Новый кризис в геометрии?

Ю.А.Рылов

Институт проблем механики РАН,
119526, Москва, Проспект Вернадского, 101-1,
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: *http://rsfq1.physics.sunysb.edu/~rylov/yrylov.htm*
or mirror Web site:
http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/~rylov/yrylov.htm

Аннотация

Первый кризис в геометрии возник в начале XIX века, когда математики отвергли неевклидову геометрию как возможную геометрию реального мира. Сейчас мы наблюдаем необоснованное отрицание неримановой геометрии официальными представителями современной геометрии. Класс римановых геометрий оказывается слишком узким для физических приложений. Физика микромира нуждается в расширении класса возможных геометрий, пригодных для роли геометрии пространства-времени. В рамках неримановой геометрии оказывается возможным построение геометрии пространства-времени, в которой движение свободных частиц является изначально стохастическим, и эта стохастичность зависит от массы частицы. В то же время сама по себе геометрия не является стохастической в том смысле, что пространственно-временны́е интервалы остаются детерминированными. Принципы квантовой механики могут быть выведены из такой геометрии пространства-времени. Кризисная ситуация в геометрии оказывается связанной с некоторыми предубеждениями, относящимися к основам геометрии. Предубеждения так же как и кризис, порожденный ими, не являются чисто научным явлением. Человеческий фактор (социальный аспект) довольно сильно проявляется в кризисных явлениях. Предубеждения и человеческий фактор оказываются столь сильными, что логические аргументы не воспринимаются, и формальный математический язык оказывается непригодным для восприятия анализа источника кризиса и возможности его преодоления. В работе излагаются мотивы и история построения неримановой геометрии. Есть надежда, что такой менее формальный способ изложения поможет понять и преодолеть существующие предубеждения.

1 Введение

Геометрия так же как и математика в целом являются точными логическими дисциплинами. Кажется, что все проблемы в геометрии могут быть решены с помощью логических рассуждений, и кризисные явления в геометрии кажутся невозможными. Говоря о кризисных явлениях я имею в виду такую ситуацию, когда большинство геометров не желают принимать хорошо обоснованные утверждения геометрии, имеющие далеко идущие последствия для приложений геометрии. Некоторые исследователи писали о кризисных явлениях в физике и математике в конце XX века, имея в виду такую ситуацию, когда развитие науки замедляется. С.П. Новиков [1] рассматривает социальные причины кризиса (недостаточное образование, неудовлетворительная организация научных исследований и т.п.). Я же рассматриваю главным образом научные причины кризиса. Я имею в виду такую ситуацию, создавшуюся в XIX веке, когда математики без разумных аргументов отказывались принимать неевклидову геометрию как возможную геометрию реального мира. Последующее развитие неевклидовой геометрии и ее применение в теории гравитации показало, что отрицание неевклидовой геометрии было ошибкой. Но это была не просто ошибка, это был кризис в геометрии, потому что ошибочное неприятие неевклидовой геометрии было всеобщим. Точка зрения сторонников неевклидовой геометрии осуждалась всеми (или почти всеми) математиками вплоть до того, что одного из создателей неевклидовой геометрии Н. Лобачевского считали безумцем. Теперь мы имеем ту же ситуацию в неримановой геометрии. Почему я считаю, что математики не принимают концепцию неримановой геометрии? Концептуальная работа по обоснованию неримановой геометрии была послана поочередно в несколько лидирующих математических журналов. Она была отклонена без всякой мотивации. Чтобы не быть голословным, я представляю переписку, касающуюся представления этой работы в один из таких журналов. Название журнала зашифровано так же как и имя редактора. Персона редактора не имеет значения, поскольку обсуждаются явления, характерные для всего математического сообщества.

21 июня 2004

Дорогой профессор S.,

Я хотел бы представить мою работу "Бескоординатное описание и принцип деформации как основания физической геометрии" для публикации в JABCD.

Я физик (не математик) имеющий дело с пространством-временем и его геометрией, и геометрия интересна мне как инструмент для физических исследований. Мне сказали, что такая проблема как обоснование геометрии считается решенной, и никто из математиков этим не занимается. Когда я представил эту работу главному редактору, он посоветовал мне направить ее Вам

С моей (физической) точки зрения чем проще геометрия, тем лучше ее применение к физическим проблемам. Обоснование геометрии оказалось очень простым (может быть даже, неприлично простым), потому что я не пы-

таюсь повторять евлидовы построения при другой аксиоматике. Вместо этого я использую готовые евклидовы построения, деформируя их надлежащим образом. Каждый новый способ деформации порождает новую физическую геометрию. В результате удается построить такие геометрии, которые нельзя построить традиционными методами. Именно такие геометрии представляются интересными как пространственно-временны́е геометрии. Например, можно построить такую детерминированную пространственно-временну́ю геометрию, где движение свободных частиц является стохастическим и масса частиц геометризуется.

Я понимаю, что слишком постой метод построения геометрии может быть не интересен математикам, но он очень интересен с точки зрения приложений в физике.

Искренне Ваш,

Юрий Рылов

P.S. Пожалуйста, подтвердите получение.

30 сентября 2004

Дорогой профессор Рылов:

Этим подтверждаю, что мы получили работу, представленную в JABCD и озаглавленную "Бескоординатное описание и принцип деформации как основания физической геометрии". Пожалуйста, информируйте меня о каждом изменении Вашего адреса (постоянного или временного).

Искренне,

S., Редактор, JABCD

профессору Юрию А. Рылову

Институт проблем механики,

Российская Академия Наук

101–1, Проспект Вернадского Москва, 119526, Россия

email:rylov@ipmnet.ru

1 октября, 2004

Дорогой профессор Рылов:

Было недоразумение при просмотре Вашей работы, и с сожалением информирую Вас, что быстрая оценка Вашей работы "Бескоординатное описание и принцип деформации как основания физической геометрии," показало, что Ваша работа возможно интересна и ценна для публикации в специальном журнале. Однако, она не совсем достигает высоких стандартов JABCD для которого мы ожидаем более глубоких результатов с более широкими математическими приложениями.

При этих обстоятельствах я не буду инициировать процесс формального реферирования, потому что шансы того, что работа будет принята в JABCD очень слабы. Я надеюсь, что Вы найдете альтернативный способ распространения работы.

Искренне,

S.

2 октября, 2004

Дорогой профессор S.,

Спасибо за Ваше любезное письмо относительно моей работы "Бескоординатное описание и принцип деформации как основания физической геометрии". К сожалению, Ваше письмо слишком вежливо, и я не понял, отклонена моя работа или еще нет.

Если моя работа отклонена, то я хотел бы знать мотивы отклонения.

Вы написали, что моя работа не достигает стандартов JABCD. Но это голословное и бездоказательное утверждение.

Я понимаю, что очень трудно найти квалифицированных рецензентов для рецензии моей работы, потому что в моей работе исследуется геометрия как таковая, тогда как большинство геометров, используя координатный метод, исследует только методы описания геометрии, а не саму геометрию. Разумеется, им трудно рецензировать работу по собственно геометрии.

Бескоординатный метод описания геометрии более эффективен, чем обычный координатный метод описания. Евклид, создавая свою геометрию, использовал бескоординатный метод. Бескоординатный метод позволяет строить геометрию с интранзитивным свойством параллельности. Реальная пространственно-временна́я геометрия является геометрией с интранзитивным свойством параллельности, и такую геометрию нельзя построить в рамках традиционной концепции римановой геометрии.

Физика нуждается в геометриях, которые могли бы быть использованы как пространственно-временны́е геометрии. Геометры должны создавать такие геометрии. К сожалению, они не смогли создать геометрии, пригодной для правильного описания пространства-времени. Когда физики создают геометрии, пригодные для описания пространства- времени, то оказывается, что такие работы "не достигают высоких стандартов JABCD" и "более широких математических приложений".

Однажды, 150 лет тому назад математики прославились, отвергнув неевклидову геометрию. Я не думаю, что им следует завоевывать подобную славу, отвергая нериманову геометрию.

Если моя работа отклонена, то, пожалуйста, подтвердите этот факт, и если возможно, мотивируйте его.

Искренне Ваш,

Юрий Рылов

mailto: rylov@ipmnet.ru

5 октября, 2004

Дорогой Др. Рылов,

Отклонение не означает, что Ваша работа не имеет значения. Это просто означает, что она более подходит для журнала, специализирующегося по основаниям геометрии.

Искренне,

S.

5 октября 2004

Дорогой профессор S.,

Спасибо за Ваш определенный ответ, касающийся моей работы "Бескоординатное описание и принцип деформации как основания физической геометрии".

Я был бы очень признателен Вам, если бы Вы указали математический журнал, посвященный основаниям геометрии.

Видите ли, я физик, и ситуация в математике мне не знакома. В 2002 году я участвовал в работе Международной конференции по геометрии в Петербурге. Я пытался обсудить проблему обоснования геометрии с участниками конференции. К сожалению, никто из математиков не пожелал обсуждать подобные проблемы. Мне сказали, что проблема обоснования геометрии решена много лет тому назад, и сейчас она никому не интересна.

В такой ситуации я не мог себе представить, что существуют журналы, посвященные обоснованию геометрии. Вы совершенно правы, что мою работу следует публиковать в специальном журнале, посвященном обоснованию геометрии. К сожалению, я ничего не знал о существовании таких журналов и представил работу в общий математический журнал.

Вы первый человек, который сказал мне о существовании таких журналов. Пожалуйста, укажите мне хотя бы один из таких журналов.

Заранее благодарен.

Искренне Ваш,

Юрий Рылов

К сожалению, ответа не было, и я вынужден думать, что профессор S. порекомендовал мне представить работу в несуществующие журналы.

Работу, представленную в JABCD можно найти в архивах ЛАНЛ [2]. Она содержит два существенных положения: (1) показывается , что евклидова геометрия может быть представлена в терминах и только в терминах мировой функции σ_{E}, (2) любая другая геометрия (вообще говоря, нериманова) получается простой заменой $\sigma_{\mathrm{E}} \to \sigma$, в представлении евклидовой геометрии. Здесь σ есть мировая функция искомой геометрии. Такое построение неримановой геометрии очень просто, потому что оно не требует логических построений. В работе нет ничего такого, против чего можно было бы возразить. Кроме того некоторые трудности (проблема выпуклости и отсутствие абсолютного параллелизма) традиционной римановой геометрии отсутствуют в предлагаемой форме неримановой геометрии. Эти трудности свидетельствуют о несовершенстве традиционной римановой геометрии.

Отклонение работы нельзя объяснить спецификой редакторской политики JABCD или недостатком научной добросовестности профессора S., потому что несколько ведущих математических журналов отклонили разные версии этой работы без серьезной мотивации или, вообще, без мотивации. В такой ситуации следует говорить о позиции математического сообщества как целого. Эта позиция препятствует развитию неримановой геометрии. Таким образом, история развития неевклидовой геометрии повторяется. Это означает новый кризис в развитии геометрии.

С физической точки зрения развитие неримановой геометрии совершенно необходимо. Эксперименты показывают, что свободные микрочастицы (электроны, протоны и др.) движутся стохастически. Движение свободных частиц определяется *только пространственно-временно́й геометрией.* В начале XX века, когда возникла эта проблема, не существовало такой геометрии, где движение свободных частиц было бы изначально стохастическим и эта стохастичность зависела бы от массы частицы. В то время проблема стохастического движения частиц была решена введением дополнительных предположений, известных как принципы квантовой механки (КМ). Исследования показали [3], что введение принципов квантовой механики не является необходимым. Проблема изначального стохастического движения микрочастиц может быть решена с помощью правильного выбора неримановой пространственно-временно́й геометрии, в которой квантовая постоянная является параметром геометрии. Такая концепция более фундаментальна, чем традиционная квантовая теория, потому что она не содержит КМ принципов, которые верны только при описании нерелятивистских явлений.

Ошибки являются естественным продуктом человеческой деятельности. Они могут появляться в любой научной концепции, и отношение к возможным ошибкам определяется исследовательской стратегией. Существуют две разные исследовательские стратегии: (1) ньютоновская стратегия с ее лозунгом "Hypotheses non fingo" и (2) птолемеевская стратегия, которая не утруждает себя поиском возможных ошибок, компенсируя их с помощью дополнительных гипотез. Птолемеевская стратегия эффективна при исследовании отдельных новых явлений, когда нужно придумывать новые понятия для их описания. Птолемеевская стратегия неэффективна при создании фундаментальной теории, когда нужна серьезная систематизация широкого класса явлений.

Фундаментальные научные теории, т.е. теории, содержащие систематизацию широкого круга явлений, создаются с помощью стратегии Исаака Ньютона. Фундаментальная теория должна содержать минимальное число основных положений. Все положения такой теории выводятся из основных положений логическим путем. Логические построения могут быть длинными, но они должны быть правильными. Фундаментальная теория обладает большой предсказательной силой. Если у фундаментальной теории возникают серьезные проблемы с предсказанием и объяснением ряда новых явлений, то ньютоновская стратегия предписывает поискать ошибку в основных положениях теории. После нахождения ошибки, она должна быть исправлена. Если ошибка серьезная, ее исправление может привести к изменению основных положений теории. Найти возможную ошибку бывает очень трудно. Если мы не можем найти ошибку, то мы бываем вынуждены изобрести новую гипотезу, которая компенсировала бы возможную ошибку.

Когда изобретение новых гипотез становится системой, можно говорить о птолемеевской исследовательской стратегии. С одной стороны при птолемеевской стратегии нет необходимости искать возможные ошибки в основаниях теории (может быть, их и нет!), и это – преимущество птолемеевской стратегии. С другой стороны предсказательность теории уменьшается вместе с увеличением числа дополнительных гипотез. Это – недостаток птолемеевской стратегии. Создание фундаментальной теории с большой предсказательной силой с помощью птолемеевской стратегии практически невозможно. Развитие птолемеевской концепции, содержащей скрытые ошибки в основных положениях, оказывается трудным. Это означает, что ошибка в основных положениях должна быть все же найдена и исправлена.

При оценке научной теории используются разные критерии. Сравнивая две птолемеевские концепции, основанные на различных системах основных положений, принимают во внимание главным образом число объясненных явлений. Число и совместность основных положений менее важны. Например, если для объяснения нового явления нужно ввести новое дополнительное предположение, и удается найти такое предположение, то полученное объяснение рассматривается как серьезное достижение существующей теории. С точки зрения сторонников ньютоновского подхода такое объяснение есть просто подгонка, а не достижение теории.

Наоборот, если удается найти ошибку в основных положениях и уменьшить их число, представив часть прежних основных положений как следствия новой системы основных положений, то сторонники ньютоновского подхода рассматривают это как серьезное достижение теории. Однако, сторонников птолемеевского подхода это не удовлетворяет, и они задают следующий вопрос: "Какое новое явление объясняется новой системой основных положений?" Сторнники птолемеевского подхода могут легко ответить на подобный вопрос, потому что они изобретают свои дополнительные гипотезы для того, чтобы отвечать на подобные вопросы. Наоборот, такие вопросы представляют трудности для сторнников ньютоновского подхода, потому что исходя из новой системы основных положений, нужно произвести длинные логические рассуждения и вычисления. Например в небесной механике переход от доктрины Птолемея к доктрине Коперника породил открытие Ньютоном закона всемирного тяготения. Это было первое следствие доктрины Коперника, которое не могло быть получено в рамках доктрины Птолемея. Это открытие означало триумф доктрины Коперника, но этот триумф имел место более, чем через сто лет после создания доктрины Коперника. Этот пример показывает, что нельзя использовать критерии Птолемея для оценки достижений, сделанных на основе ньютоновского подхода. Прогресс в развитии фундаментальной теории связан главным образом с уменьшением числа ее основных положений.

Существование скрытых ошибок в основных положениях теории, использование птолемеевского подхода к развитию теории и птолемеевского критерия при оценке этого развития приводят к кризису, т.е. к замедлению развития теории. Хорошо известным примером такой ситуации является взаимодействие доктрины Птолемея с доктриной Коперника. Источником кризиса была ошибка в определении взаимного движения Земли и Солнца. Однако, сама по себе ошибка еще не есть кризис. Кризис возник потому, что сторонники Птолемея и Коперника использовали разные методы оценки качества теории. В результате сторонники Птолемея не приняли исправления, предложенного Коперником.

Другой пример: кризис в обосновании геометрии, когда в начале XIX века независимо Н. Лобачевским и Я. Бойаи была предложена неевклидова геометрия. Математики того времени не желали рассматривать неевклидову геометрию как возможную геометрию реального мира. Не очень ясно, что было источником отторжения неевклидовой геометрии. Мне не известны исследования, касающиеся этого вопроса, и мое мнение по этому вопросу следующее.

В евклидовой геометрии всегда можно ввести декартову систему координат. В римановой геометрии это возможно не всегда. Это обстоятельство было главным аргументом против применения римановой геометрии к реальному миру. Большинство математиков того времени рассматривали декартову систему координат как атрибут любой геометрии, и неподходящие свойства системы координат рассматривались как неподходящие свойства геометрии. Кризис не был столь же явным, как в случае Птолемея – Коперника, но это все же был кризис, поскольку отрицание правильной теории является одним из симптомов кризиса. В начале XX века неевклидова (риманова) геометрия была принята как возможная пространственно-временна́я геометрия, и стало ясно, что отрицание неевклидовой геометрии было ошибкой. Вообще говоря, кризис есть социальное явление. Ошибка в основных положениях фундаментальной теории еще не кризис. Кризис возникает, когда большинство исследователей используют ошибочную теорию, отвергая правильную.

Наконец, кризис в современной геометрии связан с неправильным обобщением свойств евклидовой геометрии. Современные геометры считают, что прямая линия является одномерной во всех возможных геометриях и, в частности, в геометрии реального пространства-времени. Риманова пространственно-временна́я геометрия основана на этом ошибочном утверждении, и настояние на этом утверждении является источником кризиса в современной геометрии. Немотивированное отрицание новой геометрии редакторами математических журналов, цитируемое выше, является проявлением этого кризиса. К сожалению, логические аргументы не помогают в кризисной ситуации, потому что, по определению, кризис есть такая ситуация, когда обычная логика не способна преодолеть предубеждение.

Главным предубеждением является утверждение, что прямая является одномерной линией во всех возможных геометриях. Это предубеждение сопровождается утверждением, что одномерная кривая является первичным геометрическим объектом, который существенно используется при построении любой геометрии. Это утверждение представляется очень разумным. Как и все геометры, я придерживался той же точки зрения в течение длительного времени. Почему я был вынужден отказаться от этих разумных идей? Может быть, история того, как мне удалось преодолеть это предубеждение, поможет другим исследователям преодолеть его. Здесь я представлю обзор идей трубчатой геометрии (Т-геометрии), где нарушено предположение об одномерности прямой и лидирующей роли кривой в построении геометрии. По необходимости мое изложение имеет вид обзора моих собственных работ, поскольку я не знаю других исследователей, участвовавших в построении Т-геометрии. Кроме того автобиографический стиль обзора позволяет изложить мотивы моих исследований, которых нельзя найти в моих работах, где изложение производится формально. Знание мотивов может оказаться полезным в преодолении кризисной ситуации.

2 Риманова геометрия в терминах мировой функции

Моя первая работа была написана в конце 1958 года, представлена в журнал в 1959 году и опубликована в 1962 году [4]. Во время написания работы, я был студентом пятого курса Московского государственного университета. В то время я интересовался римановой геометрией и эйнштейновской теорией гравитации. Риманова геометрия традиционно описывается в терминах бесконечно малого пространственно-временнóго интервала dS и метрического терзора g_{ik}

$$dS^2 = g_{ik}dx^i dx^k \tag{2.1}$$

а геодезическая описывается в терминах обыкновенных дифференциальных уравнений.

Если ввести конечный интервал

$$S(x,x') = \int_{\mathcal{L}_{xx'}} \sqrt{g_{ik}dx^i dx^k}, \qquad \sigma(x,x') = \frac{1}{2}S^2(x,x') \tag{2.2}$$

где интегрирование производится вдоль геодезической $\mathcal{L}_{xx'}$, соединяющей точки x и x', то конечный интервал $S(x,x')$ удовлетворяет уравнению Якоби-Гамильтона

$$\frac{\partial S}{\partial x^i} g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^k} = 1 \tag{2.3}$$

В терминах мировой функции $\sigma(x,x') = \frac{1}{2}S^2(x,x')$ это уравнение принимает вид

$$\sigma_i g^{ik}(x)\sigma_k = 2\sigma, \qquad \sigma_i \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} \tag{2.4}$$

В терминах σ геодезическая $x^k = x^k(\tau)$ описывается алгебраическими уравнениями

$$\sigma_{k'}(x,x') = b_{k'}\tau, \qquad \sigma_{k'}(x,x') \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial x'^{k'}}, \qquad b_{k'} = \text{const} \tag{2.5}$$

где $b_{k'}$ есть вектор в точке x', и геодезическая $x^k = x^k(\tau)$ определяется неявно алгебраическими уравнениями (2.5). Если рассматривать (2.2) как функционал действия, описывающий движение свободной релятивистской частицы, то уравнение (2.3) является уравнением Якоби-Гамильтона для этого действия, и уравнения (2.5) описывает получение мировой линии частицы из решения уравнения Якоби-Гамильтона. Уравнения (2.5) определяют геодезическую, проходящую через точку x' в направлении вектора $b_{k'}$.

Из уравнений (2.5) следовало, что описание в терминах мировой функции σ является более информативным, чем описание в терминах метрического тензора g_{ik}, потому что переход от метрического тензора g_{ik} к мировой функции σ приводит к замене дифференциальных уравнений алгебраическими.

В работе [4] мне удалось построить математический формализм, который позволял описывать n-мерную риманову геометрию в терминах мировой функции σ, заданной на n-мерном многообразии. Очень важно, что была получена система дифференциальных уравнений для мировой функции. Эта система дифференциальных уравнений содержит только функцию σ и ее производные

$$\sigma_i \sigma^{i,k'} \sigma_{k'} = 2\sigma, \qquad \sigma(x,x') = \sigma(x',x), \qquad \sigma(x,x) = 0 \tag{2.6}$$

$$G_{ik||l} = 0, \qquad i,k,l = 1,2,...,n \tag{2.7}$$

где $\sigma^{i,k'}$ определяется с помощью

$$\sigma^{i,k'} \sigma_{l,k'} = \delta^i_l, \qquad i,l = 1,2,...,n \tag{2.8}$$

$$\sigma_{l,k'} \equiv \frac{\partial^2 \sigma(x,x')}{\partial x^l \partial x'^{k'}}, \qquad k',l = 1,2,...,n \tag{2.9}$$

Символ $(.)_{||l}$ означает касательную производную по x^l, т.е. ковариантную производную по x^l с символом Кристоффеля

$$\Gamma^i_{kl}(x,x') = \sigma^{i,j'} \sigma_{klj'}, \qquad \sigma_{klj'} \equiv \frac{\partial^3 \sigma(x,x')}{\partial x^k \partial x^l \partial x'^{j'}}, \qquad i,k,l,j' = 1,2,...,n \tag{2.10}$$

а G_{ik} определяется соотношением

$$G_{ik} = G_{ik}(x,x') \equiv \sigma_{i||k} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik} \sigma_l, \qquad i,k = 1,2,...,n \tag{2.11}$$

Условия (2.6), (2.7) являются необходимыми и достаточными условиями того, что мировая функция σ описывает риманову геометрию. Система уравнений (2.6), (2.7) позволяет отказаться от определения (2.2) мировой функции σ, которое определяет мировую функцию σ через метрический тензор g_{ik} и понятие кривой (геодезической $\mathcal{L}_{xx'}$). Теперь мировая функция σ может быть определена как симметричная функция $\sigma(x,x') = \sigma(x',x)$, удовлетворяющая системе дифференциальных уравнений (2.6), (2.7).

Такое определение мировой функции ставит следующий вопрос. Представим себе, что функция σ не удовлетворяет системе (2.6), (2.7) дифференциальных уравнений. В этом случае мировая функция не может определяться соотношением (2.2). Что описывает формализм мировой функции в этом случае: нериманову геометрию или он не описывает никакой геометрии? Это был трудный вопрос, и я не мог ответить на него в течение долгого времени.

В римановой геометрии отрезок $\mathcal{L}_{[xx']}$ геодезической $\mathcal{L}_{xx'}$ между точками x и x' может быть определен прямо через конечный интервал $S(x,x')=\sqrt{2\sigma(x,x')}$ с помощью соотношения

$$\mathcal{L}_{[xx']}=\{z|S(x,z)+S(z,x')=S(x,x')\} \tag{2.12}$$

Соотношение (2.12) определяет геодезическую как множество точек без ссылки на понятие кривой. Определение (2.12) имеет другое преимущество. Оно не содержит ссылки на систему координат. Хотя соотношение (2.12) содержит маркировку точек координатами, оно легко может быть переписано в виде

$$\mathcal{L}_{[PQ]}=\{R|S(P,R)+S(R,Q)=S(P,Q)\}\,,\qquad P,Q,R\in\Omega \tag{2.13}$$

где Ω есть множество точек, на котором задана геометрия.

Однако, соотношение (2.12) описывает многомерную поверхность, которая, вообще говоря, не вырождается в одномерную линию в случае, когда мировая функция не удовлетворяет ограничениям (2.6), (2.7). Это обстоятельство препятствовало введению неримановой геометрии, потому что я не мог представить себе геометрию с поверхностями (трубками) вместо прямых линий. Я думаю, что идея о прямых как одномерных линиях во всех геометриях мешала и другим исследователям построить нериманову геометрию. Эта идея является ассоциативным заблуждением, которое напоминает заблуждение древних египтян, полагавших, что все реки текут на север.

Пока моя работа [4] находилась в печати (1959 - 1962), в библиотеках СССР появилась отличная книга Синга [5]. В этой книге риманова геометрия и общая теория относительности излагались в терминах мировой функции. Во время написания работы [4], я ничего не знал о работах Синга, посвященных описанию римановой геометрии в терминах мировой функции. Я строил формализм мировой функции с самого начала, и мой формализм существенно отличался от формализма Синга. Формализм Синга был ориентирован на разложение мировой функции $\sigma(x,x')$ в ряд по степням $x-x'$, тогда как мой формализм был лишь в минимальной степени был ориентирован на такое разложение. Мой формализм использовал мировую функцию как средство описания, альтернатиное координатному описанию и использованию метрического тензора. В частности, книга Синга не содержала уравнений (2.6), (2.7), которые я рассматривал как главный результат моей работы. Сравнение моей работы с книгой Синга произвело на меня сильное впечатление (я был всего лишь студентом, тогда как Синг был знаменитым исследователем) и изменило мою самооценку. Начиная с тех же позиций, что и Синг, я сумел получить за полгода более продвинутые результаты. Это означало, что я обладаю нестандартным стилем мышления. Это означало, что мне следует избегать детального изучения литературы перед исследованием, потому что вместе с результатами исследования я рискую воспринять предубеждения. В случае кризисной ситуации в геометрии и физике, устранение предубеждения существенно важнее, чем получение позитивных результатов исследования. Результаты правильного исследования можно было легко повторить, но если результаты других исследователей были получены на основе некоторых предубеждений, то они влияли на процесс моего познания, и обнаружение предубеждения оказывалось более трудной проблемой. Разумеется, такой подход оправдан только в кризисной ситуации, когда, с одной стороны, есть уверенность в существовании скрытых ошибок и предубеждений, а с другой стороны, есть уверенность в собственных силах.

3 Дальнейшее развитие Т-геометрии

Я вернулся к проблемам геометрии только в 1989 году. Для меня было ясно, что описание в терминах мировой фукции является очень эффективным методом описания геометрии. Я хотел максимально очистить описание геометрии от других методов описания. В частности, я хотел получить бескоординатное описание, как это много лет назад было сделано Евклидом. Вообще, я считал, что геометрия является совокупностью геометрических объектов и соотношений между ними, а не совокупностью координат, метрического тензора, тензора кривизны, ковариантных производных, символов Кристоффеля и т.д. Я понимал, что координаты не являются необходимым атрибутом геометрии, но координаты были необходимым атрибутом динамики. По крайней мере, я не знал примера бескоординатного описания динамики (но пример бескоординатного описания евклидовой геометрии был мне известен). Описывая динамику частиц в пространстве-времени, мы не умеем устранить координаты в динамике и геометрии пространства-времени. Тем не менее геометрию следует строить в бескоординатной форме, чтобы отделить свойства геометрии от свойств описания.

Я пытался представить геометрию в виде максимально свободном от средств описания. Чтобы сделать это, нужно было понимать, что такое геометрия сама по себе и что такое средства описания. Мировая функция σ как средство описания лучше, чем метрический тензор g_{ik}, потому что σ является скаляром, т.е. величиной инвариантной по отношению к преобразованиям координат, тогда как метрический тензор этим свойством не обладает. Евклидова прямая $\mathcal{T}_{P_0P_1}$, проходящая через точки P_1, P_2 может быть выражена через мировую функцию с помощью соотношения

$$\mathcal{T}_{P_0P_1} = \{R | F_2 (P_0, P_2, R) = 0\} \tag{3.1}$$

где

$$F_n (\mathcal{P}^n) = \det ||(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)||, \qquad i,k = 1,2,...n, \qquad \mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ...P_n\} \tag{3.2}$$

определитель Грама n-ого порядка, построенный из скалярных произведений

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k) = \sigma (P_0, P_i) + \sigma (P_0, P_k) - \sigma (P_i, P_k) \tag{3.3}$$

В собственно евклидовой геометрии соотношение (3.3) есть следствие очевидных соотношений

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i|^2 = 2\sigma (P_0, P_i) \tag{3.4}$$

$$|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_k|^2 = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k - \mathbf{P}_0\mathbf{P}_i|^2 = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i|^2 + |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k|^2 - 2(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k) \qquad (3.5)$$

В собственно евклидовой геометрии условие обращения в нуль определителя Грама

$$F_n(\mathcal{P}^n) = 0 \qquad (3.6)$$

является необходимым и достаточным условием линейной зависимости n векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$,...$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$. Если немного изменить мировую функцию евклидова пространства, множество точек (3.1) перестанет быть одномерной линией и превратится в поверхность, размерность которой больше 1. Кроме того в пространстве Минковского (четырехмерная псевдоевклидова геометрия индекса 1) времениподобная прямая $\mathcal{T}_{P_0P_1}$, (т.е. множество точек (3.1), $\sigma(P_0,P_1) > 0$)) представляет собой прямую линию, тогда как пространственноподобная прямая $\mathcal{T}_{P_0P_1}$, (множество точек (3.1), $\sigma(P_0,P_1) < 0$)) является трехмерной поверхностью. Такая ситуация возникает, потому что в геометрии Минковского условие (3.6), (3.2) не совпадает с условием линейной зависимости n векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$,...$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$ в его традиционной форме. Традиционно линейная независимость векторов в геометрии Минковского определяется на основе линейного векторного пространства, которое может быть введено в пространстве Минковского.

Построение геометрии в пространстве Минковского зависит от способа, каким вводится линейная зависимость векторов. Другими словами, геометрия зависит от аксиом, которые используются при ее построении. Это верно, пока геометрия рассматривается просто как логическое построение. Однако мы имеем дело с физической геометрией, которая претендует на то, чтобы быть геометрией реального пространства-времени, которая не должна зависеть от того как мы выбрали аксиомы. Аксиомы, если мы их используем для построения пространства Минковского, должны быть выбраны объективно, т.е. так, чтобы согласовываться с экспериментальными данными. На практике это означает, что мы должны построить максимально широкий класс геометрий и после этого выбрать ту геометрию, которая согласуется с экспериментальными данными. Условие (3.6), (3.2) обеспечивает построение максимально общей геометрии, потому что оно не зависит от ограничений, налагаемых на геометрию введением линейного векторного пространства.

Для физика идея о трубчатом характере прямых была менее экзотической, чем для математика. Физики, работающие с явлениями микромира, придумывают существенно более экзотические объекты, вроде струн, бран и стохастической геометрии. Однако, все эти объекты являются внешними по отношению к геометрии и не требуют перестройки основ геометрии. Геометрия существовала сама по себе, а струны, браны и прочая экзотика существовали сами по себе, никак не взаимодействуя друг с другом. Ситуация с понятием прямой была иная. Можно было представить себе тонкую полую трубку вместо прямой. На больших масштабах толщина трубки была незаметна, и не возникало никаких новых эффектов, связанных с толщиной трубки. Однако, прямая была первичным объектом, а не внешним, т.е. построение традиционной римановой геометрии базировалось на свойствах прямой. Малейшее изменение свойств прямой вызывало перестройку всей геометрии, а это не хотелось делать без особой нужды. Мой мозг дремал до тех пор, пока мне не стало ясно, что трубчатый характер прямых позволяет построить геометрию, где движение свободных частиц является изначально стохастическим и что такая геометрия может в конце концов заменить собой принципы квантовой механики. Я допускаю, что другие исследователи приходили к идее трубчатой геометрии. Но что с ней делать? Какая от нее польза? В отличие от чистых геометров, способных построить трубчатую геометрию, но не знающих, что с ней делать, я был физиком и отлично знал, как ее можно употребить. За несколько лет до создания Т-геометрии мне удалось построить "релятивистскую статистику", т.е. концепцию, где нерелятивистская квантовая механика получалась в результате статистического описания случайно движущихся релятивистских частиц. В этой концепции не хватало только одного. Было непонятно, почему частицы движутся стохастически. Т-геометрия естественно и непринужденно объясняла причину стохастичности свойствами пространства-времени. Все дальнейшие вопросы сразу отпадали. Таким образом, появление Т-геометрии объясняется ее востребованностью. Однако, только физик, которому удалось создать "релятивистскую статистику", чувствовал эту востребованность.

Перечислим аргументы в пользу определения (3.6), (3.2) линейной зависимости:

1. Определение линейной зависимости (3.6), (3.2) может быть использовано на любом множестве Ω точек, на котором задана мировая функция σ. Это множество Ω может быть непрерывным или дискретным. Оно может быть неоднородным и неизотропным.

2. Определение (3.6), (3.2) не содержит ссылок на систему координат или какую-нибудь другую дополнительную структуру, которую нужно ввести.

3. Определение (3.6), (3.2) согласуется с экспериментальными данными: времениподобная одномерная прямая описывает свободную частицу. Пространственноподобная прямая не ассоциируется с движением частицы, или ассоциируется с движением гипотетического тахиона. Он не был обнаружен, и никто не знает, описывается ли тахион одномерной прямой или трехмерной поверхностью.

Традиционное определение, основанное на введении линейного векторного пространства, имеет то преимущество, что оно было введено раньше и оно привычно для всех исследователей. К сожалению, традиционное определение содержит ссылку на дополнительную структуру (линейное векторное пространство), которая может быть введена только для однородных и непрерывных геометрий. В результате класс геометрий, где может быть введено традиционное определение линейной зависимости, оказывается довольно узким, и этот класс не содержит реальной геометрии пространства-времени.

Вначале мое предубеждение против определения (3.6), (3.2) было очень сильным. С другой стороны, я хотел описывать риманову геометрию и ее возможные обобщения в бескоординатной форме. Это было возможно только в терминах мировой функции. Мое решение вопроса было половинчатым. Я принял, что сотношение (3.1) описывает геометрический объект $\mathcal{T}_{P_0P_1}$, состоящий из одномерных линий (трубок линий), и для определния одной линии нужно наложить дополнительные условия. Дополнительные условия, налагаемые на множество $\mathcal{T}_{P_0P_1}$ описывали свойства римановой геодезической.

При традиционном подходе геодезическая в n-мерном римановом пространстве рассматривается как *особый тип кривой*, имеющей следующие экстремальные свойства.

(i) *Экстремальность.* Расстояние $(2\sigma)^{1/2}$ между двумя точками, измеренное вдоль геодезической является кратчайшим (экстремальным) по сравнению с расстоянием, измеренным вдоль других кривых.

(ii) *Определенность.* Две любые точки геодезической однозначно определяют геодезическую, проходящую через эти две точки.

(iii) *Минимальность сечения* (Одномерность). Любое сечение геодезической состоит из одной точки.

Другой подход возникает, когда геодезическая рассматривается как *особый тип поверхности* (или трубки линий), которая вырождается в линию. Тогда свойства (ii) и (iii) оказываются выполненными; однако, свойство (i) не определено, потому что не определено понятие линии (или кривой). Оказалось, что экстремальное свойство (i) эквивалентно свойствам (ii) и (iii), взятым вместе с (3.1). Попытаемся определить геодезическую, обладающую одновременно свойствами определенности (ii) и минимальности сечения (iii). В работе [6] свойства (ii) и (iii) записаны в терминах мировой функции в виде

(ii) определенность

$$\forall Q_0, Q_1 \in \mathcal{T}_{P_0P_1} \wedge \sigma(Q_0, Q_1) \neq 0, \qquad \mathcal{T}_{Q_0Q_1} \subset \mathcal{T}_{P_0P_1} \tag{3.7}$$

(iii) Минимальность сечения

$$P \in \mathcal{T}_{P_0P_1}, \qquad \mathcal{S}_{1,P}(\mathcal{T}_{P_0P_1}) \equiv \left\{ R | \bigwedge_{k=0,1} \sigma(P_k, P) = \sigma(P_k, R) \right\} = \{P\} \tag{3.8}$$

Свойства (ii) и (iii) вместе с (3.1) используются вместо свойства (i), которое не определено для трубок, описываемых соотношением (3.1). Комбинация соотношений (3.7), (3.8) с уравнением трубки (3.1) и последующее рассмотрение в [6] позволяют изучить свойства кривой, описываемой в терминах мировой функции. Довольно странно и неожиданно, что трубка (3.1) и трубки более высоких порядков являются первичными геометрическими объектами, а не объединением многих одномерных линий. Странно и необычно, что одномерные линии оказываются производными геометрическими объектами, определяемыми как пересечение нескольких поверхностей, которые рассматриваются как первичные объекты (трубки). Это странно и непривычно, потому что при традиционном подходе к римановой геометрии любая поверхность может рассматриваться как состоящая из первичных геометрических объектов – одномерных линий.

Итак, при традиционном подходе кривая является первичным геометрическим объектом геометрии, и определение мировой функции с помощью (2.2) через понятие кривой ведет к непоследовательности. Поясню это.

Евклид определял кривую линию как предел ломаной линии $\mathcal{T}_{\mathrm{br}}$, состоящей из многих прямолинейных отрезков $\mathcal{T}_{[P_k P_{k+1}]}$

$$\mathcal{T}_{\mathrm{br}} = \bigcup_k \mathcal{T}_{[P_k P_{k+1}]} \tag{3.9}$$

Кривая возникает, когда длина каждого сегмента $\mathcal{T}_{[P_k P_{k+1}]}$ стремится к нулю. Но даже если к пределу не переходят, ломаная линия (3.9) представляет собой разновидность кривой, которая, вообще говоря, не является гладкой. Таким образом, Евклид определял кривую через прямую. Прямая была первичным геометрическим объектом, тогда как кривая была вторичным (производным) геометрическим объектом. Это было метрическое определение кривой.

В римановой геометрии используется топологическое (неметрическое) определение кривой. Кривая $\mathcal{L}$ определяется как непрерывное отображение

$$\mathcal{L}: \qquad [0,1] \to \Omega, \qquad [0,1] \subset \mathbb{R} \tag{3.10}$$

Прямая линия (геодезическая) $\mathcal{T}_{P_0 P_1}$ между точками P_0 and P_1 определяется как специальный случай кривой $\mathcal{L}$, когда длина кривой между точками P_0 и P_1 минимальна. Таким образом, в римановой геометрии кривая $\mathcal{L}$ является первичным геометрическим объектом, тогда как прямая является производным (вторичным) геометрическим объектом. Мировая функция, определенная соотношением (2.2) также является производной величиной. Определение кривой (3.10) нуждается во введении дополнительных понятий, таких как топологическое пространство, непрерывность и т.п.

Совместность двух различных определений (3.9) и (3.10) не очевидна. Если потребовать совпадения определений (3.9) и (3.10), мы можем переопределить задачу построения геометрии. В результате некоторые геометрии, интересные как пространственно-временные геометрии, могут оказаться дискриминироваными. Если окажется, что геометрия может быть построена на основе только мировой функции и метрического определения кривой (3.9), топологическое определение (3.10) становится излишним.

В некоторых случаях определение (2.2) ведет к абсурдным выводам. Пусть $\mathcal{L}_2$ является двумерной собственно евклидовой плоскостью, и K является декартовой системой координат на $\mathcal{L}_2$. Если мировая функция рассматривается как первичная величина, она описывается формулой

$$\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2, \qquad \mathbf{r} = \{x, y\}, \qquad \mathbf{r}' = \{x', y'\} \tag{3.11}$$

Если собственно евклидова геометрия на $\mathcal{L}_2$ рассматривается как частный случай римановой геометрии, мировая функция определяется соотношением (2.2). Мировая функция имеет вид (3.11), если мы рассматриваем всю плоскость $\mathcal{L}_2$. Разрежем теперь плоскость $\mathcal{L}_2$ на две части $\mathcal{L}_{2c} = \left\{\mathbf{r}|\mathbf{r}^2 \leq 1\right\}$ и $\mathcal{L}_{2o} = \left\{\mathbf{r}|\mathbf{r}^2 > 1\right\}$. Определим мировую функцию в $\mathcal{L}_{2c}$ и в $\mathcal{L}_{2o}$, используя (2.2). В $\mathcal{L}_{2c}$ мы получаем результат (3.11), тогда как в $\mathcal{L}_{2o}$ мы получаем результат $\sigma(P,Q)$, отличающийся от (3.11), если отрезок прямой $\mathcal{T}_{[PQ]}$, соединяющий точки P и Q, пресекает $\mathcal{L}_{2c}$. Мы получаем абсурдный результат, что область $\mathcal{L}_{2o}$ не может быть изометрически вложена в $\mathcal{L}_2$. Получаем проблему выпуклости, когда в области $\mathcal{L}_{\mathrm{cut}}$, вырезанной из плоскости $\mathcal{L}$, риманова геометрия изменяется, если область $\mathcal{L}_{\mathrm{cut}}$ является невыпуклой.

Если мировая функция является первичной величиной, геометрия области $\mathcal{L}_{\mathrm{cut}}$ сохраняется независимо от того, является ли область $\mathcal{L}_{\mathrm{cut}}$ выпуклой или невыпуклой. Это означает, что *проблема выпуклости является искусственной проблемой*, связанной с применением топологического понятия кривой (3.10) при построении римановой геометрии. Поскольку риманова геометрия может быть построена без ссылки на топологическое понятие кривой и без ссылки на топологические понятия, то топологические понятия оказываются только производными понятиями. Их использование в качестве первичных понятий, т.е. их использование для построения геометрии ведет к противоречиям.

Следующий шаг в развитии Т-геометрии был сделан, когда было обнаружено, что Т-геометрия позволяет выбрать геометрию пространства-времени таким образом, что движение свободных частиц оказывается изначально стохастическим, и статистическое описание этого стохастического движения эквивалентно квантовому описанию в терминах уравнения Шредингера [7]. В соответствии с ньтоновским критерием это было большое достижение фундаментальной теории, потому что принципы квантовой механики оказались следствиями геометрии пространства-времени и статистического описания. Они перестали быть дополнительными гипотезами, избретенными для объяснения квантовых явлений.

В соответствии с птолемеевским критерием, этот результат не является достижением, пока не будет показано, что он может объяснить некоторое новое квантовое явление. Он представляет только другую версию объяснения квантовых явлений, потому что он не объяснил новых эффектов. С точки зрения птолемеевского критерия уменьшение числа основных принципов значения не имеет.

Что касается меня, то я стоял на точке зрения Ньютона, и успешное приложение Т-геометрии к пространству-времени подтвердило правильность моего подхода к геометрии. Полученная мировая функция реального пространства-времени имеет вид

$$\sigma = \sigma_{\mathrm{M}} + \left\{ \begin{array}{c} \frac{\hbar}{2bc}, \text{ если } \sigma_{\mathrm{M}} > \sigma_0 \\ 0, \text{ если } \sigma_{\mathrm{M}} < 0 \end{array} \right. \tag{3.12}$$

где σ_{M} есть мировая функция пространства Минковского, $\hbar$ есть квантовая постоянная, c есть скорость света, $b \lesssim 10^{-17}\mathrm{g/cm}$ есть некоторая универсальная постоянная, величина $\sigma_0 \approx \frac{\hbar}{2bc}$. Мировая функция σ не определена для $0 < \sigma_{\mathrm{M}} < \sigma_0$. Другими словами, значение мировой функции σ для $0 < \sigma_{\mathrm{M}} < \sigma_0$ не является существенным для описания квантовых явлений. С другой стороны, такие величины как метрический тензор и тензор кривизны определяются как коэффициенты разложения мировой функции $\sigma(x, x')$ по степеням $x - x'$, т.е. в той области, где значения σ не определены. Поскольку значения σ при $x - x' = 0$ (или $\sigma_{\mathrm{M}} = 0$) несущественны для описания квантовых эффектов, метрический тензор и тензор кривизны оказываются несущественными при описании квантовых эффектов. Традиционное описание римановой геометрии, так же как и формализм мировой функции, развитый в [4] не работают в невырожденной геометрии с трубками вместо прямых. Это стало ясно после моей попытки применить методы дифференциальной геометрии к невырожденной геометрии [8].

В работе [6] рассматривается бескоординатное описание римановой геометрии, где мировая функция является инструментом этого описания. Такое описание порождает некоторое обобщение римановой геометрии. Однако, термин Т-геометрия не встречается в работе [6], и роль деформаций евклидовых геометрических объектов была мне не ясна, хотя я практически использовал деформации евклидовых прямых и плоскостей.

4 Т-геометрия как обобщение метрической геометрии

Через десять лет я вернулся к проблемам Т-геометрии, но теперь Т-геометрия рассматривалась как обобщение метрической геометрии, тогда как в работах [6, 7, 8] она рассматривалась как обобщение римановой геометрии. Какая разница между этими двумя подходами?

Метрическая геометрия задается на метрическом пространстве, которое описывается метрикой ρ. Метрическое пространство $M = \{\rho, \Omega\}$ есть множество Ω точек $P \in \Omega$ с метрикой $M = \rho$, заданной на $\Omega \times \Omega$

$$\rho : \quad \Omega \times \Omega \to D_+ \subset \mathbb{R} \tag{4.1}$$

$$\rho(P, P) = 0, \qquad \rho(P, Q) = \rho(Q, P), \qquad \forall P, Q, \qquad D_+ = [0, \infty) \tag{4.2}$$

$$\rho(P, Q) = 0, \quad \text{если и только если} \quad P = Q, \qquad \forall P, Q \in \Omega \tag{4.3}$$

$$\rho(P, Q) + \rho(Q, R) \geq \rho(P, R), \qquad \forall P, Q, R \in \Omega \tag{4.4}$$

Т-геометрия определяется на σ-пространстве $V = \{\sigma, \Omega\}$ с помощью соотношений

$$\sigma : \quad \Omega \times \Omega \to \mathbb{R} \tag{4.5}$$

$$\sigma(P, P) = 0, \qquad \sigma(P, Q) = \sigma(Q, P), \qquad \forall P, Q \in \Omega \tag{4.6}$$

Кажется, что метрическая геометрия есть частный случай Т-геометрии, когда $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2$, и метрика ограничена условиями (4.3), (4.4). Но это не так.

На самом деле, Т-геометрия оснащена принципом деформации, тогда как в метрической геометрии этого оснащения нет. Принцип деформации означает следующее. Каждый геометрический объект $\mathcal{O}$ и каждое соотношение $\mathcal{R}$ между геометрическими объектами собственно евклидовой геометрии может быть выражено в терминах евклидовой мировой функции σ_{E}. Чтобы получить выражения для $\mathcal{O}$ и $\mathcal{R}$ в произвольной Т-геометрии, достаточно заменить $\sigma_{\mathrm{E}} \to \sigma$ в евклидовых выражениях для $\mathcal{O}$ и $\mathcal{R}$. Разумеется, можно легко оснастить метрическое пространство принципом деформации, но это почему-то сделано не было.

Я думаю, что так получилось потому, что роль принципа деформации в построении геометрии была недооценена. В римановой геометрии используется деформация евклидова пространства, когда бесконечно малый евклидов интервал $dS_{\mathrm{E}}^2 = g_{\mathrm{E}ik}dx^i dx^k$ заменяется римановым интервалом $dS_{\mathrm{R}}^2 = g_{\mathrm{R}ik}dx^i dx^k$. Именно эта замена определяет существо полученной римановой геометрии. Свойства и особенности этой замены должны быть исследованы, если мы хотим изучить риманову геометрию. К сожалению, сравнение dS_{E}^2 и dS_{R}^2 очень трудно технически, потому что нужно сравнивать метрические тензоры и системы координат одновременно. В большинстве учебников по римановой геометрии главное внимание уделяется техническим деталям (отображениям, преобразованиям координат, ковариантному дифференцированию и другим средствам описания), тогда как принципальная процедура замены dS_{E}^2 интервалом dS_{R}^2 оказывается вне поля зрения. В результате большинство геометров полагают, что риманова геометрия это совокупность координат, метрических тензоров, ковариантных производных и других методов описания римановой геоетрии. Они бывают обескуражены, когда обнаруживают, что геометрия и методы описания геометрии – разные вещи.

Только этим обстоятельством можно объяснить тот факт, что строя метрическую геометрию, рассматривают только метрику и забывают о принципе деформации. Вместо принципа деформации используются дополнительные ограничения (4.3), (4.4). Используя метрическое определение кривой (3.9) и ограничения (4.3), (4.4), представляющие одномерный характер отрезков $\mathcal{T}_{[P_iP_k]}$, в метрической геометрии удается ввести понятие одномерной кривой. Кратчайшая линия между двумя точками может рассматриваться как прямая линия (кратчайшая) в метрическом пространстве. Но уже введение двумерной плоскости в метрическом прстранстве встречает трудности. В результате метрическая геометрия оказывается очень бедной (мало содержательной) геометрией. К. Менгер [9] и Л.М. Блюменталь [10] пытались создать дистантную геометрию, которая представляет собой метрическую геометрию без ограничений (4.3), (4.4). Они не использовали принципа деформации. В результате они были вынуждены существенно использовать топологическое определение кривой (3.10), и дистантная геометрия перестала быть чисто дистантной геометрией, поскольку она использовала неметрические понятия.

Т-геометрия существенно использует принцип деформации, и она не нуждается в ограничениях типа (4.3), (4.4). Вначале принцип деформации в Т-геометрии был применен к n-мерным плоскостям ($n = 1, 2, ...$) [11]. В евклидовой геометрии n-мерная плоскость может быть введена как линейная оболочка n линейно независимых векторов. Поскольку условия линейной независимости в евклидовой геометрии могут быть записаны в виде (3.2), n-мерная плоскость $\mathcal{T}_{\mathcal{P}^n}$, определяемая $n+1$ точками $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$, может быть представлена как множество точек

$$\mathcal{T}_{\mathcal{P}^n} = \mathcal{T}\left(\mathcal{P}^n\right) = \left\{R | F_{n+1}\left(\mathcal{P}^n, R\right) = 0\right\}, \qquad F_n\left(\mathcal{P}^n\right) \neq 0 \tag{4.7}$$

где F_n есть определитель Грама, определенный соотношением (3.2). Поскольку определение (4.7) содержит только мировую функцию, соотношение (4.7) может быть распространено на произвольное σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$, и это есть применение принципа деформации к евклидовым плоскостям. Далее действие принципа деформации было распространено на все геометрические объекты [12], и стало ясно, что топологическое понятие кривой (3.10) не нужно при построении геометрии.

Применение топологического определения кривой (3.10) с необходимостью ведет к утверждению о транзитивности свойства параллельности. В невырожденной Т-геометрии свойство параллельности, вообще говоря, интранзитивно. Рассматривая риманову геометрию, как частный случай Т-геометрии, мы можем достичь только локальной транзитивности свойства параллельности. Другими словами, свойство параллельности транзитивно только для вектоов, имеющих общее начало. Транзитивность параллельности не может быть достигнута для векторов в разных точках пространства. Чтобы устранить несовместимость между требованием транзитивности, которое следует из определения кривой (3.10) и невозможностью реализовать это свойство для векторов в разных точках пространства, традиционная риманова геометрия вынуждена отказаться от абсолютного параллелизма векторов, оставив только параллелизм в одной и той же точке, где транзитивность параллелизма возможна.

5 Заключительные замечания

Таким образом, кризис в науке есть научно-социальное явление, где научный и социальный аспекты одинаково важны. Источником кризиса является ошибка в основных положениях теории, которую не могут обнаружить в течение длительного времени. В результате ошибка превращается в предубеждение. Но ошибка так же как и предубеждение еще не есть кризис. (Ошибки являются естественным продуктом человеческой деятельности. Они должны быть обнаружены и исправлены.) Кризис возникает тогда, когда научное сообщество не хочет принимать новую версию теории, которая появляется после исправления ошибки (или предубеждения). Обычно длительное существование ошибочной теории связано с существованием птолемеевского подхода к теории и с птолемеевским критерием оценки это теории. Ньютоновский подход не допускает длительного существования ошибочной теории.

Описанный кризис в геометрии не является первым кризисом и, по-видимому, не является последним. В такой ситуации могут быть полезны некоторые рекомендации, как преодолевать кризис в существующей концепции. Мой совет научному сообществу довольно прост. Если в фундаментальной теории наблюдаются кризисные явления и существует новая теория, претендующая на исправление ошибки, то новую теорию следует оценивать, руководствуясь ньютоновским критерием, а не птолемеевским. Следует так же иметь в виду то простое обстоятельство, что некоторые следствия новой теории могут обесценивать результаты, полученные на основе существующей ошибочной теории. (В данном случае могут быть обесценены некоторые результаты обоснования геометрии на основе топологических понятий). Авторы таких работ склонны не принимать новую концепцию.

Мне трудно давать советы исследователям, которые рискнут искать будущие ошибки в основных положениях будущей фундаментальной теории, потому что я не знаю как мне удалось найти ошибки и преодолеть существующие предубеждения. Во всяком случае мои представления о том, почему мне удалось найти ошибки и построить Т-геометрию, субъективны и довольно туманны. Тем не менее, я попытаюсь сформулировать главные обстоятельства, которые позволили построить Т-геометрию.

Во-первых, я следовал ньютоновской исследовательской стратегии: "Hypotheses non fingo" и оценивал свои результаты в соответствии с ньютоновскими критериями. Во-вторых, будучи физиком, я был свободен от математических и геометрических предубеждений, что не мешало мне иметь свои собственные физические предубеждения. Кроме того, я рассматривал геометрию только как инструмент для исследования пространства-времени и физических явлений в нем. Последнее обстоятельство помогало мне преодолевать негативное отношение профессиональных геометров к моим работам по геометрии. (Преодолевать негативное отношение физиков к моим работам по физике было труднее). Наконец, я старался рассматривать возражения моих оппонентов (которые во многих случаях были несправедливы) как проявление объективного процесса познания в стадии кризиса. Это помогало воспринимать наличие возражений не в личном плане, а как объективную необходимость, обусловленную кризисом.

Список литературы

[1] С.П. Новиков, Вторая половина XX века и ее итог: кризис физико-математического сообщества в России и на Западе. *Труды Института истории естественных наук и технологии*, 2002. (in Russian).

[2] Yu. A. Rylov, Coordinateless description and deformation principle as a foundations of physical geometry. (Available at http://arXiv.org/ abs/math.GM/ 0312160)

[3] Yu. A. Rylov, Model conception of quantum phenomena: logical structure and investigation methods. (In preparation, available at http://arXiv.org/abs /physics/0310050, v2).

[4] Ю.А. Рылов, О возможности описания риманова пространства в терминах конечного интервала. *Известия ВУЗов, Математика.* No.3(28), 131-142, (1962).

[5] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1960.

[6] Yu. A. Rylov, Extremal properties of Synge's world function and discrete geometry. *J. Math. Phys.* **31**, 2876-2890, (1990).

[7] Yu. A. Rylov, Non-Riemannian model of space-time responsible for quantum effects. *J. Math. Phys.* **32**, 2092-2098, (1991).

[8] Yu.A. Rylov, Distorted Riemannian space and technique of differential geometry. *J.Math. Phys.* **33**, 4220-4224, (1992)

[9] K. Menger, Untersuchen über allgemeine Metrik, *Mathematische Annalen,* **100**, 75-113, (1928).

[10] L. M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Oxford, Clarendon Press, 1953.

[11] Ю.А. Рылов, Метрическое пространство: классификация конечных подпространств вместо ограничений на метрику. *Труды по анализу и геометрии*, Новосибирск, Издательство Математического института, 2000. стр. 481-504. English version: (Available at http://arXiv.org/abs/math.MG/9905111).

[12] Yu.A. Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.* **30**, iss. 12, 733-760, (2002), (available at http://arXiv.org/abs/math.MG/0103002).