобразование $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ сохраняет площадь.

С л е д с т в и е. Если преобразование $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ — каноническое, то обратное преобразование $(Q, P) \rightarrow (q, p)$ — тоже каноническое.

2. Преобразование уравнений Гамильтона при канонической замене переменных. Гамильтонова система $\dot{q} = H_p$, $\dot{p} = -H_q$ при каноническом преобразовании $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ переходит опять в гамильтонову систему с новым, вообще говоря, гамильтонианом $\tilde{H}(t, Q, P)$.

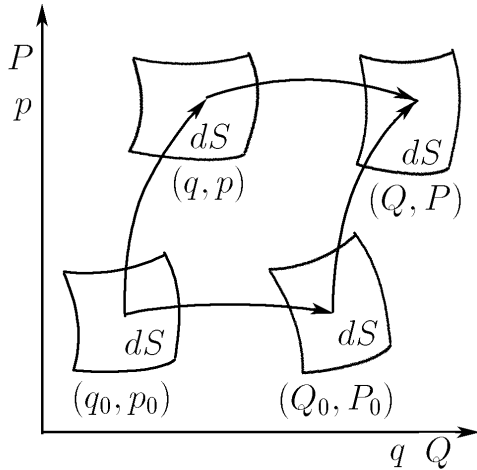


Рис. 6.2. Преобразование уравнений Гамильтона при канонической замене переменных

преобразования $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ и преобразования $Q = \bar{Q}/c$, $P = \bar{P}$. Этот класс характеризуется дополнительным параметром c , который называется валентностью. С учетом валентности преобразования тоже сохраняют гамильтонову форму уравнений. Верно и обратное утверждение: преобразование $(q, p) \rightarrow (Q, P)$, сохраняющее гамильтонову форму уравнений, является каноническим валентности c .

Мы будем следовать монографиям [1, 28, 42, 88], в которых под каноническим преобразованием понимают унивалентное преобразование, т. е. имеющее валентность $c = 1$. Данное выше определение является унивалентным каноническим преобразованием.

Свойство сохранения гамильтоновой формы уравнений при канонических преобразованиях играет важную роль в теории гамильтоновых систем. Его также часто берут за определение канонического преобразования [28, 42, 88]. Хотя здесь, не учитывая валентность, часто допускается неточность в рассуждениях (см. замечания в книге [1] о таких неточностях, допущенных в книге [42]).

4. Критерии каноничности для независимых от времени преобразований. Для преобразований $q(Q, P), p(Q, P)$ имеют место следующие два критерия каноничности:

- 1) Выражение $PdQ - pdq$ является полным дифференциалом;
- 2) Для любого гамильтониана $H(t, q, p)$ замена $q(Q, P), p(Q, P)$ переводит уравнения Гамильтона в переменных q, p в уравнения Гамильтона в переменных Q, P с новым гамильтонианом, равным $\bar{H}(t, Q, P) = H(t, q(Q, P), p(Q, P))$.

Доказательство. Отображение $(q_0, p_0) \rightarrow (q, p)$ сохраняет площадь. Канонические отображения $(q_0, p_0) \rightarrow (Q_0, P_0)$ и $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ тоже сохраняют площадь. Значит и $(Q_0, P_0) \rightarrow (Q, P)$ сохраняет площадь и по теореме Лиувилля система $(Q_0, P_0) \rightarrow (Q(t), P(t))$ — гамильтонова, что и требовалось доказать. Пояснение к доказательству дано на рис. 6.2. Площадь окрестности точки (q_0, p_0) равная dS сохраняется при всех отображениях.

3. О валентных канонических преобразованиях.

В некоторых книгах [4, 19] вводят расширенный класс канонических преобразований в виде суперпозиции канонического преоб-

Доказательство критерия 1) вытекает из теоремы Грина для произвольного интеграла по замкнутому контуру ∂d , охватывающего область d и такой же теоремы для преобразованных контура ∂D и области D

$$\oint_{\partial d} pdq = \int_d dqdp, \quad \oint_{\partial D} PdQ = \int_D dQdP. \quad (6.3.1)$$

Правые части равенств — это площади области d и преобразованной D . Они равны в силу каноничности преобразования. Значит интеграл по любому замкнутому контуру от разности $PdQ - pdq$ равен нулю, т. е. выражение $PdQ - pdq$ есть полный дифференциал, что и требовалось доказать. Отсюда следует, что величина интеграла по контуру $\oint pdq$ остается неизменной при любом каноническом преобразовании. Эта величина называется *относительным интегральным инвариантом Пуанкаре*.

Доказательство критерия 2) можно провести с помощью следующей леммы
 Л е м м а. Уравнения Гамильтона $\dot{q} = H_p$, $\dot{p} = -H_q$ с функцией Гамильтона $H(t, q, p)$ при автономной замене переменных $q(Q, P)$, $p(Q, P)$ с неравным нулю якобианом $\Delta \neq 0$ преобразуются в уравнения

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{1}{\Delta} \tilde{H}_p, & \dot{P} &= -\frac{1}{\Delta} \tilde{H}_Q, \\ \Delta &= \frac{\partial(q, p)}{\partial(Q, P)} = \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P} \frac{\partial p}{\partial Q}, \\ \tilde{H}(t, Q, P) &= H(t, q(Q, P), p(Q, P)). \end{aligned}$$

Отсюда немедленно следует критерий 2).

Доказательство. Дифференцируя по времени автономные замены, получим

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial q}{\partial Q} \dot{Q} + \frac{\partial q}{\partial P} \dot{P}, \\ \dot{p} = \frac{\partial p}{\partial Q} \dot{Q} + \frac{\partial p}{\partial P} \dot{P}. \end{cases}$$

Разрешаем линейную систему по правилу Крамера

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \dot{q} & \partial q / \partial P \\ \dot{p} & \partial p / \partial P \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial p}{\partial P} \dot{q} - \frac{\partial q}{\partial P} \dot{p} \right), \\ \dot{P} &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \partial q / \partial Q & \dot{q} \\ \partial p / \partial Q & \dot{p} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left(-\frac{\partial p}{\partial Q} \dot{q} + \frac{\partial q}{\partial Q} \dot{p} \right). \end{aligned}$$

Далее подставляем в правые части $\dot{q} = H_p$, $\dot{p} = -H_q$ и, пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, получим

$$\dot{Q} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial p}{\partial P} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial q}{\partial P} \frac{\partial H}{\partial q} \right) = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P},$$

$$\dot{p} = -\frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial p}{\partial Q} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{\partial H}{\partial q} \right) = -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q},$$

что и требовалось доказать.

5. Теорема о каноничности отображения на фазовом потоке. Пусть $q(t), p(t)$ решение задачи Коши для уравнений Гамильтона. Тогда отображением на фазовом потоке называется взаимно однозначное соответствие точки q_0, p_0 в момент времени t_0 точке q, p в момент времени t . На гидродинамическом языке отображение на фазовом потоке представляет собой перенос частиц несжимаемой жидкости по своим траекториям. Площадь, занимаемая частицами, сохраняется и, следовательно, *отображение на фазовом потоке — каноническое*. Такой способ замены переменных весьма эффективен при асимптотическом построении решения гамильтоновой системы.

6.3.2. Теорема об интегральном инварианте Пуанкаре-Картана

1. Формулировка теоремы. Пусть при канонической замене $q(t, Q, P), p(t, Q, P)$ гамильтониан $H(t, q, p)$ преобразуется в гамильтониан $\tilde{H}(t, Q, P)$, а замкнутый контур c в пространстве (q, p, t) преобразуется в замкнутый контур C в пространстве (Q, P, t) . Тогда циркуляция вектора $(p, 0, -H)$ по контуру c равна циркуляции вектора $(P, 0, -\tilde{H})$ по контуру C :

$$\oint_c (pdq - Hdt) = \oint_C (PdQ - \tilde{H}dt)$$

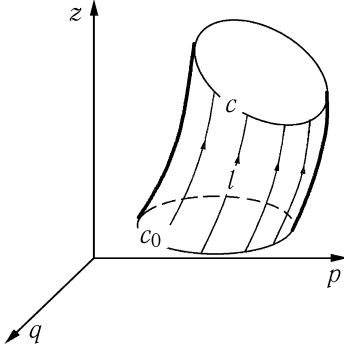


Рис. 6.3. Трубка тока

Циркуляция по контуру c

$$\oint_c (pdq - Hdt) \quad (c)$$

называется *интегральным инвариантом Пуанкаре-Картана*.

Теорему об интегральном инварианте можно переформулировать более кратко.

Циркуляция, определяемая формулой (c), при каноническом преобразовании сохраняется, т. е. является инвариантом.

2. Определения. Определение 1. Векторное поле $\vec{v} = (\dot{q}, \dot{p}, \dot{z})$ для системы дифференциальных уравнений $\dot{q} = H_p, \dot{p} = -H_q, \dot{z} = 1$ в пространстве q, p, t назовем *полем скорости гамильтоновой системы $H(t, q, p)$* .

Определение 2. *Линией тока* l гамильтоновой системы $H(t, q, p)$ называется линия, у которой касательная в каждой точке направлена по скорости $\vec{v} = (\dot{q}, \dot{p}, \dot{z})$.

Определение 3. *Трубкой тока* называется цилиндрическая поверхность, состоящая из линий тока l (см. рис. 6.3).

Пусть c — замкнутый контур в пространстве q, p, z . Проведем через каждую точку контура c линию тока l . Цилиндрическую поверхность, состоящую из этих линий тока назовем *трубкой тока, натянутой на контур* c . Контур c называется *контуром, образующим трубку тока*. Для данной трубки тока образующий контур c можно получить как пересечение его с произвольной поверхностью $z = z(q, p)$. На рис. 6.3 изображены два контура c и c_0 , образующих одну и ту же трубку тока. Эта трубка тока натянута на контуры c и c_0 .

3. Лемма Стокса. *Для данной трубки тока циркуляция вектора $\vec{F} = (p, 0, -H)$ по любому ее образующему контуру c постоянна.*

$$\oint_c \vec{F} \vec{d}r = \oint_c (pdq - Hdt) = \text{const}$$

Доказательство. Возьмем два контура c_0 и c , образующих данную поверхность тока (см. рис. 6.3). Тогда по теореме Стокса циркуляция по контуру вектора скорости равна потоку вектора вихря через поверхность, натянутую на контур. Отсюда получим

$$\oint_c \vec{F} \vec{d}r - \oint_{c_0} \vec{F} \vec{d}r = \int_s \text{rot} \vec{F} \vec{n} ds,$$

где s — поверхность тока, натянутая на контуры c и c_0 , \vec{n} — нормаль к поверхности тока, вектор $\text{rot} \vec{F}$ определится так

$$\text{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial q & \partial/\partial p & \partial/\partial z \\ p & 0 & -H(t, q, p) \end{vmatrix} = -H_p \vec{i} + H_q \vec{j} - \vec{k},$$

где \vec{i}, \vec{j} и \vec{k} — единичные базисные векторы в пространстве (q, p, z) .

Отсюда $\text{rot} \vec{F} = -\vec{v}$ в силу определения 1. Поле скорости \vec{v} ортогонально нормали \vec{n} на трубке тока, поэтому на поверхности трубки $\text{rot} \vec{F} \vec{n} = -\vec{v} \vec{n} = 0$. Таким образом,

$$\oint_c \vec{F} \vec{d}r = \oint_{c_0} \vec{F} \vec{d}r \Rightarrow \oint_c (pdq - Hdt) = \oint_{c_0} (pdq - Hdt),$$

что и требовалось доказать.

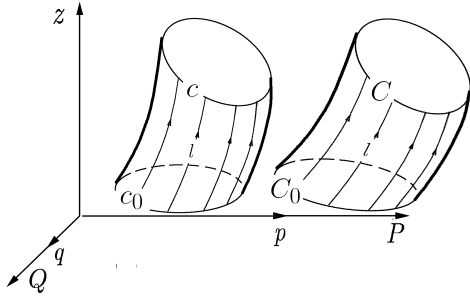


Рис. 6.4. Трубки тока для исходной и преобразованной систем

Циркуляции по контурам c_0 и C_0 равны

$$\oint_{c_0} (pdq - Hdt) = \oint_{C_0} (PdQ - \tilde{H}dt).$$

Действительно, в силу $dt = dz = 0$, циркуляции равны относительно интегральному инварианту Пуанкаре. Он, согласно равенству (6.3.1), не меняется при каноническом преобразовании, не зависящим от времени.

По лемме Стокса циркуляция по контуру c_0 равна циркуляции по контуру c . Так же точно циркуляция по контуру C_0 равна циркуляции по контуру C . Отсюда следует

$$\oint_c (pdq - Hdt) = \oint_{c_0} (pdq - Hdt) = \oint_{C_0} (PdQ - \tilde{H}dt) = \oint_C (PdQ - \tilde{H}dt)$$

и доказательство завершено.

6.3.3. Общий критерий каноничности преобразований

1. Вывод и формулировка критерия. Из векторного анализа известно, что дифференциальная форма dF будет полным дифференциалом тогда и только тогда, когда интеграл от нее по замкнутому контуру равен нулю. Отсюда из теоремы об интегральном инварианте Пуанкаре-Картана следует, что выражение

$$PdQ - pdq - [\tilde{H}(t, Q, P) - H(t, q, p)]dt = dF, \quad (6.3.2)$$

является полным дифференциалом.

Здесь q, p, H — исходная гамильтонова система, а Q, P, \tilde{H} — преобразованная с помощью канонической замены $q, p, H \rightarrow Q, P, \tilde{H}$. Полученное соотношение (6.3.2) является критерием каноничности общей замены переменных

4. Доказательство теоремы об инварианте Пуанкаре-Картана.

Возьмем произвольный замкнутый контур c и натянем на него трубку тока s гамильтоновой системы $H(t, q, p)$ (рис. 6.4). При сечении трубки тока плоскостью $z = z_0$ образуется контур c_0 .

При канонической замене контуры c , трубка тока s и контур c_0 преобразуются соответственно в C, S и C_0 , изображенные также на рис. 6.4.

$q(t, Q, P)$, $p(t, Q, P)$. В нем F — произвольная функция трех независимых переменных, например, t , q и p , а dF ее полный дифференциал

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial q} dq + \frac{\partial F}{\partial p} dp.$$

Общий критерий включает в себя и ранее полученный критерий для независимой от времени замены переменных $q(Q, P)$, $p(Q, P)$. Он справедлив для гамильтоновых систем произвольного порядка [1, 28].

2. Примеры канонических преобразований. Пример 1. Канонические полярные координаты или переменные действие-угол задаются формулами

$$P = (q^2 + p^2)/2, \quad Q = \operatorname{arctg}(q/p).$$

Имеем

$$dQ = \frac{1}{1 + q^2/p^2} \frac{pdq - qdp}{p^2} = \frac{pdq - qdp}{q^2 + p^2},$$

$$PdQ - pdq = (pdq - qdp)/2 - pdq = d(-qp/2).$$

Согласно критерию каноничности 1) преобразование каноническое.

Это преобразование очень полезно при исследовании систем с гамильтонианом аналогичным осциллятору Дуффинга $H = [q^2 + p^2 + q^4/2]/2$. В новых переменных гамильтониан упростится $P + P^2 \sin^4 Q$.

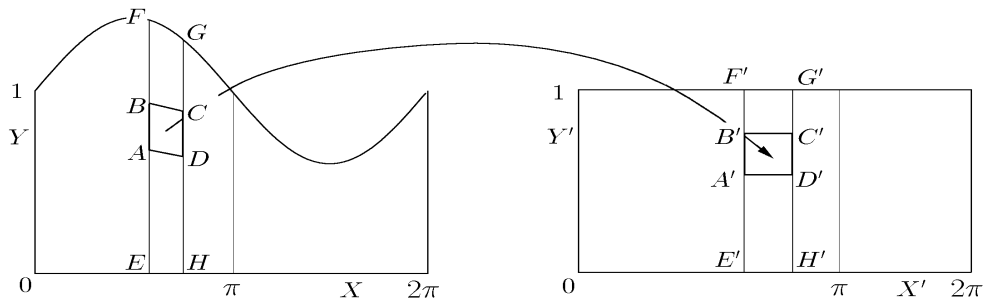


Рис. 6.5. Отображение криволинейной области на прямоугольник

Пример 2. Каноническое преобразование криволинейной области в прямоугольник.

Область $0 \leq X \leq 2\pi$, $0 \leq Y \leq 1 + h(t, X)$ с криволинейной границей, площади 2π можно отобразить каноническим преобразованием в прямоугольник $0 \leq X' \leq 2\pi$, $0 \leq Y' \leq 1$ следующим образом (рис. 6.5):

$$X' = X + \int_0^X h(t, X) dX, \quad Y' = Y/(1 + h(t, X)).$$

Малая трапеция $ABCD$ отображается на прямоугольник $A'B'C'D'$ той же площади. Отображение на фиксированный прямоугольник удобно при исследовании движения частиц несжимаемой среды в области с меняющейся во времени границей [64, 70, 67]. Гамильтонова система сохраняет свой вид. Выражение преобразованного гамильтониана приводится ниже в разд. 6.3.5 п.3, пример 3.

6.3.4. Отображение малой области

канонического преобразования $Q(q, p), P(q, p)$ определяется линеаризованным преобразованием с помощью матрицы Якоби A

$$\begin{aligned} \delta Q &= A_{11} \delta q + A_{12} \delta p \\ \delta P &= A_{21} \delta q + A_{22} \delta p, \end{aligned} \quad A = \begin{pmatrix} \partial Q/\partial q & \partial Q/\partial p \\ \partial P/\partial q & \partial P/\partial p \end{pmatrix}$$

с определителем единица: $\det(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$. При поворотах системы координат элементы матрицы преобразуются по тензорному закону (см. главу 1).

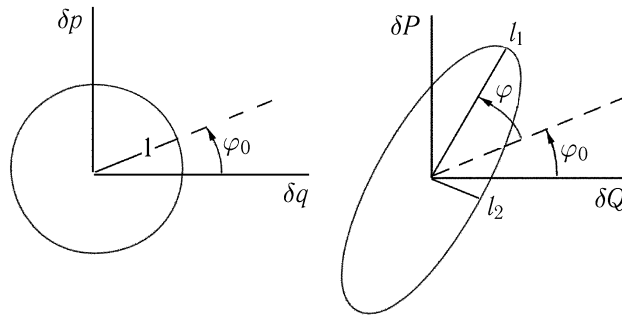


Рис. 6.6. Отображение малой области

Выражения

$$i_1 = (A_{11} + A_{22})/2, \quad i_2 = (A_{12} - A_{21})/2$$

являются независимыми инвариантами и при поворотах не меняются. Они определяют внутреннюю, независящую от выбора системы координат структуру отображения.

По известной в аналитической геометрии теореме о полярном разложении матрица A всегда представляется в виде матрицы поворота и симметрической матрицы. В свою очередь поворотом системы координат симметрическая мат-

рица может быть приведена к главным осям. Таким образом, получим

$$A = C(\varphi)C(\varphi_0) \begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{pmatrix} C(-\varphi_0), \quad C(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (6.3.3)$$

$$l_1 l_2 = 1.$$

Отсюда следует, что отображение с матрицей A преобразует единичный круг в эллипс той же площади с осями l_1, l_2 . Угол φ_0 определяет направление волокна в круге $(\delta q)^2 + (\delta p)^2 = 1$, который при отображении максимально удлиняется. Угол φ определяет поворот этого волокна (рис. 6.6). С помощью соотношений (6.3.3) вычисляются: наибольшее l_1 и наименьшее l_2 удлинения волокон, а также углы φ_0 и φ

$$l_1 = R + \sqrt{R^2 - 1}, \quad l_2 = R - \sqrt{R^2 - 1},$$

$$R^2 = i_1^2 + i_2^2, \quad \operatorname{tg} \varphi = -i_2/i_1, \quad (6.3.4)$$

$$\operatorname{tg}(\varphi + 2\varphi_0) = (A_{12} + A_{21})/(A_{11} - A_{22}).$$

Характеристики l_1, l_2, φ являются внутренними инвариантами отображения, а φ_0 зависит от выбора системы координат.

6.3.5. Производящие функции

Производящие функции позволяют конструктивно строить канонические преобразования.

1. Производящие функции Якоби. Обратимся к общему критерию каноничности (6.3.2). В полном дифференциале dF можно выделить дифференциал функции зависящей от t, q, P

$$PdQ - pdq - (\tilde{H} - H)dt = d(PQ) - QdP - pdq - (\tilde{H} - H)dt = d(PQ) - dS.$$

Правая часть есть полный дифференциал, следовательно дифференциальная форма

$$QdP + pdq + (\tilde{H} - H)dt = dS(t, q, P) \quad (6.3.5)$$

тоже полный дифференциал функции S трех независимых переменных t, q, P . Эта функция называется *производящей функцией* и позволяет конструктивно строить канонические преобразования. Делается это так. Берется произвольная дифференцируемая функция смешанных переменных $S(t, q, P)$ и составляются соотношения для ее частных производных, вытекающих из (6.3.5)

$$Q = S_P(t, q, P), \quad p = S_q(t, q, P).$$

Разрешая первое уравнение относительно q , получим зависимость $q(t, Q, P)$. Подставляя ее во второе уравнение, получим вторую зависимость $p = S_q(t, q(t, Q, P), P)$. Система с гамильтонианом $H(t, q, p)$ переходит в

систему с новым гамильтонианом

$$\tilde{H}(t, Q, P) = S_t(t, q(t, Q, P), P) + H(t, q(t, Q, P), p(t, Q, P)). \quad (6.3.6)$$

Таким образом, формула полного дифференциала (6.3.5) позволяет не только строить каноническое преобразование, но и находить по данному гамильтониану исходной системы преобразованный гамильтониан.

В полном дифференциале dF можно выделить дифференциал функции, зависящей от t, Q, p

$$PdQ - pdq - (\tilde{H} - H)dt = -d(pq) + PdQ + qdp - (\tilde{H} - H)dt$$

Отсюда получаем полный дифференциал второй производящей функции $R(t, Q, p)$ и формулы канонического преобразования

$$\begin{aligned} dR &= -PdQ - qdp + (\tilde{H} - H)dt \Rightarrow \\ P &= -R_Q(t, Q, p), \quad q = -R_p(t, Q, p), \\ \tilde{H}(t, Q, P) &= R_t(t, Q, p) + H(t, q, p). \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

Аналогично можно найти еще две производящие функции. Одна зависит от t, q, Q , другая от t, p, P [28].

2. Условие существования. Для существования канонических отображений, выраженных через производящую функцию S нужно, чтобы уравнение $Q = S_p(t, q, P)$ имело обратную функцию $q(t, Q, P)$. Это возможно при условии монотонной зависимости S_p от q , т. е. производная S_{qp} не должна менять знака. Следовательно, каноническое преобразование выражается через производящую функцию $S(t, q, P)$ в области, в которой выполняется неравенство $S_{qp} \neq 0$.

Точно также показывается, что каноническое преобразование с производящей функцией $R(t, Q, p)$ существует в области, в которой $R_{Qp} \neq 0$.

3. Примеры. **Пример 1.** Найти отображение с производящей функцией $S = qP^2$.

Решение. Дифференциал $dS = P^2 dq + 2qPdP$ приравняем к дифференциалу (6.3.5) $QdP + pdq$. Из равенства коэффициентов при dq и dP следует отображение $q = Q/(2P)$, $p = P^2$. Нетрудно проверить, что его якобиан равен единице. Отображение существует в области $S_{qp} = 2P \neq 0$.

Пример 2. Найти производящие функции $S(q, P)$ и $R(Q, p)$ для тождественного преобразования $q = Q$, $p = P$.

Решение. По (6.3.5) и (6.3.7) находим формулы для полных дифференциалов функций S и R

$$\begin{aligned} dS &= QdP + pdq = qdP + Pdq = d(Pq) \Rightarrow S = qP, \\ dR &= -PdQ - qdp = -pdQ - Qdp \Rightarrow R = -Qp. \end{aligned}$$

Пример 3. Найти производящую функцию и закон преобразования для га-

мильтониана при каноническом преобразовании криволинейной области в прямоугольник (см. рис. 6.5).

Решение. Это преобразование рассмотрено в примере 2 разд.6.3.3, 2. Оно имеет производящую функцию

$$S = X\tilde{Y} + \tilde{Y} \int_0^X h(t, X) dX.$$

Преобразованный гамильтониан $\tilde{H}(t, X, Y)$ в новых переменных будет таким

$$\tilde{H}(t, \tilde{X}, \tilde{Y}) = H + S_t = H(t, X(t, \tilde{X}, \tilde{Y}), Y(t, \tilde{X}, \tilde{Y})) - A\tilde{Y},$$

$$A = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^X h(t, X) dX.$$

Здесь через A обозначен вытесненный через сечение X расход жидкости, равный уменьшению объема. Условие существования отображения $S_{X\tilde{Y}} = 1 + h(t, X) > 0$ означает, что верхняя граница не должна смыкаться с нижней (см. рис. 6.5).

Пример 4. Найти производящую функцию $S(q, P)$ для поворота на угол α

$$Q = q \cos \alpha + p \sin \alpha, \quad P = -q \sin \alpha + p \cos \alpha.$$

Решение. В формуле (6.3.5) $dS(q, P) = QdP + pdq$ переменные q и P — независимые. Выражаем через них Q и p

$$p = q \operatorname{tg} \alpha + P / \cos \alpha, \quad Q = q / \cos \alpha + P \operatorname{tg} \alpha.$$

и подставляем их в выражение для dS

$$dS = \left(\frac{q}{\cos \alpha} + P \operatorname{tg} \alpha \right) dP + \left(q \operatorname{tg} \alpha + \frac{P}{\cos \alpha} \right) dq \Rightarrow$$

$$S = \frac{qP}{\cos \alpha} + \frac{1}{2}(P^2 + q^2) \operatorname{tg} \alpha.$$

Отсюда видно, что при $\alpha = \pm\pi/2$ производящая функция не существует, т. е. каноническое преобразование $Q = p$, $P = -q$ нельзя представить через производящую функцию.

Пример 5. Привести гамильтониан $H = \frac{1}{2}p^2 - \varepsilon \cos t \sin q$ к стандартному виду (гамильтониан стандартного вида имеет множитель ε , см. (6.4.10)).

Решение. Выберем производящую функцию с таким расчетом, чтобы первое слагаемое при его преобразовании уничтожилось. Это достигается следующим выбором производящей функции $R(t, Q, p) = -\frac{1}{2}p^2 t - Qp$. Из выражения

(6.3.7) для ее полного дифференциала

$$dR = -PdQ - qdp + (\tilde{H} - H)dt = -pdQ - (pt + Q)dp - (p^2/2)dt$$

находим

$$p = P, \quad q = Pt + Q, \quad \tilde{H} = H - p^2/2 = -\varepsilon \cos t \sin(Pt + Q).$$

4. Отображение на фазовом потоке. Пусть дано $X(t), Y(t)$ решение уравнений системы с гамильтонианом $H(t, X, Y)$ при начальных условиях $X(t_0) = X_0, Y(t_0) = Y_0$. Отображение $(X_0, Y_0) \rightarrow (X(t), Y(t))$ называется *отображением на фазовом потоке системы с гамильтонианом $H(t, X, Y)$* .

Поставим задачу: по данному гамильтониану $H(t, X, Y)$ найти производящую функцию $S(t, X_0, Y)$ для отображения на фазовом потоке $(X_0, Y_0) \rightarrow (X, Y)$.

Решение можно получить, если дать поставленной задаче следующую эквивалентную формулировку. Даны два гамильтониана: исходный $H = 0$ с решением $X_0 = \text{const}, Y_0 = \text{const}$ и преобразованный $H(t, X, Y)$. Найти производящую функцию $S(t, X_0, Y)$ для отображения на фазовом потоке $(X_0, Y_0) \rightarrow (X, Y)$.

Исходя из выражения (6.3.5) для полного дифференциала производящей функции и полагая в нем $q = X_0, p = Y_0, H = 0$ и $Q = X, P = Y, H = H(t, X, Y)$, получим

$$dS(t, X_0, Y) = XdY + Y_0dX_0 + H(t, X, Y)dt \Rightarrow$$

$$X = S_Y(t, X_0, Y), \quad Y_0 = S_{X_0}(t, X_0, Y),$$

$$S_t(t, X_0, Y) = H(t, S_Y, Y).$$

Последнее соотношение называется уравнением Гамильтона-Якоби. В момент времени $t = t_0$ преобразование должно быть тождественным. Отсюда найдем начальное условие для производящей функции $S(t_0, X_0, Y) = X_0 Y$. Полученная задача Коши для функции S эквивалентна нахождению всех фазовых траекторий системы с гамильтонианом $H(t, X, Y)$.

5. Производящая функция Пуанкаре. Для автономной канонической замены переменных $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ Пуанкаре в своей книге 1889г. «Новые методы небесной механики» ([76] с. 191), показал, что дифференциальная форма

$$d\Phi = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} Q - q & P - p \\ dQ + dq & dP + dp \end{vmatrix}.$$

является полным дифференциалом (см. также [1]). Полный дифференциал определяет однозначную функцию полусумм $\frac{1}{2}(q + Q), \frac{1}{2}(p + P)$, если якобиева матрица $A = \partial(Q, P)/\partial(q, p)$ не имеет собственных значений равных -1 . Пуанкаре применял эту функцию для исследования характера устойчивости неподвижных точек отображения $(q, p) \rightarrow (Q, P)$. Он показал, что для устойчивости

неподвижной точки необходимо и достаточно, чтобы у функции Φ в неподвижной точке был локальный максимум или минимум. Кроме того, существование функции Пуанкаре не зависит от выбора координат q, p . Производящая функция Якоби S таким свойством не обладает, и ее существование зависит от выбора системы координат. Для одного и того же канонического преобразования производящая функция S в одной системе координат может существовать, а в другой нет. «Удручающая неинвариантность производящих функций» отмечается в монографии [1].

Однако, замечательные свойства функции Пуанкаре трудно использовать для проведения анализа гамильтоновой системы, так как в ней не выделены явно независимые аргументы. В работах [63], [64] эти недостатки снимаются с помощью параметризации канонического преобразования. Функция Пуанкаре обобщается для произвольных неавтономных канонических преобразований и выражается через независимые параметры.

Обобщение на неавтономные канонические преобразования можно получить, следуя работе [72]. В ней показано, что комбинация производящих функций (6.3.5) и (6.3.7)

$$\Phi = [S(t, q, P) - qP + R(t, Q, p) + Qp] / 2.$$

имеет следующий полный дифференциал

$$d\Phi = \frac{1}{2} \left| \begin{array}{cc} Q - q & P - p \\ dQ + dq & dP + dp \end{array} \right| + (\tilde{H} - H)dt. \quad (6.3.8)$$

При $dt = 0$ дифференциал $d\Phi$ совпадает с полным дифференциалом Пуанкаре.

6.3.6. Теория последования Пуанкаре для неавтономных гамильтоновых систем

1. Точки последования Пуанкаре. На траектории $\vec{R}\{X(t, t_0, X_0, Y_0), Y(t, t_0, X_0, Y_0)\}$, определяемой из решения системы (6.1.1), рассмотрим положения точек через интервалы времени, кратные периоду $\vec{R}_n\{X(t_n, t_0, X_0, Y_0), Y(t_n, t_0, X_0, Y_0)\}$, $t_n = t_0 + Tn$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Такие точки называют точками последования Пуанкаре (ТПП). Множество ТПП — это след частицы при киносъемке с частотой кадров, соответствующей периоду T . ТПП образует счетное множество точек на плоскости, которое зависит, вообще говоря, от t_0, X_0, Y_0 .

2. Отображения Пуанкаре. При периодической зависимости гамильтониана от времени множество ТПП может быть вычислено по рекуррентным формулам $\vec{R}_n = P_{t_0}^T(\vec{R}_{n-1})$, где $P_{t_0}^{\Delta t}$ ($\Delta t = t - t_0$) — отображение на фазовом потоке системы (6.1.1), или попросту решение задачи (6.1.1). Отображение за период $P_{t_0}^T$ называется отображением Пуанкаре. Поскольку в гамильтоновой системе

фазовый объем сохраняется, то и отображение Пуанкаре должно быть подчинено условию сохранения фазового объема. Математически это означает, что якобиан отображения Пуанкаре равен единице $\det(\partial\vec{R}_n/\partial\vec{R}_{n-1}) = 1$.

3. Инвариантная кривая. Если множество ТПП принадлежит одномерной линии, то такая линия называется инвариантной кривой. Следует отличать понятие инвариантной кривой от интегральной кривой. Интегральная кривая существует тогда, когда в системе есть первый интеграл. Тогда через каждую точку плоскости проходит интегральная кривая. Она же будет и инвариантной кривой, т. е. при наличии первого интеграла инвариантные кривые и интегральные кривые отождествляются. Ниже будут приведены примеры систем, в которых нет первого интеграла. В этом случае интегральных кривых нет, а инвариантные кривые могут быть. Они проходят не через каждую точку плоскости, могут заполнять плоскость или часть плоскости достаточно плотно, а часть плоскости совсем не заполнять.

4. Отображение Чирикова. Приведем пример рекуррентных соотношений, определяющих последовательность точек X_n, Y_n

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + K \sin Y_n \\ Y_{n+1} = Y_n + X_n + K \sin Y_n \end{cases}$$

Якобиан отображения $\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{pmatrix}$ вычисляется так

$$\frac{\partial X_{n+1}}{\partial X_n} \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial Y_n} - \frac{\partial X_{n+1}}{\partial Y_n} \frac{\partial Y_{n+1}}{\partial X_n} = 1 + K \cos Y_n - K \cos Y_n = 1.$$

Таким образом, представленное отображение с якобианом единица моделирует отображение Пуанкаре на фазовом потоке некоторой воображаемой гамильтоновой системы с периодическим во времени гамильтонианом. Это отображение введено Чириковым и называется стандартным отображением.

При $K = 0$ ТПП лежат на интегральных кривых $X_n = \text{const}$. При $K > 0$ первого интеграла для ТПП не существует, а есть только инвариантные кривые. При достаточно малых K они плотно заполняют фазовую плоскость. Показывается, что наибольший размер щели между инвариантными кривыми не превосходит трансцендентально малую величину порядка $e^{-C/\sqrt{K}}$, т. е. меньшую любой степени K [20].

На рис. 6.7 показаны ТПП для этого отображения при различных значениях параметра K . Начальные точки обозначены звездочкой. При $K = 1/2$ щели между инвариантными кривыми настолько малы, что на рисунке не заметны. Поэтому через любую начальную точку проходит инвариантная кривая, на которой располагаются все ТПП. Инвариантные кривые плотно покрывают фазовую плоскость также как и для интегрируемой системы. На периоде $Y \in [0, 2\pi)$

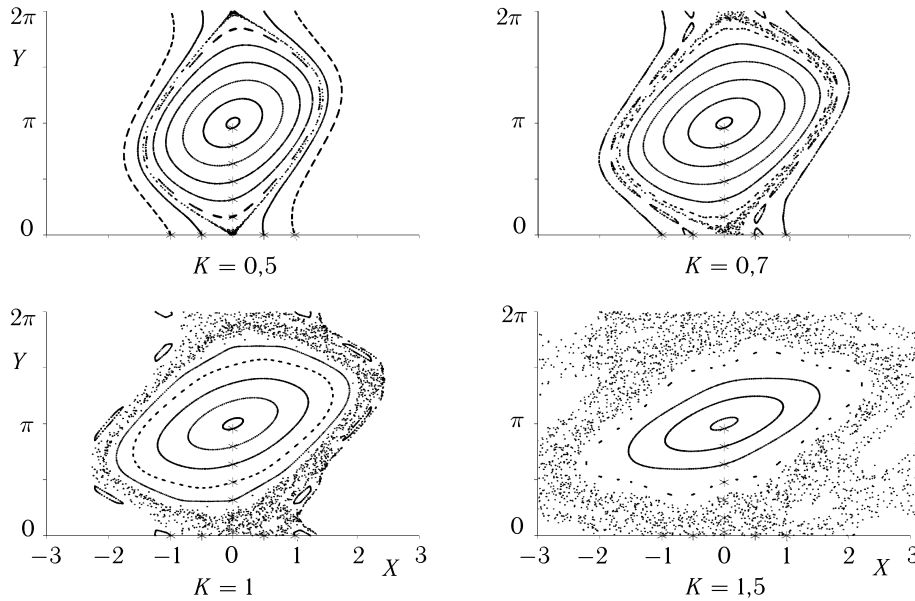


Рис. 6.7. Фазовые портреты отображения Чирикова

имеются две неподвижные точки: эллиптическая $X = 0, Y = \pi$ и гиперболическая $X = 0, Y = 0$. При $K = 0,7$ наблюдается хаотизация в окрестности гиперболической неподвижной точки. С ростом K хаотизация нарастает. Это типичная картина поведения ТПП на фазовой плоскости для любой гамильтоновой системы с периодическим во времени гамильтонианом.

6.4. Параметризация канонических преобразований

6.4.1. Определение и общие свойства параметризуемых канонических преобразований

1. Теорема о параметризации. Общий результат параметризации канонической замены переменных в гамильтоновых системах сформулируем в виде теоремы [72].

Теорема 1. Пусть преобразование переменных $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ записано в параметрической форме

$$\begin{cases} q = x - \frac{1}{2}\Psi_y \\ p = y + \frac{1}{2}\Psi_x \end{cases}, \quad \begin{cases} Q = x + \frac{1}{2}\Psi_y \\ P = y - \frac{1}{2}\Psi_x \end{cases}, \quad (6.4.1)$$

где $\Psi(t, x, y)$ — дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки t_0, x_0, y_0 .

Тогда 1) якобианы двух преобразований $q = q(t, x, y), p = p(t, x, y)$ и $Q = Q(t, x, y), P = P(t, x, y)$ тождественно равны

$$\frac{\partial(q, p)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(Q, P)}{\partial(x, y)} = J(t, x, y); \quad (6.4.2)$$

2) При $J(t_0, x_0, y_0) \neq 0$ существует окрестность точки t_0, x_0, y_0 , в которой преобразование (6.4.1) переменных $q, p \rightarrow Q, P$ переводит гамильтонову систему $H = H(t, q, p)$ в гамильтонову систему $\tilde{H} = \tilde{H}(t, Q, P)$ по следующему закону

$$\Psi_t(t, x, y) + H(t, q, p) = \tilde{H}(t, Q, P), \quad (6.4.3)$$

где аргументы q, p и Q, P в гамильтонианах H и \tilde{H} выражены через параметры x, y по (6.4.1).

Доказательство.

1) Вычисляем

$$\begin{aligned} \frac{\partial(q, p)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \Psi_{xy}\right) \left(1 + \frac{1}{2} \Psi_{xy}\right) + \frac{1}{4} \Psi_{xx} \Psi_{yy} = \\ &= 1 + \frac{1}{4} \left(\Psi_{xx} \Psi_{yy} - \Psi_{xy}^2\right). \end{aligned}$$

Аналогично вычисляется второй якобиан и он оказывается равный первому.

2) Доказательство второго пункта теоремы проведем с помощью критерия каноничности, согласно которому дифференциальная форма $\delta F = P\delta Q - p\delta q - (\tilde{H} - H)\delta t$ является полным дифференциалом некоторой функции $\delta F(t, x, y) = F_t \delta t + F_x \delta x + F_y \delta y$ (см. разд. 6.3.3).

Подставляем в дифференциальную форму δF вместо q, p и Q, P их выражения (6.4.1) через параметры x, y и заменяем $\tilde{H} - H$ на Ψ_t согласно (6.4.3). После очевидных преобразований получим

$$\begin{aligned} \delta F &= (y - \frac{1}{2} \Psi_x)(\delta x + \frac{1}{2} \Psi_{yt} \delta t + \frac{1}{2} \Psi_{yx} \delta x + \frac{1}{2} \Psi_{yy} \delta y) - \\ &- (y + \frac{1}{2} \Psi_x)(\delta x - \frac{1}{2} \Psi_{yt} \delta t - \frac{1}{2} \Psi_{yx} \delta x - \frac{1}{2} \Psi_{yy} \delta y) - \Psi_t \delta t = \\ &= y(\Psi_{yt} \delta t + \Psi_{yx} \delta x + \Psi_{yy} \delta y) - \Psi_x \delta x - \Psi_t \delta t = \delta(y \Psi_y - \Psi), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. В работах [67, 72] эта теорема доказана для гамильтоновых систем произвольного порядка.

Зададимся целью исследовать, для каких канонических преобразований существует параметризация.

2. Параметрическое представление производящей функции Пуанкаре.

Введенная функция $\Psi(t, x, y)$ есть параметрическое представление функции Пуанкаре (6.3.8). Действительно, в силу равенств

$$\begin{aligned} \Psi_y &= Q - q, & \Psi_x &= -(P - p), & \Psi_t &= \tilde{H} - H, \\ x &= (Q + q)/2, & y &= (P + p)/2 \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

полные дифференциалы функции Ψ и (6.3.8) совпадают $d\Psi = d\Phi$. Таким образом, функция Пуанкаре параметризована и теперь она зависит от двух независимых аргументов x, y и времени t : $\Phi = \Psi(t, x, y)$.

3. Отображение малой области. Выше в разд. 6.3.4 было рассмотрено отображение малой области канонического преобразования $Q(q, p), P(q, p)$, определяемое якобиевой матрицей A . Согласно представлению (6.4.1) матрица A равна произведению обратной матрицы A_-^{-1} отображения $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ и матрицы

A_+ отображения $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$

$$A = A_-^{-1} A_+, \quad A_{\pm} = E \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Psi_{xy} & \Psi_{yy} \\ -\Psi_{xx} & -\Psi_{xy} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь тождеством $A_-^{-1} = A_+ / J$ матрицу A можно представить в виде

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{J} (A_+)^2 = \frac{1}{J} \left[(2 - J)E + \begin{pmatrix} \Psi_{xy} & \Psi_{yy} \\ -\Psi_{xx} & -\Psi_{xy} \end{pmatrix} \right], \\ J &= 1 + \frac{1}{4} (\Psi_{xx} \Psi_{yy} - \Psi_{xy}^2). \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

Отсюда выражаем компоненты матрицы локального отображения через вторые производные функции Ψ и для сравнения через вторые производные производящей функции $S(t, q, P)$ (6.3.5)

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{2 - J}{J} + \frac{\Psi_{xy}}{J} = \frac{(S_{qP})^2 - S_{qq} S_{PP}}{S_{qP}} \\ A_{12} &= \frac{\Psi_{yy}}{J} = \frac{S_{PP}}{S_{qP}}, & A_{21} &= -\frac{\Psi_{xx}}{J} = -\frac{S_{qq}}{S_{qP}} \\ A_{22} &= \frac{2 - J}{J} - \frac{\Psi_{xy}}{J} = \frac{1}{S_{qP}} \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

Последнюю группу равенств можно получить, исходя из соотношений $Q = S_p$, $p = S_q$. Дифференциалы этих соотношений можно представить так

$$\begin{cases} dQ = A_{11} dq + A_{12} dp = A_{11} dq + A_{12} (S_{qq} dq + S_{qP} dP) = S_{qP} dq + S_{PP} dP, \\ dP = A_{21} dq + A_{22} dp = A_{21} dq + A_{22} (S_{qq} dq + S_{qP} dP) \end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты при dq , dP , получим систему уравнений

$$\begin{cases} A_{11} + A_{12}S_{qq} = S_{qP}, & A_{12}S_{qP} = S_{PP}, \\ A_{21} + A_{22}S_{qq} = 0, & A_{22}S_{qP} = 1. \end{cases}$$

Отсюда и получим требуемые равенства.

4. Локальное условие параметризуемости. Отображение малой окрестности $(\delta q, \delta p) \rightarrow (\delta Q, \delta P)$ с матрицей A имеет относительно поворотов системы координат два независимых инварианта

$$i_1 = (A_{11} + A_{22})/2, \quad i_2 = (A_{12} - A_{21})/2.$$

Для параметрического отображения J и $\Delta\Psi = \Psi_{xx} + \Psi_{yy}$ — также инварианты, так как они выражаются через инварианты i_1 и i_2 :

$$J = 2/(i_1 + 1), \quad \Delta\Psi = 4i_2/(i_1 + 1).$$

Если в какой либо точке $J(t, x, y) \neq 0$, то в окрестности этой точки параметрическое представление (6.4.1) определяет каноническое преобразование. И наоборот, если в окрестности некоторой точки преобразование $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ — каноническое и $i_1 \neq -1$, то в этой окрестности $J \neq 0$ и это преобразование представляется в виде (6.4.1). Условие существования параметрического представления канонического преобразования в окрестности некоторой точки назовем локальным условием его параметризуемости.

Пуанкаре из требования однозначной зависимости Φ от полусумм $\frac{1}{2}(q + Q)$ и $\frac{1}{2}(p + P)$ получил следующее условие. Корни характеристического уравнения $m^2 - 2i_1 m + 1 = 0$ не равны -1 . Оно эквивалентно полученному выше неравенству $i_1 \neq -1$.

5. Инвариантность параметризуемости. Условие параметризуемости выражается через инвариант матрицы i_1 и не зависит от выбора системы координат. В противоположность этому условие существования отображения с производящей функцией Якоби $S_{qP} > 0$ не инвариантно. Действительно, вследствие последнего соотношения (6.4.6) это условие можно представить в виде $A_{22} > 0$. Выполнение его зависит от выбора системы координат. В системе координат dq', dp' , повернутой на угол θ относительно осей dq, dp , это условие таково: $(A_{11} + A_{22}) - (A_{11} - A_{22}) \cos 2\theta + (A_{12} + A_{21}) \sin 2\theta > 0$.

6.4.2. Примеры параметризации

Если каноническое отображение $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ задано аналитически, то для него можно найти функцию $\Psi(x, y)$ и представить его в параметрическом виде (6.4.1). Переход к такому представлению назовем параметризацией. Приведем два примера параметризации отображений, заданных аналитически.

1. Преобразование поворота. Найти параметризацию для поворота на угол α : $q = Q \cos \alpha - P \sin \alpha$, $p = Q \sin \alpha + P \cos \alpha$.

Решение. Параметризация существует при $1 + i_1 = 1 + \cos \alpha \neq 0$. Отсюда следует, что на окружности $[0, 2\pi]$ исключается только одна точка $\alpha = \pi$. При $\alpha \neq \pi$ параметризация определяется так. Из (6.4.4) находим

$$\begin{aligned}x &= [Q(1 + \cos \alpha) - P \sin \alpha] / 2 = 2 \cos(\alpha/2) (Q \cos(\alpha/2) - P \sin(\alpha/2)), \\y &= [Q \sin \alpha + P(1 + \cos \alpha)] / 2 = 2 \cos(\alpha/2) (Q \sin(\alpha/2) + P \cos(\alpha/2)), \\ \Psi_x &= Q \sin \alpha - P(1 - \cos \alpha) = 2 \sin(\alpha/2) (Q \cos(\alpha/2) - P \sin(\alpha/2)), \\ \Psi_y &= Q(1 - \cos \alpha) + P \sin \alpha = 2 \sin(\alpha/2) (Q \sin(\alpha/2) + P \cos(\alpha/2)).\end{aligned}$$

Отсюда $\Psi_x = 2x \operatorname{tg}(\alpha/2)$, $\Psi_y = 2y \operatorname{tg}(\alpha/2)$ и находим функцию

$$\Psi(x, y) = (x^2 + y^2) \operatorname{tg}(\alpha/2), \quad \alpha \neq \pi.$$

Выше было показано, что производящие функции не существуют в двух точках на окружности $\pi/2, 3\pi/2$.

2. Отображение Чирикова. Найти параметрическое представление для однопараметрического семейства канонических преобразований Чирикова

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + K \sin Y_n, \\ Y_{n+1} = Y_n + X_n + K \sin Y_n. \end{cases}$$

Решение. Из критерия параметризуемости $i_1 + 1 = (\partial X_{n+1} / \partial X_n + \partial Y_{n+1} / \partial Y_n) / 2 + 1 = 2 + (K/2) \cos Y_n > 0$ получим, что параметризация существует на всей бесконечной плоскости переменных X_n, Y_n при $|K| < 4$. Функция Ψ определяется из уравнения

$$d\Psi = \frac{1}{2}(X_{n+1} - X_n)d(Y_n + Y_{n+1}) - \frac{1}{2}(Y_{n+1} - Y_n)d(X_n + X_{n+1}).$$

Выражая X_{n+1}, Y_{n+1} через независимые переменные X_n, Y_n , получим

$$\begin{aligned}d\Psi &= \frac{1}{2}K \sin Y_n d(X_n + K \sin Y_n + 2Y_n) - \frac{1}{2}(X_n + K \sin Y_n) d(2X_n + K \sin Y_n) = \\ &= -\frac{1}{2}K \sin Y_n dX_n + K \sin Y_n dY_n - X_n dX_n - \frac{1}{2}X_n d(K \sin Y_n) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\Psi = -\frac{1}{2}X_n^2 - \frac{1}{2}KX_n \sin Y_n - K \cos Y_n,$$

$$x = X_n + \frac{1}{2}K \sin Y_n, \quad y = \frac{1}{2}X_n + Y_n + \frac{1}{2}K \sin Y_n.$$

Ее можно можно представить как функцию x, y сходящимся при $|K| < 4$ рядом

$$\begin{aligned}\Psi(x, y, K) &= -\frac{1}{2}x^2 - K \cos(y - \frac{1}{2}x) - \frac{1}{8}K^2 \sin^2(y - \frac{1}{2}x) + \\ &+ \frac{1}{32}K^3 \cos(y - \frac{1}{2}x) \sin^2(y - \frac{1}{2}x) \dots\end{aligned} \quad (6.4.7)$$

Из (6.4.1) находим требуемое параметрическое представление отображения

Чирикова

$$\begin{cases} X_n = x - \frac{1}{2}\Psi_y \\ Y_n = y + \frac{1}{2}\Psi_x \end{cases}, \quad \begin{cases} X_{n+1} = x + \frac{1}{2}\Psi_y \\ Y_{n+1} = y - \frac{1}{2}\Psi_x \end{cases},$$

Диапазоны параметра K , при котором существуют производящие функции $S(X_n, Y_{n+1})$ и $R(X_{n+1}, Y_n)$ зависят от системы координат, в которой она вычисляется. Так функция $S(X_n, Y_{n+1})$ существует при $\partial Y_{n+1}/\partial Y_n = 1 + K \cos Y_n > 0$, т. е. при $|K| < 1$. Если же повернуть систему координат на 90° , диапазон параметра K определится из неравенства $\partial X_{n+1}/\partial X_n = 1 > 0$, т. е. производящая функция другой пары переменных $R(X_{n+1}, Y_n)$ будет существовать при всех значениях параметра K . Находится она с помощью (6.3.7) $dR = -Y_{n+1}dX_{n+1} - X_n dY_n$. Подставляем сюда $Y_{n+1} = Y_n + X_{n+1}$ и $X_n = X_{n+1} - K \sin Y_n$

$$\begin{aligned} dR &= -(Y_n + X_{n+1})dX_{n+1} - (X_{n+1} - K \sin Y_n)dY_n \Rightarrow \\ R &= -Y_n X_{n+1} - \frac{1}{2}X_{n+1}^2 - K \cos Y_n. \end{aligned}$$

Таким образом, существование производящей функции зависит от удачного выбора системы координат. Параметризация же существует во всех системах координат.

Ниже будет показано еще одно замечательное свойство функции $\Psi(x, y)$. Она приближает инвариантные кривые для последовательности точек отображения Пуанкаре.

6.4.3. Параметризация отображений на фазовом потоке гамильтоновой системы

1. Постановка задачи построения отображения. Поставим задачу: найти отображение $X(t_0), Y(t_0) \rightarrow X(t), Y(t)$ на фазовом потоке системы с заданным гамильтонианом $H(t, X, Y)$. Выше был рассмотрен метод ее решения с помощью производящей функции. Ее также можно решать методом генератора Ли [28].

Можно предложить третий весьма эффективный параметрический метод [63,64,67–70,72]. Поставленная задача эквивалентна определению канонического преобразования переводящего гамильтониан $H = 0$ в данный гамильтониан $H(t, X, Y)$. Применяя формулы (6.4.1), (6.4.3) теоремы 1 о параметризации канонического преобразования, получим искомое отображение

$$\begin{cases} X_0 = x - \frac{1}{2}\Psi_y \\ Y_0 = y + \frac{1}{2}\Psi_x \end{cases}, \quad \begin{cases} X = x + \frac{1}{2}\Psi_y \\ Y = y - \frac{1}{2}\Psi_x \end{cases}, \quad (6.4.8)$$

в котором функция Ψ должна определяться из решения задачи Коши

$$\Psi_t(t, x, y) = H \left(t, x + \frac{1}{2}\Psi_y, y - \frac{1}{2}\Psi_x \right), \quad \Psi(t_0, x, y) = 0. \quad (6.4.9)$$

2. Алгоритм построения отображения Пуанкаре для гамильтоновой системы стандартного вида. Гамильтонова система называется *системой стандартного вида*, если ее гамильтониан представим в виде сходящегося на интервале $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ ряда ¹

$$H(t, X, Y, \varepsilon) = \varepsilon H_1(t, X, Y) + \varepsilon^2 H_2(t, X, Y) + \varepsilon^3 H_3(t, X, Y) + \dots, \quad (6.4.10)$$

Для таких систем решение задачи (6.4.9) для Ψ можно представить в виде ряда по ε . Отсюда вытекает следующий алгоритм построения отображения Пуанкаре.

Алгоритм 1. Пусть гамильтониан с периодом по времени T системы (6.1.1) имеет стандартный вид (6.4.10), где все коэффициенты H_1, H_2, H_3, \dots — дважды непрерывно дифференцируемы в открытой области. Тогда решение системы на периоде $t \in (t_0, t_0 + T)$ определяется в параметрическом виде (6.4.8), в котором функция Ψ имеет разложение

$$\begin{aligned} \Psi(t, x, y, \varepsilon) &= \varepsilon \Psi_1 + \varepsilon^2 \Psi_2 + \varepsilon^3 \Psi_3 + O(\varepsilon^4), \\ \Psi_1(t, x, y) &= \int_{t_0}^t H_1 dt, \quad \Psi_2(t, x, y) = \int_{t_0}^t [H_2 - \frac{1}{2}\{H_1, \Psi_1\}] dt, \\ \Psi_3(t, x, y) &= \int_{t_0}^t [H_3 - \frac{1}{2}(\{H_2, \Psi_1\} + \{H_1, \Psi_2\}) + \\ &+ \frac{1}{8}(H_{1xx} \Psi_{1y} \Psi_{1y} - 2H_{1xy} \Psi_{1x} \Psi_{1y} + H_{1yy} \Psi_{1x} \Psi_{1x})] dt, \dots, \end{aligned} \quad (6.4.11)$$

ТПП вычисляются по рекуррентным формулам

$$\begin{cases} X_{n-1} = x - \frac{1}{2}\Psi_y \\ Y_{n-1} = y + \frac{1}{2}\Psi_x \end{cases}, \quad \begin{cases} X_n = x + \frac{1}{2}\Psi_y \\ Y_n = y - \frac{1}{2}\Psi_x \end{cases}, \quad (6.4.12)$$

где функции Ψ имеет аргументы $\Psi(t_0 + T, x, y)$.

Фигурными скобками обозначены скобки Пуассона $\{g, h\} = g_y h_x - g_x h_y$.

Для того, чтобы найти коэффициенты Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 , достаточно разложить уравнение (6.4.9) по степеням ε в виде $\varepsilon \dot{f}_1 + \varepsilon^2 \dot{f}_2 + \dots = 0$ и записать равенства $\dot{f}_1 = 0, \dot{f}_2 = 0, \dots$

3. Алгоритм построения отображения для автономной гамильтоновой системы. Построение параметрического отображения на фазовом потоке автономной гамильтоновой системы с гамильтонианом $H(X, Y)$ сводится к решению

¹К стандартному виду приводятся также гамильтонианы $H = H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \dots$, если H_0 не зависит от X или Y (см. пример 5 в разд. 6.3.5, п. 3).

задачи Коши

$$\Psi_t(t, x, y) = H\left(x + \frac{1}{2}\Psi_y, y - \frac{1}{2}\Psi_x\right), \quad \Psi(0, x, y) = 0, \quad (6.4.13)$$

которая отличается от (6.4.9) тем, что функция \bar{H} явно не зависит от времени. В этом случае решение обладает симметрией и формулы (6.4.11) для коэффициентов ряда существенно упростятся. Этот результат сформулируем в виде теоремы [63, 66, 67, 72].

Теорема 2. Пусть гамильтониан $H(X, Y)$ явно не зависит от времени. Тогда, если существует решение задачи (6.4.13) $\Psi(t, x, y)$ на полуинтервале $0 \leq t < t_0$, то существует и решение на всем интервале $|t| \leq t_0$ нечетное по аргументу t , т. е. $\Psi(t, x, y) = -\Psi(-t, x, y)$.

Доказательство. Для автономной гамильтоновой системы имеет место интеграл $H(X, Y) = H(X_0, Y_0)$. Пусть $\Psi(t, x, y)$ — решение (6.4.9). Тогда, определяя решение ОДУГ в параметрическом виде (6.4.8) и подставляя его в интеграл, получим

$$H\left(x + \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial y}, y - \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) = H\left(x - \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial y}, y + \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)$$

при $0 \leq t < t_0$. С учетом этого равенства после замены $t = -\bar{t}$, $\Psi = -\bar{\Psi}$ задача Коши (6.4.13) не изменится

$$\bar{\Psi}_{\bar{t}}(\bar{t}, x, y) = H\left(\bar{t}, x + \frac{1}{2}\bar{\Psi}_y, y - \frac{1}{2}\bar{\Psi}_x, \varepsilon\right), \quad \bar{\Psi}(0, x, y) = 0.$$

Следовательно существует решение $\bar{\Psi}(\bar{t}, x, y) = -\Psi(-t, x, y)$ на отрицательном полуинтервале и функция $\Psi(t, x, y)$ — нечетная, что и требовалось доказать.

Следствие. Решение задачи Коши (6.4.13) представляется рядом по нечетным степеням t . С точностью до t^5 функция Ψ имеет вид

$$\Psi = tH(x, y) + (t^3/24) \left[H_{xx}H_y^2 - 2H_{xy}H_xH_y + H_{yy}H_x^2 \right] + O(t)^5. \quad (6.4.14)$$

Отсюда вытекает алгоритм асимптотического построения ТПП для решения (6.1.1) по данному автономному гамильтониану.

Алгоритм 2. Пусть гамильтониан $\bar{H}(X, Y, \varepsilon)$ явно не зависит от времени и имеет стандартный вид (6.4.10), где все коэффициенты $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{H}_3, \dots$ — дважды непрерывно дифференцируемы в открытой области. Тогда ТПП в моменты времени $t_n = t_0 + nT$, $n = 0, 1, 2, \dots$ вычисляются по рекуррентным формулам (6.4.12), где функция $\bar{\Psi}$ имеет разложение

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(x, y, \varepsilon) = & \varepsilon T \bar{H}_1(x, y) + \varepsilon^2 T \bar{H}_2(x, y) + \varepsilon^3 T \bar{H}_3(x, y) + \\ & + \varepsilon^3 (T^3/24) \left[\bar{H}_{1xx} \bar{H}_{1y}^2 - 2\bar{H}_{1xy} \bar{H}_{1x} \bar{H}_{1y} + \bar{H}_{1yy} \bar{H}_{1x}^2 \right] + O(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (6.4.15)$$

Для вывода разложения (6.4.15) используем метод «замораживания» пара-

метра. Запишем разложение гамильтониана (6.4.10) в виде $\bar{H} = \varepsilon \tilde{H}(X, Y, \varepsilon_1)$, $\tilde{H} = \bar{H}_1 + \varepsilon_1 \bar{H}_2 + \varepsilon_1^2 \bar{H}_3 + \dots$ и подставим его в уравнение (6.4.13). С помощью замены $\tau = \varepsilon(t - t_0)$ задача Коши (6.4.13) приведет к виду

$$\Psi_\tau(\tau, x, y) = \tilde{H}\left(x + \frac{1}{2}\Psi_y, y - \frac{1}{2}\Psi_x\right), \quad \Psi(0, x, y) = 0,$$

который отличается от (6.4.13) только заменой t и H на $\tau = \varepsilon(t - t_0)$ и \tilde{H} . Следовательно, и решение ее можно получить из разложения (6.4.14) этими же заменами

$$\bar{\Psi} = \varepsilon T \tilde{H}(x, y, \varepsilon_1) + \frac{1}{24}(\varepsilon T)^3 [\tilde{H}_{xx} \tilde{H}_y^2 - 2\tilde{H}_{xy} \tilde{H}_x \tilde{H}_y + \tilde{H}_{yy} \tilde{H}_x^2] + O(\varepsilon T)^5.$$

Отсюда, «размораживая» параметр $\varepsilon_1 = \varepsilon$, получим разложение (6.4.15), что и требовалось.

Алгоритм решения обратной задачи построения автономного гамильтониана по данному отображению

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{pmatrix}$$

будет описан в разд. 6.5.2 п. 2.

6.5. Асимптотические методы исследования гамильтоновых систем

6.5.1. Краткие сведения об асимптотических методах

1. Общая задача метода возмущений. гамильтоновых систем состоит в следующем. Пусть имеется интегрируемая система с гамильтонианом $H_0(t, q, p)$. Рассматривается возмущенная гамильтонова система $H(t, q, p) = H_0(t, q, p) + \varepsilon H_1(t, q, p) + \dots$ при достаточно малом значении параметра ε , решение которой на достаточно большом отрезке времени требуется изучить. Для изучения таких задач развиты методы, которые объединяют под общим названием «теория возмущений». Ниже излагаются краткие сведения классической теории возмущений. Более подробно с этой теорией можно ознакомиться по монографиям [1,3,26–28]. Излагается также аппарат асимптотической теории с помощью параметризации канонических преобразований, недавно разработанный в статьях [64,66,67–70,72–74].

2. Задача метода усреднения. Пусть дан гамильтониан стандартного вида T — периодический по времени. Нужно найти каноническую замену $q, p \rightarrow Q, P$ так, чтобы в разложении нового гамильтониана до k -го члена разложения не содержалось времени. Тогда в новых переменных система с точностью до $K + 1$ -го порядка будет автономной и, следовательно, интегрируемой. Ниже

изложен классический метод решения этой задачи с помощью производящей функции. Он назван *алгоритмом последовательного исключения времени*. Для сравнения приведен также параметрический метод усреднения.

3. Алгоритм последовательного исключения времени. Опишем алгоритм на примере следующего гамильтониана $H = \varepsilon(\frac{1}{2}P^2 - \cos t \sin q)$. Система с этим гамильтонианом описывает движение твердой сферической частицы в жидкости под действием стоячей акустической волны [57]. Координата частицы q определяется из уравнения $\ddot{q} = \varepsilon^2 \cos t \cos q$.

Производящая функция $S(t, q, P, \varepsilon)$, определяющая каноническую замену $(q, p) \rightarrow (Q, P)$, связана с преобразованным гамильтонианом \bar{H} уравнением (6.3.6)

$$S_t + H(t, q, S_q) = \bar{H}(S_p, P).$$

Будем искать производящую функцию и преобразованный гамильтониан в виде рядов

$$\begin{aligned} S(t, q, P, \varepsilon) &= qP + \varepsilon S_1(t, q, P) + \varepsilon^2 S_2(t, q, P) + \varepsilon^3 S_3(t, q, P) + \dots, \\ \bar{H}(q, P, \varepsilon) &= \varepsilon \bar{H}_1(q, P) + \varepsilon^2 \bar{H}_2(q, P) + \varepsilon^3 \bar{H}_3(q, P). \end{aligned}$$

Коэффициенты S_1, S_2, \dots будем искать в виде сумм тригонометрических гармоник периода, кратного $T = 2\pi$. Раскладывая уравнение в ряд по ε и собирая члены при одинаковой степени по ε , получим уравнения первого, второго и третьего приближений

$$\begin{aligned} \varepsilon^1 : \quad S_{1t} + \frac{1}{2}P^2 - \cos t \sin q &= \bar{H}_1(q, P) \Rightarrow \\ \bar{H}_1 &= \frac{1}{2}P^2, \quad S_{1t} = \cos t \sin q \Rightarrow S_1 = \sin t \sin q. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 : \quad S_{2t} + H_{1P} S_{1q} &= \bar{H}_2(q, P) \Rightarrow \\ S_{2t} + P \sin t \cos q &= \bar{H}_2(q, P) \Rightarrow \\ S_2 &= P \cos t \cos q, \quad \bar{H}_2 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 : \quad S_{3t} + H_{1P} S_{2q} + H_{2P} S_{1q} + \frac{1}{2} H_{1PP} S_{1q}^2 &= \bar{H}_3(q, P) \Rightarrow \\ S_{3t} - P^2 \cos t \sin q + \frac{1}{2} \sin^2 t \cos^2 q &= \bar{H}_3(q, P) \Rightarrow \\ \bar{H}_3 &= \frac{1}{4} \cos^2 q, \quad S_{3t} = P^2 \sin q \cos t + \frac{1}{4} \cos^2 q \cos 2t \Rightarrow \\ S_3 &= P^2 \sin q \sin t + \frac{1}{8} \cos^2 q \sin 2t. \end{aligned}$$

Собирая все члены разложения, получаем преобразованный автономный гамильтониан и уравнения для замены переменных с точностью до ε^4

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \varepsilon \frac{1}{2} P^2 + \varepsilon^3 \frac{1}{4} \cos^2 Q + \dots, \\ S &= qP + \varepsilon \sin t \sin q + \varepsilon^2 P \cos t \cos q + \varepsilon^3 (P^2 \sin q \sin t + \frac{1}{8} \cos^2 q \sin 2t) + \dots \end{aligned}$$

Уравнения замены переменных:

$$\begin{aligned} Q &= S_p = q + \varepsilon^2 \cos t \cos q + 2\varepsilon^3 P \sin q \sin t, \\ p &= S_q = P + \varepsilon \sin t \cos q - \varepsilon^2 P \cos t \sin q + \\ &\quad + \varepsilon^3 (P^2 \cos q \sin t - \frac{1}{8} \sin 2q \sin 2t) + \dots \end{aligned}$$

Для ТПП в моменты времени $t = 2\pi n$ имеем

$$\begin{aligned} Q_n &= q_n + \varepsilon^2 \cos q_n, \\ p_n &= P_n - \varepsilon^2 P_n \sin q_n. \end{aligned}$$

Точки Q_n, P_n с точностью до ε^4 приближаются интегральными кривыми

$$\varepsilon \frac{1}{2} P_n^2 + \varepsilon^3 \frac{1}{4} \cos^2 Q_n = C.$$

В исходных переменных точки q_n, p_n приближаются кривыми

$$\varepsilon \frac{P_n^2}{2(1 - \varepsilon^2 \sin^2 q_n)} + \varepsilon^3 \frac{1}{4} \cos^2(q_n + \varepsilon^2 \cos q_n) = C.$$

4. Параметрический метод усреднения. Усредненный гамильтониан $\bar{H}(q, p)$ можно найти из равенства $\Psi(t_0 + T, x, y) = \bar{\Psi}(x, y)$, в котором функции Ψ и $\bar{\Psi}$ представляются разложениями (6.4.11) и (6.4.15). В этом случае ТПП в моменты времени $t_n = t_0 + Tn$, $n = 0, 1, 2, \dots$ для гамильтоновых систем H и \bar{H} совпадают. Для неинтегрируемых систем добиться точного равенства нельзя. Для систем стандартного вида (6.4.10) можно удовлетворить равенству с любой асимптотической точностью по малому параметру и найти с соответствующей точностью усредненный гамильтониан. Во втором приближении из равенства разложений (6.4.11) и (6.4.15) найдем

$$\begin{aligned} \bar{H}(x, y) &= \frac{1}{T} \Psi(t_0 + T, x, y) + O(\varepsilon^3) = \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left[\varepsilon H_1 + \varepsilon^2 \left(H_2 - \frac{1}{2} \left\{ H_1, \int_{t_0}^t H_1 dt \right\} \right) \right] dt + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (6.5.1)$$

Последнее равенство совпадает с известной общей формулой для усредненного гамильтониана [11]. Кратко ее можно записать так

$$\bar{H}(x, y) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left(H - \frac{1}{2} \left\{ H, \int_{t_0}^t H dt \right\} \right) dt + O(\varepsilon^3).$$

Покажем на рассмотренном примере $H = \varepsilon(\frac{1}{2}p^2 - \cos t \sin q)$ как вычислить с помощью (6.5.1) усредненный гамильтониан с точностью до ε^3 .

Потребуем, чтобы для гамильтоновых систем H и \bar{H} совпадали ТПП в моменты времени $t_n = 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда

$$\bar{H}(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(H - \frac{1}{2} \left\{ H, \int_{t_0}^t H dt \right\} \right) dt + O(\varepsilon^3) = \frac{1}{2} \varepsilon p^2 + O(\varepsilon^3).$$

Усредненный гамильтониан с более высокой точностью ε^4 вычисляется так. Вычисляем коэффициенты разложения (6.4.11)

$$H_1(t, x, y) = \frac{1}{2} y^2 - \cos t \sin x, \quad H_2 = H_3 = 0,$$

$$\Psi_1(t, x, y) = \int_0^t H_1(t, x, y) dt = \frac{1}{2} y^2 t - \sin t \sin x,$$

$$-\frac{1}{2} \{H_1, \Psi_1\} = \frac{1}{2} y \sin t \cos x - \frac{1}{2} (\cos t \cos x) y t,$$

$$\Psi_2(t, x, y) = -\frac{1}{2} \int_0^t \{H_1, \Psi_1\} dt = \left(-\cos t - \frac{1}{2} t \sin t + 1 \right) y \cos x,$$

Вычисляем коэффициенты Ψ_1 , Ψ_2 и Ψ_3 в момент времени 2π

$$-\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{H_1, \Psi_2\} dt = \frac{3}{2} \pi y^2 \sin x + \frac{3}{8} \pi \cos^2 x,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 H_1(t, x, y)}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \Psi_1(t, x, y)}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 H_1(t, x, y)}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \Psi_1(t, x, y)}{\partial y} \right)^2 \right) dt = \\ = \frac{\pi}{8} (\cos^2 x) + \frac{\pi}{2} y^2 \sin x \end{aligned}$$

Коэффициент Ψ_3 равен сумме последних двух интегралов. Отсюда находим три первых коэффициента разложения

$$\Psi_1(2\pi, x, y) = \pi y^2, \quad \Psi_2(2\pi, x, y) = 0,$$

$$\Psi_3(2\pi, x, y) = (\pi/2) \cos^2 x + 2\pi y^2 \sin x.$$

С учетом $\bar{H}_1(x, y) = y^2/2$ и $\bar{H}_{1xx}\bar{H}_{1y}^2 - 2\bar{H}_{1xy}\bar{H}_{1x}\bar{H}_{1y} + \bar{H}_{1yy}\bar{H}_{1x}^2 = 0$ разложение (6.4.15) примет вид

$$\bar{\Psi}(x, y, \varepsilon) = 2\pi\bar{H}(x, y, \varepsilon).$$

Из равенства его $\Psi(2\pi, x, y, \varepsilon) = \varepsilon\pi y^2 + \varepsilon^3\pi((\cos^2 x)/2 + 2y^2 \sin x)$ найдем усредненный гамильтониан с точностью до ε^4

$$\bar{H} = \varepsilon p^2/2 + \varepsilon^3 \left(p^2 \sin q + (\cos^2 q)/4 \right).$$

Уравнение инвариантных кривых для ТПП сразу находим в исходных переменных

$$\overline{H}(q_n, p_n) = c,$$

которое очевидно с точностью до ε^4 совпадает с найденным в п. 4. данного раздела.

5. Метод Пуанкаре-Цейпеля. Предположим, что гамильтониан приведен к виду $H = H_0(p) + \varepsilon H_1(t, q, p) + \dots$, в котором невозмущенный гамильтониан зависит только от одной переменной. Тогда можно поставить задачу: найти каноническую замену $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ приводящую гамильтониан к виду, в котором все слагаемые до k -го приближения включительно зависят от одной переменной P . Алгоритм этого метода описан, например, в [28]. Ниже будут приведены более эффективные методы построения решения для таких систем. Один из них — это приведение гамильтониана к стандартному виду и применение метода усреднения. Второй метод инвариантной нормализации.

6. Метод нормальной формы Биркгофа. Идея приведения гамильтоновых систем к нормальным формам восходит к Линдштедту и Пуанкаре. В гамильтоновой системе нормальная форма гамильтониана называется нормальной формой Биркгофа [10]. Наиболее компактное определение этой формы можно найти в [13]. Во всех случаях порождаемый гамильтониан выбирается в виде простейшей квадратичной формы для линейной колебательной системы, а определение нормальной формы привязывается к выбору порождаемого гамильтониана и имеет неинвариантный характер [1–3, 10, 13].

Определения зависят от вида гамильтониана и вводятся по разному для резонансного и не резонансного, автономного и неавтономного случаев.

Например, в монографии [1] вводится такое определение нормальной формы для системы с одной степенью свободы в простейшем нерезонансном случае.

Нормальной формой Биркгофа степени s для гамильтониана называется многочлен степени s от канонических координат Q, P , являющийся в действительности многочленом от переменной $\rho = (Q^2 + P^2)/2$

$$H_{2m} = a_1 \rho + a_2 \rho^2 + \dots + a_m \rho^m, \quad \rho = (Q^2 + P^2)/2.$$

В литературе наиболее распространены два способа построения канонических замен, приводящих систему к нормальной форме. Один способ основан на использовании производящих функций. Так поступал Биркгоф [10]. При другом способе вместо производящих функций применяются генераторы Ли. Этот способ удобнее, поскольку не требует обращения степенных рядов, что является необходимым в случае производящих функций. Среди аналитических методов метод нормальной формы является наиболее надежным и точным. Он приме-

няется для весьма тонких исследований, когда другими методами добиться желаемого результата нельзя. Однако, приведение гамильтониана к нормальной форме — это сложная задача и требует проведения больших выкладок. Описание соответствующих алгоритмов приведено в цитируемой выше литературе.

Ниже излагается недавно разработанный В.Ф. Журавлевым метод инвариантной нормализации гамильтонианов, который значительно сокращает выкладки. Он основан на универсальном характере определения нормальной формы, единым для всех случаев.

7. Метод инвариантной нормализации гамильтониана по Журавлеву.

В [28, 29] предложен общий критерий нормальной формы Биркгофа для возмущенного гамильтониана $\bar{H}(t, q, p, \varepsilon) = H_0(t, q, p) + \bar{F}(t, q, p, \varepsilon)$,
 $\bar{F}(t, q, p, \varepsilon) = \varepsilon \bar{F}_1(t, q, p) + \varepsilon^2 \bar{F}_2(t, q, p) + \dots$

Определение. Возмущенный гамильтониан имеет нормальную форму тогда и только тогда, когда возмущение является первым интегралом невозмущенной части $\frac{\partial F}{\partial t} + \{H_0, F\} = 0$, где $\{f, g\} = \int_p g_q - \int_q g_p$ — скобки Пуассона.

Преимущество такого определения перед известными [1, 10, 13, 2, 3] обусловлено тремя причинами.

Причина 1. Решение полной системы дифференциальных уравнений Гамильтона с гамильтонианом в нормальной форме получается суперпозицией решений невозмущенной системы и решения системы с автономным гамильтонианом, равным $F(0, q, p, \varepsilon)$. Этот результат сформулирован в [29] в виде теоремы

Теорема Журавлева. Если система с гамильтонианом \bar{H} удовлетворяет условию нормальной формы, то для построения общего решения соответствующих уравнений Гамильтона, достаточно:

А. найти общее решение порождающей системы с гамильтонианом $H_0(t, p, q)$;
 Б. найти общее решение системы, определяемой только возмущением $F(0, p, q, \varepsilon)$, при условии, что в этой системе явно входящее в гамильтониан время положено равным нулю.

Тогда общее решение исходной неавтономной системы представляется композицией в произвольном порядке полученных решений (вместо произвольных постоянных в решении второй системы подставляются решения первой или наоборот).

Причина 2. Инвариантный характер критерия позволяет осуществлять нормализацию без предварительного упрощения невозмущенной части и без разделения на случаи автономный — неавтономный, резонансный — нерезонансный.

Причина 3. Асимптотики нормальной формы и замены переменных, приводящей гамильтониан к нормальной форме, находятся последовательными квадратурами от известных на каждом шаге функций (см. алгоритм инвариантной нормализации в разд. 6.5.4).

8. Теория последования Пуанкаре. Выше было даны понятия точек последования Пуанкаре ТПП. Вычисление ТПП можно проводить через отображение Пуанкаре за период. Их вычисление значительно проще, чем вычисление всей траектории движения. Вместе с тем ТПП определяют все основные свойства гамильтоновой системы. Нахождение периодической траектории сводится к определению неподвижной точки отображения Пуанкаре. Устойчивость периодического движения соответствует устойчивости неподвижной точки.

6.5.2. Исследование систем стандартного вида с помощью параметризации отображения Пуанкаре

1. Построение инвариантных кривых по параметризованной функции Пуанкаре. Если отображение параметризовано, т. е. представлено в виде (6.4.12) и функция Ψ содержит малый множитель ε , то, по крайней мере, до четвертого порядка ε^4 инвариантная кривая ТПП приближается уравнением $\Psi(X_n, Y_n) = \text{const}$. Покажем это, следуя работе [72].

Лемма. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до третьего порядка, когда $-a \leq x \leq a$. Тогда

$$f(a) - f(-a) = 2(a f'(0) + R_3), \quad R_3 = (a^3/6) f'''(\theta a), \quad -1 \leq \theta \leq 1. \quad (6.5.2)$$

Доказательство проведем с помощью двух тождеств Коши

$$\frac{d}{dt} \left(f(ta) + a(1-t)f'(ta) + \frac{a^2(1-t)^2}{2} f''(ta) \right) = \frac{a^3(1-t)^2}{2} f'''(ta).$$

$$\frac{d}{dt} \left(f(ta) - a(1+t)f'(ta) + \frac{a^2(1+t)^2}{2} f''(ta) \right) = \frac{a^3(1+t)^2}{2} f'''(ta).$$

Интегрируя первое тождество в пределах от 0 до 1, а второе — от (-1) до 0

$$f(a) - f(0) - a f'(0) - \frac{a^2}{2} f''(0) = \frac{a^3}{2} \int_0^1 (1-t)^2 f'''(ta) dt$$

$$f(0) - f(-a) - a f'(0) + \frac{a^2}{2} f''(0) = \frac{a^3}{2} \int_{-1}^0 (1-t)^2 f'''(ta) dt$$

и складывая их, получим

$$f(a) - f(-a) - 2a f'(0) = R_3, \quad R_3 = \frac{a^3}{4} \int_{-1}^1 (1-|t|)^2 f'''(ta) dt.$$

Отсюда по теореме о среднем получим

$$R_3 = \frac{a^3}{4} f'''(\theta a) \int_{-1}^1 (1-|t|)^2 dt = \frac{a^3}{6} f'''(\theta a),$$

что и требовалось доказать.

Теперь легко установить теорему.

Теорема 3. Пусть векторы $\begin{pmatrix} X_{n-1} \\ Y_{n-1} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$ определяются параметрическими соотношениями

$$\begin{cases} X_{n-1} = x - \frac{a}{2}\Phi_y \\ Y_{n-1} = y + \frac{a}{2}\Phi_x \end{cases}, \quad \begin{cases} X_n = x + \frac{a}{2}\Phi_y \\ Y_n = y - \frac{a}{2}\Phi_x \end{cases}, \quad (6.5.3)$$

где $\Phi(x, y)$ — трижды непрерывно дифференцируема в области Ω . Тогда в этой области

$$\begin{aligned} \Phi(X_n, Y_n, K) - \Phi(X_{n-1}, Y_{n-1}, K) &= \frac{a^3}{3} f'''(\theta a), \\ f(a) &= \Phi\left(x + \frac{a}{2}\Phi_y, y - \frac{a}{2}\Phi_x\right). \end{aligned} \quad (6.5.4)$$

Теорема 3 непосредственно вытекает из леммы, так как левая часть равенства равна $f(a) - f(-a)$ и $f'(0) = 0$. Оценка теоремы 3 неумлучшаема, что видно из следующего примера.

Пример. Построить инвариантные кривые последовательности точек Чирикова при $q_n < \sqrt{K}$ с точностью до малых порядка K^2

$$q_n = q_{n-1} + K \sin p_{n-1}, \quad p_n = q_{n-1} + K \sin p_{n-1} + p_{n-1}. \quad (6.5.5)$$

Решение. Сделаем замены: $q_n = \sqrt{K}X_n$, $p_n = Y_n$. Тогда рекуррентные соотношения Чирикова преобразуются в соотношения (6.5.3) теоремы 3, где параметр $a = \sqrt{K}$, а функция Φ выражается через функции (6.4.7) $\Phi(x, y, K) = \Psi(\sqrt{K}x, y, K)/K$. Ее разложение по малому параметру K таково

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, K) &= -\left(\frac{1}{2}x^2 + \cos y\right) - \frac{1}{2}(x \sin y)\sqrt{K} + \\ &+ \frac{1}{8}(x^2 \cos y - \sin^2 y)K + O(K^{3/2}). \end{aligned}$$

Находим функцию $f(a)$ и ее третью производную

$$\begin{aligned} f(a) &= -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}a \sin y\right)^2 - \cos\left(y + \frac{1}{2}ax\right) + \dots, \\ \frac{d^3 f}{da^3} &= -\left(\frac{1}{2}x\right)^3 \sin\left(y + \frac{1}{2}ax\right) + \dots \end{aligned}$$

По теореме 3 получим оценку

$$|\Phi(X_n, Y_n, K) - \Phi(X_{n-1}, Y_{n-1}, K)| \leq \frac{K^{3/2} X_n^3}{24} + O(K^2).$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим уравнение инвариантной кривой $\Psi(q_n, p_n) = \text{const}$ с асимптотической по малому K оценкой

$$|\Psi(q_n, p_n, K) - \Psi(q_{n-1}, p_{n-1}, K)| \sim (K/24)q_n^3, \quad (6.5.6)$$

где функция Ψ определяется формулой (6.4.7). Из оценки следует, что при небольших значениях K и q_n точки последования Чирикова лежат на кривых близ-

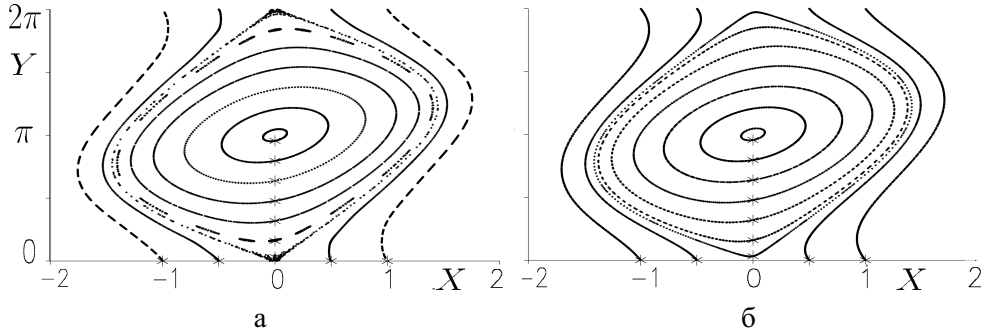


Рис. 6.8. Инвариантные кривые последовательности Чирикова при $K = 1/2$. а – точный расчет, б – асимптотическое выражение (6.4.7)

ких к $\Psi(q_n, p_n) = \text{const}$. Это видно также из приведенного рис. 6.8. На рис. 6.8,а приведены точки q_n, p_n при $n = 0, 1, \dots, 500$, рассчитанные по точным рекуррентным формулам. Начальные положения точек q_0, p_0 отмечены крестиками. На рис. 6.8,б приведены соответствующие им аналитические кривые $\Psi(q_n, p_n) = \text{const}$.

Оценку (6.5.6), полученную из теоремы 3, можно проверить непосредственно, подставив в левую часть выражение функции Ψ (6.4.7)

$$\begin{aligned} \Psi(q_n, p_n, K) - \Psi(q_{n-1}, p_{n-1}, K) &= \\ &= \Psi\left(x + \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, y - \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, K\right) - \Psi\left(x - \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, y + \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, K\right) = \\ &= \sin\left(y - \frac{x}{2}\right) \left(2 \sin \frac{x}{2} - x\right) K + \frac{1}{8} \sin(2y - x) (x - \sin x) K^2. \end{aligned}$$

Отсюда, с помощью неравенств $|x - 2 \sin(x/2)| < x^3/24$ и $|x - \sin x| < x^3/6$, где $x = (q_n + q_{n-1})/2$, получаем оценку

$$|\Psi(q_n, p_n, K) - \Psi(q_{n-1}, p_{n-1}, K)| < (2|K| + K^2)(\max|q|)^3/48,$$

которая для малых K согласуется с (6.5.6).

Перейдем к изложению алгоритма построения автономного гамильтониана по данному отображению. Это обратная задача к задаче, решение которой дается следующим алгоритмом.

2. Алгоритм построения автономного гамильтониана по параметризованному отображению Пуанкаре. Пусть $\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ – последовательность точек, определяемых с помощью рекуррентных соотношений

(6.5.3). Тогда асимптотическое разложение

$$F(X, Y, a) = \Phi(X, Y) - \frac{a^2}{24} \left[\Phi_{xx} \Phi_y^2 - 2\Phi_{xy} \Phi_x \Phi_y + \Phi_{yy} \Phi_x^2 \right] + O(a^3) \quad (6.5.7)$$

определяет инвариантную поверхность для этой последовательности точек, так что $F(X_n, Y_n, a) - F(X_{n-1}, Y_{n-1}, a) = O(a^4)$.

Доказательство. Задача, решаемая предложенным алгоритмом обратная к задаче построения отображения Пуанкаре по автономному гамильтониану. Также как и при решении прямой задачи будем исходить из уравнения (6.4.14). Полагая в нем $\tau = a$, $\bar{\Psi} = a\Phi$ и разрешая это уравнение относительно \bar{H} с точностью до $O(a^3)$, получим для $F(X, Y, a) = \bar{H}/a$ требуемое разложение (6.5.7). Инвариантные кривые будут асимптотически приближены интегралом автономной гамильтоновой системы $\bar{F}(X_n, Y_n, a) = \text{const}$. Первый член этого ряда — функция $\Phi(x, y)$, для которой приведена оценка порядка a^3 (6.5.4) теоремы 3. С учетом следующего члена ряда эта оценка будет иметь порядок a^4 и так далее.

Пример. Найти инвариантную кривую для последовательности точек Чирикова (6.5.5) в более высоком приближении по сравнению с найденным в примере п. 1 данного раздела.

Решение. Представим решение сразу в исходных переменных, не выделяя малого параметра. Из (6.5.7) получим следующее разложение для автономного гамильтониана, соответствующему отображению Чирикова $H(x, y, K) = H^{(1)} + H^{(3)} + \dots$, $H^{(1)} = \Psi(x, y, K)$,

$$\begin{aligned} H^{(3)} = & -\frac{1}{24}x^2 \cos\left(y - \frac{1}{2}x\right) K + \\ & + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{4}x^2 \cos(2y - x) + \sin^2\left(y - \frac{1}{2}x\right)\right) K^2 - \\ & - \frac{1}{8 \times 24}\left(\cos\left(y - \frac{1}{2}x\right) - \cos\left(3y - \frac{3}{2}x\right)\right) K^3. \end{aligned}$$

Здесь $\Psi(x, y, K)$ определена формулой (6.4.7). Уравнение $H(q_n, p_n) = \text{const}$ приближает инвариантные кривые в более точном приближении по сравнению с уравнением $\Psi(q_n, p_n) = \text{const}$.

3. Исследование устойчивости неподвижных точек по отображению Пуанкаре. Выше было установлено, что параметризованная функция Пуанкаре $\Psi(x, y)$ содержащая малый множитель ε , по крайней мере, до ε^4 совпадает с гамильтонианом автономной системы. Таким образом ТПП с этой точностью можно определять из решения системы уравнений Гамильтона с гамильтонианом $\Psi(X, Y)$. Для автономной системы известны условия существования положения равновесия и устойчивости (см., например [28]). В окрестности точки равновесия $\Psi_X = \Psi_Y = 0$ гамильтониан определяется квадратичной формой $\Psi_{xx}\xi^2 + 2\Psi_{xy}\xi\eta + \Psi_{yy}\eta^2$. Если функция Ψ в точке равновесия имеет локальный максимум или минимум, то равновесие устойчиво. Это условие записывается

так

$$\Psi_{xx}\Psi_{yy} - (\Psi_{xy})^2 > 0.$$

В окрестности такой точки интегральные кривые $H = const$ — эллипсы. Поэтому эти точки называются эллиптическими точками. В противоположном случае

$$\Psi_{xx}\Psi_{yy} - (\Psi_{xy})^2 < 0$$

интегральные кривые в окрестности равновесия — гиперболы. Точка равновесия неустойчива.

Иногда полезно провести анализ устойчивости неподвижной точки с помощью линеаризованного отображения Пуанкаре. Оно определяется матрицей A и выражается через матрицу гессiana Ψ по (6.4.6). В окрестности неподвижной точки ТПП $\vec{z}_n = \begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix}$ определяются из линейного соотношения $\vec{z}_{n+1} = A\vec{z}_n$. Его решение имеет вид

$$\vec{z}_n = (m_1)^n \vec{a}_1 + (m_2)^n \vec{a}_2,$$

где m_1 и m_2 — собственные значения, \vec{a}_1, \vec{a}_2 — собственные векторы матрицы A . Они находятся из уравнения $A\vec{z} = m\vec{z}$.

Характеристическое уравнение системы

$$\begin{vmatrix} A_{11} - m & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - m \end{vmatrix} = m^2 - 2i_1 m + 1 = 0, \quad 2i_1 = A_{11} + A_{22}.$$

Корни действительные при $|i_1| > 1$. Так как $m_1 m_2 = 1$, то один из корней будет больше 1 и, следовательно, $|\vec{z}_n| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Неподвижная точка — неустойчива. Используя связь (6.4.6) матриц A и Ψ легко показать, что это условие эквивалентно неравенству $\Psi_{xx}\Psi_{yy} - (\Psi_{xy})^2 < 0$, которое было получено выше.

В противоположном случае $|i_1| < 1$ корни m_1 и m_2 — комплексно сопряженные числа по модулю равные единице. В этом случае неподвижная точка устойчива. Собственные значения m_1 и m_2 называются характеристическими множителями. Если $|m_1| > 1$, то $|m_1| = \lim |z_{n+1}/z_n|$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, характеристический множитель $|m| > 1$ определяет относительное увеличение вектора z_n .

Пример. Найти, с точностью до ε^6 , ТПП в моменты времени $t_n = 2\pi n$ для неавтономного нелинейного уравнения второго порядка $\ddot{q} = \varepsilon^2 \cos t \cos q$.

Решение. Построение решения с точностью до ε^4 было приведено в 6.5.1 методами усреднения. Решение этой же задачи с точностью до ε^6 удобнее получить, исходя из иной функции Гамильтона $H = \frac{1}{2}p^2 - \delta \cos t \sin q$. Уравнения Гамильтона имеют вид $\dot{q} = p$, $\dot{p} = \delta \cos t \cos q \Rightarrow \ddot{q} = \delta \cos t \cos q$. При $\delta = \varepsilon^2$

получаем исходное уравнение. Для достижения заданной точности достаточно найти два приближения по параметру δ .

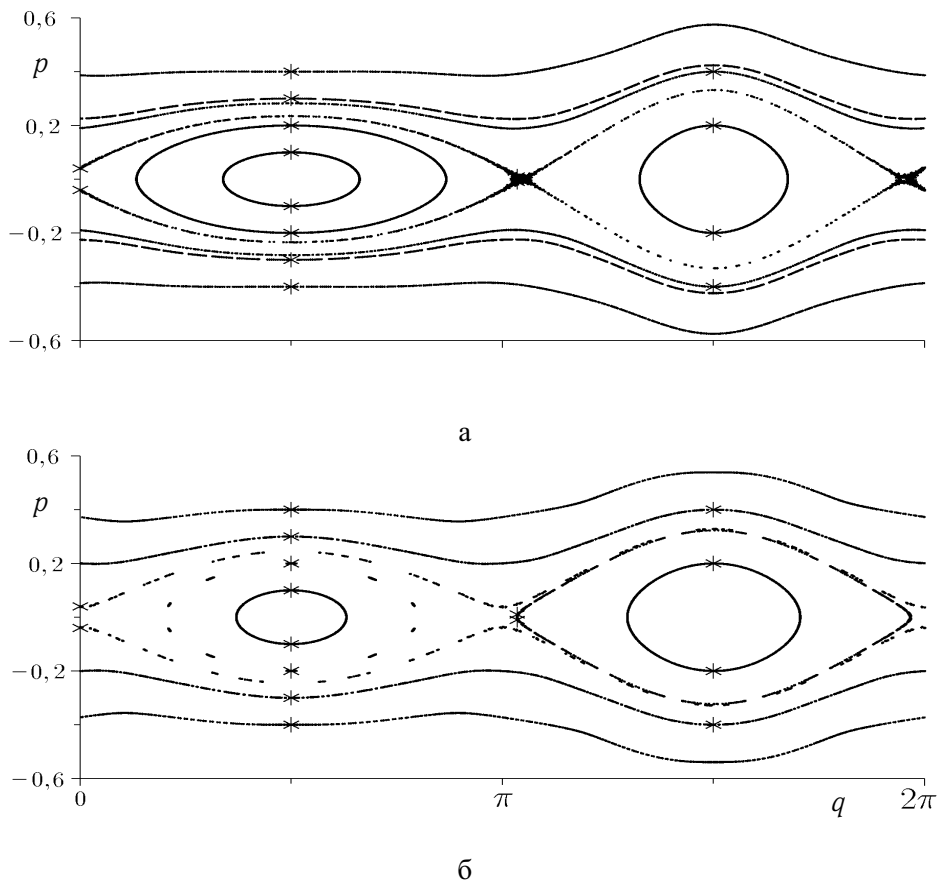


Рис. 6.9. Точки ГПП. а — численный расчет, б — аналитическое решение

Канонической заменой $q = u + v(t - \pi)$, $p = v$ приводим гамильтониан к стандартной форме $H = -\delta \cos t \sin(u + vt - v\pi)$. С помощью (6.4.11) и (6.4.12) получим решение для Ψ в моменты времени кратные периоду $t = 2\pi n$

$$\Psi = \varepsilon^2 \Psi_1(x, y) + \varepsilon^4 \Psi_2(x, y) + O(\varepsilon^6),$$

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, y) &= \frac{2y}{1-y^2} \sin x \sin \pi y, & \Psi_2(x, y) &= \frac{\pi(1+y^2)}{4(1-y^2)^2} + \frac{y(1+y^2) \sin 2y\pi}{2(1-y^2)^3} + \\ &+ \frac{\pi y^2 (\cos 2y\pi - \cos 2x)}{2(1-y^2)^2} + \frac{1-3y^2-2y^4}{8y(1-y^2)^3} \sin(2y\pi) \cos 2x \end{aligned}$$

и рекуррентные соотношения для ТПП

$$\begin{cases} q_{n-1} = -\pi p_{n-1} + x - \frac{1}{2}\Psi_y \\ p_{n-1} = y + \frac{1}{2}\Psi_x \end{cases}, \quad \begin{cases} q_n = \pi p_n + x + \frac{1}{2}\Psi_y \\ p_n = y - \frac{1}{2}\Psi_x \end{cases},$$

Асимптотические решения позволяют легко провести качественный анализ ТПП: найти неподвижные точки, исследовать характер их устойчивости, найти сепаратрисы. На рис. 6.9,а приведены ТПП при $\varepsilon = 0,4$, найденные численным расчетом исходных дифференциальных уравнений, и на рис. 6.9,б — построенные по аналитическим формулам. Крестиками обозначены положения точки в момент времени $t = 0$, точками — в моменты времени $t = 2\pi n$, $n = 1, 2, \dots, 500$. При небольшом увеличении ε наблюдается хаотизация. Картины хаотического расположения ТПП, найденные численно и аналитически, близки друг к другу.

6.5.3. Сравнение параметрического метода и метода производящих функций

1. Построение отображения Пуанкаре методом производящих функций.

Метод производящих функций используется для канонических преобразований [1, 28]. Этот же аппарат можно применить для построения отображения Пуанкаре. Рассмотрим задачу Коши (6.1.1) для системы с одной степенью свободы. Отображение $X_0, Y_0 \rightarrow X, Y$, сохраняющее фазовый объем, представляется через производящую дифференцируемую функцию смешанных переменных вида $S(t, X_0, Y) = X_0 Y + \tilde{S}(t, X_0, Y)$ в виде соотношения

$$X = X_0 + \partial \tilde{S} / \partial Y, \quad Y_0 = Y + \partial \tilde{S} / \partial X_0 \quad (6.5.8)$$

При выполнении условия

$$1 + \partial^2 \tilde{S} / \partial X_0 \partial Y > 0 \quad (6.5.9)$$

систему можно разрешить относительно X, Y , что дает в результате представление отображения с якобианом, равном единице. Если производящую функцию \tilde{S} определить из уравнения Гамильтона-Якоби

$$\tilde{S}_t(t, X_0, Y) = H(t, X_0 + \tilde{S}_Y(t, X_0, Y), Y), \quad \tilde{S}(0, X_0, Y) = 0, \quad (6.5.10)$$

то отображение (6.5.8) будет решением гамильтоновой системы (6.1.1).

Для системы стандартного вида (6.4.10) функция \tilde{S} представляется рядом по степеням ε . Любое конечное число членов разложения будет определять отображение, у которого фазовый объем будет точно сохраняться. В этом состоит удобство применения метода производящих функций. Однако, в этом методе есть существенные недостатки. Отметим два из них (см. ниже пример гармонического осциллятора).

1. Отображения вида (6.5.8) не являются универсальными. (Например, по-

ворот на 90° в виде (6.5.8) не представим. Для такого отображения нужно в производящей функции выбрать другую пару переменных, но тогда в этих переменных нельзя представить тождественное преобразование [1, 28].)

2. Условие разрешимости существенно ограничивает диапазон изменения параметра ε . Кроме того, это условие (6.5.9) не инвариантно по отношению к преобразованию поворота декартовых координат на фазовой плоскости [1].

Предлагаемая новая схема параметрического представления отображения, свободна от этих недостатков.

2. Преимущества параметрического отображения. В параметрическом методе функция $\Psi(t, x, y)$ играет роль производящей функции. Так же как и в методе производящих функций, $\Psi(t, x, y)$ определяется из уравнения типа Гамильтона-Якоби. Любая конечная сумма первых членов ряда по ε для Ψ будет давать отображение, сохраняющее фазовый объем точно при условии $J > 1$.

Однако у параметрического метода выше был отмечен ряд преимуществ перед методом производящих функций. Они состоят в следующем.

1° Через производящую функцию нельзя выразить отображения очень простого вида. Например, через $S(X_0, Y)$ нельзя выразить поворот на 90° (отображение $X = Y_0, Y = -X_0$). Это отображение можно выразить через производящую функцию с другой парой переменных, но тогда через нее нельзя представить тождественное отображение. Параметрическое представление в этом смысле более универсально.

2° Условие разрешимости (6.5.9), вообще говоря, зависит от выбора декартовой системы координат X, Y , тогда как в параметрическом методе условие $J > 0$ инвариантно по отношению к поворотам координат X, Y .

3° В приближениях одинаковой по малому параметру ε точности диапазон изменения параметра ε , удовлетворяющего условию $J > 0$, существенно шире по сравнению с диапазоном изменения параметра ε , удовлетворяющего условию $1 + \partial^2 \bar{S} / \partial X_0 \partial Y > 0$.

4° Коэффициенты Ψ_n ряда $\Psi = \varepsilon \Psi_1 + \varepsilon^2 \Psi_2 + \dots$ существенно меньше коэффициентов ряда S_n для производящей функции.

5° Для автономной системы функция Ψ представляется рядом по нечетным степеням ε .

6° С точностью до ε^3 отображение за время t и усредненный гамильтониан связаны простым соотношением $\Psi = t\bar{H}(x, y)$.

Покажем преимущества параметрического метода на примере, в котором отображение находится точно.

3. Вынужденные колебания линейного осциллятора. Гамильтониан имеет следующий вид

$$H = \varepsilon \left[\frac{1}{2}(X^2 + Y^2) + Xb \sin(t_0 + t) \right].$$

Система уравнений точно интегрируется (см. разд. 6.2, п. 3) и координаты X_n, Y_n точек последования через период в моменты времени $t_n = 2\pi n$ таковы:

$$\begin{aligned} X_n - X_c &= (X_{n-1} - X_c) \cos(2\pi\varepsilon) + (Y_{n-1} - Y_c) \sin(2\pi\varepsilon), \\ Y_n - Y_c &= -(X_{n-1} - X_c) \sin(2\pi\varepsilon) + (Y_{n-1} - Y_c) \cos(2\pi\varepsilon), \\ X_c &= \frac{b\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \sin t_0, \quad Y_c = \frac{b\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \cos t_0. \end{aligned}$$

Точки последования лежат на окружности с центром X_c, Y_c с угловым расстоянием друг от друга $2\pi\varepsilon$.

Параметрический метод дает

$$\Psi(x, y) = \operatorname{tg} \pi\varepsilon [(x - X_c)^2 + (y - Y_c)^2], \quad J = 1/\cos^2(\pi\varepsilon) > 0.$$

Согласно методу производящих функций имеем

$$\begin{aligned} S(X_{n-1}, Y_n) &= \frac{1 - \cos 2\pi\varepsilon}{\cos 2\pi\varepsilon} (X_{n-1} - X_c)(Y_n - Y_c) + \\ &+ \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\pi\varepsilon [(X_{n-1} - X_c)^2 + (Y_n - Y_c)^2], \\ 1 + S_{XY} &= \frac{1}{\cos 2\pi\varepsilon} > 0. \end{aligned}$$

На рассмотренном примере легко убедиться во всех вышеперечисленных преимуществах $1^\circ - 6^\circ$ параметрического метода перед методом производящих функций. Дополнительно к этому можно заметить, что

- а) формула для Ψ короче, чем для S ;
- б) радиусы сходимости рядов по степеням ε для Ψ в два раза больше радиусов сходимости рядов для S (в параметрическом методе допускаются повороты до 180° , а в методе производящих функций только до 90°);
- в) коэффициенты ряда Ψ_n примерно в 2^n раз меньше коэффициента S_n ; соответственно для остаточных членов этих рядов r_n и R_n имеем $r_n = 2^{-n} R_n$.

6.5.4. Алгоритм инвариантной нормализации гамильтониана с помощью параметризации

Выше в разд. 6.5.1, п. 7 уже было сформулировано определение В.Ф. Журавлева инвариантной нормальной формы. Автор определения предложил эффективный алгоритм вычисления нормальной формы, в котором замена переменных находится методом генератора Ли с помощью формул Кэмбела-Хаусдорфа. В этом методе нужно построить автономный гамильтониан некоторой вспомогательной системы, фазовый поток которой и определяет необходимую замену. Метод можно применять для автономных гамильтоновых систем. Если же сис-

тема неавтономна, то ее нужно привести к автономному виду в расширенном фазовом пространстве.

Здесь излагается модификация метода инвариантной нормализации, предложенная в работах [69, 74]. В них используется замена переменных в параметрической форме. Алгоритм применяется непосредственно к неавтономной системе. Показывается, что для автономных систем в модифицированном алгоритме параметрическая функция Пуанкаре и производящий гамильтониан в алгоритме Журавлева совпадают в первых двух приближениях.

1. Вывод гомологической цепочки. Покажем, как уравнение (6.4.1) теоремы о параметризации свести к гомологической цепочке уравнений, аналогичных цепочке уравнений Журавлева [28, 30].

Пусть дан гамильтониан $H(t, q, p) = H_0(t, q, p) + F(t, q, p, \varepsilon)$, $F(t, q, p, \varepsilon) = \varepsilon F_1(t, q, p) + \varepsilon^2 F_2(t, q, p) + \dots$, который требуется привести к нормальной форме. Пусть $\bar{H}^{(k)}(t, Q, P, \varepsilon) = H_0(t, Q, P) + \bar{F}^{(k)}(t, Q, P, \varepsilon)$ — асимптотика k -го порядка нормальной формы $\bar{F}^{(k)}(t, q, p, \varepsilon) = \varepsilon \bar{F}_1(t, Q, P) + \dots + \varepsilon^k \bar{F}_k(t, Q, P)$ с канонической заменой (6.4.1) и

$$\Psi^{(k)}(t, x, y, \varepsilon) = \varepsilon \Psi_1(t, x, y) + \dots + \varepsilon^k \Psi_k(t, x, y)$$

асимптотика k -го порядка функции $\Psi(t, x, y, \varepsilon)$ в (6.4.1). Тогда асимптотика $\Psi^{(k)}$ будет удовлетворять уравнению (6.4.3), которое можно записать так:

$$\begin{aligned} \partial \Psi^{(k)} / \partial t + H_0(t, x - \frac{1}{2} \Psi_y^{(k)}, y + \frac{1}{2} \Psi_x^{(k)}) - H_0(t, x + \frac{1}{2} \Psi_y^{(k)}, y - \frac{1}{2} \Psi_x^{(k)}) + \\ + F^{(k)}(t, x - \frac{1}{2} \Psi_y^{(k)}, y + \frac{1}{2} \Psi_x^{(k)}) = \bar{F}^{(k)}(t, x + \frac{1}{2} \Psi_y, y - \frac{1}{2} \Psi_x). \end{aligned}$$

Если H_0 — полином не выше второй степени по q и p . Тогда это уравнение приведет к виду

$$\begin{aligned} \partial \Psi^{(k)} / \partial t + \{H_0, \Psi^{(k)}\} + R^{(k)} = \bar{F}^{(k)}, \\ R^{(k)} = \varepsilon R_1 + \varepsilon^2 R_2 + \dots + \varepsilon^k R_k = \\ = F(t, x - \frac{1}{2} \Psi_y, y + \frac{1}{2} \Psi_x) - \bar{F}^{(k)}(t, x + \frac{1}{2} \Psi_y, y - \frac{1}{2} \Psi_x) + \bar{F}^{(k)}(t, x, y). \end{aligned}$$

Отсюда следует цепочка уравнений для определения коэффициентов разложения канонических замен Ψ_i и нормализованных гамильтонианов \bar{F}_i

$$\begin{aligned} \partial \Psi_i / \partial t + \{H_0, \Psi_i\} + R_i = \bar{F}_i, \\ \partial \bar{F}_i / \partial t + \{H_0, \bar{F}_i\} = 0, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.5.11)$$

Здесь функции R_i вычисляются последовательно по формулам

$$R_1 = F_1, \quad R_2 = F_2 + \frac{1}{2} \{F_1 + \bar{F}_1, \Psi_1\}, \dots \quad (6.5.12)$$

Аналогичная цепочка уравнений (6.5.11) получена в [28, 30]; уравнения названы

гомологическими. Их можно записать в следующей форме

$$R_i = \bar{F}_i - d\Psi_i/dt, \quad d\bar{F}_i/dt = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (6.5.13)$$

Здесь полные производные d/dt вычисляются по правилу дифференцирования сложных функций $\Psi_i(t, x, y), F_i(t, x, y)$, в которых $x(t)$ и $y(t)$, как функции времени определяются из решения задачи для невозмущенной системы с гамильтонианом $H_0(t, x, y)$

$$\dot{x} = H_{0y}, \quad \dot{y} = -H_{0x}, \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \quad (6.5.14)$$

2. Решение гомологических уравнений. Если в (6.5.13) вместо x и y подставить решение системы (6.5.14), то из второго уравнения (6.5.13) следует, что функция \bar{F}_i не зависит от времени t . Тогда интеграл по времени первого уравнения будет иметь вид

$$\int_{t_0}^t R_i(t) dt = (t - t_0)\bar{F}_i(t_0, x_0, y_0) + \Psi_i(t_0, x_0, y_0) - \Psi_i(t, x, y). \quad (6.5.15)$$

Он и дает ключ к полному решению проблемы: квадратура (6.5.15) определяет нормальную форму и функции Ψ_i в замене переменных (6.4.1).

К сожалению, представить интеграл от функции R_i в виде (6.5.15) единственным образом не всегда возможно. Единственность будет, если функция R_i после подстановки в нее решения (6.5.14) окажется квазипериодической (суммой периодических по t функций). В этом случае интеграл от R_i равен линейной функции и квазипериодической $f(t)$. Из $f(t)$ можно вычесть не зависящую от времени среднюю часть $\bar{f}(t)$ и отнести ее ко второму слагаемому правой части (6.5.15). Представление (6.5.15) тогда будет единственным образом определять $\bar{F}_i(t_0, x_0, y_0)$ и функцию $\Psi_i(t_0, x_0, y_0)$ с нулевым средневременным значением $\overline{\Psi(t, x(t), y(t))} = 0$. Условие квазипериодичности R_i накладывает на параметры ограничения, при которых существует нормальная форма. Сформулируем полученный результат.

Асимптотики k -го приближения нормальной формы и замены переменных, приводящей к ней, существуют и единственны, если после подстановки решения (6.5.14) в функции $R_i, i = 1, 2, \dots, k$, они окажутся квазипериодическими по времени функциями. Тогда в правой части интеграла (6.5.15) $\bar{F}_i(t_0, x_0, y_0)$ — коэффициент линейного по t слагаемого, $\bar{\Psi}_i(t_0, x_0, y_0)$ — не зависящее от времени слагаемое.

3. Сравнение алгоритма Журавлева и модифицированного алгоритма. Отличие приведенного здесь алгоритма от [28, 30] показано в таблице 6.1

Таблица 6.1

Настоящий алгоритм	Алгоритм [28, 30]
Исходная система $H(t, q, p)$ — не автономна	Система $H(q, p)$ — автономна Исходная система сводится к автономной с повышением порядка
Функция $\Psi(t, \varepsilon, x, y)$	Производящий гамильтониан $G(\varepsilon, Q, P)$
Каноническая замена ищется в параметрической форме (6.4.1)	Каноническая замена ищется на фазовом потоке гамильтоновой системы

Связь производящего гамильтониана G и функции Ψ устанавливается так. В методе Журавлева замена $q, p \rightarrow Q, P$ ищется на фазовом потоке гамильтоновой системы

$$dX/d\tau = G_Y, \quad dY/d\tau = -G_X. \quad (6.5.16)$$

При $\tau = 0 : X(0) = q, Y(0) = p$; а при $\tau = \varepsilon : X(\varepsilon) = Q, Y(\varepsilon) = P$, где τ вспомогательный параметр $0 \leq \tau \leq \varepsilon$ — аналог времени t .

Эта же замена в настоящем алгоритме осуществляется с помощью параметризации. Функция Ψ , определяющая отображение на фазовом потоке гамильтоновой системы (6.5.16), будет определяться из уравнения

$$\Psi_\tau(\tau, x, y) = G(x + \frac{1}{2}\Psi_y, y - \frac{1}{2}\Psi_x), \quad \Psi(0, x, y) = 0.$$

С точностью до $\tau^3 = \varepsilon^3$ получим $\Psi = \varepsilon G$. Поэтому асимптотики $\Psi_1 = G_0, \Psi_2 = G_1$ первых двух приближений в обоих методах совпадают, а следовательно R_1, R_2 в обоих методах также тождественны. Остальные приближения для R_3, R_4, \dots будут отличаться. Хотя сама нормальная форма от выбора метода не зависит.

4. Алгоритм инвариантной нормализации для асимптотического определения последовательности точек Пуанкаре. Предложенный выше алгоритм позволяет найти асимптотику общего решения k -го порядка. Алгоритм допускает еще большее упрощение для периодических во времени гамильтонианов. В этом случае полезно получить не траектории движения $q(t), p(t)$, а выделить на ней последовательность точек $q_m = q(Tm), p_m = p(Tm)$ в кратные периоду T моменты времени $t = t_m = Tm, m = 0, 1, 2, \dots$. Эту последовательность точек на траектории будем называть точками последования Пуанкаре или сокращенно ТПП.

Асимптотическое решение для ТПП строится так. Из квадратур (6.5.15) при $i = 1, \dots, k$ находим функции $\tilde{F}_i(0, Q, P)$ и $\Psi_i(0, x, y)$. Причем последнюю квадратуру можно упростить, полагая в (6.5.15) $t_0 = 0$. Таким образом, находим

асимптотики k -го приближения

$$\begin{aligned}\bar{F}^{(k)}(0, Q, P, \varepsilon) &= \varepsilon \bar{F}_1(0, Q, P) + \dots + \varepsilon^k F_k(0, Q, P), \\ \bar{\Psi}^{(k)}(0, x, y, \varepsilon) &= \varepsilon \bar{\Psi}_1(0, x, y) + \dots + \varepsilon^k \Psi_k(0, x, y)\end{aligned}$$

После этого применяется теорема Журавлева.

Пусть $Q(Tm, a, b)$, $P(Tm, a, b)$ – ТПП невозмущенной системы.

Пусть $X(Tm, Q_0, P_0)$, $Y(Tm, Q_0, P_0)$ – ТПП, найденные из решения системы уравнений

$$\dot{X} = \frac{\partial}{\partial Y} \bar{F}^{(k)}(0, X, Y, \varepsilon), \quad \dot{Y} = -\frac{\partial}{\partial X} \bar{F}^{(k)}(0, X, Y, \varepsilon), \quad X(0) = Q_0, \quad Y(0) = P_0.$$

Тогда ТПП Q_m, P_m полной гамильтоновой системы в новых переменных Q, P получаются подстановкой $a = X(Tm, Q_0, P_0)$, $b = Y(Tm, Q_0, P_0)$ в функции $Q(Tm, a, b)$, $P(Tm, a, b)$, $m = 0, 1, \dots$

В исходных переменных ТПП находится с помощью параметрической замены с функцией $\bar{\Psi}^{(k)}(0, x, y, \varepsilon)$. В этой замене параметры x, y можно исключить, выразив их через q, p

$$\begin{aligned}x(q, p) &= q + \frac{1}{2}\Psi_p(q, p) + \frac{1}{4}\{\Psi, \Psi_p\} + \dots, \\ y(q, p) &= p - \frac{1}{2}\Psi_q(q, p) - \frac{1}{4}\{\Psi, \Psi_q\} + \dots\end{aligned}$$

Новые переменные выражаются через старые так $Q = 2x(q, p) - q$, $P = 2y(q, p) - p$.

В результате получим связь новых переменных со старыми

$$\begin{aligned}Q(q, p) &= q + \Psi_p(q, p) + \frac{1}{2}\{\Psi, \Psi_p\} + \dots, \\ P(q, p) &= p - \Psi_q(q, p) - \frac{1}{2}\{\Psi, \Psi_q\} + \dots\end{aligned}\tag{6.5.17}$$

Чтобы выразить старые переменные через новые, достаточно в формулах (6.5.17) их заменить друг на друга и затем изменить знак у Ψ на противоположный

$$\begin{aligned}q(Q, P) &= Q - \Psi_p(Q, P) + \frac{1}{2}\{\Psi, \Psi_p\} + \dots, \\ p(Q, P) &= P + \Psi_q(Q, P) - \frac{1}{2}\{\Psi, \Psi_q\} + \dots\end{aligned}\tag{6.5.18}$$

Заметим, что в методе инвариантной нормализации [28, 29] для этой цели применяются формулы Кемпбелла-Хаусдорфа, которые до второго приближения совпадают с (6.5.17) и (6.5.18) с точностью до замены Ψ на производящий гамильтониан G . Они в [28, 29] записаны в следующей симметричной форме

$$\begin{aligned}Q(q, p) &= q + \{\Psi, q\} + \frac{1}{2}\{\Psi, \{\Psi, q\}\} + \dots, \\ P(q, p) &= p + \{\Psi, p\} + \frac{1}{2}\{\Psi, \{\Psi, p\}\} + \dots, \\ q(Q, P) &= Q - \{\Psi, Q\} + \frac{1}{2}\{\Psi, \{\Psi, Q\}\} + \dots, \\ p(Q, P) &= P - \{\Psi, P\} + \frac{1}{2}\{\Psi, \{\Psi, P\}\} + \dots,\end{aligned}$$

которые, очевидно эквивалентны (6.5.17) и (6.5.18).

5. Примеры асимптотических решений. Весьма поучительные примеры в [28, 30] демонстрируют существенные упрощения перед всеми известными ранее. Данный метод по простоте эквивалентен методу [28, 30], но отличается тем, что цепочка уравнений для асимптотик записывается в исходной гамильтоновой системе независимо от того, автономна система или неавтономна. В методе [28, 29] неавтономную систему надо свести к автономной с повышением порядка системы и потом для нее писать цепочку уравнений для асимптотик.

Продemonстрируем предлагаемый метод на двух примерах решения задач о вынужденных колебаниях в резонансе. Для решения этих задач классическим методом приходится вводить другое определение нормальной формы [13]. Данным методом этого делать не надо. Нормальная форма вычисляется непосредственно из квадратуры и затем находится решение. Покажем это.

Пример 1. *Найти общее решение задачи о вынужденных колебаниях линейного осциллятора при резонансе $\ddot{q} + q = \varepsilon \sin t$.*

Пример 2. *В задаче о вынужденных колебаниях нелинейного осциллятора Дуффинга $\ddot{q} + q = \varepsilon(\sin t - q^3 + 2\lambda q)$ найти λ , при котором решение будет периодично по времени с периодом 2π . Исследовать устойчивость этого решения.*

В обоих примерах уравнения гамильтоновы, имеют один и тот же невозмущенный гамильтониан $H_0 = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$ и решение соответствующей ему невозмущенной системы уравнений

$$q = q_0 \cos(t-t_0) + p_0 \sin(t-t_0), \quad p = -q_0 \sin(t-t_0) + p_0 \cos(t-t_0). \quad (6.5.19)$$

Оно является базовым для построения нормальной формы в обоих примерах.

Найдем первое приближение в примере 1. Уравнения имеют гамильтонову форму с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}(q^2 + p^2) - \varepsilon q \sin t$. Подставляя в выражение $R_1 = F_1 = -q \sin t$ решение (6.5.19), получим периодическую по времени функцию $R_1(t)$, интеграл которой имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t R_1(t) dt &= \bar{F}_1(t_0, q_0, p_0)(t-t_0) + \bar{\Psi}_1(t_0, q_0, p_0) + f(t) = \\ &= \frac{1}{2}(q_0 \sin t_0 + p_0 \cos t_0)(t-t_0) - \frac{1}{4}(q_0 \cos t_0 + p_0 \sin t_0) + f(t). \end{aligned}$$

Отсюда найдем первые коэффициенты \bar{F}_1 и $\bar{\Psi}_1$ и разложения нормальной формы $\bar{H} = H_0 + \varepsilon \bar{F}_1$ и функции $\bar{\Psi} = \varepsilon \bar{\Psi}_1$

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(Q^2 + P^2) + \bar{F}(t, Q, P, \varepsilon), \quad \bar{F}(t, Q, P, \varepsilon) = -\frac{1}{2}(Q \sin t + P \cos t),$$

$$\bar{\Psi}(t, Q, P, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{4}(Q \cos t + P \sin t)$$

Решение первого приближения получаем, используя теорему В.Ф. Журавлева

[29]. Возмущенной части гамильтониана $\bar{F}(0, Q, P) = -\varepsilon P/2$ соответствует система $\dot{Q} = -\varepsilon/2$, $\dot{P} = 0$ и решение $Q = Q_0 - \varepsilon t/2$, $P = P_0$.

Подставим Q и P вместо q_0 и p_0 в (6.5.19) и положим в нем $t_0 = 0$. Получим решение системы уравнений в переменных Q, P

$$Q = (Q_0 - \varepsilon t/2) \cos t + P_0 \sin t, \quad P = -(Q_0 - \varepsilon t/2) \sin t + P_0 \cos t.$$

Решение системы уравнений в исходных переменных q, p получается так. Подставляя функцию $\Psi(t, Q, P, \varepsilon)$ в формулы (6.5.18), найдем замену

$$q = Q + (\varepsilon/4) \sin t, \quad p = P - (\varepsilon/4) \cos t$$

и, пользуясь ей, найдем решение в исходных переменных

$$q = (Q_0 - \varepsilon t/2) \cos t + (P_0 + \varepsilon/4) \sin t = (q_0 - \varepsilon t/2) \cos t + (p_0 + \varepsilon/2) \sin t.$$

В линейной задаче все последующие члены ряда по ε равны нулю поэтому первое приближение является точным решением.

Решение примера 2 методом усреднения приведено в [28] и [11]. Для сравнения приведем решение методом нормальной формы. Исходный гамильтониан системы имеет вид $H = H_0 + \varepsilon F_1$, где $F_1 = -q \sin t - \lambda p^2 + q^4/4$. Опять пользуемся квадратурой (6.5.15). Подставляя решение (6.5.19) в выражение $R_1 = F_1$, получим подынтегральную функцию $R_1(t)$. Из квадратуры (6.5.15) найдем коэффициент разложения нормальной формы $\bar{F}_1(t, Q, P)$ и, полагая в нем $t = 0$, получим

$$\bar{F}_1(0, Q, P) = -\frac{1}{2}P - \frac{\lambda}{2}(Q^2 + P^2) + \frac{3}{32}(Q^2 + P^2)^2$$

Периодическому решению будет соответствовать неподвижная точка. Ее координаты Q, P находятся из решения системы уравнений

$$\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial Q} = Q \left(-\lambda + \frac{3}{8}A^2 \right) = 0, \quad \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial P} = -\frac{1}{2} + P \left(-\lambda + \frac{3}{8}A^2 \right) = 0.$$

Отсюда находим $Q = 0$, $P = \pm A$ при $\lambda = \frac{3}{8}A^2 \pm \frac{1}{2A}$, где $A = \sqrt{Q^2 + P^2}$ — амплитуда. Зависимость $\omega = 1 - \varepsilon\lambda$ от A называется амплитудно-частотной характеристикой.

Неподвижная точка будет устойчивой, если функция F_1 в ней достигает строгого минимума или максимума. Отсюда получим условие устойчивости периодического решения

$$\left(\lambda - \frac{3}{8}A^2 \right) \left(\lambda - \frac{9}{8}A^2 \right) > 0,$$

что согласуется с аналогичным условием, полученным методом усреднения. Приводим третий пример (рассмотренный ранее в разд. 6.5.1). Он показывает

как с помощью параметризации более эффективно находить высокие приближения.

Пример 3. Найти ТПП в моменты времени $t_n = 2\pi n$ для нелинейного уравнения $\ddot{q} = \varepsilon^2 \cos t' \cos q$ с точностью до ε^6 .

Это уравнение уже встречалось в разделах 6.5.1 и 6.5.2. Оно описывает разные задачи механики и физики. Одна из них — вибрационное движение сферической частицы в жидкости, в которой создается плоская стоячая акустическая волна [18, 57]. Пусть имеется вертикальная труба с жесткой горизонтальной крышкой. В трубе возбуждается стоячая волна, в которой скорость жидкости изменяется по следующему закону $v = A\omega \sin \omega t \cos kz$, где ω — частота волны, t — время, k — волновое число, z — ось, направленная вертикально вверх, A — амплитуда перемещения частиц жидкости, которая считается малой. Частота и волновое число связаны со скоростью звука в жидкости $\omega = kc$. Если для частицы радиуса a выполняется условие $\mu/(\rho kca^2) \ll 1$, то сила трения Стокса и наследственная сила Бассэ пренебрежимо малы по сравнению с силами инерции. Тогда уравнение движения частицы имеет вид

$$(\rho + 2\rho_0)\ddot{z}_0 = 3\rho\omega - 2(\rho_0 - \rho)g, \\ \omega = \partial v / \partial t + v \partial v / \partial z \approx \partial v / \partial t = A\omega^2 \cos \omega t \cos kz.$$

Здесь ρ и ρ_0 — плотности жидкости и твердой частицы, μ — коэффициент динамической вязкости жидкости.

Для частицы нейтральной плавучести $\rho = \rho_0$ уравнение приводится к уравнению примера 3, в котором $q = kz_0$, $t' = \omega t$, $\varepsilon = Ak$.

В [18, 57] для решения этого уравнения применяется классический метод усреднения [11]. Разложение ведется по параметру ε . Для исследования задачи требуется три приближения. Решение получается в виде $q = \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + O(\varepsilon^4)$.

Покажем, как получить решение предлагаемым методом. Разложение будет вестись по параметру $\delta = \varepsilon^2$. Поэтому для достижения существенно большей точности порядка ε^6 требуется всего 2 приближения с гораздо меньшими выкладками.

Решение. К уравнению примера сводится система уравнений Гамильтона с функцией Гамильтона $H = \frac{1}{2}p^2 + \delta F_1(t, q, p)$, $F_1 = -\cos t \sin q$.

Находим решение невозмущенной системы $q = q_0 + p_0(t - t_0)$, $p = p_0$ и подставляем его в $R_1 = F_1$. Получим периодическую функцию $R_1(t)$ и из интеграла $\int_{t_0}^t R_1 dt = -\frac{\cos(t_0 + q_0)}{2 + 2p_0} + \frac{\cos(-t_0 + q_0)}{2 - 2p_0} + f_1(t)$ находим на первой итерации

$$\bar{F}_1 = 0, \quad \bar{\Psi}_1(t, q, p) = -\frac{\cos(t + q)}{2 + 2p} + \frac{\cos(-t + q)}{2 - 2p}. \quad (6.5.20)$$

На второй итерации

$$R_2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial F_1}{\partial q} \frac{\partial \bar{\Psi}_1}{\partial p} = \frac{1}{4} \cos t \cos q \left(\frac{\cos(t+q)}{(1+p)^2} + \frac{\cos(t-q)}{(1-p)^2} \right).$$

Из интеграла (6.5.15) находим линейную F_2 и независимую от времени Ψ_2 части. Окончательный вид нормальной формы и функции, определяющей параметрическую замену, таков

$$\bar{H} = \frac{1}{2} P^2 + \frac{\delta^2}{16} \left[\frac{1}{(1+P)^2} + \frac{1}{(1-P)^2} \right] + O(\delta^3),$$

$$\Psi(0, x, y) = \frac{\delta y}{1-y^2} \cos x - \frac{\delta^2 (1-3y^2-2y^4)}{16y(1-y^2)^3} \sin 2x + O(\delta^3).$$

Функция $\Psi(0, x, y)$ имеет знаменатель, обращающийся в нуль при $y = 0, \pm 1$. Это известная проблема малых знаменателей асимптотической теории для гамильтоновых систем [1]. Покажем, как построить инвариантную нормальную форму, в которой малых знаменателей не будет.

6. Алгоритм уничтожения малых знаменателей. Для устранения малых знаменателей у функций $\bar{F}(t, Q, P)$ и $\Psi(t, x, y)$ во втором приближении можно добавить к невозмущенному гамильтониану $H_0(t, q, p)$ слагаемое $-f(t, q, p)$, а противоположное по знаку слагаемое $f(t, q, p)$ отнести к возмущению. Гамильтониан не изменится, однако, асимптотические разложения для нормальной формы и замены переменных изменятся так, что в них особенности будут исключены.

Покажем как уничтожить малый знаменатель y в функции $\Psi_2(x, y)$ примера 3. Невозмущенный гамильтониан H_0 и возмущение F представим в виде

$$H_0 = \frac{1}{2} p^2 + \frac{\delta^2}{8} \cos 2q, \quad F = -\delta \cos t \sin q - \frac{\delta^2}{8} \cos 2q.$$

Очевидно, что гамильтониан системы $H = H_0 + F$ при этом не изменится. Получим асимптотическое решение для ТПП с точностью до малых порядка $\delta^3 = \varepsilon^6$ методом инвариантной нормальной формы. Решение невозмущенной системы представляем в виде разложения по параметру δ

$$q = a + bt + \delta^2 \left(\frac{t}{4b} \cos 2a - \frac{1}{4b^2} (\sin(a+bt) - \sin a) \right) + O(\delta^3),$$

$$p = b + \frac{\delta^2}{4b} (\cos a - \cos(a+bt)) + O(\delta^3),$$

где через a и b обозначены начальные значения $q(0), p(0)$.

Из квадратуры первого приближения получаем то же, что и в предыдущем решении (6.5.20). Выражение для R_2 изменится на величину $F_2 = -\frac{1}{8} \cos 2q = -\frac{1}{8} \cos(2a + 2bt)$. Соответственно изменится и квадратура от R_2 . Вычисляя ее, получим нормальную форму и замену переменных с исклю-

ченной особенностью при $y \rightarrow 0$. Нормальную форму

$$\bar{H} = \frac{1}{2}P^2 + \delta^2 \left(\frac{1}{16(1+P)^2} + \frac{1}{16(-1+P)^2} + \frac{1}{8} \cos 2Q \right)$$

можно преобразовать, добавляя к ней несущественное постоянное число,

$$\bar{H} = \frac{1}{2}P^2 + \delta^2 \left(P^2 \frac{3-P^2}{8(1-P^2)^2} - \frac{1}{4} \sin^2 Q \right) + O(\delta^3). \quad (6.5.21)$$

Функция, определяющая параметрическую замену, имеет вид

$$\Psi_1(0, x, y) = \frac{y}{(1-y^2)} \cos x, \quad \Psi_2(0, x, y) = \frac{y^3(5-y^2)}{16(1-y^2)^3} \sin 2x, \quad (6.5.22)$$

$$\Psi(0, x, y) = \delta \Psi_1(0, x, y) + \delta^2 \Psi_2(0, x, y) + O(\delta^3).$$

Как видно функция Ψ не содержит малого знаменателя y .

Нормальная форма позволяет найти неподвижные точки и исследовать их устойчивость. Из уравнения неподвижных точек $\partial \bar{H} / \partial Q = 0$, $\partial \bar{H} / \partial P = 0$ находим $P = 0$, $\sin Q \cos Q = 0$ и определяем на периоде $Q \in [0, 2\pi)$ координаты четырех неподвижных точек: $M_i(Q_i, P_i) = ((i-1)\pi/2, 0)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Точки M_2 и M_4 соответствуют минимуму функции \bar{H} и по теореме Лагранжа устойчивы. По теореме Ляпунова они соответствуют устойчивому периодическому решению. Точки M_1 и M_3 являются точками гиперболического типа. Функция \bar{H} не имеет в них ни минимума, ни максимума и, следовательно, эти точки неустойчивы. Они соответствуют двум неустойчивым периодическим решениям.

Инвариантные кривые, на которых лежат ТПП, являются интегралом нормальной формы $\bar{H}(Q_m, P_m) = \delta^2 C/4$. Отсюда с точностью до малых порядка δ^3 получим однопараметрическое семейство инвариантных кривых для Q_m, P_m , $m = 0, 1, 2, \dots$

$$P_m^2 \left(1 + \delta^2 \frac{3-P_m^2}{4(1-P_m^2)^2} \right) = \frac{1}{2} \delta^2 (C + \sin^2 Q_m)^2.$$

С помощью замены переменных $p = P(1 - \delta \sin Q + \frac{1}{2}\delta^2 + O(\delta^3))$, $Q = q + \delta \cos q - \frac{1}{4}\delta^2 \sin 2q + O(\delta^3)$, вытекающей из (6.5.18) и (6.5.22), найдем инвариантные кривые в исходных переменных. С точностью до малых порядка δ^3 они имеют вид $p_m = \pm \delta (1 - \delta \sin q_m) \sqrt{(C + \sin^2(q_m + \delta \cos q_m)) / 2}$.

В интервале $-1 \leq C < 0$ ТПП лежат на замкнутых инвариантных кривых. Они соответствуют финитному движению вокруг неподвижной точки M_2 либо M_4 . Если учесть как угодно малую силу трения, то эти инвариантные кривые превратятся в спирали, по которым ТПП будут при $t \rightarrow \infty$ стремиться либо к M_2 , либо к M_4 . При $C > 0$ инвариантные кривые соответствуют инфинитному

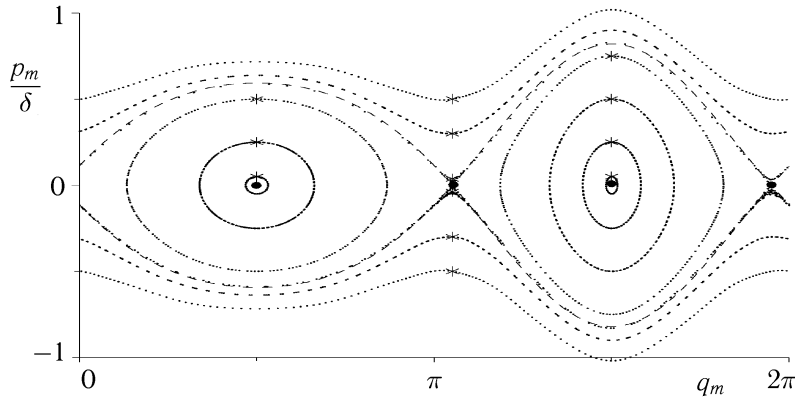


Рис. 6.10. ТПП для системы с гамильтонианом $H = p^2/2 - \delta \cos t \sin q$

движению. При $C = 0$ получаем сепаратрису с уравнением

$$p_m = \pm(\delta/\sqrt{2}) (1 - \delta \sin q_m) |\sin(q_m + \delta \cos q_m)|, \quad (6.5.23)$$

разделяющую финитное движение от инфинитного. На рис. 6.10 изображены ТПП, полученные численно из исходных уравнений при $\delta = 0,16$. Начальные значения ТПП обозначены звездочками. ТПП лежат на инвариантных кривых, которые не отличимы от кривых, определяемых уравнением (6.5.23). Жирными точками отмечены положения неподвижных точек M_i , $i = 1, 2, 3, 4$. В переменных q, p их координаты таковы $M_1(2\pi - \delta, 0)$, $M_2(\pi/2, 0)$, $M_3(\pi + \delta, 0)$, $M_4(3\pi/2, 0)$.

Глава 7

ПЕРЕМЕШИВАНИЕ В ВЯЗКИХ И ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕДАХ

7.1. Динамический хаос

7.1.1. Упорядоченное и хаотическое движения

До настоящего времени пока нет общепринятого определения хаотических движений. Для систем с одной степенью свободы можно дать геометрическое простое определение хаоса, хотя и не вполне строгое математически. Рассмотрим гамильтонову систему с T -периодическим гамильтонианом. Она определяет движение лагранжевых частиц несжимаемой среды на плоскости. Рассмотрим положения, которые занимает лагранжева частица через интервалы времени, кратные периоду $t_n = t_0 + Tn$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Такие точки мы назвали точками последования Пуанкаре (ТПП), образующими счетное множество точек на плоскости, которое зависит, вообще говоря, от t_0, X_0, Y_0 . Они вычисляются по рекуррентным формулам с помощью отображения Пуанкаре.

Упорядоченным движением мы назовем такое движение, при котором множество ТПП лежит на одномерной линии (инвариантной кривой). При упорядоченном движении все множества ТПП образуют семейство инвариантных кривых. Во всех интегрируемых системах движение ТПП упорядоченное.

В интегрируемой системе частицы, находящиеся на одной линии тока, будут находиться на ней вечно. Если окрасить эти частицы, то краска по другим линиям тока не распространится. Окрашенной останется только одна линия. Таким образом, если первый интеграл существует (а это будет для любого установившегося течения), то перемешивания пассивной примеси не произойдет.

Альтернативой упорядоченных движений являются хаотические движения, которые могут быть только в неинтегрируемых системах, т. е. в системах, у которых нет первого интеграла. При этом само решение может быть выписано в простом аналитическом виде. При хаотическом движении ТПП при некоторых начальных значениях t_0, X_0, Y_0 заполняют область конечной площади. В

неинтегрируемых системах инвариантные кривые могут достаточно плотно заполнять некоторую область движения и хаотизация не будет заметна. Такое движение тоже будем называть упорядоченным. Топологическая структура ТПП при упорядоченном движении на фазовой плоскости практически не отличима от структуры интегрируемых гамильтоновых систем. В этом случае линии тока непрерывно заполняют всю рассматриваемую область, как это имеет место для автономной системы изображенной на рис. 6.1.

Упорядоченные и хаотические движения можно наблюдать на фазовом портрете последовательности точек, определяемых по отображению Чирикова. На рис. 6.7 представлены фазовые портреты ТПП при различных значениях параметра K . При $K = 0,5$ хаос не наблюдается, хотя система не имеет первого интеграла. При $K = 0,7$ видна хаотизация в окрестности сепаратрисы. Площадь хаотизации увеличивается с ростом K , что видно из следующих рисунков при $K = 1$ и $K = 1,5$.

При хаотическом движении пассивная примесь помещенная в как угодно малой окрестности точки t_0, X_0, Y_0 распространится за достаточно большой промежуток времени на область конечной площади. Площадь отнесенную к площади движения можно принять за меру хаоса.

Примеры расчетов хаотических движений представлены в следующих разделах. Динамический хаос связывается с процессом перемешивания пассивной примеси в движущейся среде.

Заметим, что введенное определение хаотизации не зависит от t_0 . Действительно, при изменении t_0 на $t_0 + \Delta t$, $0 < \Delta t < T$ множество ТПП преобразуется с помощью непрерывного отображения $P_{t_0}^{\Delta t}$. При этом одномерная линия или двумерная область переходят соответственно в одномерную линию или двумерную область. Если $\Delta t = kT$ т. е. кратно периоду, то отображение $P_{t_0}^{\Delta t} = P_{t_0}^{kT}$ переводит ТПП в себя. При произвольном значении Δt можно представить в виде $\Delta t = kT + \Delta t'$, $0 < \Delta t' < T$. Отображение $P_{t_0}^{\Delta t}$ тождественно отображению $P_{t_0}^{\Delta t'}$ и не меняет топологической структуры ТПП.

В дальнейшем для определенности выбирается $t_0 = 0$, а при обозначении отображения Пуанкаре верхний и нижний индексы будем убирать: $P = P_0^T$.

7.1.2. Качественный анализ гамильтоновой системы стандартной формы

Исследование хаотичности движения с помощью отображений Пуанкаре называют также методом сечений Пуанкаре. Этой теме посвящены монографии [31, 44, 91, 94, 102]. Однако само построение отображения Пуанкаре — сложная вычислительная задача. Поэтому обычно ТПП находятся численно, а аналити-

ческие методы для вычисления ТПП в гидродинамических системах не применяются (за исключением очень простых искусственных примеров [41]).

Для качественного исследования систем с одной степенью свободы с гамильтонианом стандартной формы

$$H = \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \varepsilon^3 H_3 + \dots, \quad (7.1.1)$$

где ε — малый параметр, полезны следующие теоретические результаты. Известно, что автономная гамильтонова система (гамильтониан явно не зависит от времени) является интегрируемой. Лагранжевы частицы лежат на одномерных линиях тока $H(X_n, Y_n) = \text{const}$, и движение упорядоченное. Для неавтономной системы стандартного вида асимптотическая процедура метода усреднения [11, 29] позволяет построить для любого целого $k > 0$ близкую к тождественной каноническую замену переменных $X, Y \rightarrow X, Y$, так что с точностью до малых порядка ε^{k+1} уравнения для новых переменных будут иметь вид автономной гамильтоновой системы с гамильтонианом $\bar{H}(X, Y)$.

Последовательностью канонических замен гамильтониан системы можно привести к почти автономному виду $\bar{H}(X, Y) + \rho(t, X, Y)$. Теорема А.И. Нейштадта [56] устанавливает для неинтегрируемых систем с аналитическим гамильтонианом существование неулучшаемой оценки $|\rho| < C_1 \exp(-C/\varepsilon)$. При $\rho = 0$ система имеет интеграл, и в случае одной степени свободы, хаоса не будет. Хаос вызывает именно экспоненциально малая величина $\rho(t, X, Y)$, которую методами усреднения определить невозможно. Поэтому применение метода усреднения для конструктивного описания перехода к хаотическим движениям в системах с одной степенью свободы оказывается бесполезным. Однако качественно можно констатировать следующую типичную картину нарастания хаоса при увеличении параметра ε . При достаточно малом ε множества ТПП лежат на инвариантных кривых $\bar{H}(X_n, Y_n) = \text{const}$, определяемых методами усреднения с точностью до $\rho = C_1 \exp(-C/\varepsilon)$. В этом случае в силу малости ρ хаос практически не заметен. При достаточном увеличении ε экспоненциальная добавка начинает проявляться, хаос становится заметным и площадь хаотизации достаточно быстро увеличивается с ростом ε .

Системы типа $H_0 + \varepsilon H_1 + \dots$, с интегрируемой невозмущенной частью H_0 ведут себя похожим образом. При малом ε хаотизация не наблюдается. Начиная с некоторого значения ε появляется хаотичность и она нарастает с увеличением ε .

7.1.3. Методы исследования хаотических движений

Обычно начало хаоса связывают с существованием неустойчивых неподвижных точек отображения Пуанкаре [3–7]. Неподвижной точке $P(\vec{R}) = \vec{R}$ (точке $P^k(\vec{R}) = \vec{R}$) соответствует периодическое решение с периодом T (с периодом kT). Задача устойчивости по Ляпунову периодического решения сводится

к решению задачи устойчивости неподвижной точки отображения. Для ее решения применяется метод показателей Ляпунова [91]. Поскольку аналитический вид отображения P неизвестен, то показатели Ляпунова определяют численно. Ниже будет показано, как найти отображение P и показатели Ляпунова аналитически в виде разложений по ε , а в конкретной гидродинамической системе с точностью до ε^5 .

Доказательство хаотичности на основании какого-либо строгого определения хаоса, даже для системы с одной степенью свободы — чрезвычайно трудная задача. Доказательства хаотичности для некоторых простых отображений были приведены в [41]. Для доказательства хаотичности в гамильтоновых системах используется теорема Мельникова [91], связанная с вычислением достаточно сложного интеграла. Аналитически методом Мельникова можно доказать хаотичность движений математического маятника с вибрирующей точкой подвеса. В такой системе с гамильтонианом, периодически зависящим от времени, имеется сепаратриса, представляемая в простом аналитическом виде. Это и обеспечивает возможность применения данной теоремы чтобы установить расщепление сепаратрис [1, 20]. Обычно проверка хаотичности по теореме Мельникова или другим способом определяется лишь численными достаточно громоздкими методами.

Обстоятельный анализ различных механизмов перемешивания в гидродинамических системах приведен в монографии [102]. Представлены многочисленные иллюстрации поведения частиц жидкости для различных течений, а также описываются методы исследования перехода системы к динамическому хаосу.

Вместе с тем в литературе практически отсутствуют исследования движения вязкой жидкости в области, граница которой меняется со временем. Одно из таких исследований [64] было посвящено анализу движения частиц несжимаемых сред с различной реологией в тонком деформирующемся слое; на границах слоя принимались условия отсутствия касательной скорости. Численные расчеты показали, что в такой системе при малых числах Рейнольдса хаос практически отсутствует.

Ниже предлагается конструктивный параметрический метод построения отображений на фазовом потоке гамильтоновой системы. Установлены в общем случае и показаны на примерах преимущества параметрического метода перед известным методом производящих функций. Развитая асимптотическая теория описания перехода к хаотическому движению применяется к анализу более общего движения жидкости с большой вязкостью в тонком деформирующемся слое с учетом касательной скорости на границе. На основании найденного отображения Пуанкаре дается объяснение численных экспериментов по отсутствию хаоса при нулевой касательной скорости на границах. При наличии

касательной скорости на границе хаос возможен при достаточно малых амплитудах деформации волны.

7.2. Перемешивание вязкой и вязкопластической сред в тонком деформирующемся слое

7.2.1. Функция тока как гамильтониан для движения частиц вязкой и вязкопластической сред

1. Постановка задачи. Рассматривается движение несжимаемой среды в расположенной на плоскости области ограниченной двумя вертикальными прямыми $0 \leq x \leq L$, снизу горизонтальной прямой и сверху криволинейной границей, изменяющейся со временем по некоторому периодическому закону $0 \leq y \leq b(1 + \varepsilon h)$. В безразмерных координатах $X = kx$, $Y = y/b$, $t = \omega T$, где $k = 2\pi/L$ – волновой вектор, ω – частота колебаний границы, такую область Ω_t можно представить в виде: $0 \leq X \leq 2\pi$, $0 \leq Y \leq 1 + \varepsilon h(t, X)$, где $h(t, X)$, ограниченная по абсолютной величине функция, с периодом по времени 2π , ε – амплитуда периодической во времени деформации границы. Области в начальный момент времени Ω_0 и через период $\Omega_{2\pi}$ совпадают (рис. 7.1).

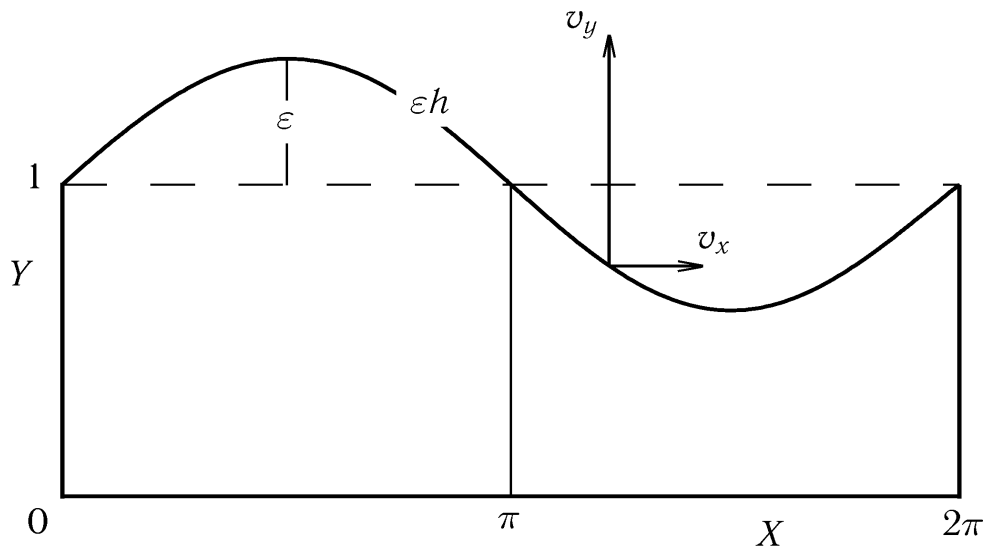


Рис. 7.1. Схема течения в тонком слое

На нижней границе $Y = 0$ принято условие прилипания, а на верхней границе $v_y = -\varepsilon \cos(X - t)$, $v_x = 3\varepsilon^2 \alpha(1 - \cos X)$ – условие непроницаемости и условие, налагаемое на касательную составляющую (рис. 7.1). На боковых стенках расход равен нулю. При $\alpha = 0$ задача движения частиц вязкопластической среды изучена в работе [64]. При произвольном параметре α задача движения частиц вязкой жидкости исследована в [67, 68].

2. Функция тока при отсутствии касательной скорости на границах.

Рассмотрим случай $\alpha = 0$. В 5.1.3 описан метод построения функции тока для течения произвольной несжимаемой среды в приближении тонкого слоя $b/L \ll 1$. Согласно этому методу нужно найти расход в сечении с координатой X . Обозначим его через $\varepsilon q(t, X)$. Он определится из уравнения сохранения массы

$$\partial h / \partial t + \partial q / \partial X = 0, \quad q(t, 0) = 0. \quad (7.2.1)$$

Тогда распределение продольной скорости в сечении X будет совпадать с распределением ее между двумя параллельными пластинами с таким же расходом $\varepsilon q(t, X)$. Если ввести безразмерную координату $\eta = Y / (1 + \varepsilon h)$, то из равенства распределений скорости получим уравнение для функции тока

$$H_\eta = q(t, X) U(\eta, a_i), \quad H(t, X, 0) = 0, \quad (7.2.2)$$

где U – безразмерный профиль скорости берется из решения задачи о течении Пуазейля рассматриваемой среды между двумя параллельными пластинами с условием нормировки $\int_0^1 U d\eta = 1$.

Пример 1. Движение частиц несжимаемой вязкой жидкости в тонком деформирующемся слое. Для определенности предполагается отсутствие продольной скорости на границе области $Y = 1 + \varepsilon h(t, X)$. Для вязкой жидкости в приближении тонкого слоя профиль скорости U находится из решения известной задачи о течении Пуазейля

$$U = 6\eta - 6\eta^2, \quad H = q(3\eta^2 - 2\eta^3). \quad (7.2.3)$$

Для ламинарного течения вязкой жидкости профиль скорости – параболический и не зависит от каких-либо дополнительных параметров.

Пример 2. Движение частиц несжимаемой вязкопластической среды в тонком деформирующемся слое. Для вязкопластической среды профиль скорости U будет состоять из примыкающих к границам параболических частей и прямолинейной части в квазитвердом ядре. Функция тока находится интегрированием уравнения (7.2.2) по переменной η

$$H = qf(a, \eta), \quad a = \frac{\varepsilon \mu \omega}{\tau_0 k b} |q|,$$

$$\hat{f} = \frac{3}{\eta_0^2(3-2\eta_0)} \begin{cases} \eta^2(\eta_0 - \eta/3), & 0 \leq \eta \leq \eta_0, \\ \eta_0^2(\eta - \eta_0/3), & \eta_0 \leq \eta \leq 1/2, \end{cases} \quad (7.2.4)$$

$$\eta_0^2(1 - (2/3)\eta_0)/(1 - 2\eta_0) = a, \quad (7.2.5)$$

где a — местное число Сен-Венана, пропорциональное расходу $q(t, X)$.

В область $1/2 \leq \eta \leq 1$ функция (7.2.4) продолжается из соображений четности производной $\partial f / \partial \eta$ по аргументу $\eta - 1/2$.

Для случая $a \gg 1$ из уравнений (7.2.4) (7.2.5) с точностью до малой $1/(4a + 1)^4$ получим

$$\hat{f} = 3\eta^2 - 2\eta^3 + \frac{\eta^2 - 2\eta^3}{4a + 1}, \quad 0 \leq \eta \leq \eta_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3(4a + 1)} \quad (7.2.6)$$

Функция деформации $h(t, X)$ и безразмерный расход $q(t, X)$ связаны уравнением сохранения массы несжимаемой среды (7.2.1). При деформировании по закону бегущей волны функции h и q представляются в виде

$$h = h(X - t), \quad q = h(X - t) - h(-t) \quad (7.2.7)$$

3. Функция тока течения вязкой жидкости при наличии касательной скорости на деформируемой границе. Гамильтониан системы (функция тока) в приближении тонкого слоя

$$H(t, X, Y) = \varepsilon q(3\tilde{Y}^2 - 2\tilde{Y}^3) - 3\varepsilon^2 \alpha(\tilde{Y}^2 - \tilde{Y}^3)(1 - \cos X), \quad (7.2.8)$$

$$\tilde{Y} = Y/(1 + \varepsilon h(t, X))$$

Здесь X, Y — безразмерные координаты, координата $X/(2\pi)$ отнесена к длине слоя, Y — к его толщине. Безразмерная функция расхода $\varepsilon q(t, X)$ через сечение $X = \text{const}$ выражается через функцию деформации слоя εh с помощью уравнения сохранения массы (7.2.1).

7.2.2. Движение частиц вязкой и вязкопластической сред при отсутствии касательной скорости на границе

1. Метод исследования. Исследование задачи движения частиц среды проведем параметрическим методом построения отображения Пуанкаре. В этой задаче гамильтониан имеет стандартный вид с малым параметром ε равным амплитуде деформации верхней границы. Покажем как строится отображение на примере решения задачи Стокса о переносе массы прогрессивной волной длины 2π на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины d . Гамильтониан представляет собой известную функцию тока, разложение

которой по амплитуде волны имеет вид [86]

$$H = \varepsilon \operatorname{sh}(Y + d) \sin(X + t) / \operatorname{sh}(d) + O(\varepsilon^2), \quad d = 2\pi b/L. \quad (7.2.9)$$

Безразмерная функция тока H представляется разложением по амплитуде волны ε , где второй и все последующие члены разложения выражаются линейно через гармоники $\sin k(x+t)$, $\cos k(x+t)$. Применяем формулу (6.5.1) для усредненного гамильтониана. Первый член разложения равен нулю. Вычисляя второй член разложения, с точностью до ε^3 находим усредненный гамильтониан и скорость переноса частиц жидкости (Стокс, 1847):

$$\bar{H} = -\frac{\varepsilon^2 \operatorname{sh}[2(Y + d)]}{4 \operatorname{sh}^2 d}, \quad v_x = \frac{\partial \varepsilon \bar{H}}{\partial Y} = -\frac{\varepsilon^2 \operatorname{ch}[2(Y + d)]}{2 \operatorname{sh}^2 d}, \quad v_y = 0.$$

Заметим, что вывод этого результата обычным способом требует значительно больших выкладок [86].

2. Движение частиц в вязкой жидкости. Функция тока H для течения вязкой жидкости в приближении тонкого слоя определяется по (7.2.3) Продольная скорость H_η как функция поперечной координаты η изменяется по параболе, обращаясь в ноль на границах $\eta = 0$ и $\eta = 1$. Определяем по (6.5.1) усредненный гамильтониан

$$\bar{H} = 6\varepsilon^2 \langle qh \rangle \eta^2 (1 - \eta)^2 (2\eta - 1). \quad (7.2.10)$$

При деформировании по закону бегущей синусоидальной волны: $h = \sin(X - t)$ находим $q = \sin(X - t) + \sin t$, $\langle qh \rangle = 1/2(1 - \cos X)$.

Функция $\bar{H}(X, Y)$ принимает наибольшее H_{max} и наименьшее H_{min} значения при $X = \pi$, $\eta = 1/2 \pm \sqrt{5}/10$. Фазовые траектории при $0 \leq \bar{H} \leq H_{max}$ непрерывно заполняют верхнюю половину области Ω_0 , при $H_{min} \leq \bar{H} \leq 0$ — ее нижнюю половину. На рис. 7.2 изображены ТПП за время, равное 200π : для усредненного гамильтониана \bar{H} (рис. 7.2,а) и для исходного гамильтониана (7.2.3) (рис. 7.2,б), найденные численным интегрированием уравнений Гамильтона. В начальный момент времени точки имели координаты $X_0 = \pi$; $Y_0 = 0, 09; 0, 16; 0, 25; 0, 75; 0, 83; 0, 91$. Как видно из рис. 7.2, ТПП располагаются на замкнутых интегральных кривых для усредненного гамильтониана. Вычисления показывают, что в этой задаче при любой конечной амплитуде $0 < \varepsilon < 1$ существует усредненный гамильтониан и ТПП лежат на замкнутых кривых. Топологическая структура траекторий ТПП не зависит от ε .

Нарушение устойчивого характера усредненного движения можно ожидать, если будет нарушено резонансное условие теоремы Арнольда. Для вязкой жидкости в силу $\langle q \rangle = 0$ при любом периодическом деформировании усредненный гамильтониан $\varepsilon \bar{H}$ пропорционален ε^2 . Поэтому частота собственных колебаний ω_0 около критической точки усредненной системы пропорциональна ε^2 . Численный расчет показывает, что даже при $\varepsilon = 0, 8$ собственная частота $\omega_0 \approx 1/6$,

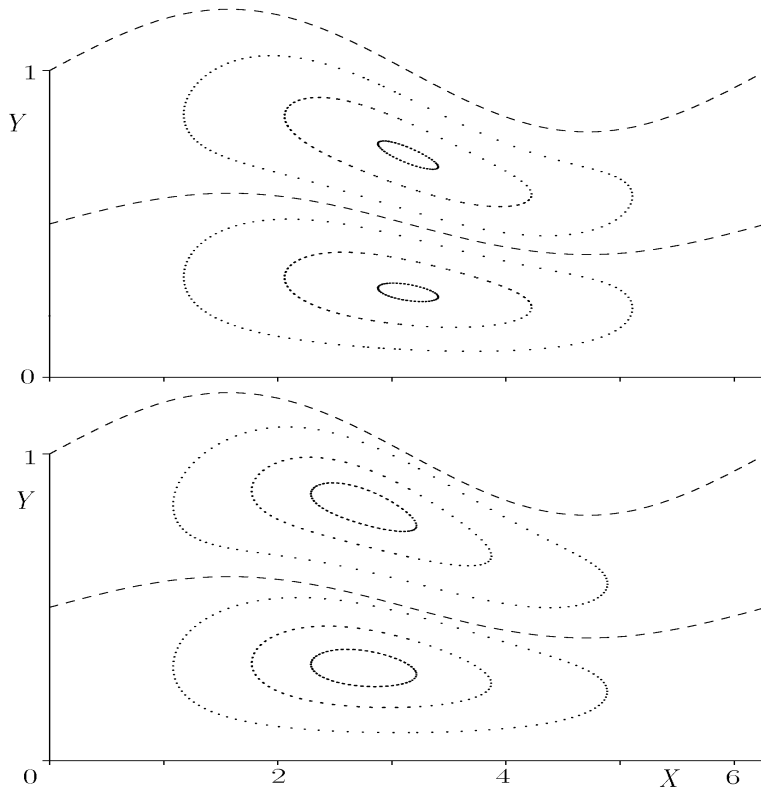


Рис. 7.2. ТПП вязкой жидкости в тонком слое при деформации границы по закону синусоидальной волны с амплитудой $\varepsilon = 0,2$. а — параметрический метод, б — точный расчет

что существенно меньше первой критической резонансной частоты $1/4$. Как и следовало ожидать, в этом случае ТПП в течение длительного времени будут располагаться на замкнутых интегральных кривых усредненной системы.

3. Движение частиц в вязкопластической среде. Функция тока εH для вязкопластического течения в приближении тонкого слоя определяется по (7.2.4), (7.2.5) или при $s = \mu\omega\varepsilon/(\tau_s kb) \gg 1$ по приближенной формуле (7.2.6). Покажем, что при $s \gg 1$ перемещения частиц за период, вообще говоря, имеют первый порядок по ε . Применяя формулу осреднения (6.5.1) и асимптотическую формулу (7.2.6), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon \bar{H} &= \eta^2 (1 - 2\eta) \frac{\varepsilon}{4s} I(X), \\ I(X) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{4sq(t, X)dt}{4s|q(t, X)| + 1} \approx \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sign}q dT \end{aligned} \quad (7.2.11)$$

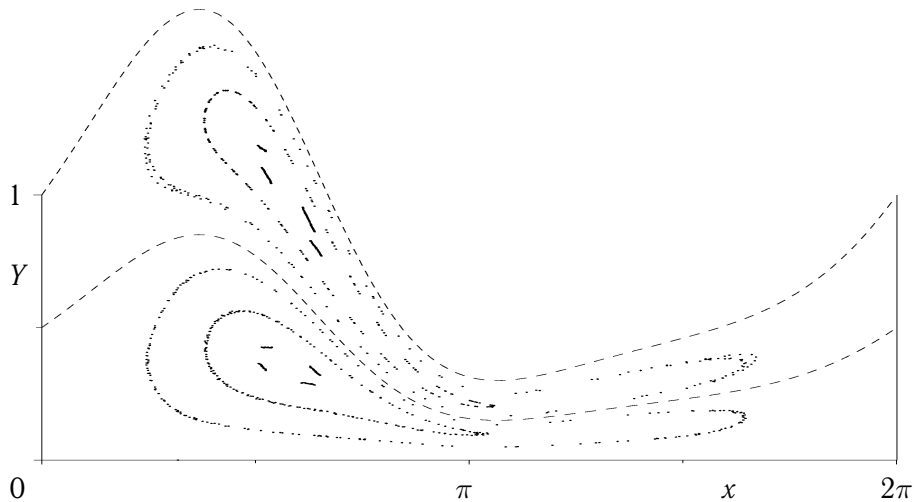


Рис. 7.3. ТПП вязкопластического течения при несимметричной деформации границы

Если функция $q(T)$ имеет постоянный знак на половине периода, то интеграл в (7.2.11) $I = 0$. Такой вариант соответствует симметричному во времени деформированию поверхности. В этом случае для перемещения за период будет также вырождение первого порядка.

Пусть $T_+ < 2\pi$ — длина отрезка, на котором $q(T) > 0$, тогда интегралы в (7.2.11) пропорциональны величине $\Delta T = |T_+ - \pi|/2\pi$. При $s \ll 1$ следует пользоваться другой асимптотикой решения (7.2.4). Эта асимптотика соответствует течению близкому к пластическому. Можно показать, что первый член усредненного гамильтониана $\varepsilon \bar{H}$ стремится к нулю при $s \rightarrow 0$. Таким образом, собственная частота ω_0 осредненного движения около критической точки должна иметь максимальное по параметру s значение. Эти выводы справедливы и для конечных значений амплитуды деформации ε .

Была рассмотрена несимметричная деформация вида $h = \sin(X - t + \varepsilon_1(1 - \cos(X - t)))$. При амплитуде $\varepsilon = 0,7$ и коэффициенте асимметрии $\varepsilon_1 = 0,69$ был обнаружен резонанс четвертого порядка. Собственная частота $\omega_0 = 1/4$ практически не зависела от числа s в диапазоне $0,2 < s < 1$. При меньших и больших значениях параметра s частота уменьшалась. Тем не менее и в условиях резонанса ТПП в течение длительного времени ложатся на интегральные замкнутые кривые. На рис. 7.3 представлены ТПП за 200 периодов при $s = 1$, $\varepsilon = 0,7$; $\varepsilon_1 = 0,69$. Начальные точки выбирались из сечения $X = 2$.

Таким образом, при периодическом деформировании границы тонкого слоя частицы однородной несжимаемой среды в течение, по крайней мере, экспо-

ненциально большого времени порядка $\exp(C/\varepsilon)$ двигаются по замкнутым интегральным кривым и перемешивания не происходит. Для перемешивания однородной среды необходимо применять неперiodическое во времени деформирование. Перемешивание может также происходить вследствие изначально неоднородной среды.

7.2.3. Движение частиц вязкой жидкости при наличии касательной скорости на границе

Движение частиц жидкости определяется из решения системы уравнений Гамильтона с гамильтонианом (7.2.8). Учет малой порядка ε^2 скорости v_x на границе приводит к качественным изменениям движения частиц жидкости.

Для исследования системы удобно использовать каноническую замену, отображающую область течения в прямоугольник (см. пример 3 в разд. 6.3.5)

$$X, Y, H(t, X, Y) \rightarrow \bar{X}, \bar{Y}, \bar{H}(t, \bar{X}, \bar{Y})$$

с производящей функцией $S(t, X, \bar{Y}) = X\bar{Y} + \varepsilon\bar{Y} \int_0^X h(t, X) dX$. Переменные и гамильтониан преобразуются так

$$\bar{X} = \frac{\partial S}{\partial \bar{Y}} = X + \varepsilon \int_0^X h(t, X) dX, \quad Y = \frac{\partial S}{\partial X} = \bar{Y}(1 + \varepsilon h(t, X)),$$

$$\bar{H}(t, \bar{X}, \bar{Y}) = H + \partial S / \partial t = H - \varepsilon q \bar{Y}$$

Удобство замены состоит в том, что в переменных \bar{X}, \bar{Y} система имеет гамильтонову форму, а область переменных — фиксированный прямоугольник $\bar{X} \in (0, 2\pi), \bar{Y} \in (0, 1)$ (рис. 6.5).

Исследование системы можно провести аналитически, при общем законе деформирования. Отображающую функцию с точностью до ε^3 можно вычислить по формуле (6.4.11)

$$\Psi(x, y) = 6\pi\varepsilon^2 \left[2 \langle qh \rangle (2y - 1)(1 - y)^2 y^2 - \alpha(1 - y)y^2(1 - \cos x) \right] \quad (7.2.12)$$

где q находится из уравнения сохранения массы и граничных условий на боковых стенках

$$\partial h / \partial t + \partial q / \partial X = 0, \quad q(0) = q(2\pi) = 0$$

При выводе формулы (7.2.12) используются равенства

$$\int_0^T \left(h_t \int_0^{\bar{X}} h dX \right) dt = - \int_0^T \left(h \int_0^{\bar{X}} h_t dX \right) dt = \int_0^T h q dt.$$

Ограничимся исследованием частного случая деформирования по закону бегущей волны $h = \sin(X - t)$. Из уравнения сохранения массы вычисляем

$$q = \sin(X - t) + \sin t, \quad \langle qh \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} qh dt = \frac{1}{2}(1 - \cos X)$$

и, подставляя в выражение (7.2.12), получаем

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) &= 6\pi\varepsilon^2 F(y, \alpha)(1 - \cos X), \\ F(y, \alpha) &= (2y - 1)(1 - y)^2 y^2 - \alpha(1 - y)y^2, \\ J &= 1 + 9\pi^2 \varepsilon^4 [F(y, \alpha)F''(y, \alpha) \cos x(1 - \cos x) - \\ &\quad - (F'(y, \alpha) \sin x)^2] > 0. \end{aligned} \quad (7.2.13)$$

Переменные x, y занимают область такого же прямоугольника $x \in (0, 2\pi)$, $y \in (0, 1)$. Таким образом, для исходной системы получено двухпараметрическое семейство отображений.

Если $\alpha < 0,236$, то якобиан J достигает наименьшего значения при $\cos X = -1$, а если $\alpha > 0,236$, то при $\cos X = 0$. Таким образом, область применимости отображения (7.2.13) такова:

$$\begin{aligned} \min J &= 1 - 9\pi^2 \varepsilon^4 \max(2F(y, \alpha)F''(y, \alpha)) > 0 \text{ при } \alpha < 0,236; \\ \min J &= 1 - 9\pi^2 \varepsilon^4 \max(F'(y, \alpha))^2 = 1 - 9\pi^2 \varepsilon^4 \alpha^2 > 0 \text{ при } \alpha > 0,236. \end{aligned}$$

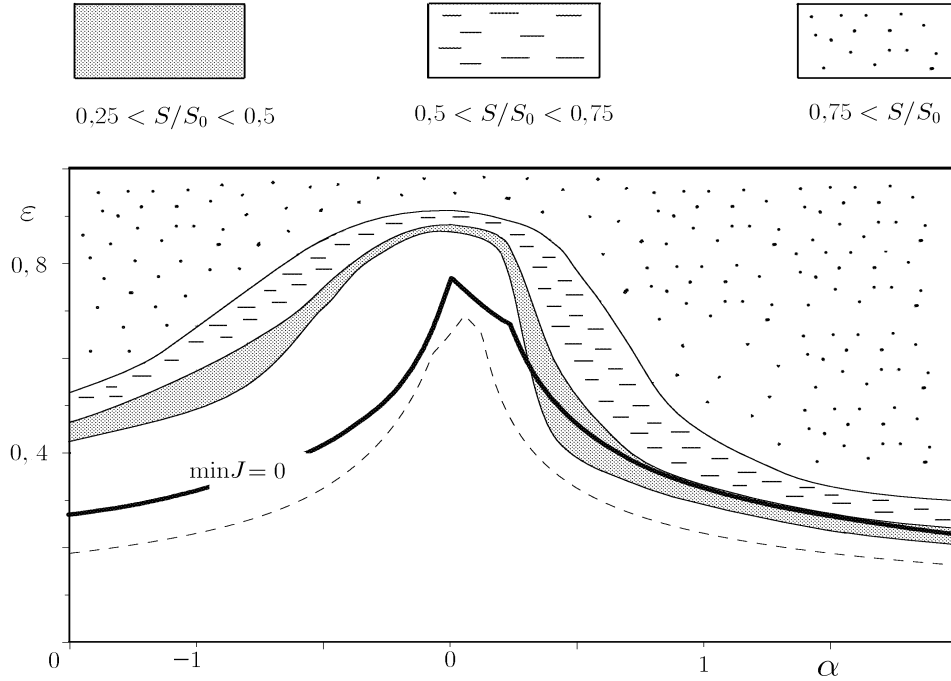
Исследование функции $F'(y, \alpha)$ на максимум показывает, что при $\alpha \in (-\infty, -0.5) \cup (1/8, \infty)$ функция $|F'(y, \alpha)|$ достигает наибольшего значения, равного α , на границе $y = 1$. При остальных α функция $|F'(y, \alpha)|$ достигает наибольшего значения в промежутке $y \in (0, 1)$.

Область $\min J > 0$ на плоскости параметров (α, ε) , изображена на рис. 7.4. Граница определяется уравнением $\min J = \Phi(\varepsilon, \alpha) = 0$ и представляет собой кусочно гладкую линию.

Для сравнения приведем асимптотические формулы отображения, полученные по методу производящих функций, в том же приближении, что и (7.2.13). Отображение будет определяться по (6.5.8) с функцией $S(X_0, Y) = \Psi(X_0, Y)$, где функция Ψ та же, что и в (7.2.13). Условие применимости отображения таково:

$$\begin{aligned} \min(1 + \Psi_{X_0 Y}) &= 1 + 6\pi\varepsilon^2 \min(F'(Y, \alpha) \sin X_0) = 1 - \\ &\quad - 6\pi\varepsilon^2 \max |F'(Y, \alpha)| > 0 \end{aligned}$$

При $\alpha \in (-\infty, -0.5) \cup (1/8, \infty)$ получаем $6\pi\varepsilon^2 |\alpha| < 1$. Граница области, определяемая по методу производящих функций, приведена на рис. 7.4 штриховой линией. Она также вычисляется аналитически, представляет собой кусочно-гладкую линию и расположена значительно ниже границы области существования параметрического отображения $\min J = 0$.

Рис. 7.4. Плоскость параметров α, ε

До хаотического режима ($\varepsilon < \varepsilon_0(\alpha)$, $\varepsilon_0(\alpha)$ — критическое значение параметра ε) фазовые портреты ТПП легко исследуются с помощью усредненного гамильтониана

$$\bar{H} = 3\varepsilon^2 F(Y, \alpha)(1 - \cos X) + O(\varepsilon^3),$$

вычисленному по (6.5.1) и (7.2.13).

ТПП лежат на инвариантных кривых $F(Y, \alpha)(1 - \cos X) = const$. Фазовые портреты точек последования Пуанкаре имеют пять топологически различных структур, изображенных на рис. 7.5.

Структура 1 (см. рис. 7.5) при $\alpha \in (-\infty, -1)$ — движение против часовой стрелки по замкнутым траекториям с одной неподвижной точкой.

Структура 2 при $\alpha \in (-1, 0)$ — две области движений, разделенных сепаратрисой $y = 3/4 - \sqrt{1 - 8\alpha}/4$, обозначенной на рис. 7.5 штриховой линией. В верхней области — движение против часовой стрелки по траекториям с одной неподвижной точкой. В нижней области — движение по часовой стрелке по траекториям с одной неподвижной точкой.

Структура 3 при $\alpha \in (0, 1/8)$ — три области движений, разделенных двумя сепаратрисами $y = 3/4 \pm \sqrt{1 - 8\alpha}/4$, обозначенных на рис. 7.5 штриховыми

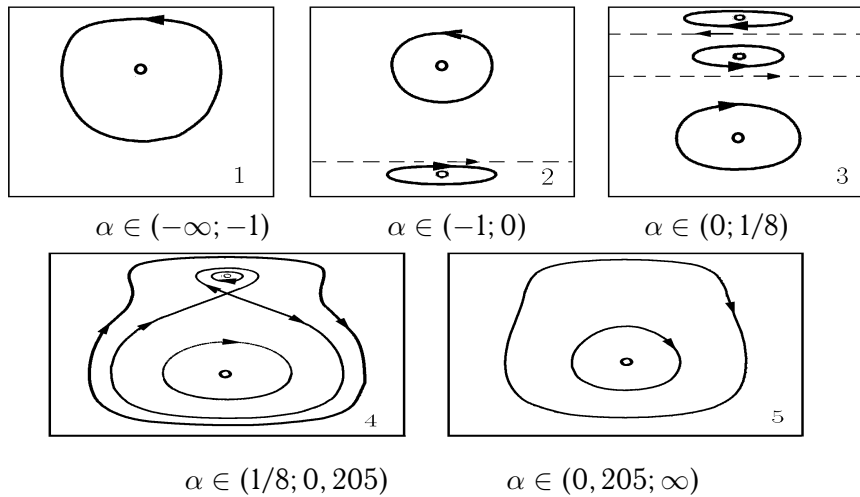


Рис. 7.5. Топологические структуры фазовых портретов

линиями. В верхней и нижней областях — движение по часовой стрелке по траекториям с одной неподвижной точкой в каждой области. В средней области — движение против часовой стрелки по траекториям с одной неподвижной точкой.

Структура 4 при $\alpha \in (1/8; 0, 205)$ — движение в трех областях, разделенных сепаратрисами. Это единственный случай, в котором есть неподвижная точка гиперболического типа, соответствующая неустойчивой периодической траектории. Все остальные неподвижные точки в этом и других случаях соответствуют устойчивым периодическим траекториям.

Структура 5 при $\alpha \in (0, 205; \infty)$ — движение по часовой стрелке по замкнутым траекториям с одной неподвижной точкой.

При $\varepsilon < \varepsilon_0(\alpha)$ ТПП, найденные путем непосредственного решения уравнений Гамильтона с гамильтонианом (7.2.8), движутся по траекториям, топология которых соответствует одной из пяти перечисленных выше структур. Тип структуры определяется интервалом, в каком находится параметр α .

При превышении критического значения параметра ε ТПП с одним и тем же начальным положением может заполнить некоторую область площади S_i . Совокупность этих областей будем называть областью хаотического движения. Область хаотического движения имеет площадь $S = \sum S_i$. Мерой хаоса условимся считать отношение $\sigma = S/S_0$, где S_0 — площадь всей области движения.

На рис. 7.4 в области двух параметров ε, α изображены области хаотического движения с различными мерами хаоса. Область 1 с мерой хаоса в интервале $(1/4, 1/2)$, область 2 с мерой хаоса в интервале $(1/2, 3/4)$, область 3 с мерой

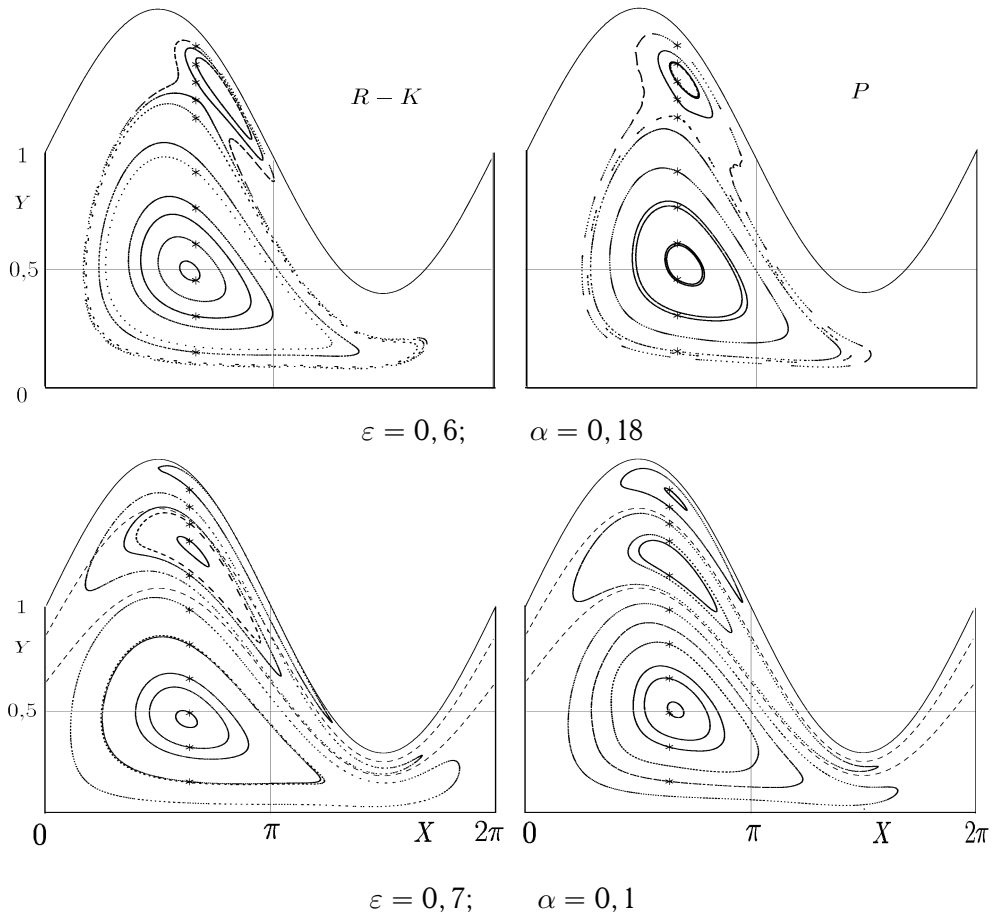


Рис. 7.6. ТПП. R-K – численный расчет, P – параметрический метод

хаоса более $3/4$ и наконец чистый фон 4 соответствует области с мерой хаоса менее $1/4$.

Расчеты ТПП методом отображений (P) с функцией (7.2.13) в области существования отображения $J > 0$ неотличимы от расчета уравнений Гамильтона методом Рунге-Кутты (R-K). Примеры расчетов показаны на рис. 7.6–7.8 при разных значениях ε, α . Начальные положения точек обозначены крестиками. Точками показаны их положения в течение 500 периодов.

На рис. 7.6 представлены расчеты положения ТПП до перехода к хаосу. Топологическая структура ТПП на верхней части рис. 7.6 соответствует топологической структуре 4 ($\alpha \in (1/8, 0, 205)$) рис. 7.5 и на нижней части рис. 7.6 – структуре 3 ($\alpha \in (0, 1/8)$) рис. 7.5. В нижней части рис. 7.6 штриховыми линиями обозначены сепаратрисы $\tilde{Y} = 3/4 \pm \sqrt{1 - 8\alpha}/4$. Пример расчетов при

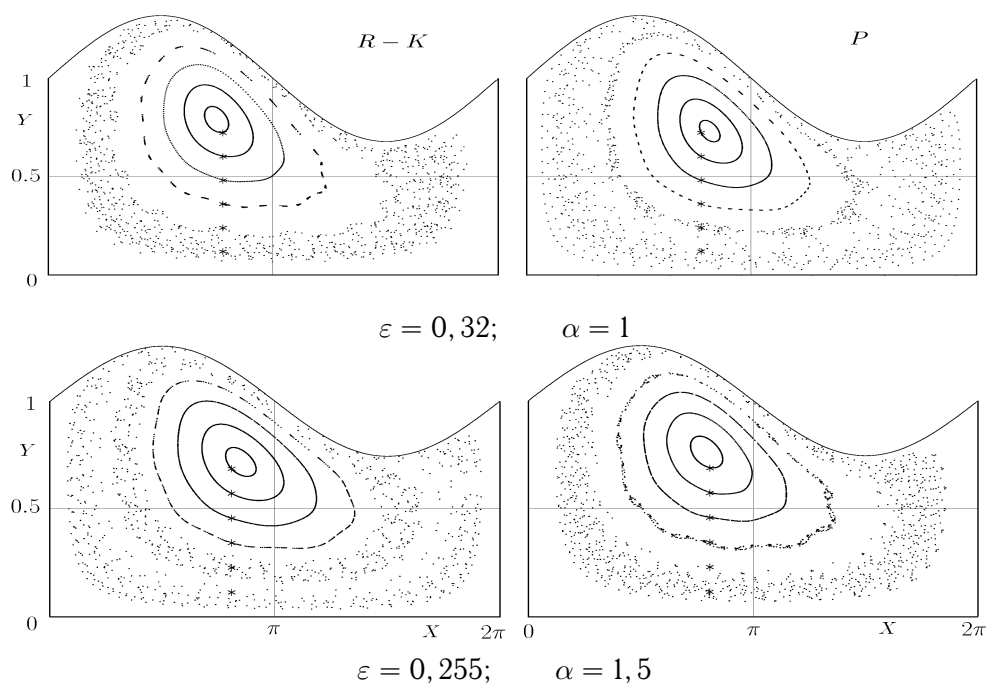


Рис. 7.7. ТПП. R-K — численный расчет, P — параметрический метод

переходе к хаосу показан на рис. 7.7. Все обозначения такие же, как на рис. 7.6. Топологическая структура точек Пуанкаре соответствует случаю $\alpha > 0,205$.

Обе фигуры демонстрируют хорошее согласие расчета по параметрическому методу и непосредственного численного расчета исходных дифференциальных уравнений, тогда как асимптотические формулы по методу производящих функций при этих значениях параметров α и ε выходят за пределы области применимости. На рис. 7.8 представлены численные расчеты ТПП, когда мера хаоса превышает $3/4$. Эта область параметров лежит вне области применимости отображения с функцией (7.2.13). При этих значениях параметров следует пользоваться параметрическим отображением в следующем приближении. Тогда как методом производящих функций получить отображение в этой области параметров невозможно ни в каком приближении, так как в окрестности неподвижной точки в этом случае ТПП совершают полный оборот менее чем за четыре раза.

Рассмотренный пример показывает возможность аналитического описания перехода к хаосу в достаточно сложных гидродинамических системах. Параметрический метод построения отображения Пуанкаре оказывается особенно полезным в задачах со многими параметрами. Вычисленные таким способом

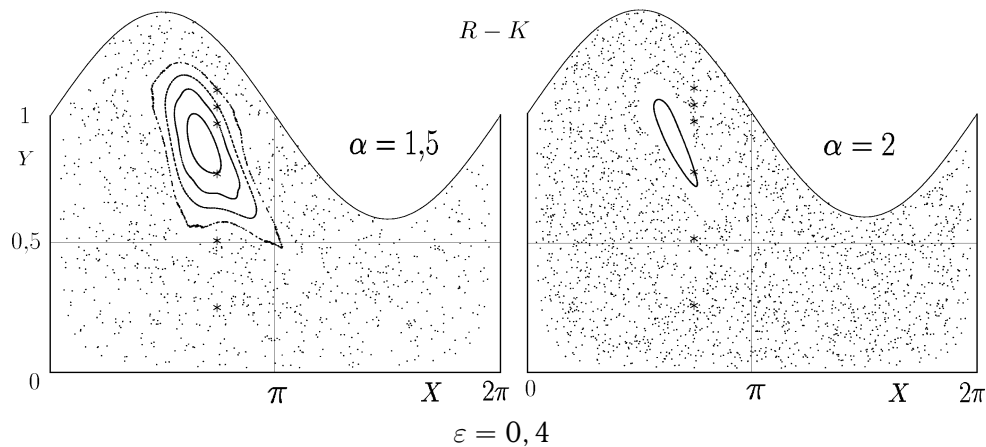


Рис. 7.8. ТПП. Хаотические режимы. Численный расчет

отображения имеют допустимую точность даже в том диапазоне параметров, когда классическим методом отображение Пуанкаре получить принципиально невозможно.

7.3. Перемешивание вязкой жидкости между двумя эксцентрично вращающимися круговыми цилиндрами

7.3.1. Краткий обзор результатов

Задача о течении вязкой жидкости между двумя вращающимися круговыми цилиндрами имеет важные приложения. Сюда относится описание движения жидких смазочных масел в зазоре между вращающимся валом и подушкой подшипника. Эта проблема широко освещена в учебной [40, 46, 15] и специальной литературе [25, 84, 87]. Другое направление связано с вопросами теории гидродинамической устойчивости, начало которой положено исследованиями Дж. Тейлора (Taylor G.I. 1923) (см. [9, 40, 43, 45]).

1. Течение Куэтта-Тейлора. Простейшее решение получается в случае осесимметричного вращения цилиндров с постоянными угловыми скоростями. Для вязкой жидкости решение изучено Н.П. Петровым в 1883 г. [75] с приложением к теории трения в подшипниках. Исследование Н.П. Петрова было опубликовано на 3 года раньше работы О. Рейнольдса (Reinolds O., 1886) [104], на которую обычно ссылаются как на пионерскую работу по теории гидродинамической смазки.

Для вязкопластической среды решение получено Рейнером и Ривлиным в 1927г. [78] и приведено в разд. 3.3.4.

2. Эксцентричное установившееся течение. Когда внутренний круговой цилиндр равномерно вращается около своего центра O_1 , смещенного относительно центра O_2 внешнего цилиндра, в среде, помещенной между двумя цилиндрами, возникает стационарное течение. В этом случае частицы среды движутся по линиям тока $H(X, Y) = \text{const}$, где H — функция тока. Линии тока не зависят от времени. Пример картины линий тока см. на рис. 6.1.

3. Решение задачи стационарного эксцентричного вращения для вязкой жидкости. Н.Е. Жуковский впервые рассмотрел задачу течения вязкой жидкости между двумя эксцентрично расположенными круговыми цилиндрами и вращающимися около своих неподвижных осей ([27], с. 121–132; впервые опубликовано в Сообщениях математического общества при Харьковском университете, 1887). При малых числах Рейнольдса им получено бигармоническое уравнение и найдено его точное решение. Зоммерфельд (Sommerfeld A., 1904) дал упрощенное решение задачи течения вязкой жидкости в приближении тонкого слоя между двумя цилиндрами. Ввиду своей простоты и высокой точности приближение, найденное Зоммерфельдом, часто используется в гидродинамической теории смазки. Его решение приведено также во многих монографиях (см., например, [40]). Почти сразу после выхода публикации Зоммерфельда в статье 1906 г. Н.Е. Жуковский и С.А. Чаплыгин провели сопоставление приближенного решения Зоммерфельда со своим точным решением, записанным в биполярных координатах ([27], с. 133–151). Значительно позднее Баллай и Ривлин (Ballal V.Y., Rivlin R.S. Arch. rat. Mech. Anal. 1976, 237–294) без ссылок привели точное выражение Жуковского и Чаплыгина для функции тока. На эту работу обычно ссылаются в зарубежной литературе без упоминания пионерских работ Н.П. Петрова, Н.Е. Жуковского и С.А. Чаплыгина.

4. Перемешивание при эксцентричном вращении. При вращении цилиндров с постоянными угловыми скоростями (в условиях задачи Жуковского и Чаплыгина) перемешивания не будет. Задача о движении частиц среды в этом случае представляет собой интегрируемую автономную гамильтонову систему. Если же круговые цилиндры вращаются с переменными, зависящими от времени скоростями, то система становится неинтегрируемой. В работе [99] рассматривается медленное изменение угловой скорости типа $\omega(t) = \omega_0 + \omega_1 \cos(\varepsilon\omega_0 t)$, $\varepsilon \ll 1$. Изучаются точки последования Пуанкаре через период $2\pi/(\varepsilon\omega_0)$ в адиабатическом приближении. Характерное время хаотизации много больше этого периода. Поскольку цилиндры вращаются около своих осей, то область течения со временем не меняется.

5. Центр вращения не совпадает с центрами ни одного из цилиндров. Пусть центр вращения не совпадает ни с центром внутреннего цилиндра O_1 , ни с центром внешнего цилиндра O_2 . Тогда область между цилиндрами будет меняться со временем. Задача о движении частиц среды помещенной между ци-

линдрами будет нестационарной даже при постоянной угловой скорости цилиндров. Этим данная постановка существенно отличается от предыдущих. Задача движения частиц вязкой жидкости, расположенной между цилиндрами, при таком вращении изучалась в работах [70, 73]. Хаотизация продемонстрирована на непосредственных численных решениях уравнений Гамильтона. Замечено, что площадь хаотизации достигает наибольшего значения при безразмерном значении эксцентриситета, равного 0,5.

Также построено отображение Пуанкаре параметрическим методом с точностью до куба эксцентриситета. Показана высокая точность полученного аналитически отображения. Оно дает фазовые портреты ТПП, практически не отличающиеся от численных вплоть до максимальной хаотизации движения частиц. Функция тока (гамильтониан H) имеет временной период, равный периоду обращения внутреннего цилиндра $2\pi/\omega$, т. е. в ε раз меньше, чем период гамильтониана в работе [99]. Соответственно и время хаотизации будет меньше.

Перейдем к изложению результатов этих работ.

7.3.2. Вращение внутреннего цилиндра около центра, не совпадающего с центрами цилиндров

1. Кинематика движения круговых цилиндров. Рассматривается движение кругового цилиндра, расположенного внутри другого кругового неподвижного кругового цилиндра. Оси обоих цилиндров направлены по вертикали. На рис. 7.9 изображено поперечное сечение цилиндров, представляющее собой область между двумя окружностями. Внешний круг и его центр O_2 неподвижны. Внутренний круг вращается с угловой скоростью 2ω так, что центр внутренней окружности O_1 описывает окружность с неподвижным центром O и радиусом $\varepsilon/2$.

Угол $\angle O_1 O O_2$ меняется со временем по закону $\angle O_1 O O_2 = 2\omega t$. Из прямоугольного треугольника $O_2 O_1 P$ следует, что расстояние между центрами меняется по гармоническому закону $O_1 O_2 = \varepsilon \sin \omega t$ (см. рис. 7.9 в правом верхнем углу).

Линия центров (ось x) перпендикулярна катету $O_1 P$ и вращается с угловой скоростью ω . Если рассматривать движение цилиндров в системе координат с неподвижной линией центров (см. рис. 7.9 в левом верхнем углу), то внутренний цилиндр будет вращаться с угловой скоростью ω , а центр его колеблется по закону $x = O_1 O_2 = \varepsilon \sin \omega t$. Внешний цилиндр в этой системе координат будет вращаться в противоположную внутреннему цилиндру сторону со скоростью $-\omega$.

Пусть радиус внутреннего круга равен R , а радиус внешнего — $R + 1$. Вычислим расстояние AB между двумя окружностями, при большом значении R .

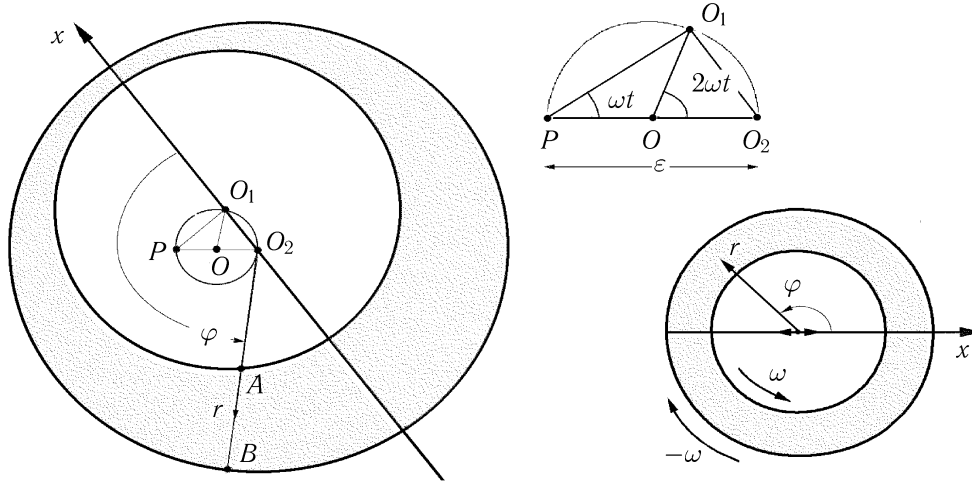


Рис. 7.9. Схема вращения цилиндров

Для этого применим теорему косинусов к треугольнику $O_1 O_2 A$

$$(O_1 O_2)^2 + (O_2 A)^2 - 2O_1 O_2 \cdot O_2 A \cdot \cos \varphi = (O_1 A)^2.$$

Подставляя $O_1 O_2 = \varepsilon \sin \omega t$, $O_1 A = R$, $O_2 A = R + 1 - AB$, получим уравнение относительно AB

$$\varepsilon^2 \sin^2 \omega t + (R + 1 - AB)^2 - 2\varepsilon \sin \omega t (R + 1 - AB) \cos \varphi = R^2 \Rightarrow$$

$$2R(1 - AB - \varepsilon \sin \omega t \cos \varphi) + O(1) = 0$$

откуда найдем

$$AB = 1 - \varepsilon \sin \omega t \cos \varphi + O(1/R). \quad (7.3.1)$$

2. Функция тока. Перейдем к решению задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в слое между двумя цилиндрами. В нашем случае задача существенно нестационарна за счет изменения области течения со временем. Частота изменения области течения совпадает с частотой вращения цилиндров. Функция тока (гамильтониан H) имеет временной период равный периоду обращения внутреннего цилиндра $2\pi/\omega$, т. е. в ε раз меньше, чем период гамильтониана в работе [99]. Соответственно и время хаотизации будет меньше.

Будем использовать асимптотическое приближение $R \gg 1$ теории смазочного слоя. Такой подход описан в монографиях [[40], с. 534–542 и [46], с. 413–417].

Функцию тока ищем в виде зависимости $RH(t, \varphi, Y)$, $Y = R + 1 - r$, а компоненты скорости

$$v_\varphi = R\dot{\varphi} = R\partial H/\partial Y, \quad v_Y = \dot{Y} = -\partial H/\partial \varphi, \quad (7.3.2)$$

где r, φ — полярные координаты с центром в точке O_2 . В переменных φ, Y область течения такова: $\varphi \in (0, 2\pi)$ $Y \in (0, Y_{max})$, где верхняя граница определяется уравнением (7.3.1):

$$Y_{max} = AB = 1 - \varepsilon \sin \omega t \cos \varphi.$$

Уравнения движения жидкости при $R \gg 1$ имеют вид

$$\frac{\partial p}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial p}{R \partial \varphi} = \mu \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial Y^2}.$$

Отсюда следует, что давление p зависит только от угла φ . Подставляя вместо v_φ ее выражение через функцию тока, получим для нее уравнение

$$\frac{dp(\varphi)}{R d\varphi} = \mu R \frac{\partial^3 H}{\partial Y^3}. \quad (7.3.3)$$

На границах цилиндров выполняются условия прилипания

$$Y = 0 : \quad H = 0, \quad \partial H / \partial Y = -\omega, \quad (7.3.4)$$

$$Y = Y_{max} : \quad -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{\partial Y_{max}}{\partial t} + \omega \frac{\partial Y_{max}}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial H}{\partial Y} = \omega. \quad (7.3.5)$$

Кроме того, нужно потребовать однозначность функции давления $p(0) = p(2\pi)$. В силу (7.3.3) это условие запишется так:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^3 H}{\partial Y^3} d\varphi = 0. \quad (7.3.6)$$

Краевая задача (7.3.3)–(7.3.6) решается так. Вводим функцию расхода $Q(t, \varphi) = H(t, \varphi, Y_{max})$. Тогда решение представляется в виде

$$H = Q(t, \varphi)(3\tilde{Y}^2 - 2\tilde{Y}^3) + \omega Y_{max} [-\tilde{Y}(1 - \tilde{Y})^2 + \tilde{Y}^2(-1 + \tilde{Y})],$$

$$\tilde{Y} = Y/Y_{max}.$$

В этом представлении функция тока удовлетворяет уравнению (7.3.3), крайевым условиям (7.3.4) и второму условию (7.3.5). Подставляя в первое условие (7.3.5), получим уравнение сохранения массы в слое $\partial Q / \partial \varphi + \partial Y_{max} / \partial t = 0$. Интегрируя это уравнение, получим $Q = \varepsilon \omega \cos \omega t \sin \varphi + c(t)$. Из условия однозначности давления найдем, что $c(t) = 0$. Таким образом, гамильтониан системы в приближении тонкого слоя имеет вид

$$H(t, \varphi, Y) = \omega \varepsilon \cos \omega t \sin \varphi (3\tilde{Y}^2 - 2\tilde{Y}^3) + \omega(\tilde{Y} - \tilde{Y}^2)Y_{max}. \quad (7.3.7)$$

7.3.3. Движение частиц вязкой жидкости в слое между эксцентрично вращающимися цилиндрами

1. Точки последования Пуанкаре. Численный расчет. Положения точек последования Пуанкаре φ_n, Y_n в моменты времени $t_n = 2\pi n/\omega$ находятся из решения задачи Коши для уравнений Гамильтона (7.3.2)

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \partial H / \partial Y, & \dot{Y} &= -\partial H / \partial \varphi, \\ \varphi(0) &= \varphi_0, & Y(0) &= Y_0. \end{aligned} \quad (7.3.8)$$

В эти моменты времени оси O_1 и O_2 внутреннего и внешнего цилиндров совпадают, а в переменных φ, Y область течения — прямоугольник $\varphi \in [0, 2\pi)$, $Y \in (0, 1)$.

На рис. 7.10 изображены точки последования Пуанкаре (ТПП) при различных значениях параметра ε , найденные численным решением уравнений (7.3.8) методом Рунге-Кутты. Точки выводятся в моменты времени $t_n = 2\pi n/\omega$, $n = 0, 1, \dots, 500$, при которых центры окружностей O_1 и O_2 совпадают. Начальные точки обозначены жирными точками. Неподвижные точки обозначены кружочками. При $\varepsilon = 0$ течение жидкости представляет собой простое сдвиговое течение Куэтта, точки движутся по прямым $Y = const$ (в полярных координатах это концентрические окружности). Уже при малых значениях ε фазовая картина усложняется и виден переход к хаосу, который генерируется в точке $\varphi = \pi$, $Y = 1/2$. Интересно, что наибольшая площадь хаотизации достигается при $\varepsilon = 0,5$. При $\varepsilon > 0,5$ с ростом ε в середине области течения растут две подобласти с инвариантными кривыми точек последования. Попадая в эти подобласти, точки последования из нее никогда не выйдут. Таким образом, наилучшее перемешивание достигается при $\varepsilon = 0,5$.

2. Приведение гамильтониана к стандартному виду. Для приведения гамильтониана (7.3.7) к стандартной форме сделаем две канонические замены. Используем аппарат производящих функций (см. 6.3.5).

Первая замена $\varphi, Y \rightarrow \bar{q}, \bar{p}$ отображает область течения с криволинейными границами $\varphi \in [0, 2\pi)$, $Y \in (0, Y_{max})$ на прямоугольник $\bar{q} \in [0, 2\pi)$, $\bar{p} \in (-1/2, 1/2)$. Она имеет производящую функцию

$$S_1(\varphi, \bar{p}) = \left(\frac{1}{2} + \bar{p}\right) \int_0^\varphi Y_{max} d\varphi = \left(\frac{1}{2} + \bar{p}\right) (\varphi - \varepsilon \sin \omega t \sin \varphi).$$

По формуле (6.3.5) определяем аналитический вид замены

$$\bar{q} = \frac{\partial S_1}{\partial \bar{p}} = \varphi - \varepsilon \sin \omega t \sin \varphi, \quad Y = \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} = \left(\frac{1}{2} + \bar{p}\right) Y_{max} \quad (7.3.9)$$

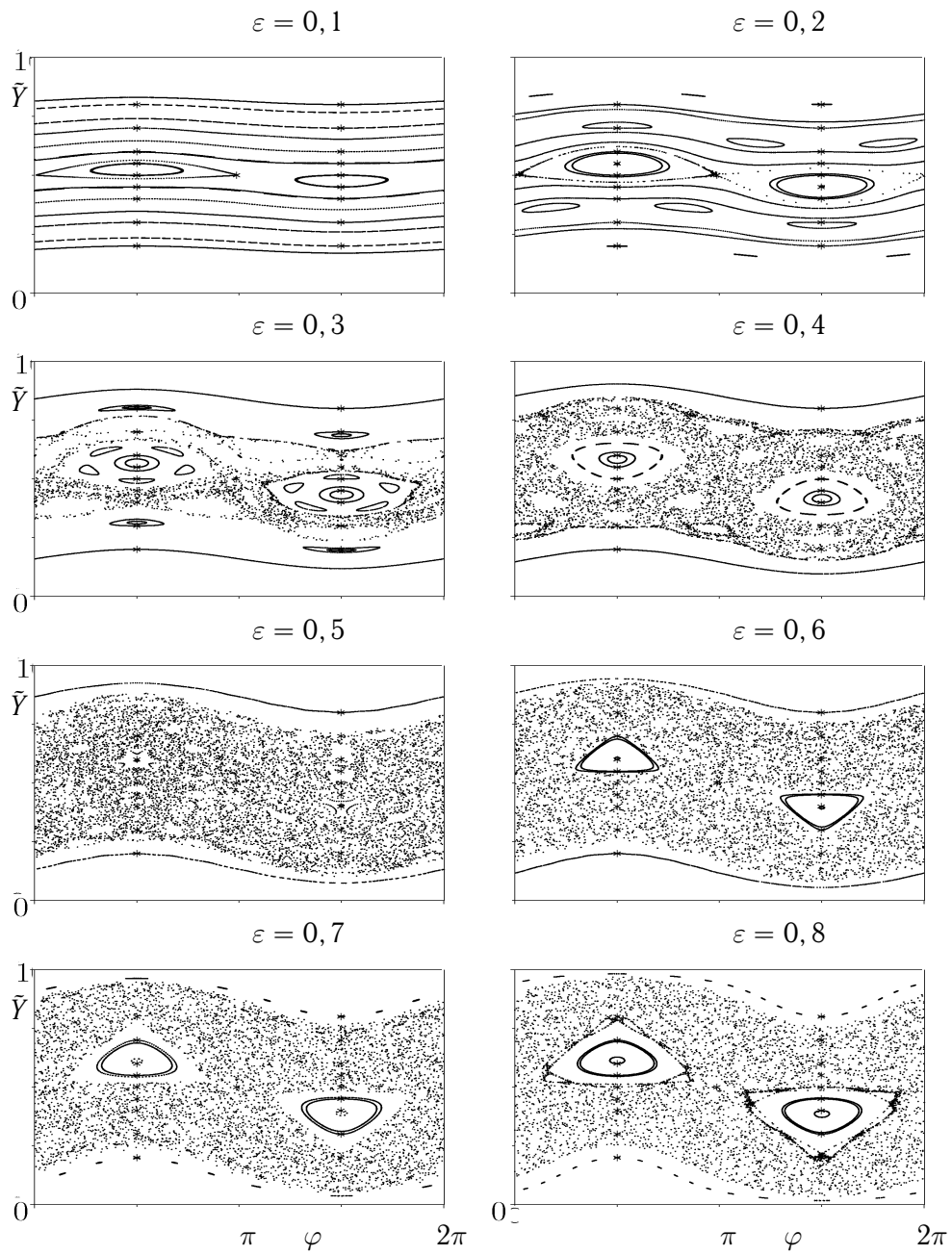


Рис. 7.10. ТПП между двумя вращающимися цилиндрами. Численный расчет

и гамильтониан в новых переменных

$$\tilde{H}(t, \bar{q}, \bar{p}) = \frac{\partial S_1}{\partial t} + H = -\omega \bar{p}^2 + \varepsilon \omega \left(\bar{p}^2 - \frac{1}{4} \right) [\sin \omega t \cos \varphi - 2\bar{p} \cos \omega t \sin \varphi],$$

где зависимость $\varphi(t, \bar{q})$ определяется первым уравнением (7.3.9).

Вторая каноническая замена, приводящая систему к стандартному виду $\bar{q}, \bar{p} \rightarrow q, p$ имеет производящую функцию $S_2(t, q, \bar{p}) = \omega t \bar{p}^2 - q \bar{p}$ (см. пример 5. в разд. 6.3.5). Аналитический вид замены и преобразованный гамильтониан таковы

$$\bar{q} = -\partial S_2 / \partial \bar{p} = q - 2p\omega t, \quad p = -\partial S_2 / \partial q = \bar{p}, \quad (7.3.10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}(t, q, p) &= \varepsilon \omega F(t, \varphi, p), \\ F &= \left(p^2 - \frac{1}{4} \right) (\sin \omega t \cos \varphi - 2p \cos \omega t \sin \varphi). \end{aligned} \quad (7.3.11)$$

Здесь φ как функция t, q, p определяется неявно из уравнения

$$\varphi - \varepsilon \sin \omega t \sin \varphi = q - 2p\omega t. \quad (7.3.12)$$

Уравнения движения частицы в переменных q, p

$$\dot{q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p} = \varepsilon \omega \left(\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{2\omega t}{Y_{max}} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right), \quad \dot{p} = -\frac{\varepsilon \omega}{Y_{max}} \frac{\partial F}{\partial \varphi}. \quad (7.3.13)$$

Из (7.3.12) можно найти частные производные

$$\begin{aligned} \partial \varphi / \partial t &= (-2p\omega + \varepsilon \omega \cos \omega t \sin \varphi) / Y_{max}, \\ \partial \varphi / \partial q &= 1 / Y_{max}, \quad \partial \varphi / \partial p = -2\omega t / Y_{max} \end{aligned} \quad (7.3.14)$$

и полную производную

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \dot{q} \frac{\partial \varphi}{\partial q} + \dot{p} \frac{\partial \varphi}{\partial p}.$$

Пользуясь полученными формулами для производных, можно записать уравнения движения частицы (7.3.13) в исходных переменных φ, Y

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\omega t} &= -2p - 6 \frac{\varepsilon}{Y_{max}} \left(p^2 - \frac{1}{4} \right) \cos \omega t \sin \varphi, \\ \frac{dp}{d\omega t} &= \frac{\varepsilon}{Y_{max}} \left(p^2 - \frac{1}{4} \right) (\sin \omega t \sin \varphi + 2p \cos \omega t \cos \varphi), \\ Y &= \left(\frac{1}{2} + p \right) Y_{max}. \end{aligned} \quad (7.3.15)$$

Полученная система уравнений эквивалентна исходной (7.3.8). Отсюда можно численно найти ТПП и результат будет тождественен полученному выше.

3. Отображение Пуанкаре. Отображение Пуанкаре позволяет вычислять ТПП из рекуррентных соотношений. Запишем разложение гамильтониана (7.3.11) по степеням ε

$$\begin{aligned}\tilde{H}(\tau, q, p) &= \varepsilon\omega H_1 + \varepsilon^2\omega H_2 + O(\varepsilon^3), \\ H_1 &= \left(p^2 - \frac{1}{4}\right) (\sin \tau \cos(q - 2p\tau) - 2p \cos \tau \sin(q - 2p\tau)), \\ H_2 &= -\left(p^2 - \frac{1}{4}\right) \left[\sin^2 \tau \sin^2(2(q - 2p\tau)) + \frac{1}{2} \sin 2\tau \sin(2(q - 2p\tau))\right], \\ \tau &= \omega t\end{aligned}\tag{7.3.16}$$

и применяя формулу (6.4.11), можно получить параметрическую функцию $\Psi(x, y)$ для отображения Пуанкаре с точностью до ε^3 . Возвращаясь к исходным переменным φ, Y с помощью преобразований (7.3.9, 7.3.10) получим отображение для ТПП $(\varphi_0, Y_0) \rightarrow (\varphi_1, Y_1)$ в виде суперпозиции трех отображений

$$\begin{cases} Y_0 = p_0 + 1/2, & \varphi_0 = Q_0 + 2\pi p_0, \\ (Q_0, p_0) \rightarrow (Q_1, p_1), \\ p_1 = Y_1 - 1/2, & Q_1 = \varphi_1 + 2\pi p_1 \end{cases}\tag{7.3.17}$$

Промежуточное отображение $(Q_0, p_0) \rightarrow (Q_1, p_1)$ находится в параметрическом виде с помощью (6.4.12)

$$\begin{cases} Q_0 = x' - \frac{1}{2}\Psi_y \\ p_0 = y + \frac{1}{2}\Psi_{x'} \end{cases}, \quad \begin{cases} Q_1 = x' + \frac{1}{2}\Psi_y \\ p_1 = y - \frac{1}{2}\Psi_{x'} \end{cases},\tag{7.3.18}$$

$$\begin{aligned}\Psi(x', y) &= \varepsilon\Psi_1(x', y) + \varepsilon^2\Psi_2(x', y) + O(\varepsilon^3), \\ \Psi_1(x', y) &= -2f(y) \sin x', \quad \Psi_2(x', y) = u(y) + v(y) \cos(2x'), \\ f(y) &= \left(y^2 - \frac{1}{4}\right) \sin 2\pi y, \\ u(y) &= \pi \left(y^2 - \frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{5}{2} - \cos 4\pi y\right) - p \left(y^2 - \frac{1}{4}\right) \sin 4\pi y, \\ v(y) &= \pi \left(y^2 - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(y^2 - \frac{1}{4}\right) \left(y^2 - \frac{5}{8}\right) \frac{\sin 4\pi y}{4y}.\end{aligned}\tag{7.3.19}$$

Приведем вывод формул (7.3.18) и (7.3.19) более подробно. Для упрощения выкладок введем функцию

$$g(\tau, q, p) = \cos q - \cos \tau \cos(q - 2p\tau).\tag{7.3.20}$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi} H_1 d\tau = \left(p^2 - \frac{1}{4}\right) g(\tau, q, p).$$

Для первого приближения найдем

$$\begin{aligned}\Psi_1(q, p) &= \left(p^2 - \frac{1}{4}\right) g(2\pi, q, p) = -2f(p) \sin(Q), \\ f(p) &= \left(p^2 - \frac{1}{4}\right) \sin 2\pi p, \quad Q = q - 2\pi p.\end{aligned}\tag{7.3.21}$$

Для второго приближения

$$\begin{aligned}\Psi_2(q, p) &= \Psi_{21}(q, p) + \Psi_{22}(q, p), \\ \Psi_{21}(q, p) &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ H_1, \int_0^\tau H_1 d\tau' \right\} d\tau, \quad \Psi_{22}(q, p) = \int_0^{2\pi} H_2 d\tau.\end{aligned}\tag{7.3.22}$$

С помощью тождеств

$$-\left\{ H_1, \int_0^\tau H_1 d\tau' \right\} = \left(p^2 - \frac{1}{4}\right)^2 (g_{\tau q} g_p - g_{\tau p} g_q) + 2p \left(p^2 - \frac{1}{4}\right) (g_{\tau q} g - g_\tau g_q).$$

$$g_{\tau q} g_p - g_{\tau p} g_q = -2 \sin q \frac{d}{d\tau} [\tau(\cos \tau \sin(Q))] + 2(\cos \tau \sin(Q))^2$$

$$\int_0^{2\pi} (g_{\tau q} g_p - g_{\tau p} g_q) = \pi(1 - 2 \cos 4\pi p) + \left(2\pi - \frac{\sin(4\pi p)}{4p} \frac{8p^2 - 1}{4p^2 - 1}\right) \cos(2Q),$$

$$\int_0^{2\pi} (g_{\tau q} g - g_\tau g_q) = 2\pi p - \sin 4\pi p$$

находим интегралы в (7.3.22) и функцию Ψ для отображения Пуанкаре

$$\Psi(q, p) = \varepsilon \Psi_1(Q, p) + \varepsilon^2 \Psi_2(Q, p) + O(\varepsilon^3),$$

$$\Psi_2(Q, p) = u(p) + v(p) \cos(2Q),$$

$$u(p) = \pi \left(p^2 - \frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{5}{2} - \cos 4\pi p\right) - p \left(p^2 - \frac{1}{4}\right) \sin 4\pi p,$$

$$v(p) = \pi \left(p^2 - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(p^2 - \frac{1}{4}\right) \left(p^2 - \frac{5}{8}\right) \frac{\sin 4\pi p}{4p},$$

которые позволяют вычислять координаты следующей точки последования Пуанкаре q_1, p_1 по координатам предыдущей точки q_0, p_0 . Исходные координаты ТПП находятся по формулам $\varphi_0 = q_0$, $\varphi_1 = q_1 - 4\pi p_1$. Это отображение можно еще упростить, перейдя к новым переменным $Q_0 = q_0 - 2\pi p_0$, $Q_1 = q_1 - 2\pi p_1$, $x' = x - 2\pi y$. В результате получим требуемое отображение Пуанкаре $(\varphi_0, Y_0) \rightarrow (\varphi_1, Y_1)$ (7.3.17), (7.3.18), (7.3.19).

4. Отображение Пуанкаре за полупериод. Найденное отображение (7.3.17)–(7.3.19) можно существенно уточнить, если представить отображение за период в виде двух отображений за полупериод. В моменты времени, кратные полупериоду, центры цилиндров также совпадают. Область φ, Y в эти моменты времени является также прямоугольником. Отображения строятся аналогично. Отображение $(\varphi_0, Y_0) \rightarrow (\varphi_{1/2}, Y_{1/2})$ за первый полупериод имеет вид

$$\begin{cases} Q_0 = \varphi_0 - \pi p_0, & p_0 = Y_0 - 1/2, \\ \begin{cases} Q_0 = x' - \frac{1}{2}\Phi_y \\ p_0 = y + \frac{1}{2}\Phi_{x'} \end{cases}, & \begin{cases} Q_{1/2} = x' + \frac{1}{2}\Phi_y \\ p_{1/2} = y - \frac{1}{2}\Phi_{x'} \end{cases}, \\ \varphi_{1/2} = Q_{1/2} - \pi p_{1/2}, & Y_{1/2} = p_{1/2} + 1/2, \end{cases} \quad (7.3.23)$$

а за второй полупериод отображение $(\varphi_{1/2}, Y_{1/2}) \rightarrow (\varphi_1, Y_1)$ отличается только параметрической функцией

$$\begin{cases} \tilde{Q}_{1/2} = \varphi_{1/2} - \pi p_{1/2}, & p_{1/2} = Y_0 - 1/2, \\ \begin{cases} \tilde{Q}_{1/2} = x - \frac{1}{2}\tilde{\Phi}_y \\ p_{1/2} = y + \frac{1}{2}\tilde{\Phi}_x \end{cases}, & \begin{cases} Q_1 = x + \frac{1}{2}\tilde{\Phi}_y \\ p_1 = y - \frac{1}{2}\tilde{\Phi}_x \end{cases}, \\ \varphi_1 = Q_1 - \pi p_1, & Y_1 = p_1 + 1/2. \end{cases} \quad (7.3.24)$$

Функции Φ и $\tilde{\Phi}$ вычисляются так:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \varepsilon\Phi_1(x, y) + \varepsilon^2\Phi_2(x, y) + O(\varepsilon^3), \\ \tilde{\Phi}(x, y) &= -\varepsilon\Phi_1(x, y) + \varepsilon^2\Phi_2(x, y) + O(\varepsilon^3), \\ \Phi_1(x, y) &= 2(y^2 - \frac{1}{4}) \cos x \cos(\pi y), \\ \Phi_2(x, y) &= u(y) + v(y) \cos(2x), \\ u(y) &= \frac{5\pi}{4}(y^2 - \frac{1}{4})^2 + \frac{\pi}{2}(y^2 - \frac{1}{4})^2 \cos 2\pi y + y(y^2 - \frac{1}{4}) \sin 2\pi y, \\ v(y) &= -\frac{\pi}{2}(y^2 - \frac{1}{4})^2 - (y^2 - \frac{1}{4})(8y^2 - 5) \frac{\sin 2\pi y}{32y}. \end{aligned} \quad (7.3.25)$$

Остаточный член найденных отображений имеет порядок $(T\varepsilon)^3$, где T — временной интервал. Поэтому отображение за два полупериода имеет в четыре раза меньшую погрешность по сравнению с отображением за период. Отображение за период применимо на интервале $0 < \varepsilon < 0,45$, а отображение за два полупериода применимо в большем диапазоне $0 < \varepsilon < 0,59$.

На рис. 7.11 приведены фазовые портреты ТПП при $\varepsilon = 0,2$ и $\varepsilon = 0,4$, найденные с помощью аналитического отображения Пуанкаре: слева за один период из решения алгебраических уравнений (7.3.17)–(7.3.19) и для сравнения

справа — за два полупериода из решения уравнений (7.3.17)–(7.3.19). Последний фазовый портрет при $\varepsilon = 0,5$ определен по (7.3.23)–(7.3.25), а отображение (7.3.17)–(7.3.19) в этом случае не существует. Фазовые портреты справа лучше согласуются с точными расчетами на рис. 7.10.

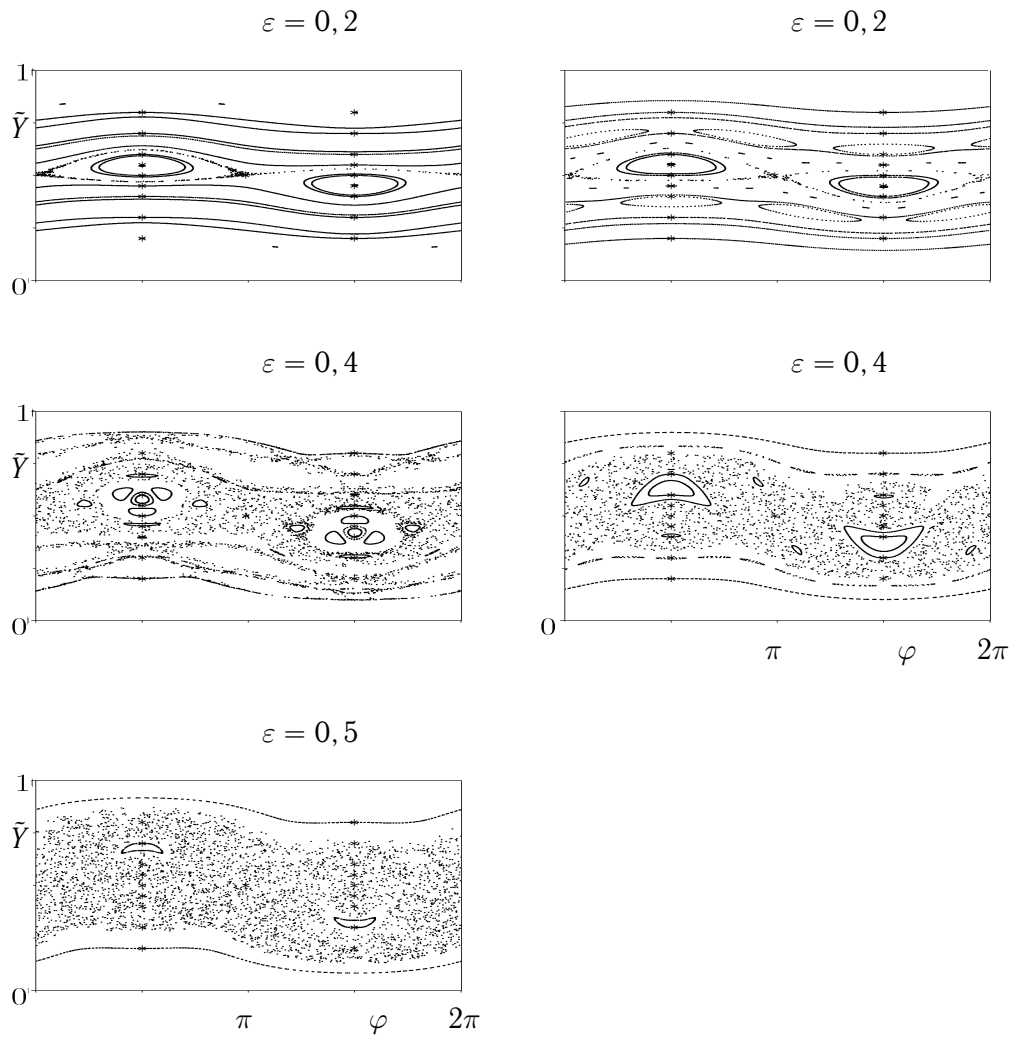


Рис. 7.11. ТПП между двумя вращающимися цилиндрами. Аналитическое отображение Пуанкаре

5. Сравнение фазовых портретов. Сравнение рис. 7.11 с соответствующими фазовыми портретами на рис. 7.10 показывает не только их качественное совпадение, но и количественное. Так, положения неподвижных точек, обозначенных кружочками, практически совпадают. Эллиптические и гиперболические точки соответствуют друг другу. Области хаотизации точек и их упорядоченного движения на соответствующих рисунках мало отличаются друг от друга. Таким образом, при $\varepsilon < 0,5$ точность функций (7.3.19), (7.3.25) и полученных с помощью них параметрических отображений достаточны, чтобы определять фазовые траектории ТПП и описывать переход к хаосу.

6. Неподвижные точки отображения Пуанкаре. Фазовый портрет ТПП можно качественно описать, если найти неподвижные точки отображения и исследовать их устойчивость. Устойчивые неподвижные точки называют точками эллиптического типа. В ее окрестности ТПП лежат на замкнутых инвариантных кривых, близких к эллипсам. Это движение упорядоченное. Неустойчивые неподвижные точки называют точками гиперболического типа. В ее окрестности расположение ТПП может быть хаотичным.

Основные неподвижные точки определяются из системы уравнений

$$Y_0 = Y_1, \quad \varphi_0 = \varphi_1$$

Их можно найти аналитически с помощью отображения (7.3.17)–(7.3.19)

$$p_0 = p_1 = y, \quad Y_0 = Y_1 = 1/2 + y, \quad \varphi_0 = \varphi_1 = x', \quad (7.3.26)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{x'} &= -2\varepsilon \cos x' (f(y) + 2\varepsilon v(y) \sin x') = 0, \\ \Psi_y - 4\pi y &= \varepsilon^2 (u'(y) + v'(y) \cos 2x') - 2\varepsilon f'(y) \sin x' - 4\pi y = 0. \end{aligned} \quad (7.3.27)$$

Система (7.3.27) эквивалентна двум системам уравнений

$$\begin{cases} \cos x' = 0, \\ \varepsilon^2 (u'(y) - v'(y)) - 2\varepsilon f'(y) \sin x' - 4\pi y = 0, \end{cases} \quad (7.3.28)$$

$$\begin{cases} f(y) + 2\varepsilon v(y) \sin x' = 0, \\ \varepsilon^2 (u'(y) + v'(y) \cos 2x') - 2\varepsilon f'(y) \sin x' - 4\pi y = 0. \end{cases} \quad (7.3.29)$$

Первая система (7.3.28) имеет два корня, которые можно получить с помощью асимптотических разложений по степеням y . Точки, соответствующие этим корням, обозначим через M_1 и M_2

$$M_1 \begin{cases} x' = \pi/2, \\ \varepsilon = 4y + 104y^3, \\ y \in (0, 0, 1), \end{cases} \quad M_2 \begin{cases} x' = 3\pi/2, \\ \varepsilon = -4y - 104y^3, \\ y \in (-0, 1, 0). \end{cases} \quad (7.3.30)$$

Отсюда с помощью (7.3.26) находим координаты φ, Y точек M_1 и M_2 . Вторая

система (7.3.29) при любом ε имеет два следующих решения

$$M_3 \begin{cases} x' = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad M_4 \begin{cases} x' = \pi \\ y = 0 \end{cases}. \quad (7.3.31)$$

и, кроме того, при $\varepsilon > 0,587$ решения определяемые асимптотическими разложениями $\varepsilon = 0,587 + 17,7y^2 + \dots$, $\sin x' = -4,54y - 32,2y^3 + \dots$. Однако при $\varepsilon > 0,5$ найденное отображение неприменимо и поэтому последнее решение рассматриваться не будет. Таким образом, решение (7.3.31) определяет еще две неподвижные точки M_3 и M_4 . Их координаты φ, Y , как следует из (7.3.26) и (7.3.31), таковы:

$$M_3(\varphi = 0, Y = 1/2), \quad M_4(\varphi = \pi, Y = 1/2)$$

и не зависят от ε . Найденные неподвижные точки соответствуют периодическим решениям уравнений Гамильтона с периодом $\omega t = 2\pi$. Существуют также серии неподвижных точек, соответствующих периоду $2\pi n$. Эти точки определяются из уравнений $\phi_n = \pi_0 + 2\pi k, p_n = p_0$, и их также можно находить аналитически. Ограничимся рассмотрением устойчивости найденных неподвижных точек (7.3.30) и (7.3.31).

7. Устойчивость неподвижных точек. Зная отображения $(Q_0, p_0) \rightarrow (Q_1, p_1) \rightarrow (\varphi_1, p_1)$ и $(\varphi_0, p_0) \rightarrow (Q_0, p_0)$ мы можем построить отображение $(\varphi_0, p_0) \rightarrow (\varphi_1, p_1)$ и вычислить его якобиеву матрицу. В окрестности неподвижной точки имеем

$$\begin{cases} dQ_1 = A_{11}dQ_0 + A_{12}dp_0, \\ dp_1 = A_{21}dQ_0 + A_{22}dp_0, \\ \\ \begin{cases} dQ_0 = d\varphi_0 - 2\pi dp_0, \\ d\varphi_1 = dQ_1 - 2\pi dp_1, \end{cases} \end{cases}$$

где коэффициенты A_{ij} выражаются через вторые производные параметрической функции $\Psi(x, y)$, определяемой по формуле (7.3.19). Из последней группы линейных соотношений найдем

$$\begin{cases} d\varphi_1 = \bar{A}_{11}d\varphi_0 + \bar{A}_{12}dp_0, \\ dp_1 = \bar{A}_{21}d\varphi_0 + \bar{A}_{22}dp_0, \end{cases} \quad (7.3.32)$$

$$\bar{A}_{11} = A_{11} - 2\pi A_{21}, \quad \bar{A}_{12} = A_{12} - 2\pi(A_{11} + A_{22}) + 4\pi^2 A_{21},$$

$$\bar{A}_{21} = A_{21}, \quad \bar{A}_{22} = A_{22} - 2\pi A_{21}.$$

Первый инвариант отображения (7.3.32) таков:

$$I = \bar{A}_{11} + \bar{A}_{22} = A_{11} + A_{22} - 4\pi A_{21}.$$

Коэффициенты матрицы выражаем через функцию Ψ

$$I = 2\frac{2-J}{J} + 4\pi\frac{\Psi_{xx}}{J}, \quad J = 1 + \frac{\varepsilon^2}{4}(\Psi_{xx}\Psi_{yy} - \Psi_{xy}^2). \quad (7.3.33)$$

Характеристическое уравнение $m^2 - Im + 1 = 0$ при $|I| \leq 2$ имеет комплексные корни, модуль которых равен единице. В этом случае неподвижные точки будут устойчивы (точки эллиптического типа). С учетом (7.3.33) условие устойчивости будет иметь вид

$$\begin{aligned} -1 &\leq \pi\Psi_{x'x'} = 2\pi\varepsilon f(y) \sin x' - 4\pi\varepsilon^2 v(y) \cos 2x' \leq J - 1, \\ J - 1 &= \frac{1}{4}(\Psi_{xx}\Psi_{yy} - \Psi_{xy}^2). \end{aligned} \quad (7.3.34)$$

Исследуем устойчивость неподвижных точек M_1 и M_2 (7.3.30). С помощью разложений $v(y) = -(3/32)\pi + (3/8)\pi + (5/12)\pi^3 y^2 + \dots$, $f(y) = -(\pi/2)y + (2\pi + \pi^3/3)y^3 + \dots$ условие (7.3.34) примет вид $-1 \leq -10(\pi y)^2$. Отсюда находим, что при

$$0 \leq y \leq y_0 \approx 1/(\pi\sqrt{10}) \approx 0,1, \quad \varepsilon \leq \varepsilon_0 \approx 0,505$$

точка M_1 ($\varphi = \pi/2$, $Y = 1/2 + \varepsilon/4 + O(\varepsilon^3)$) устойчива. Вторая, симметрично расположенная, неподвижная точка M_2 ($\varphi = 3\pi/2$, $Y = 1/2 - \varepsilon/4 + O(\varepsilon^3)$) устойчива при тех же значениях параметра ε . Эти неподвижные точки на численных экспериментах (рис. 7.10) обозначены кружочками. При $\varepsilon = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$ точки имеют эллиптический тип. В их окрестности ТПП расположены на замкнутых инвариантных кривых. При $\varepsilon = 0,5$ неподвижные точки M_1 и M_2 теряют устойчивость, ТПП хаотично заполняют почти всю область течения.

Устойчивость неподвижных точек M_3 и M_4 (7.3.31) исследуется аналогично. Вычисляем вторые производные Ψ в этих точках

$$\begin{aligned} \Psi_{xx} &= -4\varepsilon^2 v(0) = (3/8)\pi\varepsilon^2, \\ \Psi_{yy} &= \varepsilon^2(u''(0) + v''(0)) = \varepsilon^2\left(\frac{5}{4}\pi + \frac{11}{6}\pi^3\right) = 60,8\varepsilon^2, \\ \Psi_{xy} &= 2\varepsilon f'(0) = -\varepsilon\pi, \\ J - 1 &= -2,467\varepsilon^2 + 17,9\varepsilon^4. \end{aligned}$$

Подстановка в условие устойчивости дает $-1 \leq 3,7\varepsilon^2 < -2,47\varepsilon^2 + 17,9\varepsilon^4$. Отсюда следует, что неподвижные точки M_3 ($\varphi = 0$, $Y = 1/2$) и M_4 ($\varphi = \pi$, $Y = 1/2$) неустойчивы всегда при $\varepsilon < 0,587$, т. е. являются точками гиперболического типа. Устойчивы точки при $\varepsilon > 0,587$, однако это заключение принимать во внимание не надо, так как отображение (7.3.17)–(7.3.19) при $\varepsilon > 0,5$ неприменимо.

8. Процесс перемешивания частиц жидкости. Для описания процесса перемешивания приведем решение следующей задачи. Рассмотрим малый прямоугольник фазовой плоскости $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0 + a$, $Y_0 \leq Y \leq Y_0 + b$, где a и b — стороны прямоугольника. Построим в этом прямоугольнике сетку, разбив каждую сторону на n равных отрезков. В узлы сетки $n \times n$ поместим начальные точки ТПП. Будем фотографировать эти точки через $1, 2, 3, \dots, K$ периодов. При отсутствии хаоса эти точки будут располагаться в окрестности инвариантной кривой, проходящей через выбранный прямоугольник. Пример такого расчета при $\varepsilon = 0,1$ представлен на рис. 7.12. Левый верхний угол начального прямоугольника выбран в точке с координатами $\varphi_0 = 0,2 \times 2\pi$, $Y_0 = 0,7$. Стороны прямоугольника в 50 раз меньше сторон прямоугольной области течения жидкости, т. е. $a = 2\pi/50$ и $b = 1/50$. В малом прямоугольнике в узлах сетки 50×50 помещены $51 \times 51 = 2601$ точка. На первом рисунке (в верхнем левом углу) приведен прямоугольник, заполненный начальными точками и точками, в которых частицы жидкости окажутся через период. Как видно, прямоугольник с точками через период преобразовался в вытянутый параллелограмм. Иначе говоря, отображением Пуанкаре через период прямоугольника является параллелограмм. Через два периода точки переходят в еще более вытянутый параллелограмм, который является повторным отображением Пуанкаре параллелограмма на первом периоде. Этот параллелограмм показан на втором рисунке справа. На следующих рисунках показаны отображения начальных точек через 3, 4, 5, 10, 20 и 200 периодов. Эти значения приведены на рисунках. Как видно, точки равномерно перемешались в узкой криволинейной полосе, толщина которой сравнима с размером начального прямоугольника. За пределы этой узкой полосы частицы жидкости никогда не проникнут. Этот режим не является хаотическим.

Следующий расчет при $\varepsilon = 0,5$ представлен на рис. рис. 7.13 и демонстрирует хорошее перемешивание частиц жидкости. Точки из расположенного в том же месте прямоугольника через 10 периодов равномерно распределяются по достаточно широкой области, сравнимой по площади со всей областью течения жидкости. Область перемешивания соответствует фазовому портрету ТПП при $\varepsilon = 0,5$ (см. рис. 7.10).

Расчеты показанные на рис. 7.12 и рис. 7.13 выполнены с помощью параметрического отображения, что примерно в 100 раз сокращает время расчетов без существенной потери точности.

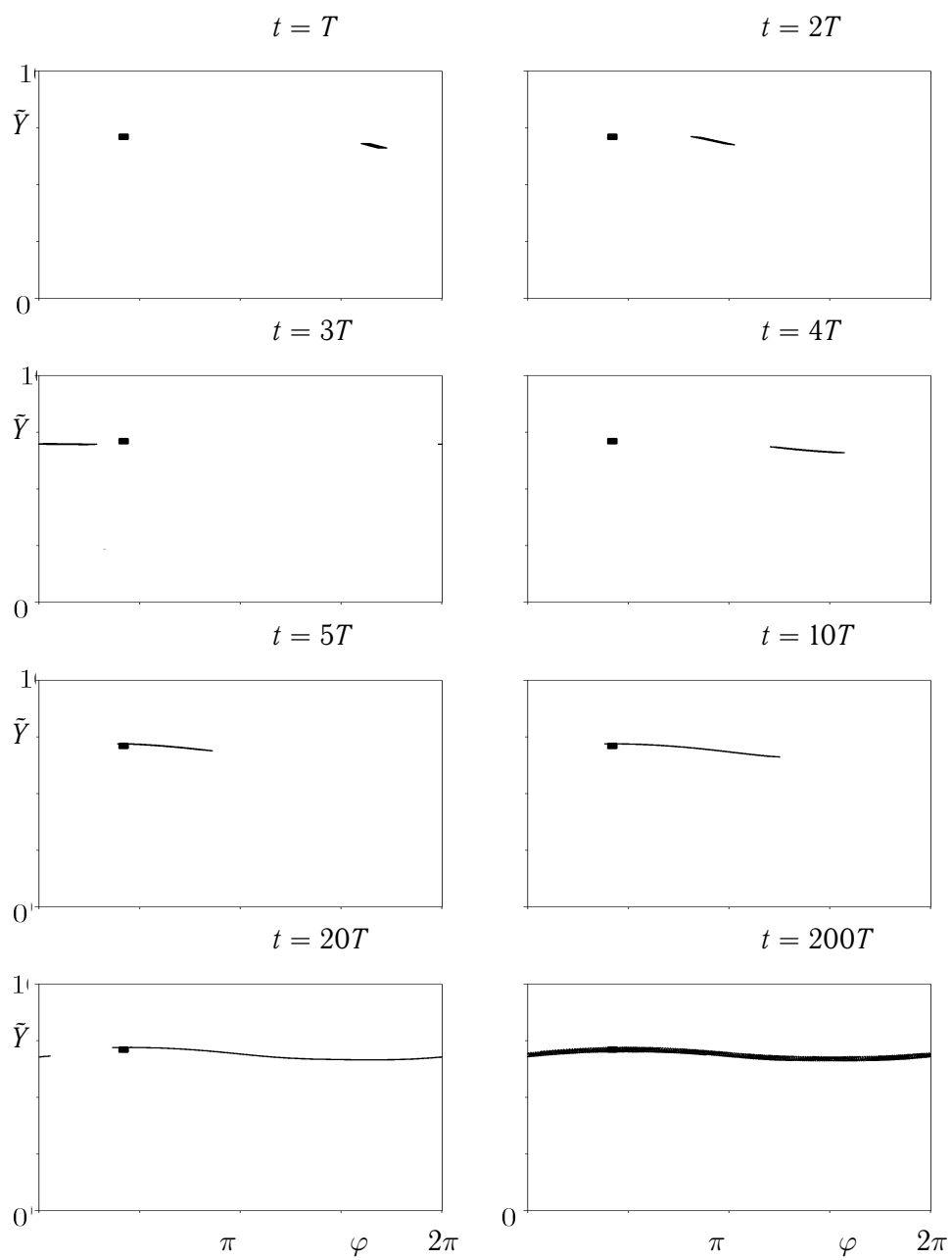


Рис. 7.12. Перемешивание частиц жидкости между двумя вращающимися цилиндрами при $\varepsilon = 0,1$

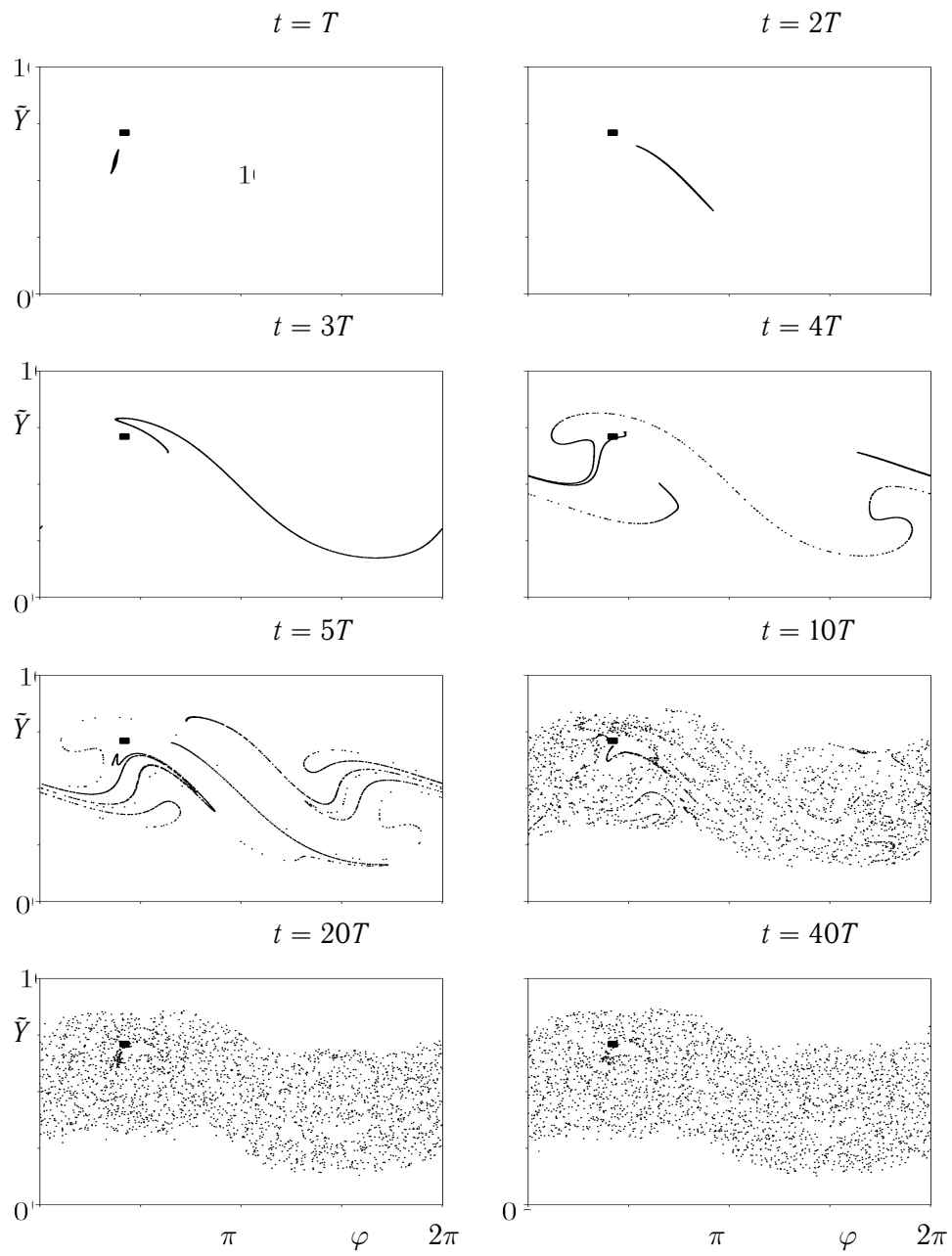


Рис. 7.13. Перемешивание частиц жидкости между двумя вращающимися цилиндрами при $\varepsilon = 0,5$

9. Выводы. Численный эксперимент находится в согласии с полученными теоретическими выводами. Неподвижные точки M_3 и M_4 , обозначенные на рис. 7.10 кружочками, являются точками гиперболического типа. При малых ε хаос появляется в малых окрестностях этих точек. Области хаотизации возрастают с увеличением ε . При $\varepsilon \approx 0,5$ площадь хаотизации максимальна. В этом случае все неподвижные точки M_1, M_2, M_3, M_4 — неустойчивы.

ТПП расположены на инвариантных кривых (см. рис. 7.10) и хаоса нет. Отображение Пуанкаре за период имеет четыре неподвижные точки (см. рис. 7.10): две эллиптические $M_1(\varphi = \pi/2, Y = 1/2 + \varepsilon/4)$, $M_2(\varphi = 3\pi/2, Y = 1/2 - \varepsilon/4)$ при $\varepsilon < 0,5$ и две гиперболические $M_3(\varphi = 0, Y = 1/2)$, $M_4(\varphi = \pi, Y = 1/2)$ при любых ε . В окрестности гиперболических точек начинает наблюдаться динамический хаос при $\varepsilon > 0,2$. Площадь области хаотизации ТПП увеличивается с ростом ε до значения $\varepsilon \approx 0,5$. При $\varepsilon = \varepsilon_0 \approx 0,5$ точки M_1 и M_2 становятся гиперболическими на коротком интервале $\Delta\varepsilon$. В этот момент площадь хаотизации максимальна. При $\varepsilon > \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$ точки M_1 и M_2 становятся опять эллиптическими. В их окрестности движение упорядоченное, а площадь хаотизации соответственно уменьшается.

Аппарат параметрических отображений Пуанкаре позволяет эффективно вычислять неподвижные точки, исследовать их устойчивость и описывать переход к хаосу. Фазовые портреты ТПП, полученные с помощью аналитического отображения Пуанкаре, хорошо согласуются с численными экспериментами (см. рис. 7.11).

Рассмотренный пример представляет собой математическую модель миксера для перемешивания сред с большой вязкостью. Наилучшее перемешивание достигается при $\varepsilon \approx 0,5$.

Развитая теория параметрических отображений Пуанкаре представляет собой конструктивный математический аппарат для описания перехода к динамическому хаосу в гидродинамических системах подобного типа, что и показывает приведенный пример.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: «Эдиториал УРСС», 2000. 408 с.
2. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, 304 с.
3. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. математики. Т. 3. М.: 1985. 304 с.
4. *Айзерман М.А.* Классическая механика. М.; Наука, 1980. 367 с.
5. *Баренблатт Г. И., Ишлинский А. Ю.* Об ударе вязкопластического стержня о жесткую преграду// ПММ, 1962. Т.26. Вып. 3. С. 497-502.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т.2. М.: Наука, 1974. 295 с.
7. *Белкин И.У., Виноградов Г.В., Леонов А.И.* Ротационные приборы. Измерение вязкости и физико-химических характеристик материалов. М.: Машиностроение, 1967. 272 с.
8. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М., Наука, 1983. 448 с.
9. *Бетчов Р., Криминале В.* Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971.
10. *Биркгоф Д. Д.* Динамические системы. М.–Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
11. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
12. *Борисенко А.И. Тарапов И. Е.* Векторный анализ и начала тензорного исчисления. М.: Высш. шк., 1966. 25 с.
13. *Брюно А. Д.* Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1990. 29 с.
14. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. Часть 1, М.: Наука, 1967. 467 с; часть 2, 1967. 332 с.
15. *Бэтчелор Дж.К.* Введение в динамику жидкости. М.: Изд-во Мир, 1973. 758с.
16. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
17. *Воларович М.П., Гуткин А.М.* Течение пластично-вязкого тела между двумя параллельными плоскими стенками и кольцевом пространстве между коаксиальными трубками // ЖТФ 1946. Т.16. Вып.3. С. 321-328.

18. *Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е.* Динамика частиц при воздействии вибраций. Киев: Наук. думка, 1975. 168 с.
19. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М.; Наука, 1966. 300 с.
20. *Гельфрейх В.Г., Лазуткин В.Ф.* Расщепление сепаратрис: теория возмущений, экспоненциальная малость// УМН, 2001. Т. 56. Вып. 3. С. 79-142.
21. *Георгиевский Д.В., Кириллов А.С.* Разгон и торможение тяжёлого вязкопластического слоя (ледника) вдоль наклонной плоскости // Изв. РАН. МТТ., N 3.
22. *Гноевой А.В., Климов Д.М., Петров А.Г., Чесноков В.М.* Течение вязкопластичной среды между круглыми параллельными пластинами при их сближении и удалении // Изв. РАН. МЖГ. 1996, N 1. С. 9-17.
23. *Гноевой А.В., Климов Д.М., Петров А.Г., Чесноков В.М.* Плоское течение вязкопластичных сред в узких каналах с деформируемыми стенками. // Изв. РАН. МЖГ. 1996, N 2. С. 23-31.
24. *Гноевой А.В., Климов Д.М., Чесноков В.М.* Исследование течений вязкопластичных сред в каналах и полостях с изменяемыми формами их стенок. М. ВИВАТ, 1995. 128 с.
25. Гидродинамическая теория смазки. Л.: Гостехиздат, 1934. 574 с.
26. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1983. 399 с.
27. *Жуковский Н.Е.* Полное собрание сочинений. Т. 3. Гидравлика. Прикладная механика. М.-Л.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы. 700 с.
28. *Журавлев В. Ф.* Основы теоретической механики. М.: Наука, 1997, 320 с.
29. *Журавлев В. Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988, 325 с.
30. *Журавлев В. Ф.* Инвариантная нормализация неавтономных гамильтоновых систем// ПММ., 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 356-365.
31. *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1983. 430 с.
32. *Ильюшин А.А.* Деформация вязкопластичного тела// Уч. зап. МГУ. Механика. Вып. XXXIX, 1940. С. 3-81.
33. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М., Изд-во МГУ, 1971.
34. *Ишлинский А. Ю.* Прикладные задачи механики. Кн. 1. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. М.: Наука: 1986. 360 с.
35. *Ишлинский А. Ю. Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Наука, 2001. 704 с.
36. *Карслоу Х., Егер Д.* Операционные методы в прикладной математике. Изд-во иностр. лит. 1948.
37. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. М.: ГИТЛ, 1956.
38. *Колмогоров В.Л.* Механика обработки металлов давлением. М.: Metallургия, 1986. 688с.

39. *Кочин Н.Е.* Векторный анализ и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 426 с.
40. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидродинамика. Часть 1. М.: Физматгиз. 1963. 583с; часть 2, 1963. 727 с.
41. *Кроновер Р. М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: 2000. 350 с.
42. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1965. 203 с.
43. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
44. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. Меркатор прес. 1983. 528 с.
45. *Линь Ц.Ц.* Теория гидродинамической устойчивости. М.:ИЛ, 1958.
46. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.
47. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 674 с.
48. *Лурье А. И.* Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. ГИТЛ, 1950.
49. *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974. 318 с.
50. Механика сплошных сред в задачах. Под ред. М.Э. Эглит Т. 1. Теория и задачи. М.: «Московский Лицей», 1996, 396с; Т. 2. Ответы и решения. 1996, 394 с.
51. *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Вариационные методы в теории течений жестко-вязко-пластических сред. Изд-во МГУ, 1971. 114 с.
52. *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
53. *Мясников В. П.* О сдавливании вязко-пластического слоя жесткими плитами // Изв. АН СССР. Механика и Машиностроение. 1963, N4. С. 92-96.
54. *Мясников В. П.* Течение вязкопластичной среды при сложном сдвиге// ПМТФ. 1961, Т.5. С. 76-87.
55. *Назаров А.Н.* Основы математического моделирования процессов трения и вовлечения при движении потоков лавинного типа // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1995, N 4. С. 79-85.
56. *Нейштадт А.И.* О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой // ПММ. 1984, Т. 48. Вып. 3. С. 197-204.
57. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Т. 1. М.: Наука, 1987, 464с. Т. 2., 359с.
58. *Огибалов П. М., Мирзаджанзаде А. Х.* Нестационарные движения вязко-пластических сред. М.: Изд-во МГУ, 1977. 373 с.
59. *Петров А.Г.* Об оптимизации процессов управления вязко-пластичного течения в тонком слое с изменяемыми формами границ// Изв. АН. МТТ. 1997, N 2, С. 127-132.
60. *Петров А.Г.* Плоская задача о выдавливании вязкопластичной среды параллельными пластинами// ПММ. 1998, Т. 62, вып. 4. С. 608-617.

61. *Петров А.Г.* Точные решения краевой задачи о нестационарном течении вязкопластичной среды между двумя пластинами// ДАН, 1998. Т. 362, N 3. Механика. С. 343-347.
62. *Петров А.Г.* Точные решения краевой задачи о нестационарном течении вязкопластичной среды между двумя пластинами// Изв. РАН МЖГ. 1999, N 2. С. 3-13.
63. *Петров А.Г.* Об усреднении гамильтоновых систем с периодическим по времени гамильтонианом// ДАН. Механика, 1999. Т. 368, N 4. С. 483-488.
64. *Петров А.Г.* О движении частиц несжимаемой среды в области с периодически изменяющейся границей// Изв. РАН МЖГ. 2000, N 4. С. 12-17.
65. *Петров А.Г.* Развитие течения вязкой и вязкопластичной сред между двумя параллельными пластинами// ПММ, 2000. Т.64. Вып. 1. С. 127-136.
66. *Петров А.Г.* Об усреднении гамильтоновых систем// МТТ, 2001, N 3. С. 19-32.
67. *Петров А.Г.* Параметрический метод отображений Пуанкаре в гидродинамических системах// ПММ, 2002. Т. 66. Вып. 6. С. 356-365.
68. *Петров А.Г.* Асимптотический метод построения отображения Пуанкаре при описании перехода к динамическому хаосу в гамильтоновых системах// ДАН, 2002. Т. 382, N 1. С. 15-19.
69. *Петров А.Г.* Модификация метода инвариантной нормализации гамильтонианов с помощью параметризации канонических преобразований// ДАН, 2002. Т. 386, N 4. Механика. С. 343-347.
70. *Петров А.Г.* Метод отображений Пуанкаре в гидродинамических системах. Динамический хаос в жидком слое между эксцентрично вращающимися цилиндрами// ПМТФ. 2002, N 6. С. 3-21.
71. *Петров А.Г., Черепанов Л.В.* Точные решения задачи нестационарного течения вязкопластичной среды в круглой трубе// Изв. РАН МЖГ. 2003, N 2. С. 13-24.
72. *Петров А.Г.* Асимптотические методы решения уравнений Гамильтона с помощью параметризации канонических преобразований// Дифф. уравнения. 2004, Т. 40, N 5. С. 1-13.
73. *Петров А.Г.* Динамический хаос в жидком слое между эксцентрично вращающимися цилиндрами// ПММ, 2004. Т. 68. Вып. 3.
74. *Петров А.Г.* Об инвариантной нормализации неавтономных гамильтоновых систем// ПММ, 2004. Т. 68. Вып. 6.
75. *Петров Н.П.* Трение в машинах и влияние на него смазывающей жидкости Инж. журн., 1883.
76. *Пуанкаре А.* Избранные труды в трех томах. Т. II М.: Наука, 1972. 999 с.
77. *Рамберг Х.* Сила тяжести и деформации в земной коре. М.: Недра, 1985. 399 с.
78. *Рейнер М.* Реология. М.: Наука, 1965. 224 с.

79. Сагомонян А.Я. Дождевая эрозия почвы на склоне возвышенности// Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2000. N 4. С. 28-34.
80. Савельев Б.А., Латалин Д.А. Искусственные ледяные платформы // Итоги науки и техники. Сер. Океанология. М.: ВИНТИ, 1986. Т. 7. С. 3-193.
81. Савельев Б.А. Гляциология. М.: Изд-во МГУ, 1991. 288 с.
82. Седов Л.И. Механика сплошной среды. В двух томах Изд. 5-е. М.: Наука, 1995. 1108 с.
83. Сен-Венан А. Об установлении уравнений внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости// Теория пластичности/ Под редакцией Ю.Н. Работного. М. 1948. С. 11-19.
84. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гос. тех.-теор. издат., 1955. С. 221—224.
85. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. шк. 1969.
86. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
87. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. Гостехиздат, 1951.
88. Татаринов Я. В. Лекции по классической динамике. Изд-во МГУ, 1984. 295 с.
89. Теория пластичности// Под редакцией Ю.Н. Работнова М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. 452 с.
90. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2, М.: Физматгиз, 1962. С. 507-511.
91. Хаотические системы// Тр. инст. инженеров по электронике и радиоэлектронике. 1987. Т. 75, N 8. 170 с.
92. Черников А.К. Вариационные методы решения задач о вязкопластическом течении соляных пород // Изв. вузов. Горный журн. 1985. N 10. С. 29-33.
93. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат. 1956.
94. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: 1988. 240 с.
95. Эглит М.Э. Динамика снежных лавин// Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1989. Т. 186. С. 162-167.
96. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.
97. Bingham E. C. Fluidity and Plastisity. New York, 1922.
98. Hencky H. Z. Landsame stationare Strömmungen in plastischen Massen. // Z. angew. Math und Mech, 1925. B.5, H.2. P. 115-124.
99. Kaper T.J.; Wiggins, S. An analytical study of transport in Stokes flows exhibiting large-scale chaos in the eccentric journal bearing// J. Fluid Mech. 1993, N 253. P. 211–243.
100. Klimov D.M., Petrov A.G. Analytical solutions of the boundary- value problem of non stationary flow of viscoplastic medium between two plates// Archive of Applied Mechanics. 2000, Vol. 70. P. 3-16.

101. Nowacki W.K. On the dynamics description of the rock failure process // Arch. mech. stosow. 1986. Vol. 38. N 1-2. P. 25-37.
102. Ottino J.M. The kinematics of mixing: stretching, chaos, and transport. Cambridge University Press. 1989. 359p.
103. Reissner E. On variational theorem in elasticity// J. of Mathematics and Physics, 1950, V.29, N 2. P. 90-95.
104. Reynolds O. On the Theory of Lubrication ...// Phil. Trans., CLXXVII, 157 (1886) (Paper, II, 228).
105. Schwedoff T. Recherches experimentals sur la cohesion des liquides.// J. de Phys, 1890. V. 34. P. 9.